Faux-plans réels et courbes paramétrées

Frédéric Mangolte (LAREMA, Angers)

Avec Adrien Dubouloz (IMB Dijon)

Laboratoire Paul Painlevé, Lille, 8 février 2019

Plongements $\mathcal{C}^\infty$ de la droite dans le plan

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & (t, t^3) \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} f_{\text{lin}} : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & (t, 0) \end{array}$$

Plongements $\mathcal{C}^\infty$ de la droite dans le plan

$$\begin{array}{rcl} f\colon \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & (t, t^3) \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} f_{\mathrm{lin}}\colon \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & (t, 0) \end{array}$$

f est un plongement $\mathcal{C}^\infty$ fermé de la droite réelle que l'on peut rectifier par le difféomorphisme $\alpha \in \mathrm{Diff}(\mathbb{R}^2)$, $(x, y) \longmapsto (x, y - x^3)$

$$f_{\mathrm{lin}} = \alpha \circ f \colon t \longmapsto (t, 0)$$

Théorème de Jordan (1887) – Schoenflies (1906)
$\Longrightarrow$ Deux plongements $\mathcal{C}^\infty$ fermés $f, g\colon \mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{R}^2$ quelconques sont équivalents à self-difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ près.

i.e. il existe $\alpha \in \mathrm{Diff}(\mathbb{R}^2)$ tel que $g = \alpha \circ f$.

Plongements algébriques de la droite dans le plan

$f\colon t \longmapsto (t, t^3)$

détermine aussi un plongement algébrique de la droite affine $\mathbb{C}$.

L'application $\alpha\colon (x, y) \longmapsto (x, y - x^3)$ définit un automorphisme polynomial du plan affine $\mathbb{C}^2$, f est donc algébriquement rectifiable.

Théorème (Abhyankar-Moh (1975))

Soient $f, g\colon \mathbb{C} \hookrightarrow \mathbb{C}^2$ deux plongements algébriques à coefficients réels. Alors il existe un automorphisme polynomial $\alpha \in \mathrm{Aut}_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}^2)$ tel que $g = \alpha \circ f$.

Remarque

Tout plongement algébrique $\begin{array}{rcc} f\colon \mathbb{C} & \hookrightarrow & \mathbb{C}^2 \\ t & \longmapsto & (x(t), y(t)) \end{array}$

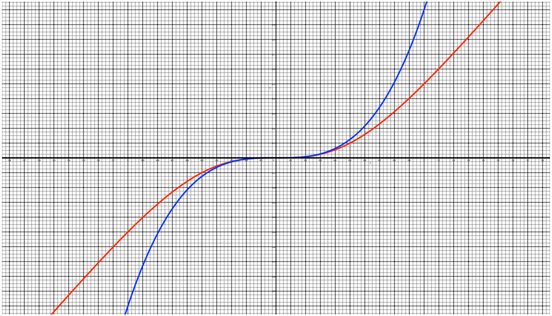
où x, y sont des polynômes à coefficients réels

induit par restriction un plongement $\mathcal{C}^\infty$ fermé $f|_{\mathbb{R}}\colon \mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{R}^2$.

Et pour les plongements rationnels ?

$$f : \mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{R}^2, \quad t \longmapsto (t, t^3)$$, en bleu

$$g : \mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{R}^2, \quad t \longmapsto \left(t, \frac{t^3}{t^2+1}\right)$$, en rouge



Question (à préciser)

f et g sont-ils équivalents ? i.e. g est-il rectifiable ?

Applications rationnelles sur les variétés algébriques réelles

Soient X, Y variétés algébriques non singulières définies par des polynômes à coefficients réels de lieux réels $X(\mathbb{R})$ et $Y(\mathbb{R})$ non vide.

Définition

Une application rationnelle $f\colon X \dashrightarrow Y$ est $\mathbb{R}$-régulière si $X(\mathbb{R}) \subset \mathrm{dom}(f)$.

