Principaux résultats du cours d'analyse fonctionnelle

1 Espaces vectoriels normés, Appli. linéaires continues

Théorème 1.1. *Soient E et F des espaces vectoriels normés et $f : E \to F$ une application linéaire. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*
1) f est continue
2) f est bornée sur les bornés de E
3) $\exists k > 0, \forall x \in E, \quad \|f(x)\| \leq k\|x\| \quad$ (f est lipschitzienne)

Théorème 1.2. *Sur un e.v.n. de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.*

Théorème 1.3 (Riesz)**.** *Un e.v.n. est de dimension finie ssi il est localement compact, ou de manière équivalente, sa boule unité fermée est compacte.*

Rappel Un espace topologique est localement compact si tout point de l'espace admet un voisinage compact.

2 Espaces complets, Espaces de Hilbert et de Banach

Définition 2.1. Un espace de Banach est un e.v.n. complet. Un espace de Hilbert H est un espace de Banach muni d'un produit scalaire (x, y), tel que la norme soit donnée par ce produit scalaire, c'est à dire

$$\forall x \in H, \quad \|x\|^2 = (x, x).$$

Proposition 2.2. *Soit E et F des e.v.n. avec F complet. Alors $\mathcal{L}(E, F)$ est complet.*

Corollaire 2.3. *Le corps de base K étant complet, le dual d'un e.v.n. est toujours complet.*

Proposition 2.4. *Soit E et F des e.v.n. avec E compact et F complet. Alors $\mathcal{C}(E, F)$ muni de la norme du sup est complet.*

Théorème 2.5 (Projection)**.** *Soit E Hilbert et X une partie convexe fermée de E. Alors*
1) Tout point $x \in E$ admet une unique projection sur X.
2) La projection x' est caractérisée par

$$\forall u \in X, \quad \mathrm{Re}\,(x - x', u - x') \leq 0.$$

3) $\forall x, y \in E, \quad \|x' - y'\| \leq \|x - y\|$.

Corollaire 2.6. *Soit X un s.e.v. fermé de E Hilbert, et $x \in E$. La projection x' de x sur X est le seul point de X tel que $(x - x') \perp X$.*

Proposition 2.7. *Soit X une partie de E Hilbert. Alors $X^\perp$ est un s.e.v. fermé de E.*

Proposition 2.8. *Soit X un sous-espace vectoriel fermé de E Hilbert. Alors $E = X \oplus X^\perp$.*

3 Dual d'un Hilbert, bases hilbertiennes

Théorème 3.1 (Riesz)**.** *Soit E Hilbert et E^* son dual.*
1) $\forall a \in E$, la forme $\varphi_a : x \mapsto (x, a)$ est continue de norme $\|a\|$.
2) L'application $a \mapsto \varphi_a$ est un isomorphisme semi-linéaire de E sur E^*.

Remarque : Le dual E^* est un espace de Hilbert muni du produit scalaire

$$(\varphi_x, \varphi_y) = (y, x).$$

Définition 3.2. Une base hilbertienne (dénombrable) d'un Hilbert H est une suite d'éléments $(e_n)_{n\geq 0}$ de H telle que :
1) $\forall n, m, \quad (e_n, e_m) = \delta_{n,m}$,
2) L'espace vectoriel engendré par les (e_n) est dense dans H (on dit que la famille est totale).

Alors on a :

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} (u, e_n) e_n, \quad \|u\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |(u, e_n)|^2 \quad \text{(Relation de Parceval).}$$

Remarque : Si la famille (e_n) ne vérifie que 1), on a un système orthogonal et alors

$$\sum_{n=0}^{\infty} |(u, e_n)|^2 \leq \|u\|^2 \quad \text{(inégalité de Bessel).}$$

Théorème 3.3. *Tout espace de Hilbert séparable admet une base hilbertienne dénombrable.*

Remarque : Dans un Hilbert non séparable, on peut prouver l'existence d'une base $(e_i)_{i\in I}$ non dénombrable (utilise le lemme de Zorn et la notion de familles sommables).

