Approximations algébriques des difféomorphismes de surfaces

Frédéric Mangolte (Angers)
collaborations avec
János Kollár (Princeton)
Johan Huisman (Brest)
Jérémy Blanc (Bâle)

Nantes, 17 septembre 2010

Approximation algébrique d'applications C^∞

Théorème (Weierstrass 1885)

Toute application C^∞ $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ peut être approchée par des polynômes sur tout compact.

$S^1 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 + y^2 = 1\}$
Toute application C^∞ $f\colon S^1 \to S^1$ peut être approchée par des applications rationnelles

$$\Phi\colon (x, y) \mapsto \left(\frac{p_1(x, y)}{q_1(x, y)}, \frac{p_2(x, y)}{q_2(x, y)}\right)$$

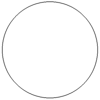
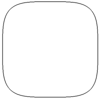
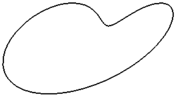
p_i, q_i : polynômes, $q_i(x, y) \neq 0$ pour $(x, y) \in S^1$

Question

Si f est un difféomorphisme (f^{-1} existe et est C^∞), existe-t-il une approximation par des applications rationnelles Φ telles que Φ^{-1} existe et soit rationnelle ?

Attention : $x \mapsto x + x^3$ difféomorphisme de $\mathbb{R}$, mais il n'y a pas de théorème des fonctions implicites dans le cadre algébrique.

Le(s) cercle

$-x(1-x-y)^3+y^2(1-x-y)^2-\frac{1}{2}xy^3=0$

$S^1 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2+y^2=1\}$
$\mathrm{Aut}(S^1)$:= difféomorphismes birationnels de S^1.

Réponse

$\mathrm{Aut}(S^1)$ n'est pas dense dans $\mathrm{Diff}(S^1)$.

Preuve

$\mathrm{Diff}(S^1)$ dimension infinie, $\mathrm{Aut}(S^1) \cong PGL(2,\mathbb{R})$ dimension finie.

Remarque

$X := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x^4+y^4=1\}$,
X difféomorphe à S^1, donc $\mathrm{Diff}(X) \cong \mathrm{Diff}(S^1)$
mais $\mathrm{Aut}(X)$ fini $\ncong \mathrm{Aut}(S^1)$.

Réponse complète

$\forall$ courbe algébrique réelle $X \sim S^1$, $\overline{\mathrm{Aut}(X)} \neq \mathrm{Diff}(X)$.

Variété algébrique réelle
$:=$ sous-variété de $\mathbb{R}^n$ zéro de polynômes à coefficients réels.

Définition

Soit M variété C^∞ compacte connexe, un modèle algébrique réel de M est une variété algébrique réelle X difféomorphe à M.

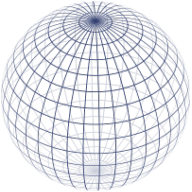
Théorème (Nash 1952, Tognoli 1973)

$\forall M$, $\exists$ modèle algébrique réel $X \sim M$.

X, Y variétés algébriques réelles, $f\colon X \to Y$ application,
f algébrique $:=$ (i) rationnelle réelle (ii) définie $\forall x \in X$,
f isomorphisme $:=$ (i) algébrique, (ii) $\exists\, f^{-1}$ (iii) f^{-1} algébrique,
f induit alors un difféomorphisme $X \sim Y$.
$\mathrm{Aut}(X) :=$ groupe des automorphismes algébriques $X \to X$.

Surfaces

Rappel classification des surfaces compactes :
Orientables : sphère S^2, tore $S^1 \times S^1$, surfaces de genre $g \in \mathbb{N}$.




Non-orientables : plan projectif, bouteille de Klein, $h \in \mathbb{N}^*$.



Surfaces

Théorème (Kollár, Mangolte 2009)

- *$M = S^2$, $S^1 \times S^1$, ou une surface non orientable quelconque,*
  $\Rightarrow \exists$ modèle algébrique réel $X \sim M$ tel que $\overline{\mathrm{Aut}(X)} = \mathrm{Diff}(X)$ pour la topologie C^∞.
- *M surface orientable de genre ≥ 2,*
  $\Rightarrow \forall$ modèle $X \sim M$, $\mathrm{Aut}(X)$ n'est pas dense dans $\mathrm{Diff}(X)$, pour la topologie C^0.