Exemple

Si $X = \mathbb{C}$ et $Y = \mathbb{C}^2$, alors $X(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ et $Y(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^2$. Une application rationnelle $f\colon X \dashrightarrow Y$ est donnée par $f\colon t \mapsto \left(\frac{p_1(t)}{q_1(t)}, \frac{p_2(t)}{q_2(t)}\right)$ où p_1, q_1, p_2, q_2 sont des polynômes à coefficients réels.

Si ni q_1 ni q_2 n'ont de racine réelle, f est $\mathbb{R}$-régulière.

Difféomorphismes birationnels

Définition

Une application rationnelle $\alpha\colon X \dashrightarrow Y$
est un difféomorphisme birationnel si

1. α est birationnelle, *i.e.* $\exists\, \alpha^{-1}\colon Y \dashrightarrow X$ rationnelle,
2. α est définie en tout point réel de X, *i.e.* α est $\mathbb{R}$-régulière,
3. α^{-1} est définie en tout point réel de Y, *i.e.* α^{-1} est $\mathbb{R}$-régulière.

Remarque

Un difféomorphisme birationnel $\alpha\colon X \dashrightarrow Y$ induit un difféomorphisme $\mathcal{C}^\infty$

$$\alpha|_{X(\mathbb{R})}\colon X(\mathbb{R}) \to Y(\mathbb{R})$$

Non-exemple

L'éclatement $e\colon X \to \mathbb{C}^2$ centré en $p \in \mathbb{R}^2 \subset \mathbb{C}^2$ est birationnel, défini en tous point de X, mais $e^{-1}\colon \mathbb{C}^2 \dashrightarrow X$ n'est pas définie en p.

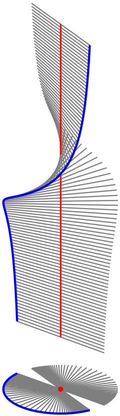
Retour sur l'éclatement de $\mathbb{C}^2$

On pose $X := \{ux = vy\} \subset \mathbb{C}^2_{x,y} \times \mathbb{P}^1(\mathbb{C})_{u:v}$
L'éclatement de $\mathbb{C}^2$ centré en $p = (0,0)$ est le morphisme birationnel

$$e\colon \begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & \mathbb{C}^2 \\ ((x,y),(u:v)) & \longmapsto & (x,y)\,. \end{array}$$

Si $p' \neq p$ est un point de $\mathbb{C}^2$, $e^{-1}(p')$ est un point. En revanche $E := e^{-1}(p)$ est une courbe isomorphe à $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, c'est la courbe exceptionnelle de l'éclatement.

Topologie de l'éclatement



On a $X(\mathbb{R}) = \{ux = vy\} \subset \mathbb{R}^2_{x,y} \times \mathbb{P}^1(\mathbb{R})_{u:v}$.

Topologiquement, on découpe un disque centré en p et on recolle un ruban de Möbius sur son bord. En particulier, $X(\mathbb{R})$ n'est pas difféomorphe à $\mathbb{R}^2$.

On a $X(\mathbb{R}) \approx \mathbb{R}^2 \# \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ et $X \approx \mathbb{C}^2 \# \overline{\mathbb{P}^2(\mathbb{C})}$.

Plongements rationnels lisses

Définition

Soit Y une variété algébrique lisse définie sur $\mathbb{R}$, $Y(\mathbb{R}) \neq \varnothing$. Une application rationnelle $\mathbb{C} \dashrightarrow Y$ est un plongement rationnel lisse si

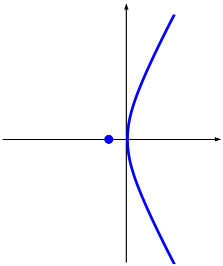
1. f est définie en tout point réel. *i.e.* f est $\mathbb{R}$-régulière
2. f est un difféomorphisme birationnel sur $f(\mathbb{R})$ et en particulier $f|_{\mathbb{R}} \colon \mathbb{R} \to Y(\mathbb{R})$ est un plongement $\mathcal{C}^\infty$ fermé.
3. $f(\mathbb{R}) = f(\mathbb{C}) \cap Y(\mathbb{R})$. [Abus de notation, en fait $f(\mathbb{C}) = f(\mathrm{dom}(f))$.]