Définition 3.4. Un opérateur $A \in \mathcal{L}(E, F)$ est dit compact si l'image de tout borné est relativement compacte (c'est à dire d'adhérence compacte).

4 Théorème de Stone-Weierstrass

Soit X un espace compact. Ce théorème donne des conditions pour qu'un sous-ensemble de l'espace $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ soit dense.

Théorème 4.1 (Stone-Weierstrass)**.** *Soit X un espace compact et soit A une sous-algèbre de $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$, l'algèbre des fonctions continues de X dans $\mathbb{R}$ munie de la norme du sup. Si*
1) A sépare les points de X
2) $\forall x \in X, \exists f \in A, f(x) \neq 0$.
Alors A est dense dans $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$.

On peut aussi considérer l'algèbre des fonctions continues à valeurs complexes.

Théorème 4.2. *Soit X un espace compact et soit A une sous-algèbre de $\mathcal{C}(X, \mathbb{C})$. Si*
1) A sépare les points de X,
2) $\forall x \in X, \exists f \in A, f(x) \neq 0$,
3) $\forall f \in A, \overline{f} \in A$ (A est stable par conjugaison),
Alors A est dense dans $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$.

Application : Soit $\mathbb{T}$ le cercle unité. La famille des exponentielles e^{int}, $n \in \mathbb{Z}$, est totale dans l'espace de Hilbert $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{T})$, complété de $\mathcal{C}(\mathbb{T}, \mathbb{C})$ pour la norme issue du produit scalaire

$$(f, g) = \int_0^{2\pi} f(t)\overline{g(t)}dt.$$

Comme la famille des e^{int} est orthonormée pour ce produit scalaire, on obtient ainsi une base hilbertienne de $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{T})$.

5 Théorème d'Ascoli

Soit X un espace compact. Le théorème d'Ascoli donne des conditions pour qu'un sous-ensemble de l'espace de Banach $\mathcal{C}(X, \mathbb{C})$ soit relativement compact.

Définition 5.1. Soit H un ensemble d'applications d'un espace topologique X dans un espace métrique muni d'une distance d. On dit que H est équicontinue au point $a \in X$ si

$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists U \in \mathcal{V}_a, \quad \forall f \in H, \quad \forall x \in U, \quad d(f(a), f(x)) \leq \epsilon.$$

On dit que l'ensemble H est équicontinue si il est équicontinue en tout point de X.

Théorème 5.2. *Soit $(f_n)_n$ une suite d'applications équicontinues d'un espace X dans un espace Y. On suppose que pour tout $x \in X$, $f_n(x)$ admet une limite $f(x)$ quand $n \to \infty$. Alors la fonction f est continue et la convergence est uniforme sur tout compact de X.*

Théorème 5.3 (Ascoli)**.** *Soit X espace compact et $\mathcal{C}(X)$ l'espace de Banach des fonctions continues sur X à valeurs complexes, muni de la norme du sup. Alors, un sous-ensemble H de $\mathcal{C}(X)$ est relativement compact ssi*
1) H est équicontinue
2) H est bornée dans $\mathcal{C}(X)$.

Remarque : On peut remplacer la condition 2) par la condition locale :

$$\forall x \in X, \quad \exists M_x > 0, \quad \forall f \in H, \quad |f(x)| \leq M_x.$$

6 Semi-normes et espaces de fonctions

Si X un espace non compact, on ne peut pas utiliser la norme du sup pour mettre une topologie sur l'espace $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$, et la même difficulté apparait pour d'autres espaces de fonctions. Il faut alors utiliser des familles de semi-normes.

Définition 6.1. Une semi-norme p sur un espace vectoriel E sur K est une application de E dans $\mathbb{R}_+$ telle que
1) $\forall \lambda \in K, \forall x \in E, \quad p(\lambda x) = |\lambda| p(x)$,
2) $\forall x, y \in E, \quad p(x+y) \leq p(x) + p(y)$.

Remarque : Une semi-norme p est une norme sur E ssi la boule $B(0,1)$ ne contient pas de s.e.v. de dimension 1.