Densité I : Sphère

$S^2 := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ x^2+y^2+z^2=1\}$

Théorème (Lukackiĭ 1977)

$SO(m+1,1)$ est un sous-groupe fermé maximal de $\mathrm{Diff}_0(S^m)$.

Corollaire

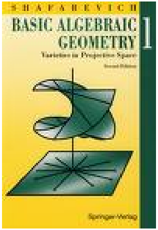
Le groupe $\mathrm{Aut}(S^2)$ est dense dans $\mathrm{Diff}(S^2)$.

Preuve

$SO(3,1) \subsetneq \mathrm{Aut}_0(S^2) \subset \mathrm{Diff}_0(S^2)$.
où $\mathrm{Diff}_0(S^2) \subset \mathrm{Diff}(S^2)$ est la composante neutre et
$\mathrm{Aut}_0(S^2) = \mathrm{Diff}_0(S^2) \cap \mathrm{Aut}(S^2)$

Densité II : Éclatement centré en un point

X surface algébrique réelle
$p \in X, \quad \pi \colon B_pX \to X, \quad E := \pi^{-1}(p),$
π induit un difféomorphisme $B_pX \setminus E \xrightarrow{\sim} X \setminus \{p\}$



$\exists$ un voisinage de E ruban de Möbius dont l'image par π est un disque centré en p.

Densité III : Surfaces non orientables

Des modèles algébriques réels pour les surfaces non orientables :
$X_h := B_{p_1,\dots,p_h} S^2$, la sphère éclatée en h points,
Exemples $X_1 \sim$ plan projectif, $X_2 \sim$ bouteille de Klein.

Théorème (K., M. 2009)

$\forall h > 0$, $\mathrm{Aut}(X_h)$ *est dense dans* $\mathrm{Diff}(X_h)$ *pour la topologie* C^∞.

Principales étapes de la preuve :

1. Points marqués
   $\mathrm{Aut}(S^2, p_1, \dots, p_h)$ est dense dans $\mathrm{Diff}(S^2, p_1, \dots, p_h)$ pour des points deux à deux distincts $p_1, \dots, p_h \in S^2$.
2. $\mathrm{Aut}_0(X_h)$ est dense dans $\mathrm{Diff}_0(X_h)$.
3. Mapping class group $\mathcal{M}(X_h) = \pi_0(\mathrm{Diff}(X_h))$
   $\exists$ surjection $\mathrm{Aut}(X_h) \twoheadrightarrow \mathcal{M}(X_h)$.

Résultats complémentaires

1. Une autre indication que $\mathrm{Aut}(X_h)$ est un "gros" groupe.

Théorème (Huisman, Mangolte 2009)

$\mathrm{Aut}(X_h)$ *agit n-transitivement sur X_h, pour tout n.*

2. Une surface algébrique réelle X n'est pas forcément connexe.
Les théorèmes K.-M. et H.-M. que nous venons d'évoquer concernent le cas $\#\pi_0(X) = 1$.

Théorème (Blanc, Mangolte 2010)

$\forall n$, $\mathrm{Aut}(X)$ *agit n-transitivement sur chaque composante de X*
$\Leftrightarrow \#\pi_0(X) \leq 3$ *et X est géométriquement rationnelle.*

Si $\#\pi_0(X) > 4$, $\mathrm{Aut}(X)$ n'est pas dense dans $\mathrm{Diff}(X)$.
Si $\#\pi_0(X) = 3$, ou 4, $\mathrm{Aut}(X)$ n'est pas dense dans $\mathrm{Diff}(X)$ pour la plupart des surfaces, et la liste est explicite.

La question de densité reste ouverte pour une classe très particulière de surfaces telles que $\#\pi_0(X) = 2$.

Surfaces non orientables : 1. Points marqués

Théorème (H., M. 2009)

$\mathrm{Aut}(S^m)$ *agit n-transitivement sur S^m, pour tout n et tout $m > 1$.*

Preuve (pour $m = 2$).
Un morphisme algébrique $A\colon [-1, 1] \to SO(2)$ induit un
twist algébrique $\Phi_A \in \mathrm{Aut}(S^2)$, $\Phi_A(x, y, z) = \big(x, (y, z) \cdot A(x)\big)$
Après envoi des points près du "pôle nord", déplacement vers n'importe quelle position par twist autour des axes x et y.