Question (Seconde formulation)

Étant donné deux plongements rationnels lisses $f, g \colon \mathbb{C} \dashrightarrow \mathbb{C}^2$, existe-t-il un difféomorphisme birationnel $\alpha \colon \mathbb{C}^2 \dashrightarrow \mathbb{C}^2$ tel que $\alpha \circ f = g$?

Plongements rationnels lisses : un non-exemple

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C}^2 \\ t & \longmapsto & \big(t^2, t(t^2+1)\big) \end{array}$$



$$f(\mathbb{C}) \cap \mathbb{R}^2 = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ y^2 = x(x+1)^2\big\}$$

f est une immersion localement fermée en tout point de $\mathbb{R}$ mais n'est pas un plongement rationnel lisse car $(-1,0) \in f(\mathbb{C}) \cap \mathbb{R}^2$ mais $(-1,0) \notin f(\mathbb{R})$.

Exemple de rectification d'une cubique

Définition

Un plongement rationnel lisse $f\colon \mathbb{C} \dashrightarrow \mathbb{C}^2$ est rectifiable s'il existe un difféomorphisme birationnel $\alpha\colon \mathbb{C}^2 \dashrightarrow \mathbb{C}^2$ tel que $\alpha \circ f\colon\ t \longmapsto \big(t, 0\big)$.

$$\begin{array}{rcc} f\colon \mathbb{R} & \hookrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & \left(t, \frac{t^3}{t^2+1}\right) \end{array}$$

$$f(\mathbb{C}) \cap \mathbb{R}^2 = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ ;\ x^3 - (x^2+1)y = 0\big\}$$

$$\begin{array}{rcc} \alpha\colon \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & \big(x, (x^2+1)y - x^3\big) \end{array}, \qquad \alpha^{-1}\colon (x,y) \mapsto\dashrightarrow \left(x, \frac{y+x^3}{x^2+1}\right)$$

α est un difféomorphisme birationnel et $\alpha \circ f\colon\ t \longmapsto \big(t, 0\big)$

α transforme f qui n'est pas définie aux points $\pm i$ de $\mathbb{C}$ en un morphisme partout défini de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}^2$.

Géométrie de l'exemple cubique

La courbe projective $C = \left\{(X : Y : Z) \in \mathbb{P}^2(\mathbb{C})\ ;\ X^3 - (X^2 + Z^2)Y = 0\right\}$ associée à la courbe affine $f(\mathbb{C})$ rencontre la droite à l'infini $L_\infty = \{Z = 0\}$ en deux points réels : $C \cap L_\infty = \{p_\infty, p_s\}$.

C est transverse à L_∞ en p_∞.
p_s est l'intersection de deux branches non réelles conjuguées de C.

La rectification de f se fait en deux temps : un difféomorphisme birationnel qui résout le point p_s et donne un plongement défini partout ; composé avec un automorphisme donné par le Théorème d'Abhyankar-Moh.

Difféomorphismes birationnels et éclatements

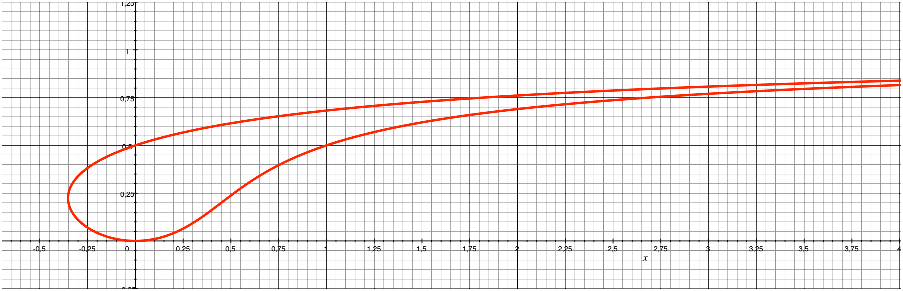
1. Éclatement de centre p. On se donne X lisse, $p \in X$, alors il existe un morphisme birationnel $e\colon Y \to X$ tel que
   - Y est lisse,
   - $E = e^{-1}(p)$ est une courbe de Y, isomorphe à $\mathbb{P}^1$, dite exceptionnelle,
   - La restriction $e|_{Y \setminus E}\colon Y \setminus E \to X \setminus \{p\}$ est un isomorphisme.
2. Contraction d'une courbe. On se donne Y lisse, $E \in Y$ une courbe vérifiant certaines conditions, alors il existe une application birationnelle $\beta\colon X \dashrightarrow Y$ dont la réciproque $e = \beta^{-1}\colon Y \to X$ est un éclatement dont E est la courbe exceptionnelle et $e(E)$ le centre.

