

Analyse Fonctionnelle - Master 1

Feuille 5 : Théorèmes de Banach et Hahn-Banach

Exercice 1 (Théorème du graphe fermé)

1) Soit F un espace topologique. Montrer que F est séparé ssi la diagonale Δ de $F \times F$ est fermé.

2) Soit u une application continue de E dans F séparé. Alors le graphe

$$G(u) = \{(x, y) \in E \times F, y = u(x)\}$$

est fermé dans $E \times F$. On pourra considérer l'application $u \times \text{Id} : E \times F \rightarrow F \times F$ qui à (x, y) associe $(u(x), y)$.

3) En considérant le cas d'une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, montrer que la réciproque n'est pas vraie en général.

4) Le théorème du graphe fermé dit que la réciproque est vraie si E et F sont des Banach et u est linéaire : Soit $u : E \rightarrow F$ linéaire entre Banach. Alors u est continue ssi son graphe est fermé. On utilisera le théorème de l'image ouverte en considérant la projection suivant la 1ère composante de $E \times F$ dans E .

Exercice 2 Soit E un espace muni de deux normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ telles que $(E, \|\cdot\|_1)$ et $(E, \|\cdot\|_2)$ soient des espaces de Banach. On suppose que l'une des normes domine l'autre, par exemple :

$$\exists C > 0, \quad \forall x \in E, \quad \|x\|_1 \leq C\|x\|_2.$$

Montrer que les deux normes sont équivalentes.

Exercice 3 Soit $\mathcal{C}$ un sous-ensemble convexe ouvert d'un espace de Banach E avec $0 \in \mathcal{C}$. Soit $x \in E$. On note $J(x) := \inf\{r > 0; x/r \in \mathcal{C}\}$ sa jauge.

1) Montrer que pour tout $x \in E$, $J(x)$ est fini.

2) Montrer que J est une sous-norme sur E , i.e.

$$\forall (x, y, \lambda) \in E^2 \times \mathbb{R}^+, \quad J(\lambda x) = \lambda J(x) \quad \text{et} \quad J(x + y) \leq J(x) + J(y).$$

3) Montrer qu'il existe $M > 0$ tel que $0 \leq J(x) \leq M\|x\|$, $\forall x \in E$ (donc J est continue).

4) Montrer que $\mathcal{C} = \{x \in E; J(x) < 1\}$.

Exercice 4 Soit (E, N) un espace de Banach de dimension infinie et $\mathcal{B} = \{e_n, n \in \mathbb{N}\} \subset E$ une famille (algébriquement) libre.

1) Montrer que $F_n := \text{Vect}\{e_j / 0 \leq j \leq n\}$ est un fermé d'intérieur vide.

2) En déduire que E n'admet pas de base (algébrique) dénombrable. Qu'en déduisez vous pour $\mathcal{P}$, l'ensemble des fonctions polynômiales sur $[0, 1]$?

Exercice 5

- 1) Montrer qu'une application linéaire $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est ouverte ssi $f(1) \neq 0$.
- 2) Montrer que $h : x \in \mathbb{R} \mapsto x^2 \in \mathbb{R}$ n'est pas ouverte.
- 3) Montrer que $f : z \in \mathbb{C} \mapsto z^2 \in \mathbb{C}$ est ouverte. On pourra utiliser le théorème d'inversion locale pour les fonctions de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$.

Exercice 6 Soit $f : E \rightarrow F$ une application linéaire entre deux espaces vectoriels normés.

- 1) Montrer que f est ouverte ssi elle est ouverte à l'origine.
- 2) Montrer que si f est ouverte alors elle est surjective.
- 3) On considère l'identité de $\mathcal{C}_{\mathbb{R}}^1([0, 1])$ muni de la norme $\|f\| = \|f\|_{\infty} + \|f'\|_{\infty}$ dans $\mathcal{C}_{\mathbb{R}}^1([0, 1])$ muni de la norme $\|f\|_{\infty}$. Vérifier qu'il s'agit d'une application linéaire surjective continue qui n'est pas ouverte. Est-ce en contradiction avec le théorème de l'application ouverte ?

