

Frédéric Mangolte

**VARIÉTÉS ALGÈBRIQUES
RÉELLES**

Frédéric Mangolte

Laboratoire angevin de recherche en mathématiques (LAREMA),
Université d'Angers, CNRS, 2, bd Lavoisier, 49045 Angers Cedex 01.

E-mail : frederic.mangolte@univ-angers.fr

Url : <http://www.math.univ-angers.fr/~mangolte>

Classification mathématique par sujets (2000). — 14P.

Mots clefs. — Variété algébrique réelle.

11 décembre 2019

À mes enfants Gustave Mangolte et Jeanne Mangolte,

VARIÉTÉS ALGÈBRIQUES RÉELLES

Frédéric Mangolte

TABLE DES MATIÈRES

Préface	1
Introduction, modèles algébriques des variétés lisses	3
1. Variétés algébriques	11
1.1. Variétés algébriques : points ou spectres ?.....	11
1.2. Ensembles algébriques affines et projectifs.....	13
1.3. Variétés algébriques abstraites.....	37
1.4. Topologie euclidienne.....	49
1.5. Dimension, points non singuliers.....	52
1.6. Courbes planes.....	66
1.7. Parapluies.....	72
Solution des exercices du chapitre 1.....	75
2. \mathbf{R}-variétés	85
2.1. Structures réelles sur une variété complexe.....	86
2.2. \mathbf{R} -variétés et variétés algébriques réelles.....	99
2.3. Complexification d'une variété réelle.....	111
2.4. \mathbf{R} -variétés vs variétés algébriques réelles vs schémas sur \mathbf{R}	118
2.5. Faisceaux cohérents et fibrés algébriques.....	122
2.6. Diviseurs sur une \mathbf{R} -variété projective.....	127
2.7. \mathbf{R} -courbes planes.....	142
Solution des exercices du chapitre 2.....	148
3. Topologie des variétés avec involution	153
3.1. Homologie et cohomologie des \mathbf{R} -variétés.....	154
3.2. Théorie de Smith.....	162
3.3. Majoration des nombres de Betti.....	167
3.4. Forme d'intersection sur une \mathbf{R} -variété de dimension paire.....	173

3.5. Classification des \mathbf{R} -courbes et XVI ^e problème de Hilbert.....	183
3.6. Variétés Galois-Maximales.....	189
3.7. Cycles algébriques.....	198
Solution des exercices du chapitre 3.....	208
4. Surfaces.....	211
4.1. Courbes et diviseurs sur les surfaces complexes.....	213
4.2. Exemples de \mathbf{R} -surfaces.....	226
4.3. \mathbf{R} -surfaces minimales.....	234
4.4. Surfaces rationnelles, unirégliées ($\kappa = -\infty$).....	244
4.5. Surfaces K3, d'Enriques, abéliennes, bielliptiques ($\kappa = 0$).....	268
4.6. Surfaces elliptiques ($\kappa \leq 1$).....	283
4.7. Surfaces de type général ($\kappa = 2$).....	292
Solution des exercices du chapitre 4.....	306
5. Approximations algébriques.....	309
5.1. Modèles rationnels.....	309
5.2. Applications lisses et applications régulières.....	310
5.3. Applications à valeurs dans les sphères.....	317
5.4. Difféomorphismes et applications birégulières.....	335
5.5. Faux plans réels.....	351
6. Variétés de dimension 3.....	355
6.1. La conjecture de Nash de 1952 à 2000 en passant par 1914.....	355
6.2. Les 3-variétés réelles unirégliées de 2000 à 2012.....	365
6.3. Questions et conjectures.....	372
Appendices.....	373
A. Algèbre commutative.....	375
A.1. Limites inductives.....	375
A.2. Anneaux, idéaux premiers, idéaux maximaux, modules.....	376
A.3. Localisation.....	378
A.4. Produit tensoriel.....	381
A.5. Algèbres entières, théorème des zéros (Nullstellensatz).....	383
A.6. Modules quadratiques sur \mathbf{Z} , réseaux.....	386
A.7. Involutions anti-linéaires.....	388
Solution des exercices de l'appendice A.....	390
B. Topologie.....	391
B.1. Séparation.....	391
B.2. Ensembles semi-algébriques.....	392
B.3. Complexes simpliciaux, homologie.....	393
B.4. Théorème des coefficients universels.....	395

B.5. Variétés topologiques et différentielles, orientabilité.....	398
B.6. Cohomologie.....	404
B.7. Dualité de Poincaré.....	406
B.8. Variétés de dimension 3.....	412
C. Faisceaux, espaces annelés.....	419
C.1. Faisceaux.....	419
C.2. Espace étalé dans X	421
C.3. Fibres d'un faisceau.....	422
C.4. Faisceau des sections d'un espace étalé.....	427
C.5. Espaces annelés.....	429
C.6. Faisceaux cohérents.....	432
C.7. Variétés algébriques sur un corps algébriquement clos.....	434
D. Géométrie analytique.....	435
D.1. Espaces analytiques complexes, fonctions holomorphes.....	435
D.2. Variétés analytiques complexes.....	437
D.3. Variétés kählériennes, théorie de Hodge.....	438
D.4. Invariants numériques.....	448
D.5. Variétés projectives.....	451
D.6. Variété de Picard, variété d'Albanese.....	452
D.7. Théorème de Riemann-Roch.....	456
D.8. Théorèmes d'annulation.....	456
D.9. Autres théorèmes fondamentaux.....	457
E. Surfaces de Riemann et courbes algébriques.....	461
E.1. Genre d'une surface, classification topologique.....	461
E.2. Courbes complexes, surfaces de Riemann.....	464
E.3. Théorème de Riemann-Roch sur une courbe.....	472
E.4. Variété jacobienne associée à une courbe.....	473
F. Éclatements.....	475
F.1. Éclatements de variétés \mathcal{C}^∞	475
F.2. Éclatements de variétés algébriques.....	477
F.3. Topologie des éclatements.....	479
Bibliographie.....	483
Index des notations.....	513
Index terminologique.....	519
Liste d'exemples.....	533
Liste des figures.....	535

PRÉFACE

Ce fichier est une version corrigée, avec les références mises à jour de mon livre "Variétés algébriques réelles", [Man17b]. Il correspond à la version anglaise [Man20]. Les références des énoncés ont été respectées entre les trois versions : française originale, anglaise et celle-ci. Par exemple, Théorème 5.4.16 dans [Man17b] devient Theorem 5.4.16 dans la version anglaise.

Je voudrais remercier Catriona MacLean pour la qualité de sa traduction du texte original qui a permis une amélioration de celui-ci en plusieurs endroits.

Décembre 2019
Frédéric Mangolte

INTRODUCTION, MODÈLES ALGÈBRIQUES DES VARIÉTÉS LISSES

"My work always tried to unite the truth with the beautiful, but when I had to choose one or the other, I usually chose the beautiful."

Hermann Weyl. ⁽¹⁾

« *Pessimisme de l'intelligence, optimisme de la volonté.* »

Antonio Gramsci. ⁽²⁾

S'il est habituel de considérer l'ensemble formé par les zéros réels de polynômes à coefficients réels, il est tout aussi naturel de considérer l'ensemble formé par leurs zéros complexes. Le point de vue défendu dans ce livre est qu'une variété réelle est *aussi* une variété complexe.

Lorsque j'étais doctorant dans les années 1990, il existait essentiellement trois livres de référence en géométrie algébrique réelle. Il y avait bien sûr, outre le livre de Benedetti et Risler [[BR90](#)], « la » référence générale de Bochnak, Coste et Roy [[BCR87](#)] ⁽³⁾ et, en ce qui concerne la classification des surfaces algébriques réelles, l'ouvrage de Silhol [[Si89](#)]. Depuis lors est paru le livre de Degtyarev, Itenberg et Kharlamov [[DIK00](#)] qui complète la classification des surfaces de type spécial récapitulée dans [[Si89](#)] par les avancées importantes obtenues durant la décennie.

Un mathématicien ayant besoin de références en géométrie algébrique réelle se tournera naturellement vers le livre de Bochnak, Coste et Roy. Pour un

1. Attribué à Hermann Weyl (Elmshorn, Allemagne, 1885 - Zurich, 1955). Nous mentionnons un résultat fondamental de Weyl dans la preuve du théorème [E.2.25](#).

2. Antonio Gramsci (Ales, Sardaigne, 1891 - Rome, 1937). Citation extraite d'une lettre à son frère Carlo écrite en prison, le 19 décembre 1929 (Cahiers de prison, Gallimard, Paris, 1978-92). Merci à Michèle Audin pour avoir attiré mon attention sur cette belle maxime.

3. Version anglaise : [[BCR98](#)].

approfondissement sur les surfaces ou les variétés de dimension supérieure, il lui faudra des compléments. Le livre de R. Silhol présente un panorama des surfaces, complet pour l'époque (1989), il est complété par celui de Degtyarev, Itenberg et Kharlamov plus récent (2000).

Ma conviction est que, dans le cadre d'une recherche sur les variétés algébriques réelles, mettre en regard ces trois livres demande déjà un important bagage mathématique et de ce fait de nombreux résultats de base ne sont pas aisément accessibles. En effet, [BCR87] considère les germes de variétés réelles plutôt que les variétés définies sur \mathbf{R} au sens des schémas, ces germes seront les *variétés algébriques réelles* de notre chapitre 1. De son côté, [Sil89] qui est rédigé dans le langage des *schémas sur \mathbf{R}* est d'un abord parfois abrupt pour ceux qui s'intéressent aux applications topologiques, le passage du schéma sur \mathbf{R} au couple formé par un schéma sur \mathbf{C} muni d'une structure réelle n'étant, encore une fois, pas si facile sans un certain bagage. À l'inverse, [DIK00] considère le point de vue « variétés complexes munies d'une involution anti-holomorphe » qui seront les \mathbf{R} -variétés de notre chapitre 2, de ce fait le point de vue topologique est plus accessible, mais reste difficile à relier aux énoncés schématiques.

Ce livre a pour ambition de toucher aux fondements, à la topologie, aux géométries, aux singularités et à l'algèbre des variétés algébriques réelles dans leurs trois acceptions énumérées ci-dessus. Les premiers chapitres se veulent accessibles aux doctorants et aux chercheurs non spécialistes. Par rapport aux trois ouvrages cités, cet opus, en sus de preuves connues rédigées dans un langage homogène, contient de nombreux compléments sur la topologie des surfaces algébriques réelles, la géométrie birationnelle de ces surfaces et une partie nouvelle sur les variétés de dimension 3 (d'après les travaux de Kollár et al.).

Avant d'entrer dans le vif du sujet, nous proposons, à titre de motivation générale, une discussion des conjectures de Nash.

Modèles algébriques des variétés lisses. — En tant que variété différentielle, une courbe lisse fermée M est difféomorphe au cercle $\mathbf{S}^1 := \{(x, y) \in \mathbf{R}^2, x^2 + y^2 = 1\}$. On dit que la variété M admet un *modèle algébrique réel*⁽⁴⁾ (en l'occurrence la courbe algébrique \mathbf{S}^1). En dimension quelconque, on sait depuis Nash et Tognoli que toute variété \mathcal{C}^∞ compacte admet un modèle algébrique réel. Plus précisément, soit M une telle variété, il existe des polynômes

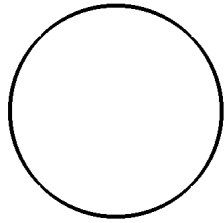
4. Nous reviendrons sur cette notion au chapitre 5, voir la définition 5.1.1.

réels $P_1(x_1, \dots, x_m), \dots, P_r(x_1, \dots, x_m)$ tels que le lieu de leurs zéros communs

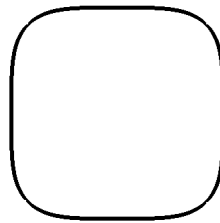
$$X(\mathbf{R}) := \{x \in \mathbf{R}^m \text{ tels que } P_1(x) = \dots = P_r(x) = 0\}$$

est lisse ⁽⁵⁾ et difféomorphe à M (théorèmes de Nash et de Tognoli ci-dessous).

L'existence de modèles étant avérée pour une variété donnée M , existe-t-il des modèles « plus simples ⁽⁶⁾ » que les autres ? Revenons à l'exemple d'une courbe lisse compacte M . On a vu le modèle \mathbf{S}^1 , mais bien entendu, si d est un entier pair non nul, $X_d := \{(x, y) \in \mathbf{R}^2, x^d + y^d = 1\}$ est aussi un modèle algébrique réel de M .

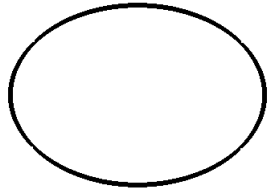


$X_2 = \mathbf{S}^1$



X_4

De même l'ellipse Y d'équation $\frac{1}{2}x^2 + y^2 = 1$ et la courbe quartique Z d'équation $-x(1-x-y)^3 + y^2(1-x-y)^2 - \frac{1}{2}xy^3 = 0$ sont des modèles de M .



Y



Z

On pourrait dire que \mathbf{S}^1 et Y sont des modèles algébriques réels « simples » de M parce que le degré de leurs équations est minimal. Mais une variété algébrique abstraite ne possède pas de degré bien défini (tous les exemples précédents sont des courbes planes). On préfère considérer la topologie de la variété complexe associée. Dans le cas de \mathbf{S}^1 par exemple, il s'agit de $\{(x, y) \in \mathbf{C}^2, x^2 + y^2 = 1\}$. Cette courbe complexe n'est pas compacte mais en ajoutant deux points à l'infini (correspondant aux directions complexes $\pm i$), elle devient isomorphe à la sphère de Riemann $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ dont la variété \mathcal{C}^∞ compacte sous-jacente est une surface orientable de genre 0. Les modèles Y , X_d et

5. Grâce au théorème de résolution des singularités d'Hironaka (théorème 1.5.54), on peut même supposer que le lieu des zéros complexes (réels et non réels) est lisse.

6. Voir aussi [Kol01c, LV06].

Z étant (toujours à quelques points près) des courbes projectives planes irréductibles, la formule du genre $g = (d-1)(d-2)/2$ nous indique que le genre de Y est 0, que X_4 et Z sont de genre 3 et que le genre de X_d croît quadratiquement en fonction de d . En dimension 1, un modèle sera donc « simple » s'il est de genre nul. En dimension plus grande que 1, la complexité topologique augmente et on ne peut plus se contenter d'un entier pour déterminer les modèles algébriques réels simples. Pour les courbes, on vient de voir qu'un modèle simple est « proche » de $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$. En dimension n , les variétés *rationnelles* (nous les définissons plus loin dans cette introduction et nous y revenons au chapitre 1 avec la définition 1.3.37) sont des variétés algébriques « proches » de \mathbf{P}^n qui généralisent les courbes algébriques isomorphes à \mathbf{P}^1 à quelques points près.

Théorèmes de Nash et Tognoli. — Lorsqu'une variété algébrique $X \subset \mathbf{P}^m(\mathbf{C})$ (définie par des polynômes homogènes à coefficients réels) possède au moins un point réel non singulier, on a $\dim_{\mathbf{R}} X = 2 \dim_{\mathbf{R}} X(\mathbf{R})$. En particulier, lorsque la variété algébrique complexe X est non singulière et si le lieu réel $X(\mathbf{R}) = X \cap \mathbf{P}^m(\mathbf{R})$ est non vide, les sous-ensembles algébriques $X \subset \mathbf{P}^m(\mathbf{C})$ et $X(\mathbf{R}) \subset \mathbf{P}^m(\mathbf{R})$ sont munis chacun d'une structure de sous-variété différentielle compacte de classe \mathcal{C}^∞ . (On renvoie au §1.5 pour les définitions de point non singulier et de dimension d'une variété algébrique.)

Réciproquement, étant donnée une variété \mathcal{C}^∞ , peut-on la considérer comme lieu des points d'une variété algébrique lisse ? Il est tout à fait clair qu'en général, une variété \mathcal{C}^∞ n'est difféomorphe à aucune variété algébrique *complexe*. En effet, la variété différentielle sous-jacente à une variété complexe lisse est orientable et de dimension paire. Par ailleurs, bien d'autres obstructions plus fines sont connues, voir par exemple [FM94] pour des résultats modernes. En revanche, Nash a prouvé qu'il n'y a pas d'obstruction en réel dans le cas compact.

Théorème (Nash 1952). — *Si M est une variété \mathcal{C}^∞ compacte connexe sans bord, alors il existe une variété algébrique projective⁽⁷⁾ X dont une composante connexe $A \subset X(\mathbf{R})$ du lieu réel est difféomorphe à M ,*

$$M \approx A \hookrightarrow X(\mathbf{R}).$$

On pourra lire une preuve de ce théorème dans [Nas52], [BCR98, Théorème 14.1.8] ou [Kol17, Theorem 2].

7. C'est-à-dire définie par des polynômes homogènes à coefficients réels.

À la suite de son théorème, Nash propose deux conjectures qui en renforcent la conclusion. La première de ces conjectures affirme qu'il existe une variété X telle que $X(\mathbf{R}) \approx M$. Cette conjecture a été prouvée par A. Tognoli au début des années 1970.

Théorème (Tognoli 1973). — *On peut, dans l'énoncé de Nash, imposer $X(\mathbf{R})$ connexe.*

La preuve ([Tog73] ou [BCR98, Théorème 14.1.10]) utilise un résultat profond de la théorie du cobordisme qui affirme que toute variété \mathcal{C}^∞ compacte est cobordante à un ensemble algébrique réel compact non singulier.

Il est alors aisé de construire une variété algébrique réelle dont le lieu réel est la réunion des lieux réels de variétés données a priori.

Corollaire (Théorème de Nash-Tognoli). — *Si M est une variété \mathcal{C}^∞ compacte sans bord, alors il existe une variété algébrique projective X dont le lieu réel est difféomorphe à M :*

$$M \approx X(\mathbf{R}).$$

Il existe en fait non pas un, mais une infinité de modèles algébriques distincts pour une variété différentielle donnée. Le théorème ci-dessous est extrait de [BK89, Theorem 1.1] complété par [Bal91], voir aussi [BK91].

Anticipons sur la définition 1.3.27 : des sous-variétés algébriques $X \subset \mathbf{P}^n(K)$ et $Y \subset \mathbf{P}^N(K)$ sont birationnellement équivalentes s'il existe des ouverts de Zariski denses $U \subset X$, $V \subset Y$ et un isomorphisme $U \xrightarrow{\cong} V$ défini par des fractions rationnelles à coefficients dans K .

Théorème. — *Soit M une variété \mathcal{C}^∞ compacte sans bord de dimension non nulle. Il existe une infinité non dénombrable de modèles algébriques réels deux à deux non birationnellement équivalents.*

Une variété algébrique $X \subset \mathbf{P}^N(K)$ de dimension n est *rationnelle sur K* si et seulement si elle est birationnellement équivalente à l'espace projectif $\mathbf{P}^n(K)$, c'est-à-dire s'il existe des ouverts de Zariski denses $U \subset X$, $V \subset \mathbf{P}^n(K)$ et un isomorphisme $U \xrightarrow{\cong} V$ défini par des fractions rationnelles à coefficients dans K .

Exemples. — 1. L'éclatement d'une variété le long d'une sous-variété (voir l'appendice F) est un morphisme birationnel.
2. Les variétés $\mathbf{P}^n(K)$ et K^n sont rationnelles sur K .

3. La surface $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$ munie de la structure réelle produit qui fait que $(\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1)(\mathbf{R}) \approx \mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^1$, les surfaces de Hirzebruch \mathbf{F}_k munies de leur structures réelles canoniques (voir la définition 4.2.1) sont des exemples de surfaces rationnelles sur \mathbf{R} .

La seconde conjecture de Nash est l'énoncé suivant :

Conjecture (Nash 1952). — *Pour toute variété \mathcal{C}^∞ compacte connexe sans bord M , il existe une variété algébrique X rationnelle dont le lieu réel est difféomorphe à M .*

Nous apprendrons au chapitre 1, que lorsqu'une variété algébrique est irréductible, son anneau des fonctions rationnelles est un corps appelé *corps des fonctions* de la variété et que, de plus, le corps des fonctions d'une variété algébrique (intègre) de dimension n sur K est une extension de degré fini d'un corps de fractions rationnelles à n indéterminées $K(X_1, \dots, X_n)$. La variété X est alors rationnelle si et seulement si son corps des fonctions est *isomorphe* à $K(X_1, \dots, X_n)$. La conjecture de Nash est donc beaucoup plus forte que le théorème de Nash puisqu'elle affirme que l'on peut choisir X avec un corps des fonctions de degré 1 sur $\mathbf{R}(X_1, \dots, X_n)$ quel que soit M .

Mais cette conjecture est erronée. Nous le verrons au chapitre 4 pour la dimension 2, puis en dimension supérieure au chapitre 6. De sorte qu'il existe des variétés \mathcal{C}^∞ dont aucun modèle algébrique réel n'est rationnel. En somme, dans la recherche du modèle algébrique réel « le plus simple » d'une variété \mathcal{C}^∞ donnée, il n'y a pas de réponse globale. L'un des thèmes récurrents dans cet ouvrage est en quelque sorte réciproque : la détermination des variétés \mathcal{C}^∞ réalisable par un modèle algébrique réel appartenant à une classe donnée *a priori*.

Pour caractériser un telle classe de modèles, on peut, comme dans la conjecture de Nash, se donner une contrainte birationnelle sur le modèle abstrait ou, plus classiquement se limiter aux variétés données par une seule équation, notamment les courbes planes et les surfaces de \mathbf{P}^3 de « petit » degré donné. Voici quelques exemples de questions spécifiques abordées dans cet ouvrage : quels types topologiques sont réalisables par le lieu réel d'une variété rationnelle, d'une surface de degré 4 dans \mathbf{P}^3 ? À l'opposé, quel est le degré minimal d'un modèle algébrique réel dans \mathbf{P}^3 d'une surface orientable de genre 11? D'une réunion disjointe de 23 surfaces compactes connexes? Dans le même ordre d'idées, on trouvera au chapitre 3, une discussion de la première partie

du célèbre XVI^e problème de Hilbert, qui couronne les sections sur les courbes planes des chapitres 1 et 2.

Remerciements. — Nombreux sont ceux qui m’ont apporté leurs encouragements tout au long de ces presque quatre années d’écriture. Parmi eux, je voudrais plus particulièrement remercier pour leurs relectures, corrections, améliorations et soutien (par ordre alphabétique) : Mouadh Akriche, Mohamed Benzerga, Jérémy Blanc, Erwan Brugallé, Fabrizio Catanese, Michel Coste, Julie Déserti, Adrien Dubouloz, Denis Eckert, Éric Edo, Marianne Fabre, José Fabre, Goulwen Fichou, Michel Granger, Lucy Halliday, Ilia Itenberg, Viatcheslav Kharlamov, János Kollár, Wojciech Kucharz, Jacques Lafontaine, Stéphane Lamy, Gustave Mangolte, Jeanne Mangolte, Jean-Philippe Monnier, Delphine Pol, Ronan Terpereau, Olivier Wittenberg, Mikhaïl Zaidenberg, Susanna Zimmermann, ainsi que les trois rapporteurs anonymes qui ont eux aussi permis de nombreuses améliorations du texte initial.

CHAPITRE 1

VARIÉTÉS ALGÈBRIQUES

1.1. Variétés algébriques : points ou spectres ?

Nous avons fait le choix dans ce chapitre de privilégier un point de vue que nous qualifierons de *naïf* (par opposition au point de vue schématique) qui consiste à dire qu'une variété algébrique est un ensemble muni d'une structure d'espace topologique et d'un faisceau de fonctions dites régulières. Le point de vue de la théorie des schémas serait de partir d'un anneau (qui serait l'anneau des fonctions régulières *a posteriori*) et d'en déduire un espace topologique : son spectre. Il y a plusieurs différences fondamentales avec ce changement de perspective. En premier lieu, le spectre possède plus de points que l'espace naïf ; par exemple dans le cas d'un corps algébriquement clos, ce dernier correspond aux points fermés du spectre (c'est-à-dire au spectre maximal). En second lieu, lorsque le corps n'est pas algébriquement clos, la situation se complique encore. Par exemple l'ensemble algébrique $V := \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 0\}$ est réduit au seul point $(0, 0)$. Le point de vue schématique nous dit que la variété V « est » l'équation. En particulier, la variété est la réunion des droites complexes L et \bar{L} d'équations respectives $x - iy = 0$ et $x + iy = 0$ dans \mathbf{C}^2 . Le point de vue naïf nous dit que l'ensemble V « est » le point $(0, 0)$ (l'intersection des droites L et \bar{L}) et nous amène donc à considérer que V est en fait donné par les équations $x = 0, y = 0$. Au passage, l'information sur les droites L et \bar{L} est perdue (voir l'exemple 1.5.20).

Nous en resterons donc au point de vue naïf tout en remédiant à sa faiblesse la plus criante, à partir du chapitre 2, en associant des complexifications aux variétés réelles. En revanche, nous ne ferons pas l'impasse sur le langage des faisceaux, outil indispensable et accessible avec un minimum d'effort. À toutes fins utiles, des rappels sont regroupés en appendice C.

Nous avons voulu éviter « le passage obligé » par l'apprentissage de la théorie des schémas qui est ardu et dont les subtilités nous semblent moins immédiatement nécessaires pour des corps tels que \mathbf{C} et \mathbf{R} . Qui plus est, sur ces corps, les variétés sont naturellement munies d'une topologie plus forte que la topologie de Zariski. Il nous a semblé moins acrobatique pour l'intuition de considérer ces deux topologies sur le même ensemble naïf. Nous reviendrons en fin de chapitre 2 sur le point de vue schématique.

En conclusion, le lecteur qui n'envisage pas d'investir dans l'apprentissage de la théorie des schémas pourra sans soucis lire le présent livre. En revanche, le lecteur qui se destine à la géométrie algébrique a tout intérêt à connaître cette théorie (nous conseillons pour débiter le cours d'Antoine Ducros [Duc14] suivi par exemple du livre de Qing Liu [Liu02]). Nous avons ajouté de nombreux commentaires à destination des utilisateurs de schémas.