Corollaire

$\mathrm{Aut}(S^2, p_1, \ldots, p_h)$ *est dense dans* $\mathrm{Diff}(S^2, p_1, \ldots, p_h)$ *pour des points deux à deux distincts $p_1, \ldots, p_h \in S^2$.*

Preuve

Approximation dans $\mathrm{Aut}(S^2)$, puis rappel des p_i.

Surfaces non orientables : 2. $\overline{\mathrm{Aut}_0(X_h)} = \mathrm{Diff}_0(X_h)$.

La transitivité forte de $\mathrm{Aut}(X_h)$ induit beaucoup d'isomorphismes de X_h sur la sphère éclatée en h points :
Soit $x \in X_h$, $\exists \Phi \colon X_h \xrightarrow{\cong} B_{p_1,\dots,p_h}S^2$ tel que $\Phi(x) \in B_{p_1,\dots,p_h}S^2 \setminus \{E_1, \dots, E_h\}$.
Compacité $\Rightarrow \exists$ recouvrement ouvert fini $X_h = \cup_i W_i$ et des contractions $\pi_i \colon X_h \to S^2$ dont le lieu exceptionnel évite W_i.

Lemme de fragmentation :

$\phi \in \mathrm{Diff}_0(X_h)$, homotope à l'identité $\Rightarrow$

$$\exists \phi_1 \circ \dots \circ \phi_r = \phi \text{ adapté à } \{W_i\}$$

En particulier, $\pi_i \colon X_h \to S^2$ est un isomorphisme au voisinage de $\mathrm{Supp}\,\phi_i$.
Chaque ϕ_i descend en $\phi_i' \in \mathrm{Diff}(S^2, p_1^i, \dots, p_h^i)$, on approche ϕ_i' dans $\mathrm{Aut}(S^2, p_1^i, \dots, p_h^i)$ puis on relève à X_h.

Transformations de Cremona ($\sim$ 1860)

La plus simple sur $\mathbb{P}^3$ est $(x : y : z : t) \mapsto \left(\frac{1}{x} : \frac{1}{y} : \frac{1}{z} : \frac{1}{t}\right)$
$= (yzt : ztx : txy : xyz)$

Lieu de base $=$ 6 arêtes d'un tétraèdre T.
Sommets $->$ $(1, \pm i, 0, 0), (0, 0, 1, \pm i)$:
$\sigma : (x : y : z : t) \mapsto \left((x^2+y^2)z : (x^2+y^2)t : (z^2+t^2)x : (z^2+t^2)y\right)$

σ difféomorphisme de $\mathbb{P}^3(\mathbb{C}) \setminus T$

Chaque quadrique
$Q_{abcdef} := a(x^2 + y^2) + b(z^2 + t^2) + cxz + dyt + ext + fyz$
(i) passe par les sommets de T,
(ii) ne possède pas de points réels sur T.

$\sigma : Q_{abcdef}(\mathbb{R}) \xrightarrow{\cong} Q_{abcdfe}(\mathbb{R})$

Action sur les sphères

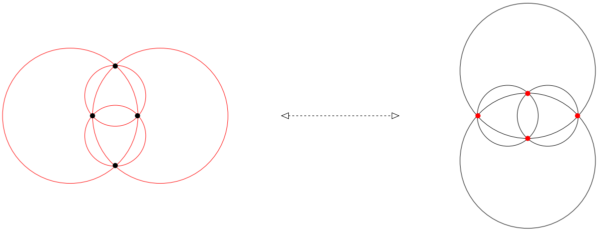
$S^2 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$
$Q_0 := \{(x, y, z, t) \in \mathbb{P}^3(\mathbb{R}),\ x^2 + y^2 + z^2 - t^2 = 0\}$

Considérons Q_{abcdef} avec $Q_{abcdef}(\mathbb{R}) \sim S^2$, $\Rightarrow Q_{abcdfe}(\mathbb{R}) \sim S^2$, alors les deux sont équivalentes à Q_0 par un changement linéaire de coordonnées.
On obtient : $\sigma_{abcdef} : S^2 \xrightarrow{\cong} S^2$, bien défini à $O(3,1)$ près.