Proposition

- *Toute application birationnelle entre surfaces se décompose en une suite d'éclatements et de contractions.*
- *Tout difféomorphisme birationnel entre surfaces se décompose en une suite d'éclatements de paires de centres imaginaires conjugués et de contractions de paires de courbes imaginaires conjuguées.*

Une quartique unicuspidale ramphoïde

$$\begin{array}{rcc} f : \mathbb{R} & \hookrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & \left(\frac{t^4+t}{t^2+1}, \frac{t^2}{t^2+1}\right) \end{array}$$



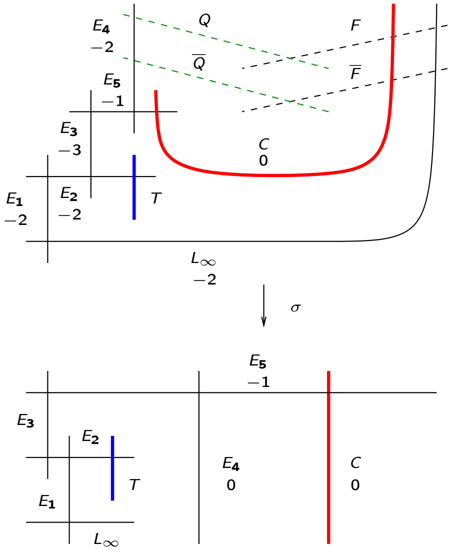
La courbe projective associée C possède un point singulier p_∞ de type A_6 à l'infini tel que $T_{p_\infty} \neq L_\infty$.

Géométrie de l'exemple quartique

La courbe quartique C possède un unique point singulier qui est un cusp réel $p_\infty \subset L_\infty$ de suite de multiplicités $[2,2,2]$.

On a $C \cap L_\infty = \{p_\infty, q, \overline{q}\}$ où $q, \overline{q}$ est une paire de points non réels conjugués en lesquels C est transverse à L_∞.

Construction d'un difféomorphisme birationnel



Modèles algébriques de $\mathbb{R}^2$

Définition

Une surface algébrique quasi-projective lisse S définie sur $\mathbb{R}$ est un modèle algébrique de $\mathbb{R}^2$ si

1. $S(\mathbb{R})$ difféomorphe à $\mathbb{R}^2$,
2. S a les mêmes nombres de Betti que $\mathbb{C}^2$.

Définition

Un modèle algébrique S de $\mathbb{R}^2$ est un faux-plan réel si S n'est pas isomorphe à $\mathbb{C}^2$.

Une infinité de modèles algébriques de $\mathbb{R}^2$

Proposition

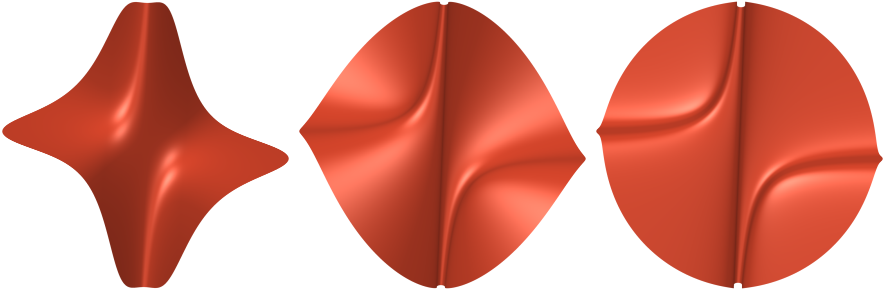
Il existe une infinité de faux-plans réels tous birationnellement difféomorphes à $\mathbb{R}^2$.