Dans ce premier chapitre, nous passons en revue les énoncés classiques de géométrie algébrique sur un corps quelconque avec une insistance particulière sur le corps des nombres complexes et celui des nombres réels. En effet dans de nombreux ouvrages traitant de géométrie algébrique élémentaire, les énoncés généraux ont leur portée restreinte par l'habitude de supposer le corps de base algébriquement clos et dans ceux traitant du cas des corps non algébriquement clos, c'est le plus souvent des questions d'arithmétiques qui sont visées ; lorsque le cas du corps \mathbf{R} est traité, les notions classiques sur \mathbf{C} sont considérées comme acquises. En résumé, notre ambition est de donner les éléments nécessaires pour faire de la géométrie algébrique sur un corps non algébriquement clos de caractéristique nulle en bénéficiant d'une topologie raisonnablement riche tout en utilisant les formidables résultats de la théorie sur \mathbf{C} .

Nous concluons cette introduction par une dernière remarque d'importance. Sur \mathbf{R} ou \mathbf{C} , une variété algébrique est naturellement munie d'une structure analytique et de ce fait les variétés analytiques apparaissent régulièrement dans le cours du livre. Nous avons choisi de repousser les rappels concernant ces dernières en appendice D pour ne pas surcharger le lecteur débutant. Les différentes acceptions de variété algébrique réelle rendent le sujet déjà suffisamment riche et compliqué. Comme pour les schémas, on pourra omettre en première lecture les allusions aux variétés analytiques. À quelques exceptions près, les preuves proposées ne nécessitent pas de recours à ces dernières. En effet, on est souvent amené à se restreindre aux variétés projectives non singulières et la correspondance entre les variétés algébriques projectives et les variétés analytiques complexes projectives est bien comprise, voir la section D.5, malgré le changement radical de topologie : Zariski (définition 1.2.3)

pour la structure algébrique, euclidienne (définition 1.4.1) pour la structure analytique. Dans le cas lisse (attention à cette notion piège, voir la section 1.5), on peut passer d'une topologie à l'autre sans commettre de faute d'intuition. En revanche, dès qu'il s'agit de variétés singulières, il est essentiel de distinguer la structure considérée, on connaît des exemples de singularités algébriques qui sont lisses du point de vue analytique, voir l'exemple 1.5.1.

1.2. Ensembles algébriques affines et projectifs

(Les notions nécessaires d'algèbre commutative ont été regroupées dans l'appendice A.)

Les ensembles algébriques affines sont les modèles locaux des variétés algébriques abstraites. Dans le but de formaliser cette idée, nous fixons un corps de base K et donnons une définition locale des fonctions (c'est-à-dire des morphismes vers K) de notre catégorie des variétés algébriques de corps de base K , ce sont les fonctions régulières (définition 1.2.33). Lorsque le corps de base est algébriquement clos, et si l'on considère un sous-ensemble algébrique d'un espace affine donné, les fonctions régulières correspondent aux restrictions des fonctions polynomiales (théorème 1.2.50). En revanche, lorsque le corps de base est le corps \mathbf{R} des nombres réels, cette correspondance n'est plus valable et les fonctions régulières correspondent alors aux restrictions des fonctions rationnelles qui n'ont pas de pôles réels (théorème 1.2.52).


Espace affine. — Soient K un corps et n un entier naturel. Il est habituel de noter K^n l'ensemble des n -uplets d'éléments de K muni de sa structure naturelle de K -espace vectoriel (par convention, $K^0 = \{0\}$ est l'espace vectoriel nul et lorsque $n = 0$ la notation $K[X_1, \dots, X_n]$ pour l'anneau des polynômes à coefficients dans K désigne l'anneau K des polynômes constants). Lorsque $K = \mathbf{R}$ ou \mathbf{C} , on sous-entend le plus souvent que K^n est un espace vectoriel topologique de dimension finie puisque toutes les topologies provenant d'une norme sont équivalentes. La topologie de Zariski dont nous rappelons la définition ci-dessous n'appartient pas à cette catégorie, elle n'est même pas séparée (voir l'appendice B.1).

Définition 1.2.1. — Soient K un corps et n un entier naturel. Un sous-ensemble F de K^n est un *ensemble algébrique affine* si F est le lieu d'annulation d'un ensemble de polynômes à coefficients dans K . Autrement dit l'ensemble

F est algébrique s'il existe $P_1, \dots, P_l \in K[X_1, \dots, X_n]$ tels que ⁽¹⁾

$$F = \{(x_1, \dots, x_n) \in K^n \mid P_1(x_1, \dots, x_n) = \dots = P_l(x_1, \dots, x_n) = 0\}.$$

On vérifie rapidement que les ensembles algébriques sont les fermés d'une topologie appelée *topologie de Zariski*. L'espace affine $\mathbf{A}^n(K)$ de dimension n sur K est l'ensemble K^n muni de la topologie de Zariski. On parlera aussi de topologie de Zariski sur $F \subset \mathbf{A}^n(K)$ pour la topologie induite par la topologie de Zariski de $\mathbf{A}^n(K)$.

Exercice 1.2.2. —  Soit K un corps infini. Montrer que la topologie de Zariski de $\mathbf{A}^2(K)$ est strictement plus fine que le produit des topologies de Zariski de $\mathbf{A}^1(K)$. Voir l'appendice B.1 et plus particulièrement l'exercice B.1.4 pour des développements dans cette direction.

Soit U un sous-ensemble de $\mathbf{A}^n(K)$, on note $\mathcal{I}(U)$ l'idéal de $K[X_1, \dots, X_n]$ formé des polynômes nuls sur U . Si F est un fermé de $\mathbf{A}^n(K)$, la K -algèbre quotient $\mathcal{A}(F) := K[X_1, \dots, X_n]/\mathcal{I}(F)$ est la K -algèbre des coordonnées affines de F .

Espace projectif. — Soient K un corps et n un entier naturel. L'espace projectif $\mathbf{P}(K^{n+1})$ est l'ensemble des orbites de l'action du groupe multiplicatif K^* sur l'ensemble $K^{n+1} \setminus \{0\}$ donnée par $(x_0, \dots, x_n) \mapsto (\lambda x_0, \dots, \lambda x_n)$. L'orbite de (x_0, \dots, x_n) sous cette action est notée $(x_0 : \dots : x_n)$. Un polynôme en $n+1$ variables ne définit pas une fonction sur $\mathbf{P}(K^{n+1})$ mais le lieu d'annulation d'un polynôme homogène est bien déterminé ⁽²⁾.

Définition 1.2.3. — Soient K un corps et n un entier naturel. Un sous-ensemble F de $\mathbf{P}(K^{n+1})$ est un *ensemble algébrique projectif* si F est le lieu d'annulation d'un ensemble de polynômes homogènes à coefficients dans K . Autrement dit l'ensemble F est algébrique s'il existe des polynômes homogènes $P_1, \dots, P_l \in K[X_0, \dots, X_n]$, tels que

$$F = \{(x_0 : \dots : x_n) \in \mathbf{P}(K^{n+1}) \mid P_1(x_0, \dots, x_n) = \dots = P_l(x_0, \dots, x_n) = 0\}.$$

1. L'anneau $K[X_1, \dots, X_n]$ étant noethérien, un nombre fini de polynômes suffit, voir l'exemple A.3.14.

2. Un polynôme homogène ne détermine pas une fonction à valeurs dans K mais plutôt une section d'un « fibré en K », voir l'exercice 2.6.15.

De façon analogue au cas affine, on appelle *topologie de Zariski* sur $\mathbf{P}(K^{n+1})$ la topologie dont les fermés sont les lieux des zéros d'ensembles de polynômes homogènes. Muni de cette topologie, l'ensemble $\mathbf{P}(K^{n+1})$ est l'*espace projectif* $\mathbf{P}^n(K)$ de dimension n sur K .

Définition 1.2.4. — Si U un sous-ensemble de $\mathbf{P}^n(K)$, on note encore $\mathcal{I}(U)$ l'idéal *homogène* de $K[X_0, \dots, X_n]$ formé des polynômes qui s'annulent sur U . Si F est un fermé de Zariski de $\mathbf{P}^n(K)$, la K -algèbre quotient

$$\mathcal{S}(F) := K[X_0, \dots, X_n]/\mathcal{I}(F)$$

est la K -algèbre des coordonnées homogènes de F .

Exercice 1.2.5. — Soient $F \in \mathbf{P}^n(K)$ un ensemble algébrique projectif et $I \subset \mathcal{S}(F)$ un idéal homogène. On note \sqrt{I} le radical de I , voir la définition A.2.3. Alors $\mathcal{Z}(I) = \emptyset$ (voir la définition 1.2.12) si et seulement si, ou bien $\sqrt{I} = \mathcal{S}(F)$, ou bien \sqrt{I} est égal à l'idéal homogène $\bigoplus_{d>0} S_d$.

Remarque 1.2.6. — Dans les définitions 1.2.1 et 1.2.3, on a utilisé le terme *dimension*. On définira plus loin la dimension d'un ensemble algébrique (Voir la définition 1.5.9 pour un ensemble algébrique affine) et on vérifiera (voir les exercices 1.5.16 et 1.5.46) que l'espace affine $\mathbf{A}^n(K)$ et l'espace projectif $\mathbf{P}^n(K)$ sont bien de dimension (algébrique) n . Pour l'instant contentons-nous de remarquer que lorsque $K = \mathbf{R}$, l'espace affine $\mathbf{A}^n(\mathbf{R})$ et l'espace projectif $\mathbf{P}^n(\mathbf{R})$ lorsqu'ils sont munis de leur topologie d'espace vectoriel (ou d'espace projectif) sont bien de dimension n en tant que variété différentielle ou topologique. Lorsque $K = \mathbf{C}$ en revanche, la dimension algébrique est la moitié de la dimension en tant que variété topologique. Voir aussi la remarque 1.5.4 à propos de la finitude de la dimension.

Ensembles algébriques et quasi-algébriques. —

Définition 1.2.7. — Un ensemble F est un *ensemble algébrique* sur K si c'est un sous-espace fermé d'un $\mathbf{A}^n(K)$ ou d'un $\mathbf{P}^n(K)$ pour un certain entier n . Un ensemble U est un *ensemble quasi-algébrique* sur K si c'est un ouvert de Zariski d'un ensemble algébrique sur K . On dira *quasi-affine* pour un ouvert d'un ensemble algébrique affine et *quasi-projectif* pour un ouvert d'un ensemble algébrique projectif.

Remarque 1.2.8. — Un ensemble algébrique F sur K est donc un sous-espace fermé d'un espace affine $\mathbf{A}^n(K)$ ou d'un espace projectif $\mathbf{P}^n(K)$. Pour

insister sur la topologie bien particulière utilisée ici, on dit que F est un *fermé de Zariski* de $\mathbf{A}^n(K)$ (ou de $\mathbf{P}^n(K)$).

Exercice 1.2.9. — Un ensemble U est quasi-algébrique sur K si et seulement si c'est un sous-ensemble d'un $\mathbf{A}^n(K)$ ou d'un $\mathbf{P}^n(K)$ vérifiant l'une des conditions équivalentes suivantes :

1. le sous-espace U est une partie *localement fermée* pour la topologie de Zariski, c'est-à-dire que U est l'intersection d'un ouvert et d'un fermé,
2. le sous-espace U est une partie ouverte dans sa clôture de Zariski.

Définition 1.2.10. — Soit $f: K^n \rightarrow K$ une fonction. Le *lieu d'annulation* (ou *ensemble des zéros*) de f est défini par

$$\mathcal{Z}(f) := \{x \in K^n \mid f(x) = 0\}$$

et le *lieu de non annulation* de f est défini par

$$\mathcal{D}(f) := \{x \in K^n \mid f(x) \neq 0\}.$$

Remarque 1.2.11. — Si dans la définition précédente, f est une fonction polynomiale, $\mathcal{Z}(f)$ est un fermé de Zariski de $\mathbf{A}^n(K)$ et $\mathcal{D}(f)$ est un ouvert de Zariski de $\mathbf{A}^n(K)$.

Définition 1.2.12. — Soient K un corps et $I \subset K[X_1, \dots, X_n]$ un idéal. L'*ensemble des zéros* de l'idéal I est noté

$$\mathcal{Z}(I) := \mathcal{Z}_K(I) = \{x \in K^n \mid \forall f \in I, f(x) = 0\}.$$

Plus généralement, si L est une extension de K , l'ensemble des zéros dans L^n de l'idéal I est noté

$$\mathcal{Z}_L(I) := \{x \in L^n \mid \forall f \in I, f(x) = 0\}$$

et l'idéal de $L[X_1, \dots, X_n]$ engendré par I est noté I_L .

En particulier, si I est un idéal de $\mathbf{R}[X_1, \dots, X_n]$, alors $\mathcal{Z}(I) = \mathcal{Z}_{\mathbf{R}}(I)$ est l'ensemble des zéros réels de l'idéal I et $\mathcal{Z}_{\mathbf{C}}(I) = \mathcal{Z}_{\mathbf{C}}(I_{\mathbf{C}})$ est l'ensemble de ses zéros complexes.

Remarques 1.2.13 (Zéros des idéaux). — 1. On peut vérifier que l'idéal de $L[X_1, \dots, X_n]$ engendré par I est en fait isomorphe au produit tensoriel

$$I_L = I \otimes_{K[X_1, \dots, X_n]} L[X_1, \dots, X_n].$$

(voir la proposition A.4.1 qui définit le produit tensoriel \otimes)

2. Bien entendu, comme dans la remarque 1.2.11, $\mathcal{Z}(I)$ est aussi un fermé de Zariski de $\mathbf{A}^n(K)$ et $\mathcal{Z}_L(I)$ est un fermé de Zariski de $\mathbf{A}^n(L)$.
3. On a $Z_L(I) = Z(I_L)$. En particulier, si I est un idéal de $\mathbf{R}[X_1, \dots, X_n]$, alors $I_{\mathbf{C}}$ est un idéal de $\mathbf{C}[X_1, \dots, X_n]$ et $\mathcal{Z}_{\mathbf{C}}(I) = \mathcal{Z}_{\mathbf{C}}(I_{\mathbf{C}}) = \mathcal{Z}(I_{\mathbf{C}})$. La notation $I_{\mathbf{C}}$ désigne donc un idéal de $\mathbf{C}[X_1, \dots, X_n]$ engendré par des polynômes à coefficients réels.

Exercice 1.2.14. — Soit K un corps.

1. Soit F un fermé de $\mathbf{A}^n(K)$, montrer que

$$F = \mathcal{Z}(\mathcal{I}(F)) .$$

2. Soit $I \subset K[X_1, \dots, X_n]$ un idéal, vérifier que

$$I \subseteq \mathcal{I}(\mathcal{Z}(I)) .$$

3. Soit $I \subset K[X_1, \dots, X_n]$ un idéal, montrer que si I n'est pas radical (définition A.2.3), alors

$$I \subsetneq \mathcal{I}(\mathcal{Z}(I)) .$$

4. Trouver un exemple où $I \subset K[X_1, \dots, X_n]$ est un idéal radical mais

$$I \subsetneq \mathcal{I}(\mathcal{Z}(I)) .$$

[Indication : le Nullstellensatz (voir le corollaire A.5.13) impose de chercher un exemple sur un corps K non algébriquement clos.]

Ensembles algébriques irréductibles. —

Définition 1.2.15. — On dit qu'un sous-espace topologique non vide U d'un espace topologique X est *irréductible* si pour toute paire de fermés F_1 et F_2 de X tels que $U \subset F_1 \cup F_2$, on a $U \subset F_1$ ou $U \subset F_2$. Un espace qui n'est pas irréductible est dit *réductible*.

Remarque 1.2.16. — Le fait d'imposer que l'ensemble vide ne soit pas irréductible est une convention qui correspond en algèbre commutative à la convention que l'anneau nul n'est pas intègre. Voir aussi la remarque 1.2.31(4).

Exercice 1.2.17. — Le lecteur pourra montrer à titre d'exercice les assertions suivantes.

1. Un sous-espace $U \subset X$ est irréductible si et seulement s'il est non vide et n'est pas réunion de deux fermés (pour la topologie induite) non vides strictement contenus dans U . En particulier, l'espace X est lui-même irréductible s'il n'est pas vide et s'il ne peut s'écrire comme réunion de deux fermés stricts non vides.
2. Si U est irréductible, tout ouvert non vide de U est dense dans U .

Lemme 1.2.18. — Si $\varphi: X \rightarrow Y$ est une application continue, alors l'image d'un sous-espace irréductible de X est un sous-espace irréductible de Y .

Démonstration. — Soient $U \subset X$ un irréductible et $Y_1 \cup Y_2 \supset \varphi(U)$ une union de fermés de Y . Alors $\varphi^{-1}(Y_i)$, $i = 1, 2$ est un fermé de X et $\varphi^{-1}(Y_1) \cup \varphi^{-1}(Y_2) \supset U$. Comme U est irréductible, on peut supposer que $\varphi^{-1}(Y_1) \supset U$ et donc que $Y_1 \supset \varphi(U)$. On en conclut que $\varphi(U)$ est irréductible. \square

Remarque 1.2.19. — La notion de sous-espace irréductible n'est intéressante que pour des topologies assez grossières comme l'est la topologie de Zariski. Par exemple, le lecteur est invité à montrer que dans un espace topologique séparé, les seuls sous-espaces irréductibles sont les singletons.

Définition 1.2.20. — Les fermés irréductibles maximaux contenus dans U sont appelés les *composantes irréductibles* de U .

Exercice 1.2.21. — (Remarquons que cet exercice devient immédiat avec la proposition 1.2.30.) Soit n un entier naturel non nul.

1. Soit K un corps infini.
 - (a) L'espace affine $\mathbf{A}^n(K)$ est irréductible.
 - (b) L'espace projectif $\mathbf{P}^n(K)$ est irréductible.
2. Si K est fini, ces espaces sont réductibles.

Définition 1.2.22. — Un espace topologique X est *noethérien* (on dit aussi que sa topologie est *noethérienne*) si toute suite décroissante de fermés se stabilise (on dit aussi : « si toute suite décroissante de fermés est stationnaire ») : pour toute suite $F_1 \supset F_2 \supset \dots$ de sous-espaces fermés, il existe un entier r tel que $F_r = F_{r+1} = \dots$.

Exemple 1.2.23. — Pour tout corps K , l'espace affine $\mathbf{A}^n(K)$ est noethérien. En effet, si $F_1 \supset F_2 \supset \dots$ est une suite décroissante de sous-espaces fermés de $\mathbf{A}^n(K)$, alors $\mathcal{I}(F_1) \subset \mathcal{I}(F_2) \subset \dots$ est une suite croissante d'idéaux de l'anneau $K[X_1, \dots, X_n]$ qui est noethérien. La suite d'idéaux se stabilise

donc et nous concluons que la suite $F_1 \supset F_2 \supset \dots$ se stabilise du fait que pour tout i , $F_i = \mathcal{Z}(\mathcal{I}(F_i))$.

Proposition 1.2.24. — *Tout ensemble quasi-algébrique non vide U admet une décomposition unique à l'ordre près en un nombre fini de composantes irréductibles, c'est-à-dire*

$$U = U_1 \cup \dots \cup U_m$$

avec U_i irréductible pour tout i et $U_i \not\subset U_j$ pour $i \neq j$.

Démonstration. — Provient du fait que la topologie de Zariski est noethérienne. \square

Fonctions régulières. —

Définition 1.2.25. — Soient K un corps et $U \subset \mathbf{A}^n(K)$ un ensemble quasi-algébrique. Une fonction $f: U \rightarrow K$ est *polynomiale* s'il existe un polynôme $g \in K[X_1, \dots, X_n]$ tel que pour tout $x \in U$, $f(x) = g(x)$. On note $\mathcal{P}(U)$ la K -algèbre des fonctions polynomiales sur U .

Remarque 1.2.26. — Le polynôme g n'est déterminé par la fonction polynomiale f que modulo l'idéal $\mathcal{I}(U)$. En particulier, si le corps K est fini, l'idéal de l'ensemble algébrique $\mathbf{A}^n(K)$ n'est pas réduit à zéro et un polynôme sur K^n n'est pas déterminé de manière unique par une fonction polynomiale $K^n \rightarrow K$.

Soit $F \subset \mathbf{A}^n(K)$ un ensemble algébrique et soit $\mathcal{I}(F)$ l'idéal de $K[X_1, \dots, X_n]$ formé des polynômes nuls sur F . On identifiera sans précaution $\mathcal{P}(F)$ avec la K -algèbre des coordonnées affines $\mathcal{A}(F) := K[X_1, \dots, X_n]/\mathcal{I}(F)$ en vertu de la proposition suivante.

Proposition 1.2.27. — *Pour tout corps K et pour tout ensemble algébrique $F \subset \mathbf{A}^n(K)$, le morphisme de restriction $g \mapsto g|_F$ induit un isomorphisme*

$$\mathcal{A}(F) \xrightarrow{\cong} \mathcal{P}(F).$$

Démonstration. — Preuve immédiate (exercice). \square

Remarque 1.2.28. — En particulier, si le corps K est infini, l'anneau des fonctions polynomiales sur $\mathbf{A}^n(K)$ est l'anneau des polynômes en n indéterminées

$$\mathcal{P}(\mathbf{A}^n(K)) = K[X_1, \dots, X_n].$$

Remarque 1.2.29. — Remarquons que pour tout sous-ensemble $U \subset K^n$, l'anneau quotient $K[X_1, \dots, X_n]/\mathcal{I}(U)$ est réduit car l'idéal $\mathcal{I}(U)$ est radical (voir la définition A.2.3 et l'exercice A.2.4). Cette « disparition » de la multiplicité, qui identifie par exemple les ensembles algébriques $V := \{x \in K^n \mid f(x) = 0\}$ et $W := \{x \in K^n \mid f^2(x) = 0\}$ ⁽³⁾ se retrouve en géométrie différentielle avec la définition de variété différentielle comme ensemble des zéros d'une submersion. Si K est le corps \mathbf{C} ou le corps \mathbf{R} et si f est une submersion en tout point de V , et donc de W , alors W est une sous-variété différentielle de K^n . Pourtant f^2 n'est certainement une submersion en aucun point de W .

L'une des motivations pour passer à la théorie des schémas est justement qu'elle permet de différencier V et W en tenant compte des éléments nilpotents de l'anneau associé au schéma. Pour une autre illustration de la faiblesse du point de vue naïf, considérons de nouveau l'ensemble algébrique $V := \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 0\}$, alors $\mathcal{I}(V) = (x, y)$ contient strictement l'idéal $(x^2 + y^2)$. Comparer à la remarque 1.2.31(3).

Proposition 1.2.30. — Soit K un corps.

Un ensemble algébrique $F \subset \mathbf{A}^n(K)$ est irréductible si et seulement si son idéal $\mathcal{I}(F)$ est un idéal premier de $K[X_1, \dots, X_n]$ c'est-à-dire si et seulement si son anneau des coordonnées affines $\mathcal{A}(F)$ est un anneau intègre.

Un ensemble algébrique $F \subset \mathbf{P}^n(K)$ est irréductible si et seulement si son idéal homogène $\mathcal{I}(F)$ est un idéal premier de l'algèbre graduée $K[X_0, \dots, X_n]$.

Démonstration. — Exercice facile. □

Remarque 1.2.31 (K algébriquement clos ? $\mathcal{I}(\mathcal{Z}(I))$ vs. I)

1. Si K est algébriquement clos et $I \subset K[X_1, \dots, X_n]$ est un idéal premier, alors $\mathcal{Z}(I) \subset \mathbf{A}^n(K)$ est un espace irréductible.
2. Le polynôme $P(x, y) = (x^2 - 1)^2 + y^2 = x^4 - 2x^2 + 1 + y^2$ est irréductible dans $\mathbf{R}[x, y]$. En effet, les anneaux $\mathbf{R}[x, y] \subset \mathbf{C}[x, y]$ sont tous les deux factoriels ; du fait que $P(x, y) = (x^2 - 1 + iy)(x^2 - 1 - iy)$ dans $\mathbf{C}[x, y]$ et que les polynômes $x^2 - 1 \pm iy$ sont irréductibles sur \mathbf{C} , le polynôme P est irréductible dans $\mathbf{R}[x, y]$. En revanche $\mathcal{Z}(P)$ est un sous-espace réductible de $\mathbf{A}^2(\mathbf{R})$ car

$$\mathcal{Z}(P) = \{(1, 0), (-1, 0)\} = \mathcal{Z}(x - 1, y) \cup \mathcal{Z}(x + 1, y) .$$

3. Ici, f^2 est la fonction qui prend comme valeurs les carrés des valeurs de f .

3. (Voir l'exercice 1.2.14(4).) L'idéal $(x^2 + y^2)$ est premier dans $\mathbf{R}[x, y]$ mais $\mathcal{I}(\mathcal{Z}(x^2 + y^2)) = (x, y)$. Dans $\mathbf{C}[x, y]$, l'idéal $(x^2 + y^2) = ((x - iy)(x + iy))$ n'est pas premier.
4. L'idéal $I = (x^2 + y^2 + 1)$ est premier dans $\mathbf{R}[x, y]$ mais $\mathcal{Z}(I) = \emptyset \subset \mathbf{A}^n(\mathbf{R})$ n'est pas irréductible. En effet, $\mathcal{I}(\mathcal{Z}(I)) = \mathbf{R}[x, y]$ n'est pas un idéal premier de $\mathbf{R}[x, y]$.

Exercice 1.2.32. — Suite de l'exercice 1.2.14(1). Soit U un sous-espace de $\mathbf{A}^n(K)$ ou de $\mathbf{P}^n(K)$, alors U est un fermé de Zariski si et seulement si $U = \mathcal{Z}(\mathcal{I}(U))$.