Définition 6.2. Soit $P = (p_i)_{i \in I}$ une famille de semi-normes sur E. Une P-boule centrée en $a \in E$ est un ensemble de la forme

$$\{x \in E, \forall j \leq k, p_j(x-a) < r_j\},$$

où les p_j appartiennent à P et les r_j sont strictement positifs.

Définition 6.3. La P-topologie est la topologie pour laquelle, pour tout $a \in E$, les P-boules de centre a forment une base de voisinages en a (On vérifie que cette définition définit bien une topologie).

Proposition 6.4. *La P-topologie sur un e.v. E est compatible avec la structure d'e.v. Elle est séparée ssi*

$$\forall x \neq 0, \quad \exists p \in P, \quad p(x) \neq 0.$$

Les semi-normes sont continues pour la P-topologie et une P-boule est un ensemble ouvert convexe.

Théorème 6.5. *Soit P une famille de semi-normes dénombrable sur E telle que la P-topologie soit séparée. Alors la P-topologie est métrisable, par exemple à l'aide de la distance*

$$d(x,y) = \sup_{k \geq 1} (\inf(\frac{1}{k}, p_k(x-y))),$$

qui est invariante par translation.
Remarque : *Une suite x_n converge vers a au sens de cette distance ssi*

$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists N, \quad \forall n \geq N, \quad \forall k \leq 1/\epsilon, \quad p_k(x_n - a) \leq \epsilon,$$

ce qui revient à dire que, pour tout k, $p_k(x_n - a)$ tend vers 0.
Une suite x_n est de Cauchy pour d ssi

$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists N, \quad \forall n, m \geq N, \quad \forall k \leq 1/\epsilon, \quad p_k(x_n - x_m) \leq \epsilon,$$

ce qui revient à dire que, pour tout k, $p_k(x_n - x_m)$ tend vers 0 quand n et m tendent vers l'infini.

Définition 6.6. Un espace de Fréchet est un e.v. muni d'une P-topologie métrisable, complet pour la distance.

Exemple : Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, ouvert et $(K_n)_n$ une suite exhaustive de compacts de Ω, de sorte que

$$\Omega = \cup_{n\geq 1} K_n, \quad K_n \subset \overset{\circ}{K}_{n+1}.$$

On considère les semi-normes sur $\mathcal{C}(\Omega)$:

$$p_n(f) = \sup_{K_n} |f|.$$

Alors l'espace $\mathcal{C}(\Omega)$ muni de la P-topologie correspondante est un espace de Fréchet.

7 Les théorèmes de Banach

Ce sont des résultats qui exploitent la complétude des espaces de Banach.

Théorème 7.1 (Baire)**.** *Soit X un espace métrique complet. L'intersection d'un nombre dénombrable d'ouverts denses est dense.*

Théorème 7.2 (Banach-Steinhaus)**.** *Soient E un Banach, F un e.v. normé et $H \subset \mathcal{L}(E,F)$ tels que*

$$\forall x \in E, \quad \exists M_x \geq 0, \quad \sup_{u\in H} \|u(x)\| \leq M_x.$$

Alors

$$\exists M \geq 0, \quad \sup_{u\in H} \|u\| \leq M.$$

Autrement dit, pour une famille d'applications linéaires continues entre espaces de Banach E et F, la bornitude locale entraine la bornitude uniforme sur la boule de E.

Corollaire 7.3. *Soit $(u_n)_n$ une suite d'applications linéaires de $\mathcal{L}(E,F)$, E un Banach et F un e.v. normé. On suppose que u_n admet une limite simple u. Alors*
1) u est linéaire continue.
2) les normes des u_n sont bornées.
3) la convergence de u_n vers u est uniforme sur les compacts de E.

Théorème 7.4 (de l'image ouverte)**.** *Soient E et F Banach, et T une application de $\mathcal{L}(E,F)$ surjective. Alors*

$$\exists C > 0, \quad B_F(0,C) \subset T(B_E(0,1)).$$

Remarque : Cela revient à dire que T est une application ouverte (transforme les ouverts en ouverts). Noter qu'une application linéaire ouverte est toujours surjective.