Soir m un entier impair et soit S_m la surface lisse de $\mathbb{C}^3$ définie par

$$u^2 z = v^m - u \,.$$

1. S_m est un modèle algébrique de $\mathbb{R}^2$: $S_m(\mathbb{R}) \approx \mathbb{R}^2$.
   $h\colon \mathbb{R}^2 \to S_m(\mathbb{R}), (u,z) \mapsto (u, \sqrt[m]{u^2 z + u}, z)$ homéomorphisme.
2. Pout tout entier impair $m \geq 3$, S_m est un faux-plan réel.
   - $\pi_1(S_1 = \mathbb{C}^2) \simeq \{0\}$.
   - $\pi_1(S_m) \simeq \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$.
     $\Phi\colon S_m \to \mathbb{C}, (u,v,z) \mapsto u$ est une fibration en droites, $\Phi^{-1}(\{0\})$ est de multiplicité m.
   - Pour $m \neq n$ entiers impairs, S_m et S_n ne sont pas isomorphes.
3. Théorème (Dubouloz-Mangolte, 2017) : Tout modèle algébrique de $\mathbb{R}^2$ fibré en droites avec au plus une fibre singulière est birationnellement difféomorphe à $\mathbb{C}^2$.

$S_1(\mathbb{R})$, $S_3(\mathbb{R})$, $S_7(\mathbb{R})$



Plongements dociles

Définition

Un plongement rationnel lisse $f\colon \mathbb{C} \dashrightarrow \mathbb{C}^2$ est docile s'il existe un modèle algébrique S de $\mathbb{R}^2$ tel que

1. S est $\mathbb{C}$-fibrée : $\exists\, \Phi\colon S \to \mathbb{C}$, $\Phi^{-1}(a) \simeq \mathbb{C}$, $\forall a \in \mathbb{C}$,
2. il existe un difféomorphisme birationnel $\alpha\colon \mathbb{C}^2 \dashrightarrow S$ tel que $\alpha \circ f(\mathbb{C})$ est une fibre de Φ.
   ($\alpha \circ f$ est une immersion fermée vers le support d'une fibre de Φ).

Une infinité de plongements

Théorème (Classification des plongements dociles)

Pour $i = 1, 2$, soit $f_i \colon \mathbb{C} \dashrightarrow \mathbb{C}^2$ un plongement rationnel lisse docile, et soit $\alpha_i \colon \mathbb{C}^2 \dashrightarrow S_i$ un difféomorphisme birationnel vers un faux-plan fibré en droites tel que $\alpha_i \circ f_i \colon \mathbb{C} \dashrightarrow S_i$ soit une fibre lisse de Φ_i. Les conditions suivantes sont équivalentes :

1. *$f_1 \colon \mathbb{C} \dashrightarrow \mathbb{C}^2$ et $f_2 \colon \mathbb{C} \dashrightarrow \mathbb{C}^2$ sont des plongements équivalents.*
2. *Il existe un difféomorphisme birationnel $\beta \colon S_1 \dashrightarrow S_2$ et un automorphisme γ of $\mathbb{C}$ tel que $\gamma \circ \Phi_1 = \Phi_2 \circ \beta$.*

Corollaire

Il existe une infinité de classes d'équivalences de plongement rationnels lisses de la droite dans le plan.

Une infinité de plongements

Preuve du corollaire.

Soir $m \geq 3$ un entier impair et soit S_m la surface lisse de $\mathbb{C}^3$ définie par $u^2 z = v^m - u$.