Définition 1.2.33. — Soit K un corps et $U \subset \mathbf{A}^n(K)$ un ensemble quasi-algébrique. Une fonction $f: U \rightarrow K$ est *régulière en un point* $x \in U$ s'il existe un voisinage V de x dans U et deux polynômes $g, h \in K[X_1, \dots, X_n]$ tels que pour tout $y \in V$, $h(y) \neq 0$ et $f(y) = \frac{g(y)}{h(y)}$.

Dans la définition suivante on prendra garde que les polynômes homogènes g et h ne définissent pas des fonctions sur U mais comme leur degré est identique leur quotient $\frac{g}{h}$ détermine bien une fonction sur U .

Définition 1.2.34. — Soit K un corps et $U \subset \mathbf{P}^n(K)$ un ensemble quasi-algébrique. Une fonction $f: U \rightarrow K$ est *régulière en un point* $x \in U$ s'il existe un voisinage V de x dans U et deux polynômes homogènes de même degré $g, h \in K[X_0, \dots, X_n]$ tels que pour tout $y \in V$, $h(y) \neq 0$ et $f(y) = \frac{g(y)}{h(y)}$.

Définition 1.2.35. — Soit U un ensemble quasi-algébrique sur K . Une fonction $f: U \rightarrow K$ est dite *régulière* si elle est régulière en tout point de U . On note $\mathcal{R}(U)$ la K -algèbre des fonctions régulières sur U .

Remarque 1.2.36. — Bien sûr, pour un ensemble algébrique affine F sur un corps K , toute fonction polynomiale est régulière :

$$\mathcal{A}(F) \xrightarrow{\cong} \mathcal{P}(F) \hookrightarrow \mathcal{R}(F)$$

mais la réciproque est fautive pour $K = \mathbf{R}$ (voir la proposition 1.2.38(1)–(3) ci-dessous et l'exercice 1.2.51(2)).

Exercice 1.2.37. — Vérifier qu'une fonction régulière $f: U \rightarrow K$ est nécessairement continue pour les topologies de Zariski sur U et $K = \mathbf{A}^1(K)$.

Proposition 1.2.38. — (L'algèbre \mathcal{R} est-elle de type fini ?)

1. Soient K un corps et $F \subset \mathbf{A}^n(K)$ un fermé de Zariski, alors $\mathcal{A}(F)$ est une K -algèbre de type fini.

2. De même, la \mathbf{C} -algèbre $\mathcal{R}(\mathbf{C}^n) = \mathcal{R}(\mathbf{A}^n(\mathbf{C}))$ est de type fini.
3. En revanche, la \mathbf{R} -algèbre $\mathcal{R}(\mathbf{R}^n) = \mathcal{R}(\mathbf{A}^n(\mathbf{R}))$ n'est pas de type fini.

Démonstration. — 1. Par définition, $\mathcal{A}(F)$ est un quotient de l'algèbre des polynômes $K[X_1, \dots, X_n]$ et est donc engendrée par un nombre fini d'éléments : les classes de X_1, \dots, X_n .

2. En effet, d'après le théorème 1.2.50 par exemple, $\mathcal{R}(\mathbf{C}^n)$ est isomorphe à $\mathbf{C}[X_1, \dots, X_n]$.
3. Soient A_1, \dots, A_l des éléments de $\mathcal{R}(\mathbf{R}^n)$. Pour $i = 1 \dots l$, la fonction $x \mapsto \frac{1}{1+(x-A_i)^2}$ est régulière sur \mathbf{R}^n mais elle n'appartient pas à l'algèbre engendrée par A_1, \dots, A_l .

□

Germes de fonctions régulières. — À toutes fins utiles, nous renvoyons le lecteur en appendice C pour des rappels de base sur les faisceaux. Revoir en particulier la définition de limite inductive (A.1.2) et de fibre d'un faisceau (C.3.1).

Définition 1.2.39. — Soit K un corps et U un ensemble quasi-algébrique sur K . Le faisceau des fonctions régulières \mathcal{O}_U sur U est le faisceau de K -algèbres dont l'ensemble des sections sur un ouvert $V \subset U$ est la K -algèbre $\mathcal{R}(V)$.

$$\Gamma(V, \mathcal{O}_U) = \mathcal{O}_U(V) := \mathcal{R}(V).$$

Définition 1.2.40. — Soit K un corps et U un ensemble quasi-algébrique sur K . Le germe d'une fonction sur U à valeurs dans K régulière au point x est la classe d'équivalence d'un couple (V, f) où V est un ouvert de U contenant x , f est une fonction régulière sur V , et où l'on identifie deux couples (V, f) et (W, g) si $f = g$ sur un voisinage de x contenu dans $V \cap W$.

On note $\mathcal{O}_x := \mathcal{O}_{U,x}$ la K -algèbre des germes de fonctions sur U à valeurs dans K régulières au point x . Les K -algèbres $\mathcal{O}_{U,x}$ sont alors les fibres du faisceau \mathcal{O}_U :

$$\mathcal{O}_{U,x} = \varinjlim_{V \ni x} \mathcal{O}_U(V)$$

où la limite inductive est considérée pour V parcourant les voisinages ouverts de x dans U (voir la définition C.3.1 et les exemples A.1.3 et A.1.4.)

Nous avons défini les germes de fonctions régulières d'une façon « plus locale » que [Har77, § I.3, page 16]. Lorsque U est irréductible, ce qui est supposé dans [Ibid.], les deux définitions coïncident.

Définition 1.2.41. — Soit x un point d'un ensemble quasi-algébrique U défini sur un corps K et soit A un anneau de fonctions définies sur U et à valeurs dans K . Nous notons $\mathfrak{m}_x := \mathfrak{m}_x^A$ l'idéal maximal de A formé par les fonctions nulles en x .

Rappelons, définition A.3.1, que pour un idéal premier $\mathfrak{p} \subset A$, on note $A_{\mathfrak{p}}$ l'anneau localisé de A en la partie multiplicative $A \setminus \mathfrak{p}$.

Exercice 1.2.42. — Soit K un corps. Montrer que pour tout $x \in \mathbf{A}^n(K)$, l'algèbre $\mathcal{O}_{\mathbf{A}^n(K),x} \subset K[X_1, \dots, X_n]$ est isomorphe à l'algèbre $K[X_1, \dots, X_n]_{\mathfrak{m}_x}$ des fractions rationnelles $\frac{g}{h}$ telles que $h(x) \neq 0$.

Lemme 1.2.43. — Un ensemble quasi-affine $U \subset \mathbf{A}^n(K)$ peut être vu comme un ensemble quasi-projectif $j(U) \subset \mathbf{P}^n(K)$ où $j: \mathbf{A}^n(K) \hookrightarrow \mathbf{P}^n(K)$ est l'injection

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto (1 : x_1 : \dots : x_n).$$

Le morphisme de K -algèbres $j^*: K[X_0, \dots, X_n] \rightarrow K[X_1, \dots, X_n]$ qui substitue $(1, X_1, \dots, X_n)$ à (X_0, \dots, X_n) induit alors un isomorphisme de faisceaux $j_*\mathcal{O}_U \simeq \mathcal{O}_{j(U)}$.

Démonstration. — Exercice facile. □

Exercice 1.2.44. — Soit $P \in K[X_1, X_2]$ un polynôme de degré $d \geq 1$, et $C = \mathcal{Z}(P) \subset \mathbf{A}^2(K)$ la courbe affine plane correspondante. La complétée projective $\widehat{C} := \overline{j(C)}^{\text{Zar}} \subset \mathbf{P}^2(K)$ est l'adhérence de Zariski de $j(C)$ dans le plan projectif. Montrer que \widehat{C} est l'ensemble des zéros du polynôme homogénéisé $\widehat{P} \in K[X_0, X_1, X_2]$ (si $a_{ij}X_1^iX_2^j$ est un monôme de P , alors $a_{ij}X_0^{d-i-j}X_1^iX_2^j$ est le monôme correspondant de \widehat{P}) : $\widehat{C} = \mathcal{Z}(\widehat{P}) \subset \mathbf{P}^2(K)$.

Proposition 1.2.45. — Soient $U \subset \mathbf{P}^n(K)$ un ensemble quasi-projectif, x un point de U et $H \subset \mathbf{P}^n(K)$ un hyperplan ne contenant pas x . L'ouvert $V := \mathbf{P}^n(K) \setminus H$ est alors un voisinage de x isomorphe à un espace affine (V est un exemple d'ouvert principal, voir l'exercice 1.2.60). Notons $j: \mathbf{A}^n(K) \xrightarrow{\cong} V$. Alors les K -algèbres $\mathcal{O}_{U,x}$ et $\mathcal{O}_{j^{-1}(U \cap V), j^{-1}(x)}$ sont isomorphes.

Démonstration. — Soit (W, f) un couple représentant un élément de $\mathcal{O}_{U,x}$. Il existe alors $g, h \in K[X_0, \dots, X_n]$ homogènes de même degré tels que h ne s'annule pas sur l'ouvert W de U et $f = \frac{g}{h}$ sur W . On considère le sous-ensemble $W' = j^{-1}(W \cap V)$ de $j^{-1}(U \cap V)$. C'est un voisinage de $j^{-1}(x)$ dans $j^{-1}(U \cap V)$. On peut toujours supposer que j s'écrit en coordonnées

$(x_1, \dots, x_n) \mapsto (1 : x_1 : \dots : x_n)$. Comme les polynômes g et h sont homogènes et de même degré, la fraction rationnelle $\frac{g(1, X_1, \dots, X_n)}{h(1, X_1, \dots, X_n)}$ détermine une fonction régulière $j^*(f)$ sur W' . Le couple $(W', j^*(f))$ représente un élément de $\mathcal{O}_{j^{-1}(U \cap V), j^{-1}(x)}$.

Réciproquement, soit $(W, f = g/h)$ un couple représentant un élément de

$$\mathcal{O}_{j^{-1}(U \cap V), j^{-1}(x)}.$$

Soit $d = \max(\deg g, \deg h)$, en notant \hat{p} l'homogénéisé de degré d en X_0 d'un polynôme $p \in K[X_1, \dots, X_n]$, la fraction \hat{g}/\hat{h} représente un élément de $\mathcal{O}_{U, x}$. \square

Lorsque F est un ensemble algébrique, pour tout voisinage U de x dans F , on peut identifier $\mathcal{O}_{F, x}$ à l'anneau des fractions de $\mathcal{R}(U)$ relativement à l'idéal maximal $\mathfrak{m}_x^{\mathcal{R}}$ formé par les fonctions régulières nulles en x d'après la proposition suivante.

Proposition 1.2.46. — *Soient K un corps, F un ensemble algébrique sur K , x un point de F et U un voisinage de x dans F . On a un isomorphisme naturel :*

$$\mathcal{O}_{F, x} \simeq \mathcal{R}(U)_{\mathfrak{m}_x^{\mathcal{R}}}.$$

Si de plus F est affine, on a un isomorphisme naturel :

$$\mathcal{O}_{F, x} \simeq \mathcal{P}(U)_{\mathfrak{m}_x^{\mathcal{P}}}.$$

Démonstration. — D'après la proposition 1.2.45, on peut supposer pour la première partie de la proposition que $F \subset \mathbf{A}^n(K)$ est affine. Par l'application naturelle $\mathcal{R}(U) \rightarrow \mathcal{O}_{F, x}$ qui envoie f sur la classe du couple $(U \cap \mathcal{D}(f), f)$, l'image d'une fonction non nulle en x est inversible dans $\mathcal{O}_{F, x}$. En effet, si $f \notin \mathfrak{m}_x^{\mathcal{R}}$, $\frac{1}{f}$ est régulière sur le voisinage $U \cap \mathcal{D}(f)$ de x . D'après la propriété universelle de la localisation (proposition A.3.2), on en déduit un morphisme $\beta: \mathcal{R}(U)_{\mathfrak{m}_x^{\mathcal{R}}} \rightarrow \mathcal{O}_{F, x}$ qui est surjectif. En effet, soit un élément de $\mathcal{O}_{F, x}$ représenté par (U, f) . Il existe un voisinage $V \subset U$ de x et des polynômes $g, h \in K[X_1, \dots, X_n]$ tels que h ne s'annule pas sur V et $\frac{g}{h} = f$ sur V . La fraction rationnelle $\frac{g}{h}$ représente un élément de $\mathcal{R}(U)_{\mathfrak{m}_x^{\mathcal{R}(U)}}$ dont l'image par β est équivalente à f (voir la solution de l'exercice 1.2.42). Montrons l'injectivité de β . Si l'image de $\frac{f}{g}$ est nulle, cela signifie que f est nulle dans un voisinage $V \subset U$ de x . Si U est irréductible, cela implique que f est nulle sur U . Sinon, décomposons $U = \cup U_j$ en composantes irréductibles. Pour chaque composante U_j contenant x , f étant nulle sur $V \cap U_j$, elle est nulle sur U_j . Notons W la réunion des composantes irréductibles ne passant pas par x . Il

existe $h \in \mathcal{I}(W)$ tel que $h(x) \neq 0$. Par conséquent la fonction hf est nulle sur U et comme $h \notin \mathfrak{m}_x^{\mathcal{R}}$, c'est un élément inversible dans $\mathcal{R}(U)_{\mathfrak{m}_x^{\mathcal{R}}}$ d'où $\frac{f}{1}$ est nulle dans $\mathcal{R}(U)_{\mathfrak{m}_x^{\mathcal{R}}}$.⁽⁴⁾

Dans le cas où F est affine, la preuve est identique en remplaçant $\mathcal{R}(U)_{\mathfrak{m}_x^{\mathcal{R}}}$ par $\mathcal{P}(U)_{\mathfrak{m}_x^{\mathcal{P}}}$. \square

Corollaire 1.2.47. — *Sous les mêmes hypothèses que dans la proposition 1.2.46, on a :*

$$\mathcal{O}_{F,x} \simeq \mathcal{O}_{U,x} \simeq \mathcal{R}(U)_{\mathfrak{m}_x^{\mathcal{R}(U)}} \simeq \mathcal{R}(F)_{\mathfrak{m}_x^{\mathcal{R}(F)}}$$

et si F est affine,

$$\mathcal{O}_{F,x} \simeq \mathcal{P}(U)_{\mathfrak{m}_x^{\mathcal{P}(U)}} \simeq \mathcal{P}(F)_{\mathfrak{m}_x^{\mathcal{P}(F)}}.$$

Exemple 1.2.48. — Si $F \subset \mathbf{A}^n(K)$ est un ensemble algébrique affine, un élément de $\mathcal{O}_{F,x}$ est donc représenté par une fraction $\frac{g}{h}$ où $g \in K[X_1, \dots, X_n]/\mathcal{I}(F)$, $h \in K[X_1, \dots, X_n]/\mathcal{I}(F)$ et $h(x) \neq 0$.

Proposition 1.2.49. — *Soient U un ensemble quasi-algébrique et x un point de U . Le point x appartient à une seule composante irréductible de U si et seulement si l'anneau local \mathcal{O}_x est intègre. De manière générale, \mathcal{O}_x est un anneau réduit dont les idéaux premiers minimaux s'identifient aux composantes irréductibles de U qui passent par x .*

Démonstration. — Soit V un voisinage de x dans U , l'anneau $\mathcal{R}(V)$ étant réduit, ses localisés aussi. Les idéaux premiers de $\mathcal{R}(V)_{\mathfrak{m}_x}$ correspondent aux idéaux premiers de $\mathcal{R}(V)$ contenus dans \mathfrak{m}_x . Alors les idéaux premiers minimaux de $\mathcal{R}(V)_{\mathfrak{m}_x}$ correspondent aux composantes irréductibles de V passant par x . En effet, les applications $I \mapsto \mathcal{Z}(I)$ et $F \mapsto \mathcal{I}(F)$ font correspondre les idéaux premiers avec les sous-variétés irréductibles et sont décroissantes pour l'inclusion. La conclusion se déduit alors du fait qu'un anneau réduit n'ayant qu'un seul idéal premier minimal est intègre. En effet, si un anneau A ne possède qu'un seul idéal premier minimal, il est nécessairement égal à l'intersection I de tous les idéaux premiers de A . L'idéal I est donc premier. Or I est le nilradical $\sqrt{(0)}$ de A , voir [Eis95, Corollary 2.12], lui-même égal à (0) si A est réduit. L'idéal nul de A est donc premier, c'est-à-dire que A est intègre. \square

4. Pour K infini, on pourrait aussi utiliser le lemme d'évitement A.3.12.

Lorsque F est un ensemble algébrique affine et K un corps algébriquement clos, on identifie couramment les fonctions régulières (notion de nature locale) et les fonctions polynomiales (notion de nature globale) en vertu de la proposition suivante :

Théorème 1.2.50 (K algébriquement clos). — *Si K est algébriquement clos et si F est fermé dans $\mathbf{A}^n(K)$ pour la topologie de Zariski, l'injection de $\mathcal{P}(F)$ dans $\mathcal{R}(F)$ est une bijection.*

$$\mathcal{A}(F) \simeq \mathcal{P}(F) \simeq \mathcal{R}(F).$$

Démonstration. — Par hypothèse, l'ensemble F est algébrique et on a un morphisme canonique

$$\iota: K[X_1, \dots, X_n]/\mathcal{I}(F) \rightarrow \mathcal{O}_F(F) = \mathcal{R}(F)$$

qui est injectif par définition de $\mathcal{I}(F)$. D'après la proposition 1.2.46, on peut identifier $\mathcal{O}_{F,x}$ à l'anneau des fractions de $\mathcal{P}(F)$ relativement à l'idéal maximal \mathfrak{m}_x formé par les polynômes nuls en x .

Nous supposons que F est irréductible et renvoyons à [Ser55a, Cor. 3, page 237] ou [CL13, Théorème 3.4.6] pour le cas général. Dans ce cas, $\mathcal{P}(F)$ est un anneau intègre et tous les $\mathcal{O}_{F,x}$ peuvent être considérés comme des sous-anneaux du corps des fractions $\text{Frac } \mathcal{P}(F)$, voir la définition A.3.8. On a alors

$$(1.1) \quad \Gamma(F, \mathcal{O}_F) = \bigcap_{x \in F} \mathcal{O}_{F,x}.$$

Mais tout idéal maximal de $\mathcal{P}(F)$ est égal à l'un des \mathfrak{m}_x d'après le théorème des zéros de Hilbert (théorème A.5.12); il en résulte immédiatement que $\mathcal{P}(F) = \bigcap_{x \in F} \mathcal{O}_{F,x} = \Gamma(F, \mathcal{O}_F)$ d'après la proposition A.3.11 et l'égalité (1.1). \square

Exercice 1.2.51. — 1. L'hypothèse « F fermé de Zariski » est essentielle.

La fonction $f: K^2 \setminus \mathcal{Z}(x^2 + y^2 + 1) \rightarrow K$, $(x, y) \mapsto \frac{1}{x^2 + y^2 + 1}$ est une fonction régulière qui n'est restriction d'aucun polynôme sur K^2 .

2. L'hypothèse « K algébriquement clos » est essentielle.

La fonction $g: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$, $(x, y) \mapsto \frac{1}{x^2 + y^2 + 1}$ est une fonction régulière qui n'est restriction d'aucun polynôme sur \mathbf{R}^2 . Ceci se traduit par le fait que, vue comme fonction de \mathbf{C}^2 dans \mathbf{C} , ce n'est plus une fonction régulière.

Ce dernier exemple montre que lorsque $K = \mathbf{R}$, la correspondance 1.2.50 entre fonctions polynomiales et fonctions régulières n'est plus vérifiée. Ceci car

dans l'exemple en question, $(x^2 + y^2 + 1)$ est un idéal maximal de $\mathbf{R}[x, y]$ ne correspondant à aucun point de \mathbf{R}^2 .

Essentiellement à cause de la non surjectivité de $\mathcal{P}(F) \hookrightarrow \mathcal{R}(F)$, la théorie des variétés algébriques sur un corps non algébriquement clos ne peut se développer comme dans [Ser55a]. Néanmoins sur \mathbf{R} (et plus généralement sur un corps réel clos quelconque, voir la définition A.5.18) on a une caractérisation globale des fonctions régulières sur un ensemble quasi-algébrique affine. On perd le type fini de l'algèbre des polynômes au profit d'une algèbre de fractions rationnelles, voir la proposition 1.2.38, mais on gagne une généralisation au cas quasi-algébrique. Ce résultat sera très utile, en l'appliquant au cas d'un ouvert principal $U = \mathcal{D}(f)$ avec $f \in \mathcal{P}(F)$, voir l'exercice 1.2.60(1) et la définition 1.3.14, d'autant plus que sur \mathbf{R} un ouvert de Zariski quelconque est principal, voir la proposition 1.2.61.

Théorème 1.2.52 (K réel clos). — *Soit U un ensemble quasi-algébrique, ouvert d'un fermé $F \subset \mathbf{A}^n(\mathbf{R})$. L'injection de l'anneau des fractions de $\mathcal{P}(F)$ pour la partie multiplicative $\mathcal{S}_U := \{h \in \mathcal{P}(F) \mid \forall x \in U, h(x) \neq 0\}$ dans $\mathcal{R}(U)$ est une bijection*

$$\mathcal{S}_U^{-1}\mathcal{P}(F) \simeq \mathcal{R}(U).$$

En particulier toute fonction régulière $f: U \rightarrow \mathbf{R}$ est restriction d'une fonction rationnelle globale définie en tout point de U . Formellement, il existe des fonctions polynomiales $g, h \in \mathcal{P}(F)$, h ne s'annulant pas sur U telles que pour tout point $x \in U$, $f(x) = g(x)/h(x)$.

Démonstration. — Soient $g \in \mathcal{P}(F)$, et $h \in \mathcal{P}(F)$ ne s'annulant pas sur U . La fonction g/h est clairement une fonction régulière en tout point de U . Montrons que toute fonction régulière $U \rightarrow \mathbf{R}$ est de cette forme. Soit $f \in \mathcal{R}(U)$. Comme U est quasi-compact (définition B.1.5) pour la topologie de Zariski, il existe un recouvrement fini $\bigcup_{i=1}^l U_i = U$ par des ouverts de Zariski et des fonctions polynomiales $g_i, h_i \in \mathcal{P}(F)$, $h_i(x) \neq 0 \forall x \in U_i$ telles que $f|_{U_i} = g_i/h_i$. Soit $s_i \in \mathcal{P}(F)$ tel que $F \setminus U_i = \{x \in F \mid s_i(x) = 0\}$. Autrement dit $U_i = \mathcal{D}(s_i)$. Alors $h := \sum_{i=1}^l s_i^2 h_i^2$ est une fonction polynomiale sur F ne s'annulant pas sur U . Il suffit de montrer l'égalité

$$f = \frac{\sum_{i=1}^l s_i^2 g_i h_i}{h}$$

pour voir que la fonction f est de la forme annoncée. À cet effet, soit $x \in U$, notons $J_x \subset \{1, \dots, l\}$ l'ensemble des indices tels que $x \in U_i$. Alors pour tout $i \in J_x$, on a $f(x) = g_i(x)/h_i(x)$ et pour tout indice $i \notin J_x$, $s_i(x) = 0$. En

particulier

$$\left(\frac{\sum_{i=1}^l s_i^2 g_i h_i}{h} \right) (x) = \frac{\sum_{i \in J_x} s_i^2(x) g_i(x) h_i(x)}{\sum_{i \in J_x} s_i^2(x) h_i^2(x)} = \frac{\sum_{i \in J_x} s_i^2(x) h_i^2(x) \frac{g_i(x)}{h_i(x)}}{\sum_{i \in J_x} s_i^2(x) h_i^2(x)}.$$

Fixons $i_0 \in J_x$, alors pour tout $i \in J_x$, on a $f(x) = g_i(x)/h_i(x) = g_{i_0}(x)/h_{i_0}(x)$ et

$$\left(\frac{\sum_{i=1}^l s_i^2 g_i h_i}{h} \right) (x) = \frac{\sum_{i \in J_x} s_i^2(x) h_i^2(x) \frac{g_{i_0}(x)}{h_{i_0}(x)}}{\sum_{i \in J_x} s_i^2(x) h_i^2(x)} = g_{i_0}(x)/h_{i_0}(x) = f(x).$$

□

Nous verrons plus loin, avec le corollaire 1.2.66, à quel point l'anneau des fonctions régulières d'un ensemble algébrique affine sur \mathbf{R} ou sur \mathbf{C} est caractéristique de l'ensemble algébrique considéré. Sur \mathbf{R} , il en est de même pour un ensemble projectif puisque qu'un tel ensemble est isomorphe à un ensemble affine d'après la proposition 1.2.63. Par contraste, le théorème suivant montre que pour un ensemble projectif sur \mathbf{C} , l'anneau des fonctions régulières est réduit à sa plus simple expression.