Théorème 7.5 (de l'isomorphisme)**.** *Soit $T \in \mathcal{L}(E,F)$, bijective. Alors l'application T^{-1} est continue.*

Théorème 7.6 (du graphe fermé)**.** *Une application linéaire T d'un Banach E dans un Banach F est continue ssi son graphe est fermé dans $E \times F$.*

8 Les théorèmes de Hahn-Banach

Lemme 8.1 (Hahn-Banach, forme analytique)**.** *Soit E un e.v. sur $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), p une semi-norme sur E, et G un s.e.v. de E. Soit φ une forme linéaire sur G telle que*

$$\forall x \in G, \quad |\varphi(x)| \leq p(x).$$

Alors φ se prolonge en une forme linéaire $\widetilde{\varphi}$ sur E telle que

$$\forall x \in E, \quad |\widetilde{\varphi}(x)| \leq p(x).$$

Remarque : A priori, l'espace E n'est pas normé. En particulier, il n'est pas forcément complet et φ n'est pas forcément continue. Le théorème dit que toute forme linéaire sur un sous-espace se prolonge à l'espace entier avec un contrôle sur la semi-norme. Dans le cas particulier où E est normé et p est sa norme, alors le théorème dit que le dual E^* de E est gros puisque toute forme linéaire sur un sous-espace se prolonge en un élément de E^*, voir le corollaire suivant.

Théorème 8.2 (Hahn-Banach)**.** *Toute forme linéaire continue sur un s.e.v. G de E normé se prolonge en une forme linéaire continue sur E de même norme.*

Proposition 8.3. *Soit E normé et $x_0 \in E$ non nul. Il existe $\varphi \in E^*$ tel que*

$$\|\varphi\| = 1, \quad \varphi(x_0) = \|x_0\|.$$

Corollaire 8.4. *Soit E normé. Le dual E^* sépare les points de E.*

Corollaire 8.5. *Soit E normé. On a*

$$\forall x \in E, \quad \|x\| = \sup_{\varphi \in E^*, \|\varphi\| \leq 1} |\varphi(x)|.$$

Remarque : Ce résultat généralise le résultat analogue dans les espaces de Hilbert.

Lemme 8.6 (Hahn-Banach, forme géométrique)**.** *Soit E normé. Soient C et K non vides et disjoints dans E. On suppose C convexe fermé et K convexe compact. Alors il existe $\varphi \in E^*$ tel que*

$$\sup_C \operatorname{Re} \varphi < \inf_K \operatorname{Re} \varphi.$$

Remarque : On en déduit que l'on peut séparer C et K par un hyperplan réel affine de la forme

$$H_{\varphi,\alpha} = \{x \in E, \quad \operatorname{Re} \varphi(x) = \alpha\}.$$

Définition 8.7. Soit E e.v. sur $\mathbb{R}$. On appelle demi-espace toute partie de E de la forme

$$H^+_{\varphi,\alpha} = \{x \in E, \quad \varphi(x) \geq \alpha\},$$

où φ est une forme linéaire non nulle de E^*.

Théorème 8.8 (Minkowski)**.** *Toute partie convexe fermée C dans E e.v. sur $\mathbb{R}$ est l'intersection de tous les demi-espaces fermés qui le contiennent. Autrement dit,*

$$C = \bigcap_{C \subset H^+_{\varphi,\alpha}} H^+_{\varphi,\alpha}.$$

9 Topologie faible

Soit E un Banach. On souhaite affaiblir la topologie de la norme (topologie forte), c'est à dire considérer une topologie avec moins d'ouverts car "moins il y a d'ouverts et plus il y a de compacts". L'intéret d'avoir beaucoup de compacts est que l'on peut y utiliser la propriété de Bolzano-Weierstrass sur les suites (qui reste vraie pour la topologie faible, bien que non métrisable en dimension infinie).

Définition 9.1. La topologie faible sur un Banach E est la topologie la moins fine (celle qui a le moins d'ouverts) telle que toutes les formes linéaires du dual E^* restent continues.

