Université Aix-Marseille

Analyse Fonctionnelle - Master 1

Feuille 4 : Equicontinuité, semi-normes

Exercice 1 *1) Montrer qu'une fonction continue sur un espace compact est uniformément continue (Heine). On pourra raisonner par l'absurde.*
2) Montrer qu'une famille équicontinue sur un espace métrique compact est uniformément équicontinue.

Exercice 2 *Soit Lip* $\subset E = \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ *le sous-espace des fonctions Lipschitziennes. On note* $Lip(C)$ *le sous-ensemble des fonctions* f *telles que*

$$|f(x) - f(y)| \leq C|x - y|, \ \forall x, y \in [0,1].$$

1) Montrer que $Lip(C)$ *est uniformément équicontinue.*

2) Montrer que $Lip(C)$ *est fermé dans* (E, N_∞).

3) Montrer que si $(f_n) \in Lip(C)^{\mathbb{N}}$ *est une suite qui converge simplement vers une fonction* f*, alors* $f \in Lip(C)$ *et* f_n *converge uniformément vers* f *sur* $[0,1]$.

4) Montrer que Lip est d'intérieur vide dans (E, N_∞).

Exercice 3 *Soit* p *une semi-norme sur un espace vectoriel* E*. Soit* $r > 0$*. Montrer que* p *est une norme si et seulement si* $B(0,r)$ *ne contient aucun sous-espace vectoriel de* E.

Exercice 4 *Soit* $I \subset \mathbb{R}$ *un intervalle ouvert et* $E = \mathcal{C}^0(I,\mathbb{R})$*. On note* K_j *une suite exhaustive de compacts de* I*,* $p_j(f) := \sup_{x \in K_j} |f_j(x)|$ *et on pose*

$$d(f,g) := \sum_{j \geq 0} 2^{-j} \frac{p_j(f-g)}{1 + p_j(f-g)}.$$

Montrer que d *est une distance sur* E *qui en fait un espace complet.*

Exercice 5 *Soit* $\mathcal{O}(\mathbb{C})$ *l'ensemble des fonctions entières (i.e. holomorphes sur* $\mathbb{C}$*), muni de la topologie de la convergence uniforme sur les compacts.*
1) Montrer que c'est un espace de Fréchet.

2) Montrer que les compacts de $\mathcal{O}(\mathbb{C})$ *sont les fermés bornés.*

3) En déduire que cet espace n'est pas normable.