Théorème 1.2.53. — *Soit F un ensemble algébrique projectif sur un corps K . Si K est algébriquement clos et si F est irréductible, les seules fonctions régulières sur F sont les constantes :*

$$\mathcal{R}(F) \simeq K.$$

Démonstration. — Supposons que $F \subset \mathbf{P}^n(K)$ et considérons la K -algèbre des coordonnées homogènes $\mathcal{S}(F) := K[X_0, \dots, X_n]/\mathcal{I}(F)$ (voir la définition 1.2.4) qui est intègre car F est irréductible. Pour $N \geq 0$, on note $\mathcal{S}(F)_N$ le K -espace vectoriel des fonctions polynomiales homogènes de degré N et pour $i = 0, \dots, n$, on note x_i la fonction correspondant à X_i . On utilise la proposition 1.2.45 pour identifier librement le complémentaire d'un hyperplan dans $\mathbf{P}^n(K)$ avec l'espace affine $\mathbf{A}^n(K)$. Soit $f \in \mathcal{R}(F)$ une fonction régulière globale. Alors pour chaque $U_i := \mathcal{D}(x_i)$, f est régulière sur $U_i \cap F$, et donc, K étant algébriquement clos, $f \in \mathcal{A}(U_i \cap F) \simeq \mathcal{S}(F)_{(x_i)}$ d'après le théorème 1.2.50. Par conséquent il existe un entier naturel N_i et une fonction polynomiale homogène $g_i \in \mathcal{S}(F)_{N_i}$ tels que

$$f = \frac{g_i}{x_i^{N_i}}.$$

En considérant les anneaux $\mathcal{R}(F)$ et $\mathcal{S}(F)$ comme sous-anneaux du corps des fractions $\text{Frac} \mathcal{S}(F)$ (Attention à ne pas confondre $\text{Frac} \mathcal{S}(F)$ avec son

sous-corps $K(F)$ voir la définition 1.2.69), on obtient que pour tout i , $x_i^{N_i} f$ est homogène de degré N_i . Soit $N \geq \sum_{i=0}^n N_i$, le K -espace vectoriel $\mathcal{S}(F)_N$ est engendré par les monômes de degré N en x_0, \dots, x_n et dans chacun de ces monômes, au moins l'un des x_i apparaît avec un exposant supérieur à N_i . En particulier, pour toute fonction polynomiale homogène $h \in \mathcal{S}(F)_N$, on a $hf \in \mathcal{S}(F)_N$. Par itération, on obtient que pour tout $q > 0$, $f^q \mathcal{S}(F)_N \subset \mathcal{S}(F)_N$. En particulier $x_0^N f^q \in \mathcal{S}(F)_N$ pour tout $q > 0$. Le sous-anneau $\mathcal{S}(F)[f]$ de $\text{Frac } \mathcal{S}(F)$ est donc contenu dans $x_0^{-N} \mathcal{S}(F)$ qui est un $\mathcal{S}(F)$ -module de type fini. De là, f est entière sur $\mathcal{S}(F)$ (voir la définition A.5.1) c'est-à-dire qu'il existe des éléments $a_1, \dots, a_m \in \mathcal{S}(F)$ tels que

$$(1.2) \quad f^m + a_1 f^{m-1} + \dots + a_m = 0.$$

Du fait que f est de degré 0, l'équation (1.2) reste valable en remplaçant les a_i par leurs composantes homogènes de degré 0. Mais $\mathcal{S}(F)_0 = K$, donc pour $i = 1 \dots m$, $a_i \in K$ et f est algébrique sur K . Comme K est algébriquement clos, $f \in K$. \square

Applications régulières, morphismes d'ensembles algébriques. —

Définition 1.2.54. — Soient V et W des ensembles quasi-algébriques sur un même corps K , un *morphisme d'ensembles quasi-algébriques* (ou *application régulière*) $\varphi: V \rightarrow W$ est une application continue (pour les topologies de Zariski) telle que pour tout ouvert $U \subset W$ et toute fonction régulière $f: U \rightarrow K$, la fonction $f \circ \varphi: \varphi^{-1}(U) \rightarrow K$ est régulière.

Une application $\varphi: V \rightarrow W$ est un *isomorphisme d'ensembles quasi-algébriques* si l'application φ est un homéomorphisme et si φ et φ^{-1} sont des applications régulières.

Remarque 1.2.55. — Du point de vue des faisceaux (voir en appendice C, l'exemple C.5.3), l'application φ est régulière si elle est continue et si le morphisme induit par le tiré en arrière $\varphi^\#: \mathcal{O}_W \rightarrow \varphi_* \mathcal{F}_V$ (qui est un morphisme de faisceaux sur W), a son image contenue dans $\varphi_* \mathcal{O}_V$. Une application $\varphi: V \rightarrow W$ est un isomorphisme d'ensembles quasi-algébriques si φ est un homéomorphisme et si le morphisme de faisceaux induit $\varphi^\#: \mathcal{O}_W \xrightarrow{\cong} \varphi_* \mathcal{O}_V$ est un isomorphisme de faisceaux de K -algèbres.

Exercice 1.2.56. — Morphismes et fonctions polynomiales.

1. Soient $F_1 \subset \mathbf{A}^n(K)$ et $F_2 \subset \mathbf{A}^m(K)$ des ensembles algébriques sur un même corps K algébriquement clos. En utilisant le théorème 1.2.50, montrer qu'une application $\varphi: F_1 \rightarrow F_2$ est un morphisme si et seulement

s'il existe des fonctions polynomiales $f_1, \dots, f_m \in K[x_1, \dots, x_n]$ telles que pour tout point $(x_1, \dots, x_n) \in F_1$,

$$\varphi(x_1, \dots, x_n) = (f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n)) .$$

2. Soit $F_1 \subset \mathbf{A}^n(\mathbf{R})$ et $F_2 \subset \mathbf{A}^m(\mathbf{R})$ des ensembles algébriques. En utilisant le théorème 1.2.52, montrer qu'une application $\varphi: F_1 \rightarrow F_2$ est un morphisme si et seulement s'il existe des fonctions polynomiales $g_1, \dots, g_m \in \mathbf{R}[x_1, \dots, x_n]$ et $h_1, \dots, h_m \in \mathbf{R}[x_1, \dots, x_n]$ telles que pour tout point $(x_1, \dots, x_n) \in F_1$, $h_1(x_1, \dots, x_n) \neq 0, \dots, h_m(x_1, \dots, x_n) \neq 0$ et

$$\varphi(x_1, \dots, x_n) = \left(\frac{g_1(x_1, \dots, x_n)}{h_1(x_1, \dots, x_n)}, \dots, \frac{g_m(x_1, \dots, x_n)}{h_m(x_1, \dots, x_n)} \right) .$$

3. Soit $F_1 \subset \mathbf{P}^n(K)$ et $F_2 \subset \mathbf{P}^m(K)$ des ensembles algébriques sur un même corps K algébriquement clos. Une application $\varphi: F_1 \rightarrow F_2$ est un morphisme si et seulement s'il existe des fonctions polynomiales homogènes ne s'annulant pas simultanément $f_0, \dots, f_m \in K[x_0, \dots, x_n]$ telles que pour tout point $x = (x_0 : \dots : x_n) \in F_1$,

$$\varphi(x) = (f_0(x_0, \dots, x_n) : \dots : f_m(x_0, \dots, x_n)) .$$

4. Le cas d'une application entre ensembles réels projectifs se ramène au cas affine d'après la proposition 1.2.63.

Exemple 1.2.57. — Remarquons que l'image d'un ensemble quasi-algébrique par un morphisme algébrique n'est pas forcément quasi-algébrique. L'image $B \subset \mathbf{A}^2(K)$ du plan affine par le morphisme $\mathbf{A}^2(K) \rightarrow \mathbf{A}^2(K)$, $(x, y) \mapsto (xy, y)$ est la réunion du point $(0, 0)$ et du complémentaire de la droite $y = 0$. Ce n'est ni un ouvert, ni un fermé de $\mathbf{A}^2(K)$. L'ensemble B , image par un morphisme algébrique d'un ensemble algébrique affine n'est ni un ensemble algébrique, ni un ensemble quasi-algébrique. C'est seulement un ensemble *constructible*, voir [Har77, Exercice II.3.18 & 3.19] pour une première approche de cette notion.

Exercice 1.2.58 (Ensembles quasi-algébriques)

1. L'ensemble quasi-algébrique $\mathbf{C}^* \subset \mathbf{C}$ est isomorphe à un ensemble algébrique.
2. De la même manière, les groupes $\mathbf{GL}_n(\mathbf{C})$ qui sont ouverts dans les espaces $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ sont des ensembles algébriques affines. Ce sont des *groupes algébriques*.
3. Même chose pour un corps K quelconque.

Exercice 1.2.59 (Ensembles algébriques affines)

1. Soit K un corps et $H \subset \mathbf{P}^n(K)$ une hypersurface, montrer que le complémentaire $\mathbf{P}^n(K) \setminus H$ est isomorphe à un espace affine.
2. Soit K un corps algébriquement clos, montrer que l'ensemble quasi-affine $U := \mathbf{A}^2(K) \setminus \{(0,0)\}$ n'est pas isomorphe à un ensemble algébrique affine.

[Indication : montrer que toute fonction régulière sur U s'étend en une fonction régulière sur $\mathbf{A}^2(K)$. Sur \mathbf{C} , ce résultat est un corollaire du théorème de Hartogs [GH78, page 7] sur l'extension des fonctions holomorphes de deux variables.]

3. Soit K un corps algébriquement clos, le seul ensemble algébrique irréductible qui soit affine sur K et isomorphe à un ensemble algébrique projectif sur K est un point.

Exercice 1.2.60 (Ouverts principaux). — Soit K un corps algébriquement clos (par exemple \mathbf{C}) ou réel clos, voir la définition A.5.18, (par exemple \mathbf{R}). Soient n un entier naturel non nul et $F \subset \mathbf{A}^n(K)$ un ensemble algébrique.

1. En utilisant les théorèmes 1.2.50 et 1.2.52, montrer que si $f \in \mathcal{P}(F)$ est une fonction polynomiale, le lieu $\mathcal{D}(f)$ de non annulation de f est isomorphe à un ensemble algébrique affine et qu'on a un isomorphisme de K -algèbres.

$$\mathcal{O}_F(\mathcal{D}(f)) \simeq \mathcal{R}(F)_{\left[\frac{1}{f}\right]}.$$

Lorsque K est algébriquement clos, on a en fait un isomorphisme

$$\mathcal{O}_F(\mathcal{D}(f)) \simeq \mathcal{A}(F)_{\left[\frac{1}{f}\right]}.$$

2. Soit $f: \mathbf{A}^2(\mathbf{R}) \rightarrow \mathbf{R}, (x, y) \mapsto x^2 + y^2$. Expliciter un ensemble algébrique affine isomorphe à $\mathcal{D}(f)$. Comparer à 1.2.59(2).

Les trois résultats suivants illustrent des particularités importantes des variétés réelles par rapport aux variétés complexes. Comparer aux (2) et (3) de l'exercice 1.2.59. La première propriété, surprenante comparée au cas complexe, est due au fait qu'un ensemble algébrique réel peut toujours être défini par un idéal principal.

Proposition 1.2.61. — *Tout ouvert d'un ensemble algébrique réel affine est principal.*

Corollaire 1.2.62. — *Tout ouvert d'un ensemble algébrique réel affine est isomorphe à un ensemble algébrique réel affine.*

Démonstration. — En effet soient $F \subset \mathbf{A}^n(\mathbf{R})$ un ensemble algébrique réel et $U \subset F$ un ouvert de F . Notons $F' = F \setminus U$ et considérons un ensemble $\{P_1, \dots, P_l\}$ de générateurs de $\mathcal{I}(F')$. Alors $F' = \mathcal{Z}(P)$ où $P \in \mathbf{R}[X_1, \dots, X_n]$ est le polynôme $P = P_1^2 + P_2^2 + \dots + P_l^2$. Pour conclure, on remarque que l'ouvert U de $\mathbf{A}^n(\mathbf{R})$ est isomorphe au fermé suivant de $\mathbf{A}^{n+1}(\mathbf{R})$

$$\left\{ (x_1, \dots, x_n, y) \in \mathbf{A}^{n+1}(\mathbf{R}) \mid (x_1, \dots, x_n) \in F \text{ et } yP(x_1, \dots, x_n) = 1 \right\} .$$

□

Proposition 1.2.63. — *Tout ensemble algébrique réel projectif est isomorphe à un ensemble algébrique réel affine.*

Démonstration. — Il suffit d'observer que $\mathbf{P}^n(\mathbf{R})$ est égal à la variété algébrique réelle $\mathbf{P}^n(\mathbf{R}) \setminus H$, où H est l'hypersurface de $\mathbf{P}^n(\mathbf{R})$ d'équation $x_0^2 + \dots + x_n^2 = 0$. L'espace $\mathbf{P}^n(\mathbf{R})$ est donc un ensemble algébrique affine d'après l'exercice 1.2.59(1). □

Théorème 1.2.64. — *Soit F et F' des ensembles algébriques sur un même corps K . Si F' est affine, on a une bijection naturelle*

$$\alpha: \text{Hom}(F, F') \xrightarrow{\cong} \text{Hom}(\mathcal{A}(F'), \mathcal{R}(F))$$

où le Hom de gauche est l'ensemble des morphismes d'ensembles algébriques, et le Hom de droite est un ensemble de morphismes de K -algèbres.

Si de plus le corps K est réel clos ou algébriquement clos, alors on a une bijection naturelle

$$\beta: \text{Hom}(\mathcal{R}(F'), \mathcal{R}(F)) \xrightarrow{\cong} \text{Hom}(\mathcal{A}(F'), \mathcal{R}(F)) .$$

Nous verrons un énoncé analogue dans le cadre des variétés abstraites en 1.3.18.

Démonstration. — Commençons par définir l'application α . Tout morphisme d'ensembles algébriques $\varphi: F \rightarrow F'$ induit un morphisme de K -algèbres $\varphi^*: \mathcal{R}(F') \rightarrow \mathcal{R}(F)$, $\varphi^*(f) = f \circ \varphi$. On pose $\alpha(\varphi) := \varphi^*|_{\mathcal{A}(F')}$. Réciproquement, soit $h: \mathcal{A}(F') \rightarrow \mathcal{R}(F)$ un morphisme de K -algèbres. On peut supposer que F' est un fermé de $\mathbf{A}^N(K)$ et que $\mathcal{A}(F') = K[y_1, \dots, y_N]/\mathcal{I}(F')$. Les images $\xi_i \in \mathcal{R}(F)$ par h des classes dans $\mathcal{A}(F')$ des fonctions polynomiales y_i sont des fonctions globales sur F qui permettent de définir une application $\psi: F \rightarrow \mathbf{A}^N(K)$ par $\psi(x) = (\xi_1(x), \dots, \xi_N(x))$ pour $x \in F$. Du fait que

$F' = \mathcal{Z}(\mathcal{I}(F'))$ et que h est un morphisme de K -algèbres, il est immédiat que $\psi(x) \in F'$ pour $x \in F$. Sachant que chaque composante ξ_i de ψ est régulière sur F , on vérifie sans difficulté que ψ est un morphisme. Par construction $h \mapsto \psi$ est une bijection réciproque de α .

Pour définir l'application β , on utilise l'injection $\mathcal{A}(F') \hookrightarrow \mathcal{R}(F')$ (voir la remarque 1.2.36) de la K -algèbre des coordonnées affines dans la K -algèbre des fonctions régulières. Soit $h: \mathcal{R}(F') \rightarrow \mathcal{R}(F)$ un morphisme de K -algèbres et posons $\beta(h) := h|_{\mathcal{A}(F')}$. D'après le théorème 1.2.50 si K est algébriquement clos, ou le théorème 1.2.52 si K est réel clos, tout élément de $\mathcal{R}(F')$ est représenté par une fonction rationnelle globale et on en déduit aisément que l'image de h est déterminée par ses valeurs sur $\mathcal{A}(F')$. \square

Les corollaires ci-dessous sont immédiats. Le premier est à la base du dictionnaire entre géométrie algébrique et algèbre commutative. Nous verrons des énoncés analogues dans le cadre des variétés abstraites en 1.3.19.

Corollaire 1.2.65. — Soient F et F' des ensembles algébriques affines sur un même corps K . Si K est algébriquement clos, alors F est isomorphe à F' si et seulement si les K -algèbres $\mathcal{A}(F)$ et $\mathcal{A}(F')$ sont isomorphes.

Corollaire 1.2.66. — Soient F et F' des ensembles algébriques affines sur un même corps K . Si K est réel clos ou algébriquement clos, alors F est isomorphe à F' si et seulement si les K -algèbres $\mathcal{R}(F)$ et $\mathcal{R}(F')$ sont isomorphes.

Remarque 1.2.67. — Si au lieu de considérer les morphismes réguliers, on considère les morphismes polynomiaux, la situation sur \mathbf{R} est la même que sur \mathbf{C} : F est polynomialement isomorphe à F' si et seulement si les \mathbf{R} -algèbres $\mathcal{A}(F)$ et $\mathcal{A}(F')$ sont isomorphes, voir [CLO15, Chapitre V, section 4, proposition 8].

Exercice 1.2.68 (Coniques). — On anticipe sur la définition 1.6.1 de courbe affine (resp. projective) plane. Une *conique* est une courbe plane de degré 2⁽⁵⁾. Une *conique affine* est donc déterminée par un polynôme de degré 2 à deux variables. Une *conique projective* est déterminée par un polynôme homogène de degré 2 à trois variables. Ainsi, si le lieu des zéros d'une *conique* est non singulier et non vide, c'est une variété de dimension 1 (voir les définitions 1.5.9 et 1.5.43). L'ensemble des zéros d'une conique est aussi appelé,

5. Plus généralement, une *quadrique* sur un corps K est une classe d'équivalence de polynômes de degré 2 à coefficients dans K , les polynômes P et Q étant *équivalents* s'il existe $\lambda \in K^*$ tel que $P = \lambda Q$.

abusivement, une conique, on prendra garde de conserver les informations données par l'équation qui sont perdues en ne considérant que l'ensemble des zéros, ainsi $(x + y - 1)^2$ est une conique appelée *droite double* mais elle possède le même ensemble de zéros que la droite $(x + y - 1)$ qui, elle, n'est pas une conique.

1. Soit P un polynôme irréductible de degré 2, alors $\mathcal{Z}(P)$ est vide ou irréductible (voir la définition 1.2.15).
2. Calculer les anneaux de coordonnées affines des coniques déterminées par $y = x^2$ et $xy = 1$ et en déduire qu'elles ne sont pas isomorphes.
3. On suppose que le corps de base K est *algébriquement clos*.
 - (a) Montrer qu'une conique irréductible de $\mathbf{P}^2(K)$ est isomorphe à $\mathbf{P}^1(K)$.
 - (b) Montrer que $\mathbf{A}^1(K)$ n'est pas isomorphe à $\mathbf{A}^1(K) \setminus \{0\}$.
 - (c) Montrer qu'une conique irréductible de $\mathbf{A}^2(K)$ est isomorphe à $\mathbf{A}^1(K)$ ou à $\mathbf{A}^1(K) \setminus \{0\}$.
4. On suppose que $K = \mathbf{C}$.
 - (a) Classifier à isomorphisme près les coniques (éventuellement réductibles) de $\mathbf{P}^2(\mathbf{C})$.
 - (b) Classifier à isomorphisme près les coniques (éventuellement réductibles) de $\mathbf{A}^2(\mathbf{C})$.
5. On suppose que $K = \mathbf{R}$.
 - (a) Exhiber deux polynômes de degré 2 irréductibles définissant deux coniques de $\mathbf{P}^2(\mathbf{R})$ non isomorphes et montrer que toute conique de $\mathbf{P}^2(\mathbf{R})$ définie par un polynôme irréductible est isomorphe à l'une d'entre elles.
 - (b) Exhiber quatre polynômes de degré 2 irréductibles définissant quatre coniques de $\mathbf{A}^2(\mathbf{R})$ non isomorphes deux à deux et montrer que toute conique de $\mathbf{A}^2(\mathbf{R})$ définie par un polynôme irréductible est isomorphe à l'une d'entre elles.
 - (c) Classifier à isomorphisme près les coniques (éventuellement réductibles) de $\mathbf{P}^2(\mathbf{R})$.
 - (d) Classifier à isomorphisme près les coniques (éventuellement réductibles) de $\mathbf{A}^2(\mathbf{R})$.

Fonctions rationnelles. —

Définition 1.2.69. — Soit K un corps et U un ensemble quasi-algébrique sur K . On appelle *K -algèbre des fonctions rationnelles* de U la K -algèbre

$$K(U) = \varinjlim_{\overline{V}=U} \mathcal{O}_U(V)$$

lorsque V parcourt les ouverts denses de U . Un élément de $K(U)$ est donc une classe d'équivalence de couples (V, f) où V est un ouvert dense de U , f est une fonction régulière sur V , et où l'on identifie deux couples (V, f) et (W, g) si $f = g$ sur un ouvert dense contenu dans $V \cap W$. Les éléments de $K(U)$ sont appelés les *fonctions rationnelles* sur U .

Remarque 1.2.70. — Comme $K(U)$ est une limite inductive de K -algèbres, c'est une K -algèbre.

Proposition 1.2.71. — *Pour tout ouvert dense V dans U , le morphisme naturel*

$$K(U) \xrightarrow{\cong} K(V)$$

est un isomorphisme.

Démonstration. — En effet, par définition de la limite inductive on peut prendre la limite en se restreignant aux ouverts denses contenus dans V . \square

Proposition 1.2.72. — *Soit U un ensemble quasi-algébrique sur un corps K . Si U est irréductible, alors $K(U)$ est un corps.*

Démonstration. — Si (V, f) représente un élément de $K(U)$ avec $f \neq 0$, on peut restreindre f à l'ouvert non vide $W = V \setminus \mathcal{Z}(f)$ qui est dense du fait que U est irréductible. Ce qui fait que $\frac{1}{f}$ est régulière sur W , la classe de $(W, \frac{1}{f})$ est alors l'inverse de celle de (V, f) dans $K(U)$. \square

Définition 1.2.73. — Soit K un corps et U un ensemble quasi-algébrique sur K . Si U est irréductible, le corps $K(U)$ est appelé *corps des fonctions rationnelles* ou *corps des fonctions* de U .

Remarque 1.2.74. — On note souvent le corps des fonctions d'un ensemble algébrique irréductible V par $K(V)$ même lorsque le corps de base n'est pas K . Par exemple si V est un ensemble algébrique irréductible sur \mathbf{C} , son corps des fonctions sera noté indifféremment par $K(V)$ ou $\mathbf{C}(V)$.

Proposition 1.2.75. — Soit F un ensemble algébrique irréductible sur un corps K , alors pour tout point $x \in F$ et tout voisinage U de x dans F , les morphismes canoniques

$$\mathcal{R}(U) \hookrightarrow \mathcal{O}_{U,x} \hookrightarrow K(U)$$

sont injectifs. De plus les morphismes de restriction

$$\mathcal{O}_{F,x} \xrightarrow{\cong} \mathcal{O}_{U,x} \quad \text{et} \quad K(F) \xrightarrow{\cong} K(U)$$

sont des isomorphismes.

Démonstration. — L'ouvert U étant non vide, il est dense dans l'espace irréductible F et l'isomorphisme $K(U) \simeq K(F)$ a été vu en proposition 1.2.71. Les trois affirmations d'injectivité proviennent du fait qu'une fonction régulière étant continue pour la topologie de Zariski, si elle est nulle sur un ouvert non vide d'un espace irréductible, elle est alors nulle partout. \square

Remarque 1.2.76. — Si F est un ensemble algébrique affine irréductible sur un corps K et x un point de F , les applications naturelles $\mathcal{O}_F(V) \rightarrow K(F)$, où V est un ouvert de F contenant x , sont injectives et les anneaux $\mathcal{O}_F(V)$ peuvent donc être considérés comme des sous-anneaux du corps de fonctions rationnelles $K(F)$. Au vu de la remarque C.3.2, on a alors

$$\mathcal{O}_{F,x} = \bigcup_{V \ni x} \mathcal{O}_F(V).$$

Proposition 1.2.77. — Soit F un ensemble algébrique sur un corps K , alors pour tout ouvert dense $U \subset F$,

$$K(F) \simeq \text{Frac } \mathcal{R}(U)$$

où $\text{Frac } A$ est l'anneau total des fractions d'un anneau A (définition A.3.8).

Remarque 1.2.78. — On fera bien attention qu'en géométrie analytique complexe, une telle proposition serait fautive : par exemple la fonction $z \mapsto \exp \frac{1}{z}$ est une fonction holomorphe sur $\mathbf{C} \setminus \{0\}$ qui n'admet aucune écriture comme quotient de deux fonctions holomorphes sur \mathbf{C} (voir l'appendice D).

Démonstration. — L'ouvert U étant dense dans F , la proposition 1.2.71 s'applique et le morphisme $\mathcal{R}(U) \rightarrow K(U) \simeq K(F)$ est injectif car une fonction régulière étant continue pour la topologie de Zariski, si elle est nulle sur un ouvert dense, elle est alors nulle partout. Le morphisme induit sur l'anneau total des fractions $\text{Frac } \mathcal{R}(U) \rightarrow K(F)$ est donc injectif aussi. Comme par ailleurs, il est surjectif par définition de fonction régulière, la preuve est acquise. \square

Corollaire 1.2.79. — Soit F un ensemble algébrique affine sur un corps K algébriquement clos ou réel clos, alors

$$K(F) \simeq \text{Frac } \mathcal{P}(F).$$

Démonstration. — Si K est algébriquement clos, l'isomorphisme ci-dessus résulte de la conjonction de la proposition 1.2.77 et du théorème 1.2.50. Si K est réel clos, toute fonction régulière $f \in \mathcal{R}(F)$ est la restriction d'une fonction rationnelle définie sur F d'après le théorème 1.2.52 et en particulier, $\text{Frac } \mathcal{R}(F) \simeq \text{Frac } \mathcal{P}(F)$. \square

Exercice 1.2.80. — Soit K un corps algébriquement clos ou réel clos.

1. Soit n un entier naturel non nul, alors

$$K(\mathbf{A}^n(K)) = K(X_1, \dots, X_n).$$

2. Soit n un entier naturel non nul, alors

$$K(\mathbf{P}^n(K)) = K(X_1, \dots, X_n) = K(\mathbf{A}^n(K)).$$

3. Soit $C = \mathcal{Z}(P) \subset \mathbf{A}^2(K)$ une courbe plane d'équation $P(x, y) = 0$ où $P \in K[x, y]$ est un polynôme de degré non nul.

- (a) Notons $f_1 = x|_C$ et $f_2 = y|_C$ alors $P(f_1, f_2) = 0$ dans $K(f_1, f_2)$ et

$$K(C) = K(f_1, f_2)$$

est une extension de degré fini de $K(X)$.

- (b) Si K est algébriquement clos, alors $K(C) \simeq \text{Frac } K[X, Y]/\sqrt{(P)}$.

1.3. Variétés algébriques abstraites

Les ensembles algébriques ou quasi-algébriques ont tout d'abord été définis comme *sous-ensembles* d'espaces affines ou projectifs. Grâce à l'introduction du faisceau des fonctions régulières et de la notion d'isomorphisme, nous avons obtenu une notion indépendante de l'espace ambiant. On peut aller plus loin, et dans la même veine que pour les variétés différentielles, définir des variétés sans référence à un espace ambiant : une variété algébrique abstraite est un espace annelé ⁽⁶⁾ recouvert par un nombre fini ⁽⁷⁾ de variétés affines ⁽⁸⁾. Ce faisant, nous

6. C'est-à-dire un espace topologique muni d'un faisceau d'anneaux vérifiant certaines propriétés, voir la définition C.5.1.