Théorème (K., M. 2009)

Les transformations de Cremona avec points bases imaginaires et $O(3,1)$ *engendrent* $\mathrm{Aut}(S^2)$.

Transformations de Cremona avec points bases réels



Se factorise :

$S^2 \longleftarrow B_{p_1,\dots,p_4}S^2 \cong B_{q_1,\dots,q_4}S^2 \longrightarrow S^2$

Cremona $\sigma\colon B_{p_1,\dots,p_4}S^2 \cong B_{q_1,\dots,q_4}S^2$, $\exists\Phi \in \mathrm{Aut}(S^2)$ tel que $\Phi(p_i) = q_i$, on obtient $\Phi \circ \sigma$:

$B_{p_1,\dots,p_4}S^2 \xrightarrow{\sigma} B_{q_1,\dots,q_4}S^2 \xrightarrow{\Phi} B_{p_1,\dots,p_4}S^2$

Proposition

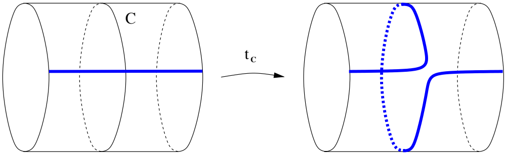
Les transformations de Cremona agissent transitivement sur les classes d'isotopie de h rubans de Möbius disjoints dans X_h.

Le mapping class group

M surface compacte lisse
$\mathcal{M}(M, q_1, \ldots, q_n) := \pi_0(\mathrm{Diff}(M, q_1, \ldots, q_n))$

Théorème (Dehn 1938)

Lorsque M est orientable, $\mathcal{M}$ est engendré par les twists de Dehn autour des courbes simples fermées :



Lorsque M est non orientable, les twists de Dehn engendrent un sous-groupe d'indice 2 dans $\mathcal{M}$, il manque les cross-cap slides.

Réduction de l'ensemble des générateurs de $\mathcal{M}(X_h)$

Rappel $X_h = B_{p_1,\dots,p_h}S^2$

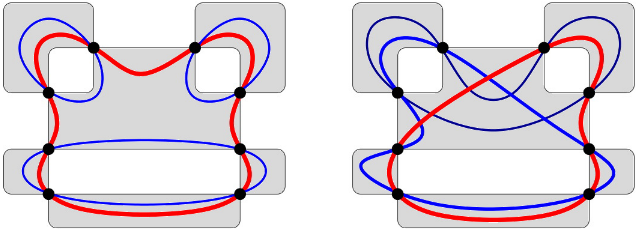
Théorème (Chillingworth (1969), Korkmaz (2002))

Les twists autour des relèvements de courbes simples fermées de S^2 passant par un nombre pair des p_i suffisent pour engendrer $\mathcal{M}$.

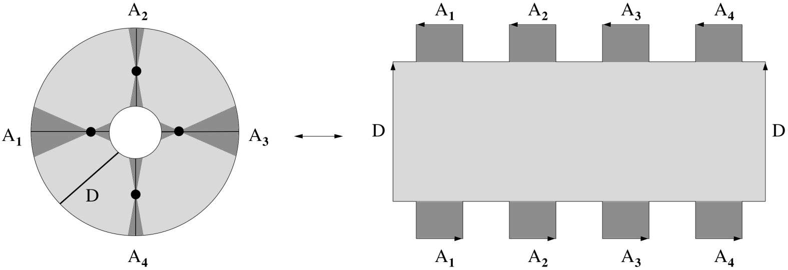
Corollaire (A l'aide de la relation de la lanterne)

Les twists de Dehn autour des relèvements de courbes simples fermées de S^2 passant par 0, 2 ou 4 des p_i suffisent.