Proposition 9.2. *Une base de voisinages de $x_0 \in E$ pour la topologie faible est donnée par les*

$$V_{\epsilon,\varphi_1,\ldots,\varphi_n}(x_0) = \{x \in E,\ |\varphi_i(x - x_0)| \leq \epsilon,\ i = 1, \ldots, n\}.$$

Remarque : Les topologies faibles et fortes coincident ssi E est de dimension finie.

Proposition 9.3. *Une suite $(x_n)_n$ converge faiblement vers $x \in E$ (noté $x_n \xrightarrow{w} x$) ssi*

$$\forall \varphi \in E^*, \quad \varphi(x_n) \to \varphi(x) \text{ quand } n \to \infty.$$

Exemple : Soit H un Hilbert séparable et $(e_n)_n$ une base hilbertienne. Alors e_n tend faiblement vers 0.

Proposition 9.4. *Si x_n tend faiblement vers x alors $\|x_n\|$ est bornée et $\|x\| \leq \liminf_n \|x_n\|$.*

Proposition 9.5. *Dans un Hilbert, on a la propriété suivante :*

$$\text{si } x_n \xrightarrow{w} x \text{ et si } \|x_n\| \to \|x\| \text{ alors } x_n \to x.$$

Proposition 9.6. *Un espace de Banach E muni de la topologie faible est un espace vectoriel topologique, localement convexe et séparé.*

Proposition 9.7. *Soit φ une forme linéaire sur E. Alors φ est continue ssi elle est faiblement continue.*

Théorème 9.8. *Soit C un convexe de E. Alors C est fermé ssi il est faiblement fermé. En particulier, les s.e.v. fermés sont les mêmes.*

Théorème 9.9. *Soit T une application linéaire entre Banach E et F. Alors T est continue ssi elle est faiblement continue.*

Théorème 9.10 (Eberlein-Smulian)**.** *Soit E Banach et $K \subset E$ faiblement compact. Alors de toute suite de K on peut extraire une sous-suite faiblement convergente vers un élément de K.*

Remarque : Pour la topologie faible, on peut donc utiliser Bolzano-Weierstrass dès que l'on est dans un compact, en particulier sans hypothèse supplémentaire de métrisabilité.

10 Topologie faible-$*$ sur un dual

Sur un dual, on peut introduire une topologie encore plus faible que la topologie faible : la topologie faible-$*$.

Définition 10.1. Soit X un Banach et X^* son dual. La topologie faible-$*$ sur X^* est la topologie la moins fine telle que toutes les formes de X^{**} suivantes :

$$\widetilde{x} : X^* \to \mathbb{K}, \quad \varphi \mapsto \varphi(x),$$

où $x \in X$, soient continues.

Proposition 10.2. *Une base de voisinages de $\varphi_0 \in X^*$ pour la topologie faible-$*$ est donnée par les*

$$W_{\epsilon,x_1,\ldots,x_n}(\varphi_0) = \{\varphi \in X^*,\ |\varphi(x_j) - \varphi_0(x_j)| \leq \epsilon,\ j = 1,\ldots,n\}.$$

L'espace topologique obtenu est séparé et localement convexe.

Proposition 10.3. *Une suite $(\varphi_n)_n$ converge faible-$*$ vers $\varphi \in E^*$ (noté $\varphi_n \xrightarrow{w*} \varphi$) ssi*

$$\forall x \in E, \quad \varphi_n(x) \to \varphi(x) \text{ quand } n \to \infty.$$

Théorème 10.4. *Les formes linéaires de X^{**} faible-$*$ continues sont exactement les $\widetilde{x}$, $x \in X$.*

Le résultat suivant explique tout l'intéret de la topologie faible-$*$.

Théorème 10.5 (Alaoglu)**.** *La boule unité fermée de X^* est faible-$*$ compacte.*

Définition 10.6. La topologie faible-$*$ coincide avec la topologie faible sur X^* ssi toutes les formes linéaires continues sur X^* sont de la forme $\widetilde{x}$, $x \in X$. Autrement dit, l'injection de X dans X^{**} qui à x associe $\widetilde{x}$ est surjective. Dans ce cas, X et X^{**} sont isomorphes et on dit que X est réflexif (en prenant deux fois le dual, on tombe sur un espace qui est isomorphe à celui de départ).