7. Cette restriction sur la topologie correspond, dans le cas des variétés différentielles, à l'hypothèse « à base dénombrable d'ouverts ».

8. Ce sont les modèles locaux jouant le rôle des ouverts de cartes pour les variétés différentielles.

définissons une classe plus générale que la classe des variétés quasi-projectives considérée jusqu'ici. La situation est distincte du cas différentiable où toute variété différentielle réelle abstraite se plonge différentiablement dans un \mathbf{R}^n (pour ce résultat classique, voir par exemple [Hir76, Theorem I.3.4]).

Nous nous restreindrons la plupart du temps aux variétés abstraites isomorphes à des variétés quasi-projectives. Cette classe contient aussi les variétés projectives, les variétés quasi-affines et les variétés affines d'après le lemme 1.2.43. Même en se cantonnant aux variétés algébriques quasi-projectives, la notion de variété abstraite est adaptée aux variétés dont la présentation la plus naturelle ou la plus utile n'est pas toujours une liste d'équations. Nous pensons en particulier aux variétés quotients et aux variétés fibrées.

Définition 1.3.1. — Une *variété algébrique (abstraite)* sur un corps K est un couple (X, \mathcal{O}_X) où X est un espace topologique (qui est de fait *quasi-compact*, voir la définition B.1.5, d'après la condition imposée) et \mathcal{O}_X est un sous-faisceau du faisceau des fonctions sur X à valeurs dans K assujetti à la condition suivante : il existe un recouvrement de l'espace X par un nombre fini d'ouverts U_i tels que $(U_i, \mathcal{O}_X|_{U_i})$ est isomorphe comme espace annelé à un ensemble algébrique affine dans un K^n muni de son faisceau des fonctions régulières (1.2.1 et 1.2.33). Par analogie avec les cas affines et projectifs, la topologie de X est appelée *topologie de Zariski* et le faisceau \mathcal{O}_X est appelé *faisceau des fonctions régulières* ou *faisceau structural* de la variété X .

Définition 1.3.2. — Un ouvert $U \subset X$ tel que $(U, \mathcal{O}_X|_U)$ soit isomorphe à un ensemble algébrique affine est un *ouvert affine* de X et un recouvrement de X par de tels ouverts est un *recouvrement affine* de X .

Remarque 1.3.3. — Insistons ici sur le fait qu'avec cette définition, une variété algébrique n'est pas forcément irréductible contrairement à certains usages en particulier chez les auteurs américains.

Définition 1.3.4. — Si X et Y sont des variétés algébriques sur K , un *morphisme* (ou *application régulière*) $\varphi: X \rightarrow Y$ est une application continue telle que pour tout ouvert $V \subset Y$ et toute fonction régulière $f: V \rightarrow K$, la fonction $f \circ \varphi: \varphi^{-1}(V) \rightarrow K$ est régulière.

Remarque 1.3.5. — (Voir en appendice C, l'exemple C.5.3.) Un morphisme de variétés algébriques est un morphisme d'espaces annelés qui induit un morphisme de faisceaux de K -algèbres. Autrement dit, une application $\varphi: X \rightarrow Y$

est un morphisme de variétés algébriques si elle est continue et si l'image du morphisme de faisceaux induit par le tiré en arrière $\varphi^\#: \mathcal{O}_Y \rightarrow \varphi_*\mathcal{F}_X$ est contenue dans $\varphi_*\mathcal{O}_X$.

Soient X une variété algébrique sur K et $Y \subset X$ un sous-espace localement fermé dans X . On veut définir un faisceau sur Y qui fasse de l'inclusion un morphisme de variétés. On prendra garde que pour définir ce faisceau sur Y , on ne peut se contenter de considérer les restrictions des fonctions sur les ouverts de X ; on obtiendrait alors seulement un préfaisceau en général, voir par exemple [Per95, III.4.8]. On utilise le fait que \mathcal{O}_X est un faisceau de fonctions sur X et on pose $\mathcal{O}_Y := (\mathcal{O}_X)_Y$ qui est un faisceau sur Y , voir la définition C.1.6, dont on rappelle la description des sections locales ci-dessous.

Si Y est ouvert dans X , on a alors $\mathcal{O}_Y = \mathcal{O}_X|_Y$, en effet $(Y, \mathcal{O}_X|_Y)$ est clairement une variété algébrique sur K (tout ouvert U de Y étant un ouvert de X , on a tout simplement $\mathcal{O}_X|_Y(U) = \mathcal{O}_X(U)$, voir l'exemple C.4.9). Dans le cas général, les sections locales du faisceau \mathcal{O}_Y au-dessus d'un ouvert U de Y sont :

$$\mathcal{O}_Y(U) = \{f: U \rightarrow K \mid \forall x \in U, \\ \exists V \text{ voisinage de } x \text{ dans } X \text{ et } \exists g \in \mathcal{O}_X(V) \mid g|_{V \cap U} = f|_{V \cap U}\}.$$

Proposition 1.3.6. — Soient X une variété algébrique sur un corps K et Y un sous-espace localement fermé de X . Le couple (Y, \mathcal{O}_Y) est une variété algébrique et l'inclusion $Y \hookrightarrow X$ est un morphisme de variétés algébriques.

Démonstration. — Immédiate d'après les définitions. \square

Définition 1.3.7. — Soient X une variété algébrique sur K et Y un sous-espace localement fermé de X . Le couple (Y, \mathcal{O}_Y) est une *sous-variété algébrique* de (X, \mathcal{O}_X) . On a deux cas particuliers importants, lorsque Y est fermé (resp. ouvert) dans X pour la topologie de Zariski, on précise en disant que Y est *sous-variété algébrique fermée* (resp. *sous-variété algébrique ouverte*) de X .

Exemple 1.3.8. — Considérons le cas où $X = \mathbf{A}^n(K)$ et $Y = F$ est un fermé de $\mathbf{A}^n(K)$. Alors la K -algèbre $\mathcal{O}_F(F)$ est le quotient de $\mathcal{O}_{\mathbf{A}^n(K)}(F)$ par l'idéal $\mathcal{I}(F)$.

Définition 1.3.9. — Soit X une variété algébrique sur K . Si $K = \mathbf{C}$, on dit que X est une *variété algébrique complexe* (ou *variété complexe* si le contexte est explicite). Si $K = \mathbf{R}$, on dit que X est une *variété algébrique réelle*.

La définition 1.3.1, tirée de [Per95, § III.4] est due à Serre [Ser55a, Chapitre II] pour K algébriquement clos.⁽⁹⁾ Suivant l'usage instauré dans [BCR87], on l'applique aussi à $K = \mathbf{R}$ dans la définition 1.3.9 pour définir les variétés algébriques réelles. Avec cette définition, tout sous-espace localement fermé U d'un espace affine $\mathbf{A}^n(\mathbf{R})$, muni de la topologie induite et du faisceau \mathcal{O}_U défini au 1.2.39 est une variété algébrique réelle. De même, tout ensemble algébrique projectif sur \mathbf{R} (voir la définition 1.2.3) est une variété algébrique réelle. Plus généralement, pour un corps de base K quelconque, tout ensemble algébrique affine muni de son faisceau des fonctions régulières (définitions 1.2.33 et 1.2.39) est une variété algébrique et tout ensemble algébrique projectif muni de son faisceau des fonctions régulières (définitions 1.2.34 et 1.2.39) est une variété algébrique. De ces exemples on tire les définitions suivantes.

Définition 1.3.10. — Une variété algébrique (Y, \mathcal{O}_Y) sur un corps K est :

1. *affine* si elle est isomorphe comme espace annelé à un ensemble algébrique affine muni de son faisceau des fonctions régulières (définitions 1.2.33 et 1.2.39) ;
2. *projective* si elle est isomorphe comme espace annelé à un ensemble algébrique projectif muni de son faisceau des fonctions régulières (définitions 1.2.34 et 1.2.39) ;
3. *quasi-affine* (resp. *quasi-projective*) si Y est un ouvert de Zariski d'une variété affine (resp. projective) X et $\mathcal{O}_Y = \mathcal{O}_X|_Y$ est la restriction à Y du faisceau \mathcal{O}_X .

Le résultat suivant illustre une particularité importante des variétés réelles par rapport aux variétés complexes. Comparer aux résultats 1.2.61, 1.2.62 et 1.2.63.

Proposition 1.3.11 (Variétés algébriques réelles affines)

Une variété algébrique réelle est affine si et seulement si elle est quasi-projective.

Démonstration. — En effet, sur tout corps, si X est une variété algébrique affine, alors X est quasi-affine par définition, et donc quasi-projective d'après le lemme 1.2.43. Réciproquement sur \mathbf{R} , on déduit de la proposition 1.2.63 le fait remarquable (et faux en particulier pour les variétés algébriques complexes)

9. On prendra garde que Serre prend soin d'ajouter une hypothèse technique de *séparation* (voir l'appendice B.1) qui est négligée par [BCR87] comme par [Per95] car toujours vérifiée lorsqu'on se restreint aux variétés quasi-projectives.

que toute variété algébrique réelle projective est affine, puis on déduit du corollaire 1.2.62 que tout ouvert d'une variété algébrique réelle affine est une variété algébrique réelle affine. \square

Par définition, une variété algébrique X sur un corps K est donc affine (resp. projective) s'il existe un entier n et un morphisme de variétés algébriques

$$\varphi: X \rightarrow \mathbf{A}^n(K) \quad (\text{resp. } \mathbf{P}^n(K))$$

tels que $\varphi(X)$ soit localement fermé pour la topologie de Zariski de l'espace d'arrivée et φ induit un isomorphisme de variétés algébriques entre (X, \mathcal{O}_X) et la sous-variété $(\varphi(X), \mathcal{O}_{\varphi(X)})$ de $(\mathbf{A}^n(K), \mathcal{O}_{\mathbf{A}^n(K)})$ (resp. $(\mathbf{P}^n(K), \mathcal{O}_{\mathbf{P}^n(K)})$). Un tel morphisme s'appelle un plongement :

Définition 1.3.12. — Soient X et Y des variétés algébriques sur un même corps K . Un morphisme $\varphi: X \rightarrow Y$ est un *plongement* de X dans Y si $\varphi(X)$ est localement fermé dans Y et si φ induit un isomorphisme entre X et $\varphi(X)$.

Exercice 1.3.13 (Plongement de Segre). — On considère l'application

$$\varphi: \begin{cases} \mathbf{P}^r(K)_{a_0:\dots:a_r} \times \mathbf{P}^s(K)_{b_0:\dots:b_s} & \longrightarrow & \mathbf{P}^N(K) \\ (a_0 : \dots : a_r) \times (b_0 : \dots : b_s) & \longmapsto & (\dots : a_i b_j : \dots) \end{cases}$$

où $N = rs + r + s$ et où $(\dots : a_i b_j : \dots)$ est ordonné selon l'ordre lexicographique. Vérifier que φ est bien définie et injective puis montrer que son image $X := \varphi(\mathbf{P}^r(K) \times \mathbf{P}^s(K))$ est une sous-variété de $\mathbf{P}^N(K)$, c'est-à-dire que φ est un plongement. [Indication : voir [Har77, Exercice I.2.14].]

En particulier, montrer que le plongement de Segre réalise le produit $\mathbf{P}^1(K) \times \mathbf{P}^1(K)$ comme surface quadrique dans $\mathbf{P}^3(K)$.

Une variété projective ne peut pas se plonger dans n'importe quel espace projectif, en particulier une courbe irréductible non singulière ne peut pas toujours se plonger dans le plan voir la section 1.6.

Lorsque $K = \mathbf{R}$, remarquons, et c'est là un problème crucial, qu'un espace fibré dont la base et la fibre sont des variétés algébriques réelles affines n'est pas toujours une variété algébrique réelle affine, voir l'exemple 2.5.6.

Définition 1.3.14. — Soient $I, J \subset K[X_0, \dots, X_n]$ deux idéaux homogènes et $X \subset \mathbf{P}^n(K)$ la variété quasi-projective déterminée de la façon suivante :

$$X := \mathcal{Z}(J) \setminus \mathcal{Z}(I) = \mathcal{D}(I) \cap \mathcal{Z}(J) .$$

Un ouvert U de X est un *ouvert principal* de X s'il existe une fonction $f \in \mathcal{I}(\mathcal{Z}(I))$ dont U est le lieu de non annulation dans X ,

$$U = \mathcal{D}(f) := \mathcal{D}(f) \cap \mathcal{Z}(J) .$$

Exercice 1.3.15 (Ouverts affines et principaux)

1. Sur une variété algébrique réelle quasi-projective, les ouverts affines sont tous principaux.
2. Montrer que sur une variété quasi-projective, l'intersection de deux ouverts principaux est un ouvert principal.
3. En déduire que sur une variété algébrique quasi-projective, les ouverts principaux forment une base d'ouverts pour la topologie de Zariski (voir l'exercice 1.2.60).
4. Sur une variété quasi-projective, l'intersection de deux ouverts affines est un ouvert affine.
5. Soient X une variété algébrique sur K quasi-projective et $f: X \rightarrow K$ une fonction. Montrer que f est régulière si et seulement s'il existe un recouvrement affine de X tel que la restriction de f à chaque ouvert du recouvrement est régulière.
6. Soient K un corps algébriquement clos, $X = \mathcal{Z}(J) \setminus \mathcal{Z}(I) \subset \mathbf{P}^n(K)$ une variété quasi-projective déterminée par deux idéaux homogènes $I, J \subset K[X_0, \dots, X_n]$ et $h \in I$ une fonction polynomiale homogène. Toute fonction régulière sur l'ouvert principal $\mathcal{D}(h) := \mathcal{D}(h) \cap X$ de X s'écrit $\frac{g}{h^k}$ où g est une fonction polynomiale homogène et $\deg g = k \deg h$.

Soit f un élément d'un anneau A , rappelons (définition A.3.1) qu'on note A_f l'anneau localisé de A en la partie multiplicative des puissances de f . L'énoncé suivant est une conséquence de l'exercice 1.2.60(1).

Proposition 1.3.16. — *Soit K un corps algébriquement clos (par exemple \mathbf{C}) ou réel clos (par exemple \mathbf{R}). Soient F un ensemble algébrique affine et $f \in \mathcal{P}(F)$ une fonction polynomiale sur F . On a un isomorphisme de K -algèbres :*

$$\mathcal{O}_F(\mathcal{D}(f)) \simeq \mathcal{O}_F(F)_f .$$

Par définition, si Y est isomorphe à X , les K -algèbres $\mathcal{O}_X(X)$ et $\mathcal{O}_Y(Y)$ sont isomorphes, l'algèbre des fonctions régulières globales est donc un *invariant* de la variété X . De même, l'algèbre des fonctions rationnelles globales est un invariant de X . Ainsi que pour tout point $x \in X$, l'algèbre $\mathcal{O}_{X,x}$ est

un invariant du couple (X, x) dans le sens suivant : si $\varphi: X \rightarrow Y$ est un isomorphisme, $\mathcal{O}_{X,x}$ et $\mathcal{O}_{Y,\varphi(y)}$ sont des algèbres isomorphes.

L'algèbre des coordonnées affines \mathcal{A} , l'algèbre des fonctions polynomiales \mathcal{P} et l'algèbre des coordonnées homogènes \mathcal{S} dépendent *a priori* du plongement. Pour une variété affine X sur un corps algébriquement clos, l'algèbre des coordonnées $\mathcal{A}(X)$ est un invariant grâce au théorème 1.2.50 alors que pour une variété projective X , l'anneau des coordonnées homogènes $\mathcal{S}(X)$ dépend du plongement dans un projectif, voir l'exemple 1.3.17 ci-dessous.

Exemple 1.3.17. — Considérons le plongement (définition 1.3.12) de $\mathbf{P}^1(K)$ comme conique plane (c'est le plongement de Veronese de degré 2 de $\mathbf{P}^1(K)$) :

$$\varphi: \mathbf{P}^1(K)_{x:y} \rightarrow \mathbf{P}^2(K)_{X:Y:Z} \quad , \quad (x : y) \mapsto (x^2 : y^2 : xy) .$$

L'image $C := \varphi(\mathbf{P}^1(K))$ est la conique d'équation $XY = Z^2$. L'anneau des coordonnées homogènes de $\mathbf{P}^1(K)$ est $K[x, y]$. Mais l'anneau des coordonnées homogènes de C , $K[C] = K[X, Y, Z]/(XY - Z^2)$ n'est pas isomorphe à $K[x, y]$ car l'espace des éléments de degré 1 est de dimension 3 dans $K[C]$.

Théorème 1.3.18. — Soit X et Y des variétés algébriques sur un même corps K . Si Y est affine, on a une bijection naturelle

$$\alpha: \text{Hom}(X, Y) \longrightarrow \text{Hom}(\mathcal{A}(Y), \mathcal{R}(X))$$

où le Hom de gauche est l'ensemble des morphismes de variétés algébriques, et le Hom de droite est l'ensemble des morphismes de K -algèbres.

Si de plus le corps K est réel clos ou algébriquement clos, alors on a une bijection naturelle

$$\beta: \text{Hom}(\mathcal{R}(Y), \mathcal{R}(X)) \longrightarrow \text{Hom}(\mathcal{A}(Y), \mathcal{R}(X)) .$$

Démonstration. — La preuve du théorème 1.2.64 s'applique mot pour mot en considérant un ensemble algébrique affine F' isomorphe à Y . \square

Corollaire 1.3.19. — Soient X et Y des variétés affines sur un même corps K . Si K est algébriquement clos, alors X est isomorphe à Y si et seulement si les K -algèbres $\mathcal{A}(X)$ et $\mathcal{A}(Y)$ sont isomorphes.

Corollaire 1.3.20. — Soient X et Y des variétés affines sur un même corps K . Si K est réel clos ou algébriquement clos, alors X est isomorphe à Y si et seulement si les K -algèbres $\mathcal{R}(X)$ et $\mathcal{R}(Y)$ sont isomorphes.

On reprend la définition 1.2.40 pour les variétés abstraites. Soit (X, \mathcal{O}_X) une variété algébrique sur un corps K . La K -algèbre des *germes de fonctions régulières* au point x est la fibre en x du faisceau \mathcal{O}_X :

$$\mathcal{O}_x := \mathcal{O}_{X,x} = \varinjlim_{V \ni x} \mathcal{O}_U(V)$$

où la limite inductive est considérée pour V parcourant les voisinages ouverts de x dans U . On reprend de même la définition 1.2.69 pour les variétés abstraites. La K -algèbre des *fonctions rationnelles* de X est donnée par

$$K(X) = \varinjlim_{\bar{U}=X} \mathcal{O}_X(U)$$

lorsque U parcourt les ouverts denses de X . Le résultat suivant se déduit alors immédiatement de la proposition 1.2.77.

Proposition 1.3.21. — *Soit X une variété algébrique sur K . Pour tout ouvert dense $U \subset X$,*

$$K(X) = \text{Frac } \mathcal{O}_X(U).$$

Ce résultat est en particulier utile lorsque U est un ouvert affine.

Applications rationnelles. —

Définition 1.3.22. — Si X et Y sont des variétés algébriques sur K , une *application rationnelle* $\varphi: X \dashrightarrow Y$ est une classe d'équivalence de couples (U, φ_U) où U est un ouvert dense de X , φ_U est un morphisme de U vers Y , et où deux couples (U, φ_U) et (V, φ_V) sont équivalents si les morphismes φ_U et φ_V prennent les mêmes valeurs sur $U \cap V$. L'application rationnelle φ est *dominante* si pour un représentant (U, φ_U) , l'image de φ_U est dense dans Y . L'application φ est *définie* en un point $x \in X$ s'il existe un représentant (U, φ_U) de φ tel que $x \in U$. Les couples représentant φ sont ordonnés de manière évidente et le plus grand ouvert sur lequel φ est définie est appelé le *domaine* de φ . On le note

$$\text{dom}(\varphi) := \{x \in X \mid \varphi \text{ est définie en } x\}.$$

Remarque 1.3.23. — 1. Un morphisme est une application rationnelle.
2. On utilise souvent une flèche discontinue \dashrightarrow pour rappeler qu'une application rationnelle $\varphi: X \dashrightarrow Y$ n'est pas *a priori* définie partout et on indiquera le cas échéant par une flèche continue \rightarrow que $\varphi: X \rightarrow Y$ est un morphisme.

3. Bien sûr, si $Y = K$, une application rationnelle $\varphi: X \dashrightarrow Y = K$ est une fonction rationnelle telle que définie en 1.2.69.

Exercice 1.3.24. — La relation entre les couples est bien une relation d'équivalence car on a pris soin d'imposer aux ouverts d'être denses. Lorsque X est irréductible, il suffit d'exiger que les ouverts soient non vides.

Exercice 1.3.25 (Voir l'exercice 1.2.56). — Supposons que $K = \mathbf{R}$ ou \mathbf{C} . Soient $X \subset \mathbf{A}^n(K)$, $Y \subset \mathbf{A}^N(K)$ des ensembles algébriques sur K et

$$\varphi: X \dashrightarrow Y$$

une application rationnelle. Montrer que φ est la restriction d'une application rationnelle $\mathbf{A}^n(K) \dashrightarrow \mathbf{A}^N(K)$, c'est-à-dire qu'il existe des polynômes $P_1, \dots, P_N \in K[X_1, \dots, X_n]$ à coefficients dans K et des polynômes non nuls $Q_1, \dots, Q_N \in K[X_1, \dots, X_n]$ à coefficients dans K tels que pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in X$ en lequel φ est définie,

$$\varphi(x_1, \dots, x_n) = \left(\frac{P_1(x_1, \dots, x_n)}{Q_1(x_1, \dots, x_n)}, \dots, \frac{P_N(x_1, \dots, x_n)}{Q_N(x_1, \dots, x_n)} \right).$$

Le cas des courbes non singulières, voir la définition 1.3.26, est à part car une application rationnelle se prolonge en un morphisme vers une variété projective :

Proposition 1.3.26. — Soient X une courbe non singulière, Y une variété projective et $\varphi: X \dashrightarrow Y$ une application rationnelle. Alors il existe une application régulière $\Phi: X \rightarrow Y$ qui prolonge φ , c'est-à-dire que pour tout point $P \in \text{dom}(\varphi)$, $\Phi(P) = \varphi(P)$.

Démonstration. — Voir [Har77, Proposition I.6.8]. □

On ne peut pas toujours composer des applications rationnelles mais clairement, on peut composer les applications rationnelles *dominantes*, la catégorie des variétés et applications rationnelles dominantes est donc bien définie. Les « isomorphismes » de cette catégorie sont les applications *birationnelles*.

Définition 1.3.27. — Si X et Y sont des variétés algébriques sur un corps K , une *application birationnelle* $\varphi: X \dashrightarrow Y$ est une application rationnelle dominante qui admet une réciproque, c'est-à-dire une application rationnelle dominante $\psi: Y \dashrightarrow X$ telle que $\varphi \circ \psi = \text{id}_Y$ et $\psi \circ \varphi = \text{id}_X$ en tant qu'applications rationnelles. S'il existe une application birationnelle $X \dashrightarrow Y$, on dit que les variétés X et Y sont *birationnellement équivalentes* ou simplement

birationnelles. Un *morphisme birationnel* est un morphisme $\varphi: X \rightarrow Y$ qui admet une application rationnelle dominante réciproque.

Remarque 1.3.28. — Une application birationnelle $\varphi: X \dashrightarrow Y$ est donc un morphisme birationnel si et seulement si $\text{dom}(\varphi) \supset X$.

Exemple 1.3.29. — L'éclatement d'une variété le long d'une sous-variété (revoir construction en appendice F) est un morphisme birationnel.

Théorème 1.3.30. — Soit X et Y des variétés algébriques sur un même corps K . Il existe une application $\varphi \mapsto \varphi^*$ qui à une application rationnelle dominante de X dans Y associe un morphisme de K -algèbres de $K(Y)$ dans $K(X)$. Si de plus X et Y sont irréductibles, cette application est une bijection entre

1. L'ensemble des applications rationnelles dominantes de X dans Y , et
2. L'ensemble des morphismes de K -algèbres de $K(Y)$ dans $K(X)$.

Démonstration. — Soit $\varphi: X \dashrightarrow Y$ une application rationnelle dominante et (U, φ_U) un couple la représentant. Soit (V, f_V) un couple représentant un élément de $K(Y)$. Par hypothèse, $\varphi_U(U)$ est dense dans Y et en particulier $\varphi_U^{-1}(V)$ est un ouvert non vide de X . Par conséquent $f \circ \varphi_U$ est régulière sur $\varphi_U^{-1}(V)$ et le couple $(\varphi_U^{-1}(V), f \circ \varphi_U)$ représente une fonction rationnelle sur X . On en déduit un morphisme de K -algèbres $\varphi^*: K(Y) \rightarrow K(X)$.