Exercice 7 On dit qu'un sous-ensemble d'un espace topologique X est rare si son adhérence est sans point intérieur. Un sous-ensemble de X est dit maigre s'il est réunion dénombrable de sous-ensembles rares. Montrer que $L^2 = L^2([0, 1], \mathbb{R})$ est maigre dans $L^1 = L^1([0, 1], \mathbb{R})$ muni de la norme L^1 habituelle, en considérant les ensembles

$$I_n = \{f \in L^2, \int_0^1 |f(t)|^2 dt \leq n\}, \quad n \geq 1,$$

dont on montrera qu'ils sont :

- a) sans point intérieur
- b) fermés : pour cela, on rappelle que si $(f_n)_n$ est une suite qui tend vers f dans L^1 , alors il existe une sous-suite de $(f_n)_n$ qui tend vers f presque partout. On rappelle aussi l'inégalité de Fatou pour une suite de fonctions f_n mesurables positives,

$$\int \liminf f_n(t) dt \leq \liminf \int f_n(t) dt.$$

Exercice 8 Soit E un sous-espace fermé de $L^1([0, 1])$. On suppose que, pour tout $f \in E$, il existe $p > 1$ tel que $f \in L^p([0, 1])$. Montrer qu'il existe $p > 1$ tel que $E \subset L^p([0, 1])$. On pourra définir

$$E_{k,n} = \left\{ f \in E; \int_0^1 |f|^{1+\frac{1}{k}} \leq n \right\}$$

et montrer que $E_{k,n}$ est fermé dans L^1 .

Exercice 9 1) Soit $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p, q \leq +\infty$ vérifiant $p^{-1} + q^{-1} = 1$. Pour toute $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$, on définit $T(g) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)g(x)dx$. Montrer que T est continue sur $L^p(\mathbb{R}^n)$ et que $\|T\| = \|f\|_p$.

2) Soit f une fonction mesurable sur $\mathbb{R}^n$ et $1 \leq p, q$ tels que $p^{-1} + q^{-1} = 1$. On suppose que, pour toute $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$, $fg \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Montrer que $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ (tronquer f et utiliser la question précédente).

Exercice 10 Montrer que l'ensemble des fonctions Lipschitziennes est maigre dans $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ (muni de la norme sup).

Exercice 11 On note $\mathcal{C}([0, 1])$ l'espace des fonctions continues sur $[0, 1]$ à valeurs réelles, muni de la norme du sup. On rappelle le résultat suivant que l'on pourra utiliser dans cet exercice :

Soit $(f_n)_{n \geq 0}$ une suite de fonctions de $\mathcal{C}([0, 1])$, dérivables sur $[0, 1]$, telles que $(f'_n)_{n \geq 0}$ converge uniformément sur $[0, 1]$ vers une fonction g . Alors, si la suite $(f_n)_{n \geq 0}$ converge simplement vers une fonction f , la convergence est uniforme sur $[0, 1]$, f est dérivable et $f' = g$.

Soit E un sous-espace fermé de $\mathcal{C}([0, 1])$. On suppose que toutes les fonctions appartenant à E sont de classe C^1 .

- 1) Montrer que l'application $\varphi : E \rightarrow \mathcal{C}([0, 1])$ telle que $\varphi(f) = f'$ est continue. On pourra utiliser le théorème du graphe fermé.
- 2) Montrer que la boule unité fermée de E est compacte dans $\mathcal{C}([0, 1])$. On utilisera le théorème d'Ascoli.
- 3) En déduire que E est de dimension finie.

Exercice 12 Soit E un Banach et $\varphi : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ une application bilinéaire.

1) Montrer l'équivalence de :

- a) φ est continue.
- b) φ est bornée sur les bornés.
- c) Il existe $C > 0$ telle que

$$|\varphi(x, y)| \leq CN(x)N(y), \quad \forall x, y \in E.$$

- 2) Montrer que φ est continue ssi elle est séparément continue.
- 3) Donner un exemple d'une application (non linéaire) $\varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ séparément continue qui n'est pas continue.
- 4) Soit $\mathcal{P}$ l'espace des polynômes à valeurs réelles sur $[0, 1]$, muni de la norme L^1 . Prouver que l'application

$$\varphi(p, q) = \int_0^1 p(t)q(t)dt$$

est une forme bilinéaire séparément continue qui n'est pas continue. On rappelle que $\mathcal{P}$ est dense dans $L^1([0, 1])$.