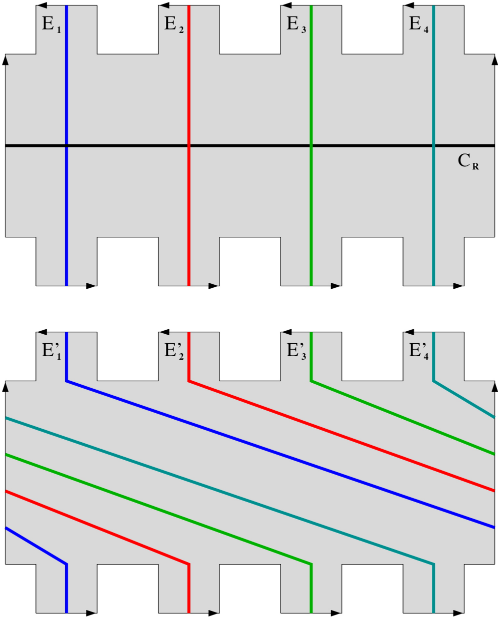
Preuve du corollaire pour 8 points



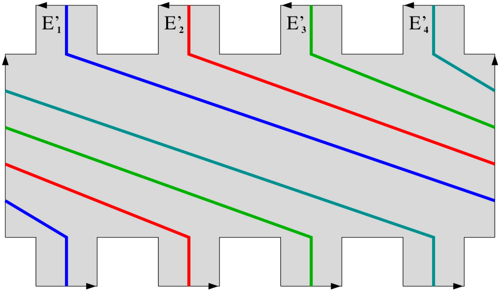
Deux modèles de l'anneau éclaté en 4 points

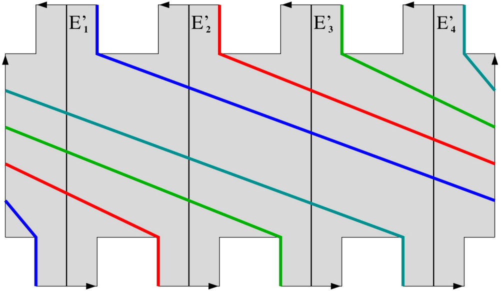


4 courbes exceptionnelles et twist de Dehn autour de C_R

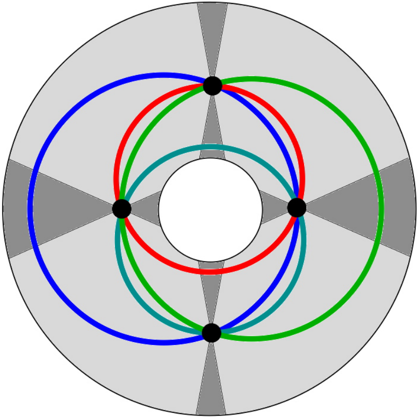


Déformation





Images des 4 courbes exceptionnelles

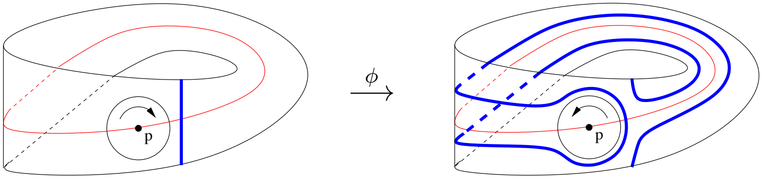


La transformation de Cremona avec 4 points bases réels représente le twist de Dehn autour de C_R passant par les 4 points bases.

Cross-cap slide ($h \geq 2$)

Soit $X_h = B_{q,p,p_3,\dots p_h} S^2$, et $D \subset S^2$ un disque contenant q, p et aucun des autres points.

Considérons le ruban de Möbius $B_q D$ et faisons glisser un petit disque autour de la courbe rouge :



Enfin recollons sur $B_q S^2 \setminus B_q D$.

Réalisé par une transformation de Cremona avec 2 points bases réels.

Théorème

$\forall h$, les transformations de Cremona avec $4, 2$ ou 0 points bases réels engendrent le mapping class group (non orientable) $\mathcal{M}(X_h)$.

Remarque essentielle

Les modèles X_h sont-ils trop particuliers ?
On appelle surface rationnelle toute surface birationnelle à la sphère quadrique S^2.

Théorème (Biswas, Huisman 2007)

Soient X et Y deux surfaces rationnelles, alors X est isomorphe à Y si et seulement si X est difféomorphe à Y.