1. Pout tout entier impair $m \neq 1$, S_m est un faux-plan réel birationnellement difféomorphe à $\mathbb{C}^2$ muni d'une fibration en droites $\Phi\colon S_m \to \mathbb{C}, (u,v,z) \mapsto u$ telle que $\Phi^{-1}(\{0\})$ est de multiplicité m.
2. Plongement docile f_m. Soit $i\colon \mathbb{C} \dashrightarrow S_m$ le plongement d'une fibre réelle lisse de Φ et $\alpha_m\colon \mathbb{C}^2 \dashrightarrow S_m$ un difféomorphisme birationnel. On pose $f_m = \alpha_m^{-1} \circ i\colon \mathbb{C} \dashrightarrow \mathbb{C}^2$.
3. Du théorème de classification précédent :
   Pour $m \neq n$ entiers impairs, f_m et f_n sont des plongements dociles non équivalents.

$\square$

Docilité et rectifiabilité

Théorème (Rectifiabilité des plongements dociles)

Soit $f\colon \mathbb{C} \dashrightarrow \mathbb{C}^2$ un plongement rationnel lisse docile et $\alpha\colon \mathbb{C}^2 \dashrightarrow S$ un difféomorphisme birationnel sur un modèle algébrique fibré en droites de $\mathbb{R}^2$ tel que $\alpha \circ f(\mathbb{C})$ est une fibre lisse de Φ.

Si S est un faux-plan réel, alors f n'est pas rectifiable.

Corollaire

La quartique unicuspidale ramphoïde est docile mais non rectifiable.

Plongements en petit degré

Proposition

Soit $f : \mathbb{C} \dashrightarrow \mathbb{C}^2$ *un plongement rationnel lisse. Si* f *est rectifiable, alors* f *est docile.*

Proposition

Tout plongement rationnel lisse $f : \mathbb{C} \dashrightarrow \mathbb{C}^2$ *dont la courbe associée* $C \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ *est de degré* $d \leqslant 3$ *est rectifiable.*

Proposition

Tout plongement rationnel lisse $f : \mathbb{C} \dashrightarrow \mathbb{C}^2$ *dont la courbe associée* $C \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ *est de degré* $d \leqslant 4$ *est docile.*

Théorème

Pour tout entier $d \geq 5$*, il existe un plongement rationnel lisse non docile* $\mathbb{C} \dashrightarrow \mathbb{C}^2$ *dont la courbe associée* $C \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ *est une courbe de degré* d*.*

Dimension de Kodaira réelle I

Soit S une surface algébrique lisse définie sur $\mathbb{R}$, V une surface algébrique projective lisse et B un diviseur diviseur à croisements normaux simples (SNC) de V tel que $S = V \setminus B$.
On définit $B_\mathbb{R} \subset B$ comme la réunion des composantes irréductibles de B définies sur $\mathbb{R}$ et de lieu réel dense. (La clôture de Zariski de $B(\mathbb{R})$ dans V est la réunion de $B_\mathbb{R}$ et d'un nombre fini de points isolés de B).

Définition

Dimension de Kodaira réelle d'une paire SNC-lisse (V, B) définie sur $\mathbb{R}$:

$$\kappa_\mathbb{R}(V, B) := \kappa(V, K_V + B_\mathbb{R}) \in \{-\infty, 0, 1, 2\}$$

Où $\kappa(V, K_V + B_\mathbb{R})$ est la dimension d'Itaka du diviseur $K_V + B_\mathbb{R}$ sur V, c'est-à-dire $\kappa(V, K_V + B_\mathbb{R}) := \sup_{m\in\mathbb{N}}\{\dim \varphi_{|m(K_V+B_\mathbb{R})|}(V)\}$.

Dimension de Kodaira réelle II

Définition

1. On dit que $B_{\mathbb{R}}$ a un cycle imaginaire si $\exists A, A' \subset B_{\mathbb{R}}$ irréductibles tels que $A \cap A'$ est un ensemble non vide de points imaginaires.
2. Soit (V, B) une complétion SNC-lisse de S telle que $B_{\mathbb{R}}$ n'a pas de cycle imaginaire. On pose $\kappa_{\mathbb{R}}(S) := \kappa_{\mathbb{R}}(V, B)$.