Réciproquement, supposons que X et Y sont irréductibles et soit $\theta: K(Y) \rightarrow K(X)$ un morphisme de K -algèbres. On veut définir une application rationnelle φ de X sur Y telle que $\varphi^* = \theta$. Par définition de variété, Y est recouverte par des variétés affines. Par irréductibilité, nous pouvons donc supposer que Y est un fermé de $\mathbf{A}^N(K)$ et que $\mathcal{A}(Y) = K[y_1, \dots, y_N]/\mathcal{I}(Y) = \mathcal{P}(Y)$. Les fonctions $y_i|_Y \in \mathcal{P}(Y)$ sont des fonctions rationnelles sur Y et leurs images $\theta(y_i) \in K(X)$ sont des fonctions rationnelles sur X . Pour $i = 1 \dots N$, notons $U_i \subset X$ le domaine de $\theta(y_i)$, alors l'ouvert $U := \bigcap_{i=1}^N U_i$ est non vide car X est irréductible. On définit une application $\varphi_U: U \rightarrow \mathbf{A}^N(K)$ par $\varphi_U = (\theta(y_1), \dots, \theta(y_N))$. Du fait que $Y = \mathcal{Z}(\mathcal{I}(Y))$ et que θ est un morphisme de K -algèbres, il est immédiat que $\varphi_U(x) \in Y$ pour $x \in U \subset X$. Sachant que chaque composante $\theta(y_i)$ de φ_U est régulière sur U , on vérifie sans difficulté que φ_U est un morphisme. Le couple (U, φ_U) représente donc une application rationnelle $\varphi: X \dashrightarrow Y$ telle que $\varphi^* = \theta$. \square

Remarque 1.3.31. — Si X est irréductible et s'il existe une application rationnelle dominante $\varphi: X \dashrightarrow Y$, alors Y est irréductible aussi. En effet, soit $U \subset X$ un ouvert sur lequel φ est définie et tel que $\varphi(U)$ soit dense dans Y . Comme X est irréductible, U l'est aussi et d'après le lemme 1.2.18, $\varphi(U)$ est irréductible.

Proposition 1.3.32. — Soient K un corps, X et Y deux variétés algébriques sur K . Si X et Y sont irréductibles, les conditions suivantes sont équivalentes :

1. Les variétés X et Y sont birationnellement équivalentes ;
2. il existe des ouverts non vides $U \subset X$ et $V \subset Y$, isomorphes en tant que variétés algébriques ;
3. les K -algèbres $\text{Frac } \mathcal{R}(X)$ et $\text{Frac } \mathcal{R}(Y)$ sont isomorphes.
4. les corps $K(X)$ et $K(Y)$ sont isomorphes en tant que K -algèbres.

Démonstration. — 3 \iff 4 d'après la proposition 1.2.77.

1 \implies 2 : soient $\varphi: X \dashrightarrow Y$ et $\psi: Y \dashrightarrow X$ des applications rationnelles réciproques et soient des représentants (U, φ) de φ et (V, ψ) de ψ . La composée $\psi \circ \varphi$ est représentée par $(\varphi^{-1}(V), \psi \circ \varphi)$ et par hypothèse, l'application $\psi \circ \varphi$ est l'identité sur $\varphi^{-1}(V)$. De la même manière, $\varphi \circ \psi$ est l'identité sur $\psi^{-1}(U)$. Par construction, les ouverts $\varphi^{-1}(\psi^{-1}(U))$ de X et $\psi^{-1}(\varphi^{-1}(V))$ de Y sont donc isomorphes.

2 \implies 4 par définition de corps des fonctions.

4 \implies 1 d'après le théorème 1.3.30. □

Corollaire 1.3.33. — Soient K un corps, X et Y des variétés algébriques sur K . On suppose que X et Y sont irréductibles. Si les corps $K(X)$ et $K(Y)$ sont isomorphes en tant que K -algèbres, il existe des ouverts non vides $U \subset X$ et $V \subset Y$ tels que U soit isomorphe à V .

Démonstration. — Ce résultat est un corollaire immédiat de la proposition 1.3.32. Dans le cas où K est algébriquement clos, on dispose d'une preuve directe⁽¹⁰⁾. En effet, on peut toujours supposer que X et Y sont affines et dans ce cas, les K -algèbres de type fini $\mathcal{A}(X)$ et $\mathcal{A}(Y)$ sont des sous-algèbres de $K(X)$. Comme $K(X) = \text{Frac } \mathcal{A}(Y)$ et $\mathcal{A}(X)$ est de type fini, le théorème de l'élément primitif A.5.9 assure l'existence de $f \in K(X)$, $f \neq 0$ tel que $\mathcal{A}(X) \subset \mathcal{A}(Y)[\frac{1}{f}]$. De même, il existe $g \in K(X)$, $g \neq 0$ tel

¹⁰. Démonstration extraite d'un cours d'Antoine Chambert-Loir [CL13, Proposition 3.6.7].

que $\mathcal{A}(Y) \subset \mathcal{A}(X)[\frac{1}{g}]$. On a alors $\mathcal{A}(X)[\frac{1}{fg}] = \mathcal{A}(Y)[\frac{1}{fg}]$. Il existe $a \in \mathcal{A}(X)$ et $b \in \mathcal{A}(Y)$ tels que $\mathcal{A}(X)[\frac{1}{fg}] = \mathcal{A}(X)[\frac{1}{a}]$ et $\mathcal{A}(Y)[\frac{1}{fg}] = \mathcal{A}(Y)[\frac{1}{b}]$. D'après le théorème 1.2.50, on peut identifier les algèbres $\mathcal{A}(F) = \mathcal{R}(F)$ pour tout fermé de Zariski F et d'après l'exercice 1.2.60, on a $\mathcal{A}(\mathcal{D}(a)) = \mathcal{A}(X)[\frac{1}{a}]$ et $\mathcal{A}(\mathcal{D}(b)) = \mathcal{A}(Y)[\frac{1}{b}]$. Les algèbres $\mathcal{A}(\mathcal{D}(a))$ et $\mathcal{A}(\mathcal{D}(b))$ sont donc isomorphes et si K est algébriquement clos, cela implique que $\mathcal{D}(a) \subset X$ et $\mathcal{D}(b) \subset Y$ sont des variétés algébriques isomorphes. \square

Définition 1.3.34. — Soit X une variété algébrique abstraite. Le faisceau des fonctions rationnelles sur X est le faisceau de K -algèbres, noté $\mathcal{M} := \mathcal{M}_X$, défini sur les ouverts de X par :

$$U \mapsto \text{Frac } \mathcal{O}_X(U).$$

Pour $x \in X$, \mathcal{M}_x est canoniquement isomorphe à $\text{Frac } \mathcal{O}_{X,x}$.

Proposition 1.3.35. — Pour toute variété algébrique irréductible X , pour tout ouvert non vide $U \subset X$ et pour tout point $x \in U$ on a :

$$\mathcal{M}_x = \text{Frac } \mathcal{O}_{X,x} = \mathcal{M}_X(U) = \text{Frac } \mathcal{R}(U) = K(X).$$

En particulier, le faisceau \mathcal{M}_X est un faisceau d'anneaux qui est constant.

Démonstration. — En vertu du fait que tout faisceau localement constant sur un espace irréductible est constant, il suffit de démontrer la proposition lorsque X est une variété quasi-affine, ce qui se déduit de la proposition 1.2.77 (voir aussi la proposition 1.3.21). \square

Remarque 1.3.36. — Soit $F \subset \mathbf{A}^n(K)$ un ensemble algébrique irréductible sur un corps algébriquement clos ou réel clos. Pour tout $x \in F$, \mathcal{M}_x est isomorphe au corps des fonctions rationnelles $K(F) = \text{Frac } \mathcal{P}(F)$ de la variété irréductible F , voir le corollaire 1.2.79. Le fait que $\text{Frac } \mathcal{P}(F)$ soit un corps provient du fait que $\mathcal{P}(F)$ est un anneau intègre puisque F est irréductible.

Variétés rationnelles. — D'après la proposition 1.3.35, si une variété algébrique X sur un corps K est irréductible, son anneau des fonctions rationnelles est un corps : son corps des fonctions. Grâce au lemme de normalisation de Noether A.5.6, on sait que le corps des fonctions de X (qui est une variété intègre, c'est-à-dire réduite, ce qui est sous-entendu dans la définition 1.3.1, et irréductible) est une extension de degré fini du corps de fractions rationnelles à n indéterminées $K(X_1, \dots, X_n)$ (ici n est la dimension de X sur K). Classiquement, on dit que la variété X est *rationnelle* si et seulement si son corps des fonctions est *isomorphe* à $K(X_1, \dots, X_n)$. On donne ci-dessous une

autre définition de la rationalité qui est équivalente à la précédente d'après la proposition 1.3.32 (exercice).

Définition 1.3.37. — Soit K un corps et \bar{K} la clôture algébrique de K .

1. Une variété algébrique X de dimension n sur K est *rationnelle* (ou *rationnelle sur K*) si elle est birationnellement équivalente à l'espace projectif $\mathbf{P}^n(K)$, c'est-à-dire s'il existe des ouverts de Zariski denses $U \subset X$, $V \subset \mathbf{P}^n(K)$ et un isomorphisme $U \xrightarrow{\cong} V$ de variétés algébriques sur K .
2. Une variété algébrique quasi-projective X sur K est *géométriquement rationnelle* (ou *rationnelle sur \bar{K}*) si et seulement si la variété $X_{\bar{K}}$ ⁽¹¹⁾, qui est une variété algébrique sur \bar{K} , est rationnelle, c'est-à-dire s'il existe des ouverts de Zariski denses $U \subset X_{\bar{K}}$, $V \subset \mathbf{P}^n(\bar{K})$ et un isomorphisme $U \xrightarrow{\cong} V$ de variétés algébriques sur \bar{K} .

Proposition 1.3.38. — *Toute variété rationnelle est géométriquement rationnelle.*

Remarque 1.3.39. — La réciproque de la proposition ci-dessus est fautive, voir plus loin.

Exercice 1.3.40. — 1. Les variétés algébriques $\mathbf{P}^n(K)$ et $\mathbf{A}^n(K)$ sont rationnelles sur K .

2. La surface complexe $\mathbf{P}^1(\mathbf{C}) \times \mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ est rationnelle sur \mathbf{C} .

Exemple 1.3.41. — 1. Les surfaces de Hirzebruch complexes \mathbf{F}_n (surfaces fibrées en $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ sur $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$, voir définition 4.2.1) sont des exemples des surfaces rationnelles sur \mathbf{C} .

2. Nous verrons au § 4.4.10 des exemples de surfaces géométriquement rationnelles non rationnelles. En particulier, les fibrés en coniques (par exemple $x^2 + y^2 = P(z)$ pour $P \in \mathbf{R}[z]$) produisent des exemples de surfaces géométriquement rationnelles non rationnelles.

1.4. Topologie euclidienne

Soit X une variété algébrique définie sur un corps K , on sait que l'espace topologique X est muni de la topologie de Zariski. Si $K = \mathbf{C}$, X est une variété algébrique complexe et si $K = \mathbf{R}$, X est une variété algébrique réelle. Dans

11. Notation $X_{\bar{K}}$: si X est une sous-variété d'un $\mathbf{P}^N(K)$, la sous-variété $X_{\bar{K}} \subset \mathbf{P}^N(\bar{K})$ est définie par le même idéal homogène que X , voir la définition 2.3.1.

ces deux cas, l'ensemble X est alors naturellement muni d'une topologie, plus forte que la topologie de Zariski, appelée *topologie euclidienne* ⁽¹²⁾.

Définition 1.4.1. — Soit X une variété algébrique complexe (resp. réelle). La *topologie euclidienne* sur X est la topologie engendrée par les ouverts de la forme

$$V(U; f_1, \dots, f_r; \varepsilon) := \{x \in U \mid |f_l(x)| < \varepsilon, \text{ pour } l = 1, \dots, r\}$$

où U est un ouvert de Zariski de X , r est un entier naturel, f_1, \dots, f_r sont des fonctions régulières de U à valeurs dans \mathbf{C} (resp. \mathbf{R}) et $\varepsilon > 0$ est un nombre réel.

Remarque 1.4.2. — Sur \mathbf{R} , on peut remplacer la base d'ouverts semi-algébriques (définition B.2.1) $V(U; f_1, \dots, f_r; \varepsilon)$ par la base (formée elle aussi d'ensembles semi-algébriques) :

$$\{x \in U \mid f_1(x) > 0, \dots, f_r(x) > 0\} .$$

Exercice 1.4.3. — 1. Prouver que tout fermé de Zariski est un fermé pour la topologie euclidienne mais que la réciproque est fautive.

2. On définit cette topologie à partir des fonctions régulières mais la topologie obtenue est équivalente à celle déterminée par les restrictions de fonctions \mathcal{C}^∞ .

Exercice 1.4.4. — Montrer qu'un morphisme de variétés réelles ou complexes (qui est par définition continu pour la topologie de Zariski) est continu pour la topologie euclidienne.

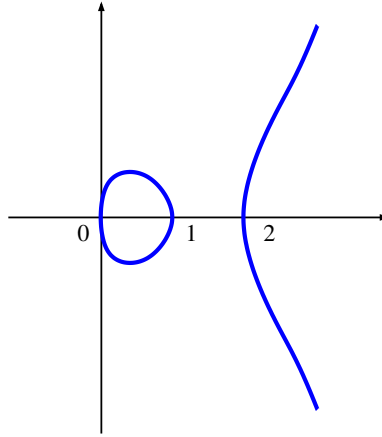
Théorème 1.4.5. — Soit X une variété algébrique sur \mathbf{C} . Si X est irréductible, alors X est connexe pour la topologie euclidienne.

Démonstration. — Voir par exemple [Sha94, VII.2, Theorem 1]. □

Remarque 1.4.6. — Bien sûr la réciproque est fautive.

Remarque 1.4.7. — L'énoncé équivalent au théorème 1.4.5 sur \mathbf{R} est grossièrement faux dès la dimension 1. Il suffit de considérer une cubique plane irréductible d'équation $y^2 = (x-a)(x-b)(x-c)$ pour a, b, c réels distincts deux à deux. L'ensemble des points réels $\mathcal{Z}(y^2 - (x-a)(x-b)(x-c)) \subset \mathbf{A}^2(\mathbf{R})$ possède deux composantes connexes. La figure 1.1 correspond au cas $a = 0, b = 1, c = 2$.

¹². Appelée aussi dans la littérature *topologie transcendante*, ou encore *topologie usuelle*, ou parfois *topologie complexe* si $K = \mathbf{C}$, etc.

FIGURE 1.1. $y^2 - x(x-1)(x-2) = 0$.

Exercice 1.4.8. — (Voir [Ser56, Lemme 1 et proposition 2].)

Soit X une variété algébrique complexe quasi-projective et soit $X \hookrightarrow \mathbf{P}^N(\mathbf{C})$ un plongement projectif. La topologie induite sur X par la topologie euclidienne de $\mathbf{P}^N(\mathbf{C})$ est la topologie euclidienne de X . De même, si X est une variété algébrique réelle quasi-projective et $X \hookrightarrow \mathbf{P}^N(\mathbf{R})$ un plongement, la topologie induite par la topologie euclidienne de $\mathbf{P}^N(\mathbf{R})$ est la topologie euclidienne de X .

Lemme 1.4.9. — *Soit X une variété algébrique réelle ou complexe. Si X est projective, alors X est compacte pour la topologie euclidienne.*

Démonstration. — En effet, un espace projectif réel ou complexe est compact pour la topologie euclidienne et il existe un espace projectif dont X est un fermé pour cette topologie. \square

Remarque 1.4.10. — Rappelons qu'une variété algébrique réelle quasi-projective est affine d'après la proposition 1.3.11. Soit X une variété algébrique réelle projective, il existe donc un entier n tel que X se plonge comme un sous-espace compact de \mathbf{R}^n pour la topologie euclidienne.

Cette remarque motive la définition suivante.

Définition 1.4.11. — Une variété algébrique réelle ou complexe est *complète* si elle est compacte pour la topologie euclidienne.

Remarque 1.4.12. — Il existe une notion analogue de variété algébrique complète sur un corps algébriquement clos quelconque, voir par exemple [Har77, II.4]. Retenons simplement que toute variété projective est complète.

Remarque 1.4.13. — Dans [BCR98, Définition 3.4.10], un ensemble réel est complet s'il est « fermé-borné » car contrairement à la compacité, cette notion se généralise aux ensembles semi-algébriques sur un corps réel clos distinct de \mathbf{R} . Les deux définitions sont bien sûr équivalentes sur \mathbf{R} .

Proposition 1.4.14. — Soit X une variété algébrique quasi-projective sur $K = \mathbf{R}$ ou \mathbf{C} .

1. Si X est projective, alors elle est complète.
2. Si X est non singulière et complète, alors elle est projective.

Remarque 1.4.15. — Attention à l'hypothèse de quasi-projectivité. Par exemple sur \mathbf{C} , il existe des variétés algébriques complètes non singulières et non projectives, un exemple d'Hironaka est décrit dans [Har77, Appendix B.3.4.1].

Démonstration. — La première assertion est le lemme 1.4.9. La seconde, dont la démonstration est détaillée au chapitre 2 (théorème 2.3.7), est un corollaire du théorème de résolution des singularités d'Hironaka 1.5.54. \square

1.5. Dimension, points non singuliers

Lorsque le corps de base est égal à \mathbf{R} ou \mathbf{C} , la notion de point non singulier d'une variété algébrique présente une certaine analogie avec la notion de point d'une variété topologique (ou différentielle). En ce sens qu'il n'existe qu'un seul modèle analytique local : ouvert euclidien d'un espace vectoriel dont la dimension, finie, est déterminée par la variété au point considéré, voir [Mal67, Tou72] et l'appendice B. En particulier sur \mathbf{C} , un ensemble algébrique affine F est non singulier en un point x de F si et seulement si, muni de sa topologie euclidienne (définition 1.4.1), l'espace F est une variété analytique complexe en x .

Pour pouvoir analyser localement les singularités sans passer par la topologie euclidienne, on peut introduire la notion de complétion pour laquelle nous renvoyons à [Har77, Thm. 5.3, page 33]. Par exemple, $(0, 0)$ est un point double ordinaire de la courbe complexe affine plane $C := \mathcal{Z}(xy)$ et tout point double ordinaire est localement analytiquement isomorphe à C mais il n'existe

aucun ouvert de Zariski de C contenant $(0, 0)$ qui soit isomorphe à un voisinage de Zariski du point double ordinaire $(0, 0)$ de la courbe $\mathcal{Z}(y^2 - x^2(x+1))$. Voir [Har77, Exemple I.5.6.3].

Sur le corps des réels, l'analogie est néanmoins limitée comme le montre l'exemple suivant (tiré de [BCR98, Exemple 3.3.11.b]) qui a valeur introductive pour l'ensemble de cette section, il est complété par l'exercice 1.5.31.

Exemple 1.5.1. — Soit le polynôme $P = y^3 + 2x^2y - x^4$, et notons

$$C := \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid P(x, y) = 0\} .$$

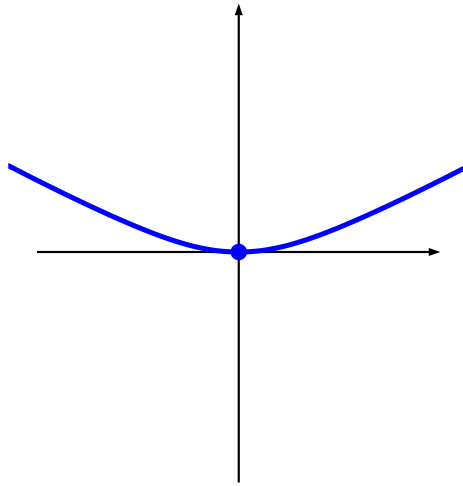


FIGURE 1.2. $y^3 + 2x^2y - x^4 = 0$.

Le sous-ensemble C de \mathbf{R}^2 (représenté en figure 1.2) est une sous-variété \mathcal{C}^∞ , mais le point $(0, 0)$ est un point singulier (définition 1.5.27), de la courbe algébrique (définition 1.5.9) irréductible $C = \mathcal{Z}(P)$.

En effet, pour tout $(x, y) \in C$, on a $x^2 = y(1 + \sqrt{1+y})$. Au voisinage de $(0, 0)$, y est donc une fonction \mathcal{C}^∞ (et même analytique) de x d'après le théorème des fonctions implicites. En revanche, les dérivées partielles de P sont nulles en $(0, 0)$. L'espace tangent de Zariski $T_{(0,0)}^{\text{Zar}} C$, voir la définition 1.5.22, est donc égal à \mathbf{R}^2 et la dimension de C vaut 1 d'après la définition 1.5.9. Le point $(0, 0)$ est donc un point singulier de C d'après la définition 1.5.27.

Définition 1.5.2. — Soit E un ensemble, une chaîne de longueur n de parties de E est une suite $E_0 \subsetneq E_1 \subsetneq \cdots \subsetneq E_n$ avec les $E_i \subset E$ distincts.

Définition 1.5.3. — La *dimension* (ou *dimension de Krull*) d'un anneau A est la borne supérieure des longueurs de ses chaînes d'idéaux premiers.

Remarque 1.5.4. — La dimension d'un anneau peut être finie ou infinie et ce, même si l'anneau est noethérien. Voir [Eis95, Exercice 9.6, page 229] pour un exemple dû à Nagata d'anneau noethérien de dimension infinie. En revanche tout anneau *local* (définition A.3.7) noethérien est de dimension finie (exercice).

Rappelons ici un résultat fondamental d'algèbre commutative, où $\text{trdeg}_K L$ est le degré de transcendance d'une extension de corps $L|K$, voir la définition A.5.7.

Théorème 1.5.5. — Soient K un corps et A une K -algèbre intègre de type fini. Alors

$$\dim A = \text{trdeg}_K \text{Frac}(A) .$$

Démonstration. — D'après le lemme de normalisation de Noether A.5.6, il existe un entier $d \geq 0$ et un morphisme injectif $K[X_1, \dots, X_d] \hookrightarrow A$ qui fait de A une K -algèbre entière sur $K[X_1, \dots, X_d]$ et de type fini en tant que $K[X_1, \dots, X_d]$ -module. On déduit alors de la proposition A.5.3 que $\dim A = d$ et du fait que le corps $\text{Frac} A$ est algébrique sur $K(X_1, \dots, X_d)$, que $\text{trdeg}_K \text{Frac}(A) = d$. \square

Exercice 1.5.6. — Soit K un corps, alors $\dim K[X_1, \dots, X_n] = n$.

Exemple 1.5.7. — Soit $A := \mathbf{C}[X, Y]$, alors la dimension de Krull de A est égale à 2 comme le prouve la chaîne maximale $(0) \subsetneq (X) \subsetneq (X, Y)$. Le degré de transcendance de $\text{Frac} A$ sur \mathbf{C} vaut 2 et le degré de transcendance de $\text{Frac} A$ sur \mathbf{R} vaut 2 aussi.

Corollaire 1.5.8. — Soit A un anneau intègre affine et $\mathfrak{m} \subset A$ un idéal maximal, alors $\dim A_{\mathfrak{m}} = \dim A$.

Démonstration. — D'après la définition A.5.5, il existe un corps K qui fait de A une K -algèbre intègre de type fini. D'après le théorème 1.5.5, la dimension de A est donc la longueur commune des chaînes maximales d'idéaux premiers de A . Si \mathfrak{m} est un idéal maximal, une chaîne d'idéaux premiers contenus dans \mathfrak{m} est donc de longueur $\dim A$. Or la dimension de $A_{\mathfrak{m}}$ est la longueur d'une chaîne maximale contenue dans \mathfrak{m} d'après la proposition A.3.5. \square

Définition 1.5.9. — La *dimension* $\dim I$ d'un idéal I de $K[X_1, \dots, X_n]$ est la dimension de l'anneau quotient $K[X_1, \dots, X_n]/I$. La *dimension* d'un ensemble algébrique irréductible $F \subset \mathbf{A}^n(K)$ sur un corps K est la dimension de son idéal $\mathcal{I}(F)$, c'est-à-dire celle de son anneau des coordonnées affines ⁽¹³⁾ $\mathcal{A}(F) = K[X_1, \dots, X_n]/\mathcal{I}(F)$. On la note $\dim F$ ou $\dim_K F$.

Remarque 1.5.10. — On aurait pu considérer la dimension de l'anneau $\mathcal{R}(F)$ au lieu de $\mathcal{A}(F)$ mais par exemple lorsque $K = \mathbf{R}$, l'anneau $\mathcal{R}(F)$ n'est pas de type fini en général (voir la proposition 1.2.38). En revanche, pour $x \in F$, l'anneau localisé $\mathcal{R}(F)_{\mathfrak{m}_x}$ possède la bonne dimension, voir la proposition 1.5.41.

Remarque 1.5.11. — Un idéal de A est aussi naturellement un A -module. La dimension du A -module I est égale à la dimension de A dès que A est intègre par exemple. On fera donc attention à ne pas confondre $\dim I = \dim A/I$ avec la dimension du A -module I . Voir aussi [Eis95, Chapter 9].

Définition 1.5.12. — Dans un anneau A , la *codimension* (ou la *hauteur*) d'un idéal premier I est la borne supérieure des longueurs des chaînes d'idéaux premiers contenus dans I . On la note $\text{codim } I$.

Exercice 1.5.13 (Dimension et codimension d'un idéal)

1. Une conséquence du théorème de correspondance (voir la proposition A.2.8), est que si I est un idéal de A , alors $\dim I$ est la borne supérieure des longueurs de chaînes d'idéaux premiers de A contenant I .
2. Soit I un idéal premier d'un anneau A , alors $\text{codim } I = \dim A_I$.

Exercice 1.5.14. — Soit I un idéal premier de dimension d de $\mathbf{C}[X_1, \dots, X_n]$. Si I est engendré par des polynômes à coefficients réels, alors

$$\dim(I \cap \mathbf{R}[X_1, \dots, X_n]) \leq d$$

en tant qu'idéal de $\mathbf{R}[X_1, \dots, X_n]$.

En fait on a mieux que la conclusion de l'exercice; les dimensions sont égales.

Lemme 1.5.15. — Soit I un idéal premier de dimension d de $\mathbf{C}[X_1, \dots, X_n]$. Alors $I \cap \mathbf{R}[X_1, \dots, X_n]$ est un idéal premier de dimension d de $\mathbf{R}[X_1, \dots, X_n]$.

13. Voir la proposition 1.2.27.

Démonstration. — Application directe de la proposition A.5.3 au morphisme entier injectif $\mathbf{R}[X_1, \dots, X_n]/(I \cap \mathbf{R}[X_1, \dots, X_n]) \rightarrow \mathbf{C}[X_1, \dots, X_n]/I$ induit par l'injection. \square

On prendra garde que pour un idéal premier donné $I \subset K[X_1, \dots, X_n]$, la dimension de l'ensemble algébrique $F = \mathcal{Z}(I)$ est égale à la dimension de l'idéal $\mathcal{I}(F)$ qui peut différer de la dimension de l'idéal I , voir l'exemple 1.5.20.