Exercice 13 Soit E un espace de Banach. Soit $F \subset E$ un sev. On dit que F admet un supplémentaire topologique G si F et G sont des supplémentaires algébriques et les projections $\pi_F : E \rightarrow F$, $\pi_G : E \rightarrow G$ sont continues.

- 1) Montrer que si F admet un supplémentaire topologique, alors F est fermé.
- 2) Montrer que si $\dim F < +\infty$ alors F admet un supplémentaire topologique. On pourra considérer une base de F et les projections sur les coordonnées de cette base.

Exercice 14 Soit E un espace de Banach. Soit M (resp. N) un sous-espace vectoriel de E (resp. E^*). On définit

$$M^\perp := \{f \in E^*, f(x) = 0, \forall x \in M\} \text{ et } N^\perp := \{x \in E, f(x) = 0, \forall f \in N\}.$$

1) Montrer que $(M^\perp)^\perp = \overline{M}$.

2) Montrer que $(N^\perp)^\perp \supset \overline{N}$, avec égalité si E est réflexif

3) Montrer que si $E = \ell^1(\mathbb{R})$ et si $N = c_0$, l'espace des suites qui tendent vers 0, alors l'inclusion est stricte.

Exercice 15 Soit H un espace de Hilbert sur $\mathbb{C}$ et T un endomorphisme de H .

1) Montrer l'identité (qui généralise l'identité de polarisation) :

$$\forall x, y \in H, \quad (Tx, y) = \frac{1}{4} \sum_{n=0}^3 i^n (T(x + i^n y), x + i^n y).$$

2) En déduire que T est nul ssi

$$\forall x \in H, \quad (Tx, x) = 0,$$

et montrer par un exemple que l'équivalence est fausse si H est un Hilbert réel.

3) On suppose T continu. Montrer que T est hermitien (i.e. $\forall x, y \in H, (Tx, y) = (x, Ty)$) ssi

$$\forall x \in H, \quad (Tx, x) \in \mathbb{R},$$

en particulier si T est positif alors T est hermitien (c'est faux sur un Hilbert réel). On pourra utiliser l'adjoint T^* de T qui est bien défini puisque T continu.

4) (Théorème de Hellinger-Toeplitz) Soit H Hilbert sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et T hermitien sur H . Montrer que T est continu. On pourra utiliser le théorème du graphe fermé.

Exercice 16 Soit E espace normé sur $\mathbb{R}$ et F un sous-espace de E qui ne soit pas dense dans E . Alors il existe $f \in E^*, f \neq 0$, telle que $f = 0$ sur F .

Exercice 17 Soit $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ une fonction entière telle que $f^k(0) \neq 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Soit $(\alpha_i) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ une suite bornée de nombres complexes deux à deux distincts. On pose $g_i(z) = f(\alpha_i z)$ et

$$G := \text{Vect}\{g_i, i \in \mathbb{N}\}.$$

Montrer que G est dense dans $\mathcal{O}(\mathbb{C})$. On pourra utiliser le théorème de Hahn-Banach et on "rappelle" que le dual topologique de $\mathcal{O}(\mathbb{C})$ est l'ensemble des mesures de Borel à support compact ds $\mathbb{C}$.

Exercice 18 (Lemme des noyaux) Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, et soient n formes linéaires $u_1, u_2, \dots, u_n$ sur E . Toute forme linéaire u qui s'annule sur l'intersection des noyaux de $u_1, \dots, u_n$ est une combinaison linéaire de $u_1, \dots, u_n$. On pourra considérer l'application

$$\phi = (u_1, \dots, u_n) : E \rightarrow \mathbb{K}^n$$

et montrer que l'application $f : \text{Im}(\phi) \rightarrow \mathbb{K}$ qui à $(u_1(x), \dots, u_n(x))$ associe $u(x)$ est bien définie.