Université de Provence

Analyse Fonctionnelle - Master 1

Feuille 3 : Espaces de Hilbert

Exercice 1 *Soit H un espace de Hilbert de dimension infinie et $\mathcal{B} = \{e_k,\ k \in \mathbb{N}\}$ une famille orthonormée. Montrer que $\mathcal{B}$ est un fermé borné qui n'est pas compact.*

Exercice 2 *Soit X un convexe fermé dans un espace de Hilbert H. On note $p_X : H \to H$ la projection orthogonale sur X. Montrer que p_X est une application linéaire ssi X est un sev de H.*

Exercice 3 *Soit F un sev d'un espace de Hilbert H. Montrer que $\left(\overline{F}\right)^{\perp} = F^{\perp}$.*

Exercice 4 *Soit H un espace de Hilbert.*

1) *Montrer que, pour tout $x \in H$,*

$$\|x\| = \sup_{y \in H,\ \|y\| \leq 1} |\langle x, y\rangle| \,.$$

2) *Soit F un sous-espace de H. Montrer que F est dense dans H si, et seulement si, tout élément $\phi \in H'$ nul sur F est nul sur H.*

Exercice 5 *Soit $H := \{x = (x_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \,/\, \sum_n |x_n|^2 < +\infty\}$ muni de*

$$\langle x, y\rangle := \sum_{n \in \mathbb{N}} x_n \overline{y_n}.$$

1) Vérifier que H est un espace de Hilbert.
2) Soit $c \in H$. Montrer que le cube de Hilbert,

$$Q_c := \{x \in H \,/\, |x_n| \leq |c_n| \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}\}$$

est compact.

Exercice 6 *Soit $\mathcal{P}$ l'espace des fonctions polynômiales sur $\mathbb{R}$ muni du produit scalaire*

$$\langle f, g\rangle := \int_{\mathbb{R}} f(t) g(t) e^{-t^2} dt.$$

1) Soit

$$f_n(x) = e^{-2x} - e^{-x} p_n(x), \quad p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-x)^k}{k!}.$$

Montrer que la suite f_n converge uniformément vers 0 sur $\mathbb{R}_+$ (on pourra calculer la dérivée de f_n et en déduire une majoration du module de f_n).
2) En déduire que $\mathcal{P}$ n'est pas complet pour la distance induite par le produit scalaire.
3) Montrer qu'il existe un unique polynôme P_n de degré n tel que

$$\frac{d^n(e^{-x^2})}{dx^n} = P_n(x)e^{-x^2}.$$

4) Vérifier que la famille $\{P_n\}$ est orthogonale.
5) Montrer que le polynôme P_n admet n racines réelles distinctes.

Exercice 7 *On désigne par $\mathcal{C} = \mathcal{C}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ l'espace des fonctions continues 2π-périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$. Si $f \in \mathcal{C}$ et $n \in \mathbb{Z}$, on pose*

$$\widehat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-int}dt.$$

(a) *Montrer la densité des polynômes trigonométriques dans $\mathcal{C}$.*

(b) *En utilisant cette densité, montrer que $\widehat{f}(n) \to 0$ quand $n \to \pm\infty$.*

(c) *Soit c_0, l'espace des suites complexes $(z_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ telles que $z_n \to 0$ quand $n \to \pm\infty$, muni de la norme du sup. Montrer que l'application $\psi : \ f \mapsto \widehat{f}$ est une application linéaire continue et injective de $\mathcal{C}$ dans c_0.*

(d) *Soit $N \in \mathbb{N}$. On pose, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $D_N(t) = \sum_{|k|\leq N} e^{ikt}$.*
Montrer que $D_N(t) = \frac{\sin((N+\frac{1}{2})t)}{\sin\frac{t}{2}}$ puis $\lim_{N\to+\infty} \int_{-\pi}^{\pi} |D_N(t)|\, dt = +\infty$.

(e) *Calculer $\widehat{D}_N(k)$, $(N, k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}$. En déduire que $\psi : \ \mathcal{C} \to c_0$ n'est pas surjective.*

Exercice 8 *Soit T un endomorphisme continu d'un Hilbert. Montrer que*
1) $Ker\, T = (Im\, T^*)^\perp$ et $Ker\, T^* = (Im\, T)^\perp$.
2) $(Ker\, T)^\perp = \overline{Im\, T^*}$ et $(Ker\, T^*)^\perp = \overline{Im\, T}$.

Exercice 9 *Soit $\lambda = (\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^\infty(\mathbb{C})$ une suite bornée. On considère*

$$\begin{array}{rcl} A_\lambda : \ell^2(\mathbb{C}) & \to & \ell^2(\mathbb{C}) \\ x & \mapsto & A_\lambda x := (\lambda_n x_n) \end{array}$$

1) Montrer que A_λ est un endomorphisme continu et calculer sa norme.
2) A quelle condition A_λ est-il autoadjoint ? normal ? unitaire ?
3) Calculer les valeurs propres de A_λ ainsi que ses sous-espaces propres.
4) Montrer que si A_λ est compact alors $\lambda_n \to 0$.
5) Montrer l'implication inverse. On pourra utiliser le résultat suivant : l'ensemble des opérateurs compacts d'un espace de Banach E dans un Banach F est un fermé de $\mathcal{L}(E, F)$.