Exercice 1.5.16. — Soit K un corps. Dédurre de l'exercice 1.5.6 que $\dim \mathbf{A}^n(K) = n$.

Nous allons donner une définition plus directe de la dimension d'un ensemble algébrique affine irréductible (proposition 1.5.19).

Définition 1.5.17. — La *dimension* d'un espace topologique X est la borne supérieure des longueurs de ses chaînes de parties fermées irréductibles. On la note $\dim X$. Si $X \neq \emptyset$, $\dim X$ est un entier naturel ou $+\infty$. Par convention, on pose $\dim \emptyset = -\infty$.

Remarque 1.5.18. — Cette notion de dimension est adaptée à des topologies grossières telle la topologie de Zariski qui est assez proche d'une topologie combinatoire. À titre d'exercice, on pourra montrer qu'avec cette notion, tout espace topologique séparé est de dimension 0.

Pour un espace topologique raisonnable comme par exemple une variété topologique (voir l'appendice B.5), on préfère définir la dimension comme l'indice maximal du groupe de cohomologie à support compact non trivial (voir la définition B.6.7).

Proposition 1.5.19. — Soit K un corps. La dimension d'un ensemble algébrique irréductible $F \subset \mathbf{A}^n(K)$ sur K est égale à sa dimension en tant qu'espace topologique pour la topologie de Zariski induite.

Lorsque le corps de base n'est pas algébriquement clos, attention à appliquer cette proposition à l'idéal $\mathcal{I}(F)$, voir l'exemple 1.5.20.

Démonstration. — Exercice. \square

Exemple 1.5.20. — L'ensemble algébrique affine irréductible

$$F := \mathcal{Z}(x^2 + y^2) \subset \mathbf{A}^2(\mathbf{R})$$

est le singleton formé du point $(0, 0)$. La dimension de l'anneau quotient $\mathbf{R}[x, y]/(x^2 + y^2)$ est égale à 1 (voir l'exemple A.2.10). Ceci est *a priori* contre-intuitif puisque la dimension de F en tant qu'espace topologique est bien

sûr égale à 0 : c'est la dimension de l'anneau quotient de $\mathbf{R}[x, y]$ par l'idéal $\mathcal{I}(F) = (x, y)$. On a $(x, y) = \mathcal{I}(\mathcal{Z}(x^2 + y^2)) \neq (x^2 + y^2)$ et

$$\frac{\mathbf{R}[x, y]}{(x, y)} = \mathcal{P}(F) \neq \frac{\mathbf{R}[x, y]}{(x^2 + y^2)}.$$

Une manière d'illustrer la situation est de considérer l'ensemble algébrique $Z := \mathcal{Z}_{\mathbf{C}}(x^2 + y^2) \subset \mathbf{A}^2(\mathbf{C})$ ⁽¹⁴⁾ qui est une courbe complexe réductible. Le point $(0, 0)$ est l'intersection des deux composantes irréductibles $\mathcal{Z}_{\mathbf{C}}(x - iy)$ et $\mathcal{Z}_{\mathbf{C}}(x + iy)$ et c'est bien le seul point *réel* de la courbe Z .

Exemple 1.5.21. — Considérons l'ensemble affine

$$F := \mathcal{Z}(y^2 - x^2(x - 2)) \subset \mathbf{A}^2(\mathbf{R})$$

représenté en figure 1.3. C'est un ensemble algébrique irréductible de dimension 1 et les points $(0, 0)$ et $(0, 2)$ sont des ensembles algébriques irréductibles de dimension 0 contenus dans F . Le fait que $(0, 0)$ apparaisse isolé peut sembler contre-intuitif avec le fait que ce soit un point d'une *courbe*.

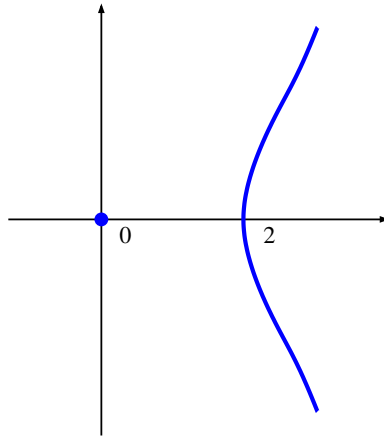


FIGURE 1.3. $y^2 - x^2(x - 2) = 0$.

Points non singuliers. — Comme le suggère l'exemple 1.5.21, il n'est pas toujours évident d'interpréter la dimension d'un ensemble algébrique. L'objet de la seconde partie de cette section est d'introduire la notion de point non singulier en lequel nous verrons que la dimension s'interprète de manière naturelle.

14. L'ensemble $\mathcal{Z}_{\mathbf{C}}(x^2 + y^2)$ est l'ensemble des zéros complexes de $x^2 + y^2$, voir la définition 1.2.12.

Définition 1.5.22. — Soient K un corps. Soit $F \subset \mathbf{A}^n(K)$ un ensemble algébrique, P_1, \dots, P_l un ensemble de générateurs de $\mathcal{I}(F)$ et $a \in F$. L'espace tangent de Zariski à F en a , noté $T_a^{\text{Zar}} F$, est le sous-espace vectoriel de K^n

$$T_a^{\text{Zar}} F := \bigcap_{i=1}^l \left\{ x \in K^n \mid \sum_{j=1}^n \frac{\partial P_i}{\partial X_j}(a) x_j = 0 \right\} = \bigcap_{i=1}^l \ker d_a P_i .$$

Remarque 1.5.23. — La notion de dérivée partielle d'un polynôme par rapport à l'une de ses indéterminées a un sens sur un corps quelconque, mais la caractéristique p non nulle réserve des surprises. Par exemple, si $P(X) = X^p$, alors $\frac{\partial P}{\partial X} = pX^{p-1} = 0$.

Remarque 1.5.24 (Notation $T_a^{\text{Zar}} F$). — Si $T_a F$ désigne l'espace tangent usuel en $a \in F$ de la géométrie différentielle, on a dans l'exemple 1.5.1,

$$\mathbf{R}^2 = T_{(0,0)}^{\text{Zar}} C \neq T_{(0,0)} C = \mathcal{Z}(y) \simeq \mathbf{R} .$$

Nous définissons plus loin la notion de point non singulier. En un tel point, l'espace tangent de Zariski et l'espace tangent usuel sont identiques.

Proposition 1.5.25. — Soit K un corps de caractéristique nulle, I un idéal premier de $K[X_1, \dots, X_n]$, on pose $A := K[X_1, \dots, X_n]/I$. Si d désigne la dimension de l'anneau A , alors pour tout ensemble de générateurs (voir l'exemple A.3.14) P_1, \dots, P_l de I , la matrice $\left(\frac{\partial P_i}{\partial X_j} \right)_{\substack{i=1\dots l \\ j=1\dots n}}$ a pour rang $n - d$ sur $\text{Frac}(A)$.

En particulier, pour tout $a \in \mathcal{Z}(I)$, $\text{rg}_K \left(\frac{\partial P_i}{\partial X_j}(a) \right)_{\substack{i=1\dots l \\ j=1\dots n}} \leq n - d$. En effet d'après la proposition, tous les déterminants des $(n - d + 1) \times (n - d + 1)$ -sous-matrices de $\left(\frac{\partial P_i}{\partial X_j} \right)_{\substack{i=1\dots l \\ j=1\dots n}}$ sont nuls sur $\text{Frac}(A)$ donc tous les déterminants des $(n - d + 1) \times (n - d + 1)$ -sous-matrices de $\left(\frac{\partial P_i}{\partial X_j}(a) \right)_{\substack{i=1\dots l \\ j=1\dots n}}$ sont nuls.

Démonstration. — Voir [HP52, Chapter 10, § 14, Theorem 1] ou [Sam67, Chapter 2, § 4.2, lemme 2]. \square

Remarque 1.5.26. — D'après la proposition 1.5.25, si F est irréductible, alors

$$\dim_K T_a^{\text{Zar}} F \geq \dim_K F .$$

Définition 1.5.27. — Soient $F \subset \mathbf{A}^n(K)$ un ensemble algébrique irréductible et $a \in F$. On dit que a est un *point non singulier* de F quand $\dim_K T_a^{\text{Zar}} F = \dim_K F$. Le point a est un *point singulier* de F si ce n'est pas un point non singulier.

Remarque 1.5.28. — Notons $d = \dim_K F$. Si P_1, \dots, P_l est un ensemble de générateurs de $\mathcal{I}(F)$, a est donc un point non singulier de F si et seulement si

$$\text{rg}_K \left(\frac{\partial P_i}{\partial X_j}(a) \right)_{\substack{i=1\dots l \\ j=1\dots n}} = n - d.$$

En particulier, si $K = \mathbf{R}$ (resp. \mathbf{C}), et si a est un point non singulier de F , le sous-ensemble $F \subset K^n$ muni de la topologie euclidienne (définition 1.4.1) est une sous-variété différentielle de K^n de dimension réelle d (resp. $2d$) en a .

Proposition 1.5.29. — Soit $F \subset \mathbf{A}^n(\mathbf{R})$ un ensemble algébrique irréductible qui, muni de la topologie euclidienne, est une sous-variété différentielle de \mathbf{R}^n de dimension d en un point $a \in F$. Alors $\dim F = d$ en tant qu'ensemble algébrique réel (autrement dit sa dimension en tant que fermé de Zariski est égale à sa dimension en tant que variété différentielle).

Démonstration. — On suit [BCR87, Proposition 2.8.13]. Par hypothèse, l'espace tangent $T_a F$ est un espace vectoriel de dimension d qui est aussi un sous-espace affine de \mathbf{R}^n . La projection orthogonale⁽¹⁵⁾ $p_a : F \rightarrow T_a F$ est une application semi-algébrique (définition B.2.2) qui induit une bijection entre un voisinage ouvert semi-algébrique U de a dans F et un ouvert semi-algébrique de $T_a F$. L'application p_a étant semi-algébrique, les dimensions associées à la topologie de Zariski (définition 1.5.17) satisfont $\dim U = \dim p_a(U)$ d'après [BCR87, Théorème 2.8.8]. Mais $p_a(U)$ étant un ouvert euclidien non vide de $\mathbf{R}^d = T_a F$, sa dimension de Zariski est d . En effet, on va montrer par récurrence sur d que si $f \in \mathbf{R}[X_1, \dots, X_d]$ s'annule sur un ouvert euclidien non vide V , alors f est la fonction nulle. Si $d = 1$, le résultat est immédiat. Supposons que $d > 1$ et que le résultat est vrai pour $d - 1$. Soit $f \in \mathbf{R}[X_1, \dots, X_d]$ une fonction polynomiale qui s'annule sur V . On peut écrire

$$f(X', X_d) = X_d^l f_l(X') + X_d^{l-1} f_{l-1}(X') + \dots + f_0(X')$$

où $X' = (X_1, \dots, X_{d-1})$, $l = \deg f$ et $\forall i = 0, \dots, l$, $f_i \in \mathbf{R}[X_1, \dots, X_{d-1}]$.

¹⁵ Restriction à F de la projection orthogonale $\mathbf{R}^n \rightarrow T_a F$ pour un produit scalaire fixé sur \mathbf{R}^n .

Pour tout $X' \in V \cap \mathbf{R}^{d-1}$, la fonction $X_n \mapsto f(X', X_n)$ s'annule en tout point de $V \cap \mathbf{R}$; f est donc identiquement nulle. On en déduit que les fonctions polynomiales f_i s'annulent en tout point de $V \cap \mathbf{R}^{d-1}$ et sont donc identiquement nulles par hypothèse de récurrence. Un élément $f \in \mathcal{I}(p_a(U))$ s'annule en tout point de $p_a(U)$ et d'après ce qui précède, f est donc nulle. Finalement $\mathcal{I}(p_a(U)) = (0)$ et $\mathcal{Z}(\mathcal{I}(p_a(U))) = \mathbf{A}^d(\mathbf{R})$ lui-même de dimension d d'après l'exercice 1.5.16. \square

Remarque 1.5.30. — L'exemple 1.5.1 montre qu'un point d'un ensemble algébrique peut être lisse au sens différentiel tout étant singulier au sens algébrique, en revanche, comme le montre la proposition précédente, les dimensions en tant que variété différentielle et en tant que variété algébrique sont les mêmes.

Exercice 1.5.31. — Reprenons le polynôme

$$P = y^3 + 2x^2y - x^4$$

de l'exemple 1.5.1 et considérons cette fois-ci la courbe complexe $F_{\mathbf{C}} := \mathcal{Z}_{\mathbf{C}}(P) \subset \mathbf{A}^2(\mathbf{C})$, c'est-à-dire que $F_{\mathbf{C}} = \{(x, y) \in \mathbf{C}^2 \mid P(x, y) = 0\}$.

1. Montrer que $F_{\mathbf{C}}$ est un ensemble algébrique irréductible.
2. Montrer que la dimension de $F_{\mathbf{C}}$ est 1.
3. Montrer que la dimension de $T_{(x,y)}^{\text{Zar}} F_{\mathbf{C}}$ en chacun des points $(x, y) \in F_{\mathbf{C}}$ à l'exception de $(0, 0)$ vaut 1.
4. En déduire que $(0, 0)$ est un point singulier de $F_{\mathbf{C}}$.
5. Montrer que contrairement au cas réel, $F_{\mathbf{C}}$ n'est pas une sous-variété \mathcal{C}^∞ de \mathbf{C}^2 au point $(0, 0)$.

Il est aisé de vérifier que les définitions de dimension et de point non singulier pour un ensemble algébrique affine F ne dépendent pas des équations particulières utilisées pour définir F , ou autrement dit ne dépendent pas d'un plongement particulier dans un espace affine. Il est néanmoins utile d'en connaître une définition intrinsèque.

Définition 1.5.32. — Un anneau local noethérien A , d'idéal maximal \mathfrak{m} et de corps résiduel $K = A/\mathfrak{m}$ est dit *régulier* si $\dim A = \dim_K \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$, où l'on considère la structure naturelle de K -espace vectoriel sur $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$.

Proposition 1.5.33. — Soit $F \subset \mathbf{A}^n(K)$ un ensemble algébrique irréductible sur un corps K . Un point $a \in F$ est non singulier si et seulement si l'anneau local $\mathcal{O}_{F,a} = \mathcal{P}(F)_{\mathfrak{m}_a}$ des germes de fonctions régulières en a est régulier.

Démonstration. — On suppose ici que la caractéristique de K est nulle et on renvoie à [Liu02, Proposition IV.2.5 et Theorem IV.2.19] pour une preuve dans le cas général. Supposons que a est l'origine de K^n . L'idéal \mathfrak{m}_a est formé des polynômes qui s'annulent en a . On considère l'application linéaire $\theta_a: \mathfrak{m}_a \rightarrow (K^n)^\vee$ à valeurs dans le dual de K^n qui à $P \in \mathfrak{m}_a$ associe la forme linéaire

$$x = (x_1, \dots, x_n) \mapsto \sum_{j=1}^n \frac{\partial P}{\partial X_j}(a) \cdot x_j .$$

L'application θ_a induit un isomorphisme $d_a: \mathfrak{m}_a/\mathfrak{m}_a^2 \rightarrow (K^n)^\vee$. Le dual de $T_a^{\text{Zar}}(F) \subset K^n$ s'identifie à un quotient de $(K^n)^\vee$ isomorphe à travers d_a au quotient $\mathfrak{m}_a/(\mathfrak{m}_a^2 + \mathcal{I}(F))$. Notons $\mathfrak{m}_{F,a}$ l'idéal maximal de l'anneau local $\mathcal{O}_{F,a}$, le K -espace vectoriel $\mathfrak{m}_a/(\mathfrak{m}_a^2 + \mathcal{I}(F))$ est alors isomorphe à $\mathfrak{m}_{F,a}/\mathfrak{m}_{F,a}^2$. On déduit alors de la définition 1.5.27 que a est un point non singulier de F si et seulement si $\dim \mathfrak{m}_{F,a}/\mathfrak{m}_{F,a}^2 = \dim F$. Il ne reste plus qu'à remarquer que F étant irréductible, $\dim \mathcal{O}_{F,a} = \dim \mathcal{O}_F$ d'après le corollaire 1.5.8. \square

Proposition 1.5.34. — Soient $F \subset \mathbf{A}^n(\mathbf{R})$ un ensemble algébrique réel et a un point de F . Alors l'anneau $\mathcal{O}_{F,a}$ est un anneau régulier de dimension d si et seulement s'il existe $n - d$ polynômes $P_1, \dots, P_{n-d} \in \mathcal{I}(F)$, et un ouvert euclidien U de \mathbf{R}^n contenant a tels que $F \cap U = \mathcal{Z}(P_1, \dots, P_{n-d}) \cap U$ et que

$$\text{rg} \left(\frac{\partial P_i}{\partial X_j}(a) \right)_{\substack{i=1 \dots n-d \\ j=1 \dots n}} = n - d .$$

Démonstration. — Pour la condition suffisante, on remarque que la preuve standard du résultat analogue en géométrie différentielle est vraie en semi-algébrique : on peut supposer que le déterminant de la sous-matrice $\left(\frac{\partial P_i}{\partial X_j}(a) \right)_{\substack{i=1 \dots n-d \\ j=1 \dots n}}$ est non nul. Alors en appliquant le théorème des fonctions implicites à $(X_1 - a_1, \dots, X_d - a_d, P_1, \dots, P_{n-d})$, on obtient un difféomorphisme semi-algébrique $\varphi: U \rightarrow V$ d'un voisinage ouvert semi-algébrique U de 0 dans \mathbf{R}^n sur un voisinage ouvert semi-algébrique V de a dans \mathbf{R}^n tel que $\varphi((\mathbf{R}^d \times \{0\}) \cap U) = F \cap V$. La dimension de Zariski de toute composante irréductible de F passant par a est donc inférieure ou égale à d d'après [BCR87, Théorème 2.8.8]. La dimension de l'anneau $\mathcal{O}_{F,a}$ est donc minorée par d . Par ailleurs $\mathcal{O}_{F,a}$ est un quotient de $\mathcal{O}_{\mathbf{R}^n,a}/(P_1, \dots, P_{n-d})$, qui est un anneau local régulier (et donc intègre) de dimension d , on obtient donc $\mathcal{O}_{F,a} = \mathcal{O}_{\mathbf{R}^n,a}/(P_1, \dots, P_{n-d})$ d'où la conclusion. \square

Soit I un idéal premier de $\mathbf{R}[X_1, \dots, X_n]$. On a vu avec l'exemple 1.5.20 qu'il peut arriver que $\dim \mathcal{I}(\mathcal{Z}(I)) < \dim I$. Grâce à la proposition précédente, on a une caractérisation du cas où les dimensions sont égales.

Corollaire 1.5.35. — Soit $I = (P_1, \dots, P_l)$ un idéal premier de $\mathbf{R}[X_1, \dots, X_n]$. Alors $\dim(\mathcal{I}(\mathcal{Z}(I))) = \dim I$ si et seulement si $\mathcal{Z}(I)$ contient un point a tel que

$$\operatorname{rg}_{\mathbf{R}} \left(\frac{\partial P_i}{\partial X_j}(a) \right)_{\substack{i=1 \dots l \\ j=1 \dots n}} = n - \dim I .$$

Démonstration. — Notons $d = \dim I$. Soit $a \in \mathcal{Z}(I)$ tel que le rang de la matrice $\left(\frac{\partial P_i}{\partial X_j}(a) \right)$ vaut $n - d$. Alors $\mathcal{O}_{F,a}$ est un anneau régulier de dimension d d'après la proposition 1.5.34 et $\mathcal{Z}(I)$ est donc un ensemble algébrique de dimension d , c'est-à-dire que $\dim(\mathcal{I}(\mathcal{Z}(I))) = d$. \square

Grâce à la proposition 1.5.33, la notion de point non singulier devient intrinsèque, et nous pouvons la généraliser aux variétés algébriques abstraites.

Définition 1.5.36. — Soit X une variété algébrique sur un corps K . Un point $x \in X$ est *non singulier* (ou *régulier*) si l'anneau local $\mathcal{O}_{X,x}$ est un anneau régulier. La variété X est *non singulière* si tous ses points sont non singuliers. La variété X est *singulière* si elle possède au moins un point singulier. On note $\operatorname{Sing} X$ le lieu des points singuliers (ou *lieu singulier*) de X et $\operatorname{Reg} X := X \setminus \operatorname{Sing} X$ le lieu des points non singuliers (ou *lieu régulier*) de X .

On rappelle aussi la notion de variété *normale en un point* qui dans le cas d'une courbe, signifie qu'une seule de ses *branches* (*i. e.* ses composantes irréductibles locales) passe par ce point.

Définition 1.5.37. — Une variété algébrique quasi-projective X sur un corps K est *normale en un point* $x \in X$ si l'anneau local $\mathcal{O}_{X,x}$ est intégralement clos (définition A.5.2) dans $K(X)$. La variété X est *normale* si elle est normale en chacun de ses points.

Exemple 1.5.38. — Soit X une variété algébrique réelle quasi-projective irréductible. On sait que X est affine et on peut supposer que $X \subset \mathbf{R}^n$ comme ensemble algébrique. Soit A la clôture intégrale de $\mathcal{P}(X)$ dans son corps des fractions. Du fait que A est une \mathbf{R} -algèbre de type fini, on peut supposer que $A = \mathbf{R}[X_1, \dots, X_p]/I$ pour un idéal $I \subset \mathbf{R}[X_1, \dots, X_p]$. On pose $\tilde{X} := \mathcal{Z}(I) \subset \mathbf{R}^p$. Alors la variété \tilde{X} est normale ; c'est la *normalisation* de X et l'application birationnelle $\nu: \tilde{X} \rightarrow X$ est l'*application de normalisation*.

Exercice 1.5.39. — Soit $F \subset \mathbf{A}^2(\mathbf{R})$ la courbe cubique affine d'équation $y^2 - x^2(x - 2) = 0$ représentée en figure 1.3, page 57.

Alors $\tilde{F} = \mathbf{R}$ et l'application de normalisation est donnée par :

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &\longrightarrow \mathbf{R}^2 \\ t &\longmapsto (t^2 + 2, t(t^2 + 2)) . \end{aligned}$$

Proposition 1.5.40. — Soit X un espace topologique et $X = \bigcup_{i=1}^k X_i$ une décomposition en fermés X_i non forcément disjoints deux à deux, alors

$$\dim X = \sup_{i \in \{1..k\}} \dim X_i .$$

Proposition 1.5.41. — Soit X une variété algébrique affine sur un corps K infini. Si X est irréductible alors pour tout $x \in X$, $\dim X = \dim \mathcal{O}_{X,x}$. Si X n'est pas irréductible, la dimension de Krull de $\mathcal{O}_{X,x}$ est la borne supérieure des dimensions des composantes irréductibles X contenant x . On note ce nombre $\dim_x X$.

Exercice 1.5.42. — Démontrer cette proposition en partant du cas où le corps K est algébriquement clos, voir [Per95, IV.2.3 et 2.9] et le lemme d'évitement A.3.12 en utilisant que K est infini.

Définition 1.5.43. — Soit X une variété algébrique sur un corps K infini et soit $x \in X$. La *dimension* de X au point x est

$$\dim_x X := \dim \mathcal{O}_{X,x} .$$

La *dimension* de X est la borne supérieure des dimensions en chaque point

$$\dim X := \sup_{x \in X} \dim_x X .$$

Remarque 1.5.44. — La dimension d'une variété abstraite en un point peut donc se calculer sur un ouvert affine.

Définition 1.5.45. — Une variété algébrique de dimension 1 est appelée une *courbe* et une variété algébrique de dimension 2 une *surface*.

Exercice 1.5.46. — Soit K un corps. Dédurre de l'exercice 1.5.16 que $\dim \mathbf{P}^n(K) = n$.

Définition 1.5.47. — Soit $x \in X$ un point non singulier sur une variété algébrique de dimension n sur un corps K . Un ensemble de n éléments $f_1, \dots, f_n \in \mathcal{O}_x$ est un *système local de paramètres* en x si chaque $f_i \in \mathfrak{m}_x$, et si les classes de f_1, \dots, f_n forment une base du K -espace vectoriel $\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2$.

Attention, le théorème d'inversion locale bien que valide dans le cadre analytique ne l'est pas dans le cadre algébrique. Pour obtenir des coordonnées analytiques, il faut raffiner la topologie.

Exercice 1.5.48. — Si $K = \mathbf{C}$, il existe alors un voisinage U de x pour la topologie euclidienne, voir la définition 1.4.1, sur lequel les restrictions de f_1, \dots, f_n vues comme fonctions sur U forment un système de coordonnées analytiques complexes.

Proposition 1.5.49. — Soit $x \in X$ un point non singulier sur une variété algébrique de dimension n sur un corps K . Un système local de paramètres en x engendre l'idéal maximal \mathfrak{m}_x de \mathcal{O}_x .

Démonstration. — Soit $f_1, \dots, f_n \in \mathcal{O}_x$ un système local de paramètres en x . Il suffit d'appliquer le lemme de Nakayama (A.2.11) au \mathcal{O}_x -module de type fini $M = \mathfrak{m}_x / \langle f_1, \dots, f_n \rangle$ et à l'idéal $\mathfrak{a} = \mathfrak{m}_x$. \square

Exercice 1.5.50. — En utilisant le théorème 1.5.5, montrer que si X est une variété algébrique irréductible sur un corps K , alors

$$\dim X = \text{trdeg}_K K(X).$$

D'après le théorème suivant, pour calculer la dimension d'une variété X , il suffit de calculer la dimension en un point non singulier de chaque composante irréductible et de considérer le maximum des nombres obtenus.

Théorème 1.5.51. — Soit X une variété algébrique sur un corps de caractéristique nulle. Si $X \neq \emptyset$, alors l'ensemble $\text{Sing } X$ des points singuliers de X est un sous-ensemble fermé strict de X . En particulier, l'ensemble $\text{Reg } X$ des points non singuliers de X est un ouvert de Zariski non vide.