Exemples : Un Hilbert H est réflexif. Les espaces $L^p(d\mu)$, $1 < p < \infty$, sont réflexifs.

Théorème 10.7. *Soit X Banach. Alors la boule unité fermée de X est faiblement compacte ssi X est réflexif.*

Remarques : Le sens direct s'appelle le théorème de Kakutani. La réciproque est une conséquence du théorème d'Alaoglu.

Théorème 10.8. *Soit X Banach. On a les équivalences :*
X est séparable $\Longleftrightarrow$ la boule fermée de X^* munie de la topologie faible-$*$ est métrisable.
X^* est séparable $\Longleftrightarrow$ la boule fermée de X munie de la topologie faible est métrisable.

Corollaire 10.9. *Soit X un Banach séparable. Alors de toute suite de X^* bornée, on peut extraire une sous-suite faible-$*$ convergente.*

Proposition 10.10. *Soit X un Banach réflexif. Alors de toute suite de X bornée, on peut extraire une sous-suite faiblement convergente.*

Remarques : C'est une conséquence des Théorèmes 9.10 et 10.7.

11 Dérivées faibles

Dans cette section, on construit un espace de fonctions, intermédiaire entre l'espace des fonctions dérivables et l'espace L^2. On obtient ainsi un espace appelé espace de Sobolev, qui est muni d'une structure de Hilbert (donc avec des boules fermées faiblement compactes), et dont les fonctions sont "faiblement" dérivables.
On note I l'intervalle ouvert $(0,1)$ et $\mathcal{D}(I)$ l'ensemble des fonctions test, c'est à dire l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ à support compact sur I.

Définition 11.1. Soit $u \in L^2(I)$. On dit que u admet une dérivée faible $v \in L^2(I)$ si

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(I), \quad \int_I u\varphi' = -\int_I v\varphi.$$

Remarque : Si la dérivée faible existe, elle est unique.

Proposition 11.2. *Soit $u \in L^2(I)$ tel que*

$$\exists C > 0, \forall \varphi \in \mathcal{D}(I), \quad \left| \int_I u\varphi' \right| \leq C\|\varphi\|_2.$$

Alors u est faiblement dérivable.

Définition 11.3. On note

$$H^1(I) = \{u \in L^2(I), u \text{ admet une dérivée faible dans } L^2(I)\},$$

l'espace de Sobolev muni du produit scalaire

$$(u,v) = \int_I (uv + u'v'),$$

et de la norme induite

$$\|u\|_{H^1}^2 = \int_I (|u|^2 + |u'|^2).$$

Théorème 11.4. *L'espace $H^1(I)$ est un espace de Hilbert.*

Proposition 11.5. *Soit $u \in H^1(I)$ telle que sa dérivée faible est nulle, alors u est constante p.p. sur I.*

Théorème 11.6. *Soit $u \in H^1(I)$. Alors on a*

$$\forall x, y \in I, \quad u(y) - u(x) = \int_x^y u'(s)ds.$$

En particulier, les fonctions de $H^1(I)$ admettent un représentant continu sur $\overline{I}$ et l'application $u \mapsto u(x)$, $x \in \overline{I}$, est une forme linéaire continue sur $H^1(I)$.

Remarque : On en déduit donc l'inclusion $H^1(I) \subset \mathcal{C}(\overline{I})$.

Définition 11.7. On note

$$H_0^1(I) = \{u \in H^1(I), \quad u(0) = u(1) = 0\},$$

l'espace des fonctions de Sobolev qui s'annulent sur le bord de I. C'est un sous-espace fermé de $H^1(I)$.

Proposition 11.8 (Poincaré)**.** *On a l'inégalité suivante :*

$$\exists C > 0, \forall u \in H_0^1(I), \quad \|u\|_{H^1} \leq C\|u'\|_2.$$

Remarque : L'inégalité n'est pas vraie dans $H^1(I)$ (considerer les constantes).