Théorème (Blanc-Dubouloz 2017)

1. $\kappa_{\mathbb{R}}(S)$ *est invariant par difféomorphisme birationnel,*
2. $\kappa_{\mathbb{R}}(S) \leqslant \kappa(S)$ *avec égalité si* S *admet une complétion SNC-lisse* (V, B) *telle que* $B = B_{\mathbb{R}}$ *n'a pas de cycle imaginaire.*

Corollaire

Si une surface algébrique lisse S *est birationnellement difféomorphe à* $\mathbb{C}^2$*, alors* $\kappa_{\mathbb{R}}(S) = -\infty$*.*

Dimension de Kodaira réelle et docilité des plongements

Proposition

Soit C la courbe projective associée à un plongement rationnel lisse f. Si f est docile, alors $\kappa_{\mathbb{R}}(\mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \setminus C \cup L_\infty) = -\infty$.

Démonstration.

1. f docile $\implies \exists \alpha \colon \mathbb{A}^2_{\mathbb{R}} \dashrightarrow S$, $\alpha(C) = \Phi^{-1}(p)$.
2. $\kappa_{\mathbb{R}}(\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}} \setminus (C \cup L_\infty)) = \kappa_{\mathbb{R}}(\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}} \setminus C) = \kappa_{\mathbb{R}}(S \setminus \Phi^{-1}(p))$ par invariance de $\kappa_{\mathbb{R}}$ par difféomorphisme birationnel.
3. $\kappa_{\mathbb{R}}(S \setminus \Phi^{-1}(p)) \leq \kappa(S \setminus \Phi^{-1}(p))$ et Φ se restreint en une fibration en droites sur $S \setminus \Phi^{-1}(p)$, d'où $\kappa(S \setminus \Phi^{-1}(p)) = -\infty$.

$\square$

Question (Ouverte)

Un plongement rationnel lisse tel que $\kappa_{\mathbb{R}}(\mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \setminus C \cup L_\infty) = -\infty$ est-il nécessairement docile ?

Preuve du théorème d'indocilité

Théorème

Pour tout entier $d \geq 5$, il existe un plongement rationnel lisse $f : \mathbb{C} \dashrightarrow \mathbb{C}^2$ non docile dont la courbe projective associée $C \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ est une courbe rationnelle nodale de degré d.

Démonstration.

Étape 1 Soit $d \geqslant 1$, il existe une courbe rationnelle nodale C_d telle que

1. $\deg(C_d) = d$.
2. Si $d \equiv 1, 2 \mod 4$, aucun des points doubles de C_d n'est réel, $C_d \cap L_\infty$ est transverse et contient un unique point réel.
3. If $d \equiv 0, 3 \mod 4$, exactement un point double, p_s, est réel. De plus, $p_s \in L_\infty$, et à l'exception de p_s, $C_d \cap L_\infty$ est transverse et contient un unique point réel.

Étape 2 Si $d \geqslant 5$, alors $\kappa_{\mathbb{R}}(\mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \setminus C_d \cup L_\infty) \geqslant 0$.

□

Construction de C_d

Proposition

Si $d \equiv 1 \mod 4$, il existe une courbe rationnelle nodale C_d de degré d dont tous les points doubles sont non réels, $C_d \cap L_\infty$ est transverse et contient un unique point réel.

Démonstration.

On suppose $d \geqslant 3$ et on pose $k = \frac{1}{2}(d-1)$. Alors $k \neq 0$ est pair et on peut considérer une courbe rationnelle nodale générale $D_k \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ de degré k sans point réel. La courbe D_k a $\frac{1}{2}(k-1)(k-2)$ points doubles. La courbe conjuguée $\overline{D_k}$ coupe D_k en k^2 points. Soit E une droite réelle générale, alors $D_k \cup \overline{D_k} \cup E$ est une courbe réelle réductible avec $\frac{1}{2}(k^2 + (k-1)(k-2)) + k$ paires de points doubles non réels. Par le Théorème de Brusotti, on peut lisser une paire de points doubles conjugués dans $(D_k \cap E) \cup (\overline{D}_k \cap E)$ en préservant les autres points doubles. La courbe C_d obtenue est irréductible avec $\frac{1}{4}(d-1)(d-2)$ paires de points doubles non réels conjugués. □