Démonstration. — Comme par définition X est réduite, il suffit de considérer le cas où elle est affine et irréductible. Supposons que $X \subset \mathbf{A}^n(K)$ et notons $d := \dim X$. Le corps K étant de caractéristique nulle, la définition 1.5.27 montre que $\text{Sing } X$ est algébrique car défini comme l'ensemble des zéros de l'idéal engendré par $\mathcal{I}(X) = (P_1, \dots, P_l)$ et tous les déterminants des $(n-d) \times (n-d)$ -sous-matrices de $\left(\frac{\partial P_i}{\partial X_j} \right)_{\substack{i=1\dots l \\ j=1\dots n}}$. En particulier, si $\mathcal{I}(\text{Sing } X) = \mathcal{I}(X)$, le rang de la matrice

$$\left(\frac{\partial P_i}{\partial X_j} \right)_{\substack{i=1\dots l \\ j=1\dots n}}$$

sur $\text{Frac}(K[X_1, \dots, X_n]/\mathcal{I}(X))$ est strictement inférieur à $n - d$. D'après la proposition 1.5.25, l'idéal $\mathcal{I}(\text{Sing } X)$ contient donc strictement $\mathcal{I}(X)$. Et par conséquent $\text{Sing } X = \mathcal{Z}(\mathcal{I}(\text{Sing } X)) \subsetneq X = \mathcal{Z}(\mathcal{I}(X))$. \square

- Remarque 1.5.52.** — 1. Pour K algébriquement clos de caractéristique quelconque, on trouvera une preuve du même résultat dans [Har77, Chapitre I, Theorem 5.3].
2. En fait le théorème est vrai pour un corps K quelconque, voir [Liu02, Proposition IV.2.24 et Corollary VIII.2.40(a)].

Définition 1.5.53. — Soit X une variété algébrique sur un corps K . Une *résolution des singularités* de X est un morphisme birationnel propre $\pi: Y \rightarrow X$ qui induit un isomorphisme birégulier $Y \setminus \pi^{-1}(\text{Sing } X) \rightarrow X \setminus \text{Sing } X$.

On rappelle que le théorème de résolution des singularités d'Hironaka [Hir64], voir aussi [Kol07], est valable sur tout corps de caractéristique nulle. On pourra se référer à [Wal35] pour le cas des surfaces.

Théorème 1.5.54 (Hironaka 1964). — *Soit X une variété algébrique sur un corps K de caractéristique nulle, alors il existe une variété algébrique Y sur K non singulière et un morphisme birationnel propre $\pi: Y \rightarrow X$ qui induit un isomorphisme birégulier $Y \setminus \pi^{-1}(\text{Sing } X) \rightarrow X \setminus \text{Sing } X$.*

De plus, si X est projective, la variété Y peut être supposée projective.

Nous terminons cette section avec l'invariance birationnelle du nombre de composantes connexes pour la topologie euclidienne.

Théorème 1.5.55. — *Soient X et Y des variétés algébriques quasi-projectives sur un même corps K , toutes deux complètes et non singulières. Si $K = \mathbf{R}$ ou \mathbf{C} et si X et Y sont birationnellement équivalentes sur K , alors elles possèdent le même nombre de composantes connexes pour la topologie euclidienne.*

Remarque 1.5.56. — L'exemple de la normalisation $\nu: \tilde{C} \rightarrow C$ d'une courbe C telle que \tilde{C} est formée de deux composantes connexes dont les images par ν se rencontrent en au moins un point montre que l'hypothèse « non singulière » est essentielle. Considérer par exemple la courbe $\tilde{C} = \mathcal{Z}((x_2, x_3) \cap (x_1, x_3 - x_0))$ dans $\mathbf{P}_{x_0:x_1:x_2:x_3}^3$ et ν la restriction à \tilde{C} de la projection $\mathbf{P}^3 \rightarrow \mathbf{P}^2$, $(x_0 : x_1 : x_2 : x_3) \mapsto (x_0 : x_1 : x_2)$. La courbe (réductible) \tilde{C} est la réunion disjointe des droites C_1 d'équations $x_2 = x_3 = 0$ et C_2 d'équations $x_1 = 0, x_3 = x_0$. La courbe $C := \nu(\tilde{C})$ est connexe et

singulière car $\nu(C_1) \cap \nu(C_2) = \{(1 : 0 : 0)\}$. L'hypothèse « complète » est nécessaire aussi, puisque l'hyperbole et l'ellipse sont birationnellement équivalentes : soient $E := \{x^2 + y^2 = 1\} \subset \mathbf{R}_{x,y}^2$, $H := \{u^2 - v^2 = 1\} \subset \mathbf{R}_{u,v}^2$ et $\varphi: E \dashrightarrow H, (x, y) \mapsto (\frac{1}{x}, \frac{y}{x})$. Alors φ est une application birationnelle qui induit un isomorphisme de l'ouvert dense $E \setminus \{x = 0\}$ de E sur H . Pourtant $\#\pi_0(E) = 1$ alors que $\#\pi_0(H) = 2$.

Démonstration. — Pour $K = \mathbf{C}$, cet énoncé est un corollaire du théorème 1.4.5. Pour $K = \mathbf{R}$ on remarque que le théorème est vrai pour les courbes car deux courbes non singulières complètes sont birationnellement équivalentes si et seulement si elles sont birégulièrement isomorphes d'après la proposition 1.3.26. Pour les surfaces, on le déduit de la factorisation des applications birationnelles (corollaire 4.3.9) et de la description explicite de la topologie d'un éclatement (exemple 4.2.18). Pour le cas général, voir la preuve du théorème 2.3.12. \square

Remarque 1.5.57. — On peut aussi utiliser la preuve de [DK81, Thm. 13.3], ou l'esquisse de preuve de [BCR98, Theorem 3.4.12] qui reste valable pour un corps réel clos différent de \mathbf{R} , à condition de remplacer « connexe euclidien » par « semi-algèbriquement connexe » et « compact euclidien » par « complet ».

1.6. Courbes planes

Cette section est inspirée de [Che78] et [Ful89].

Définition 1.6.1. — Soit K un corps.

1. Nous dirons que deux polynômes $P, Q \in K[X, Y]$ sont *équivalents* s'il existe un élément non nul $\lambda \in K^*$ tel que $P = \lambda Q$.
2. Une *courbe affine plane* définie sur K est alors une classe d'équivalence de polynômes non constants pour cette relation d'équivalence.
3. Soit $P \in K[X, Y]$ un polynôme non constant. On dira que P *détermine* (ou est une *équation* de) la courbe affine plane représentée par P .
4. De façon analogue, soit $P(X_0, X_1, X_2) \in K[X_0, X_1, X_2]$ un polynôme homogène non constant à trois variables. On dira que P détermine une *courbe projective plane*.
5. On dira qu'une courbe (affine ou projective) plane est *irréductible* (resp. *réduite*) sur K si P est irréductible sur K (resp. sans composante multiple).

Remarques 1.6.2 (Ensembles de points vs. équations)

1. Si P est un polynôme irréductible, l'idéal engendré par P est premier et le lieu des zéros $\mathcal{Z}(P)$ de P est irréductible en tant qu'espace topologique, voir la définition 1.2.15. En revanche, alors que $\mathcal{Z}(P^2) = \mathcal{Z}(P)$, le polynôme P^2 n'est pas irréductible. Il faut donc être attentif à la définition de « courbe plane » utilisée dans chaque contexte : classe de polynômes ou bien ensemble algébrique.
2. Considérons une courbe plane donnée. Alors comme l'ensemble des zéros C de deux polynômes équivalents sont identiques, la courbe plane détermine C . Par définition, C est une variété algébrique sur K et si $\dim C = 1$, c'est une courbe algébrique au sens de la définition 1.5.45. Comme nous l'avons signalé dans l'exercice 1.2.68, sur les coniques, un abus courant est d'identifier implicitement ce lieu des zéros à la classe de polynômes, ce qui n'est pas sans risque.

Si $K = \mathbf{C}$, on a une correspondance biunivoque entre les courbes affines (resp. projectives) planes *réduites* et les sous-variétés algébriques de dimension 1 de $\mathbf{A}^2(\mathbf{C})$ (resp. $\mathbf{P}^2(\mathbf{C})$). La définition ci-dessus généralise la définition de sous-variétés algébriques de dimension 1 du plan en considérant aussi les composantes multiples, voir par exemple la droite double de l'exercice 1.2.68. Dans la suite du livre, nous reviendrons à notre définition initiale (1.3.1) pour laquelle les variétés sont réduites, et les « courbes planes multiples » seront des diviseurs particuliers du plan, voir la définition 2.6.1.

Si $K = \mathbf{R}$, le lieu des zéros d'une courbe affine plane peut être vide, par exemple $x^2 + y^2 + 1 = 0$, ou de dimension 0, par exemple $x^2 + y^2 = 0$. La situation sera clarifiée au chapitre 2 en considérant les \mathbf{R} -courbes.

Soit $\mathbf{A}^n(K)$ l'espace affine de dimension n sur un corps K . Un changement de coordonnées affines est une application polynomiale bijective $\Phi = (P_1, \dots, P_n): \mathbf{A}^n(K) \rightarrow \mathbf{A}^n(K)$ telle que chaque P_i soit un polynôme de degré 1.

Exercice 1.6.3. — Montrer qu'un tel morphisme est composé d'un isomorphisme linéaire et d'une translation.

Soit $\Phi = (P, Q): \mathbf{A}^2(K) \rightarrow \mathbf{A}^2(K)$ un changement de coordonnées affines, *i. e.* $P(X, Y) = a_0 + a_1X + a_2Y$, $Q(X, Y) = b_0 + b_1X + b_2Y$ et

$$a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0.$$

Soit $f \in K[X, Y]$, on définit $f^\Phi \in K[X, Y]$ par

$$f^\Phi(X, Y) = f(P(X, Y), Q(X, Y)) .$$

L'application $f \mapsto f^\Phi$ ainsi définie est un élément du groupe des automorphismes $\text{Aut}(K[X, Y]|K)$. Si C est une courbe plane d'équation f , on note C^Φ la courbe plane d'équation f^Φ .

Exercice 1.6.4. — Caractériser les éléments de $\text{Aut}(K[X]|K)$, puis considérer ceux de $\text{Aut}(K[X, Y]|K)$.

Définition 1.6.5. — Une propriété concernant une famille formée de courbes f_1, \dots, f_k et de points p_1, \dots, p_l est *invariante par changement de coordonnées affines* si pour tout changement de coordonnées affines Φ , la même propriété a lieu pour la famille des courbes $f_1^\Phi, \dots, f_k^\Phi$ et des points $\Phi^{-1}(p_1), \dots, \Phi^{-1}(p_l)$.

Exercice 1.6.6. — Le degré d'une courbe plane est invariant par changement de coordonnées affines.

Multiplicité d'intersection. — Soit $P \in K[X, Y]$ un polynôme sans terme constant. On peut alors écrire $P = P_\mu + P_{\mu+1} + \dots + P_d$ où d est le degré de P , P_i est la partie homogène de degré i de P , $\mu \leq d$ et $P_\mu \neq 0$.

Définition 1.6.7. — L'entier $\mu > 0$ est la *multiplicité* de P en $(0, 0)$. Soit C une courbe plane et a un point de C . À changement de coordonnées affines près, on peut supposer que $a = (0, 0)$, c'est-à-dire qu'une équation de C est un polynôme sans terme constant. La *multiplicité*, notée $\mu_a(C)$ de la courbe C au point a est par définition la multiplicité de P en $(0, 0)$. Si $\mu_a(C) > 1$, on dit que a est un *point multiple* de multiplicité $\mu_a(C)$ de la courbe C , si $\mu_a(C) = 1$, a est un *point simple*, si $\mu_a(C) = 2$, c'est un *point double*, si $\mu_a(C) = 3$, c'est un *point triple*, etc.

On renvoie à [Ful89, § 3.2] pour vérifier que la définition ci-dessus est bien intrinsèque et invariante par changement de coordonnées affines.

Appliquée au cas d'une courbe plane, la définition 1.5.27 donne :

Lemme 1.6.8. — Un point $a \in C$ est un point singulier d'une courbe C d'équation P si et seulement si

$$\frac{\partial P}{\partial x}(a) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial P}{\partial y}(a) = 0 .$$

Exercice 1.6.9. — Dédurre de la proposition 1.5.33 que la notion de point singulier d'une courbe plane est invariante par changement de coordonnées affines.

Exercice 1.6.10. — Soient C une courbe plane et a un point de C . Alors a est un point simple de C si et seulement si c'est un point non singulier de C .

Pour $a \in \mathbf{A}^n(K)$, on rappelle que d'après l'exercice 1.2.42, l'anneau local $\mathcal{O}_{\mathbf{A}^n(K),a} \subset K(X_1, \dots, X_n)$ en a est donné par :

$$\mathcal{O}_{\mathbf{A}^n(K),a} = \left\{ \frac{F}{G} \in K(X_1, \dots, X_n) \mid G(a) \neq 0 \right\} .$$

Rappelons qu'on a $K[X_1, \dots, X_n] \subset \mathcal{O}_{\mathbf{A}^n(K),a} \subset K(X_1, \dots, X_n)$. Soient P_1, \dots, P_l des éléments de $K[X_1, \dots, X_n]$. Pour alléger les notations, on note (P_1, \dots, P_l) l'idéal $(P_1, \dots, P_l)\mathcal{O}_{\mathbf{A}^2(K),a}$ de $\mathcal{O}_{\mathbf{A}^2(K),a}$.

Définition 1.6.11. — Soient C_1 et C_2 deux courbes affines planes sur K (éventuellement réductibles ou non réduites) et d'équations $P_1(x, y)$ et $P_2(x, y)$, pour $a \in \mathbf{A}^2(K)$, on pose :

$$(C_1 \cdot C_2)_a := \dim_K \mathcal{O}_{\mathbf{A}^2(K),a} / (P_1, P_2) .$$

Le nombre ainsi défini est la *multiplicité d'intersection* des courbes C_1 et C_2 au point a .

Remarque 1.6.12. — Ce nombre est invariant par changement de coordonnées affines, voir [Ful89, § 3.3].

Théorème de Bézout. — On dit que les courbes planes C_1 et C_2 s'intersectent proprement en un point a si C_1 et C_2 n'ont aucune composante commune passant par a .

Théorème 1.6.13 (Caractérisation de la multiplicité d'intersection)

Soient C_1 et C_2 des courbes planes. Le nombre d'intersection satisfait, et est déterminé de manière unique par, les propriétés suivantes :

1. $(C_1 \cdot C_2)_a$ est un entier ≥ 0 si C_1 et C_2 s'intersectent proprement en a ;
2. $(C_1 \cdot C_2)_a = 0$ ssi $a \notin C_1 \cap C_2$;
3. Si Φ est un changement affine de coordonnées de $\mathbf{A}^2(K)$, et si $b = \Phi^{-1}(a)$, alors $(C_1^\Phi \cdot C_2^\Phi)_b = (C_1 \cdot C_2)_a$;
4. $(C_1 \cdot C_2)_a = (C_2 \cdot C_1)_a$;
5. $(C_1 \cdot C_2)_a \geq \mu_a(C_1)\mu_a(C_2)$, avec égalité ssi les courbes n'ont pas de tangente commune en a ;

6. Si $C_1 = \sqcup_i C_{1,i}^{r_i}$ et $C_2 = \sqcup_j C_{2,j}^{s_j}$, alors

$$(C_1 \cdot C_2)_a = \sum_{i,j} r_i s_j (C_{1,i} \cdot C_{2,j})_a ;$$

7. Soit P et Q des équations de courbes planes, alors

$$(P \cdot Q)_a = (P \cdot (Q + AP))_a$$

pour tout polynôme $A \in K[X, Y]$.

Démonstration. — Voir [Ful89, § 3.3]. □

Exercice 1.6.14. — Si P_i est une équation homogène de degré d_i de la courbe projective plane C_i , on a

$$(C_1 \cdot C_2)_a = \dim_K \mathcal{O}_{\mathbf{P}^2(K),a} / \left(\frac{P_1}{L^{d_1}}, \frac{P_2}{L^{d_2}} \right)$$

où $L = 0$ est l'équation d'une droite ne passant pas par a . Montrer que ce nombre ne dépend pas du choix de L .

Définition 1.6.15. — Soient C_1 et C_2 deux courbes projectives planes (éventuellement réductibles ou non réduites). On note

$$(C_1 \cdot C_2) := \sum_{a \in \mathbf{P}^2(K)} (C_1 \cdot C_2)_a.$$

C'est le nombre d'intersection des courbes C_1 et C_2 .

Théorème 1.6.16 (Théorème de Bézout : énoncé géométrique)

Soient C_1 et C_2 deux courbes projectives planes (éventuellement réductibles ou non réduites) de degrés respectifs d_1 et d_2 . Si C_1 et C_2 sont définies sur un corps algébriquement clos et n'ont aucune composante commune, alors :

$$(C_1 \cdot C_2) = d_1 d_2$$

où les intersections sont comptées avec multiplicités.

Démonstration. — Voir [Per95, Chapitre VI]. □

Formule du genre. —

Théorème 1.6.17. — Soit d un entier positif ou nul, on pose

$$g(d) := \frac{(d-1)(d-2)}{2}.$$

Soit C une courbe projective complexe plane non singulière de degré d . Si C est irréductible de genre $g(C)$, alors :

$$g(C) = g(d).$$

Démonstration. — (Voir [GH78, pages 219-220].)

On projette la courbe C sur une droite L à partir d'un point p , on choisit $p \notin C$ et L telle que $p \notin L$. À l'aide d'un changement linéaire de coordonnées, il est loisible de supposer que $p = [1 : 0 : 0]$ et $L = \{X = 0\}$, on peut supposer aussi que la droite à l'infini $\{Z = 0\}$ n'est pas tangente à C . Soit $F(X, Y, Z)$ un polynôme homogène de degré d définissant C . En coordonnées $x = X/Z$, $y = Y/Z$ dans la carte $Z \neq 0$, l'équation affine de la courbe est notée $f(x, y) = F(x, y, 1)$. La projection $\pi_p: C \rightarrow \mathbf{P}^1$ restreinte à cet ouvert affine s'écrit dans ces coordonnées :

$$\pi_p: (x, y) \mapsto y .$$

Le degré de $\pi_p: C \rightarrow \mathbf{P}^1$ est d . Au voisinage d'un point $q \in C$ tel que $(\partial f / \partial x)(q) \neq 0$, y est une coordonnée locale sur C et π_p est non ramifiée. Si $(\partial f / \partial x)(q) = 0$, alors $(\partial f / \partial y)(q) \neq 0$ car C est non singulière en q et le théorème des fonctions implicites nous permet de considérer x comme une coordonnée locale sur C au voisinage de q . On a alors une paramétrisation $x \mapsto (x, y) = (x, y(x))$ de C au voisinage de q , on a alors

$$f(x, y(x)) \equiv 0$$

et par dérivation des fonctions composées,

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial x} \equiv 0 \quad \text{au voisinage de } q \text{ sur } C .$$

Par conséquent l'ordre du zéro de $\frac{\partial y}{\partial x}$ en q , c'est-à-dire l'indice de branchement de $\pi_p: x \mapsto y(x)$ en q est égal à l'ordre du zéro de $\frac{\partial f}{\partial x}$ en q c'est-à-dire à la multiplicité d'intersection de C avec la courbe d'équation $\{\frac{\partial f}{\partial x} = 0\}$ au point q . L'équation $\{\frac{\partial f}{\partial x} = 0\}$ détermine une courbe de degré $d - 1$ dans \mathbf{P}^2 et donc le nombre d'intersection de cette courbe avec C est $d(d - 1)$ d'après le théorème de Bézout. Par hypothèse, il n'y a pas de points de $\{\frac{\partial f}{\partial x} = 0\} \cap C$ sur la droite à l'infini $\{Z = 0\}$.

On conclut d'après la formule de Riemann-Hurwitz (E.2.18),

$$g(C) = -d + 1 + \frac{1}{2} \sum_{q \in C} b_{\pi_p}(q) = \frac{1}{2}(d - 2)(d - 1) .$$

□

Remarque 1.6.18. — Une conséquence importante de la formule du genre est l'existence de courbes projectives qui ne se plongent pas dans le plan. Par exemple, une courbe irréductible non singulière de genre 2 ne se plonge pas

sous la forme d'une courbe plane non singulière. En effet, pour tout $d \in \mathbf{N}^*$, $\frac{1}{2}(d-2)(d-1) \neq 2$.

d	1	2	3	4	5	6
$g(d)$	0	0	1	3	6	10

TABLE 1.6.1. Genres atteints par les courbes planes lisses de petit degré.

1.7. Parapluies

Nous terminons ce chapitre par une série d'illustrations provenant d'exemples remarquables de variétés algébriques réelles singulières utilisées dans l'article [FHMM16]. Ces surfaces sont connues sous le nom de *parapluie* car l'ensemble des points réels est formé d'une partie de dimension 2 accolée à un *manche* de dimension 1. Les deux premiers parapluies de cette liste sont bien connus des spécialistes, les suivants sont nouveaux.

Remarque 1.7.1. — Malgré les apparences, tous les parapluies de ce paragraphe sont irréductibles pour la topologie de Zariski.

Parapluie de Whitney. — Il s'agit de la sous-variété de \mathbf{R}^3 d'équation

$$zx^2 = y^2 \quad (\text{figure 1.4}).$$

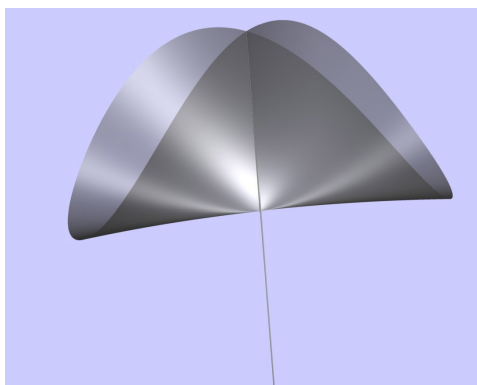


FIGURE 1.4. Parapluie de Whitney.

La droite $\{x = y = 0\}$ est le lieu singulier réel de la surface. La demi-droite $\{x = y = 0, z \geq 0\}$ est incluse dans l'adhérence euclidienne du lieu non singulier qui est la nappe ouverte $\{zx^2 = y^2, x \neq 0, y \neq 0\}$, la demi-droite $\{x = y = 0, z < 0\}$ est incluse dans son adhérence de Zariski mais pas dans son adhérence euclidienne.

Parapluie de Cartan. — Il s'agit de la sous-variété de \mathbf{R}^3 d'équation

$$z(x^2 + y^2) = x^3 \quad (\text{figure 1.5}).$$

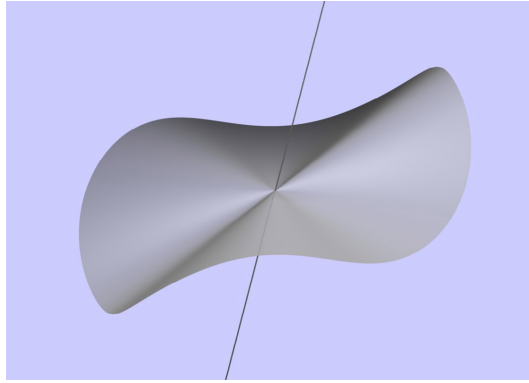


FIGURE 1.5. Parapluie de Cartan.

C'est de nouveau la droite $\{x = y = 0\}$ qui est le lieu singulier réel de la surface, mais cette fois-ci seul le point $\{x = y = z = 0\}$ appartient à l'adhérence euclidienne du lieu non singulier $\{z(x^2 + y^2) = x^3, x \neq 0, y \neq 0\}$.

Parapluie de Kollár. — Il s'agit de la sous-variété de \mathbf{R}^3 d'équation (voir [KN15])

$$x^2 + y^2z^2 - y^3 = 0 \quad (\text{figure 1.6}).$$

De même que pour les deux parapluies suivants, c'est toujours la droite $\{x = y = 0\}$ qui est le lieu singulier réel de la surface, et seul le point $\{x = y = z = 0\}$ appartient à l'adhérence euclidienne du lieu non singulier. Ici $\text{Reg} = \{x^2 + y^2z^2 - y^3 = 0, x \neq 0, y \neq 0\}$.

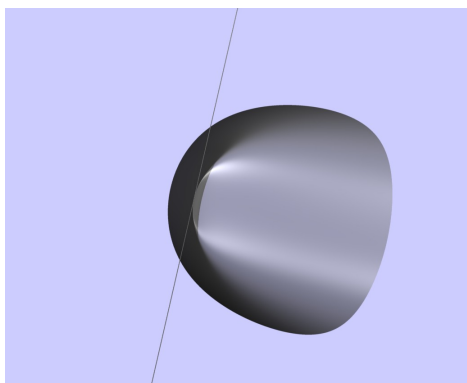


FIGURE 1.6. Parapluie de Kollár.

Parapluie cuspidal. — Il s'agit de la sous-variété de \mathbf{R}^3 d'équation $x^2 - y^2(y^3 - z^2) = 0$ (figure 1.7).

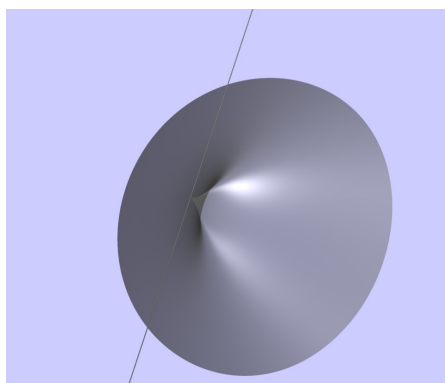


FIGURE 1.7. Parapluie cuspidal.

Parapluie cornu. — Il s'agit de la sous-variété de \mathbf{R}^3 d'équation

$$x^2 + y^2((y - z^2)^2 + yz^3) = 0 \quad (\text{figure 1.8})$$

ou sous forme développée

$$x^2 + y^4 + y^2z^4 + y^3z^3 - 2y^3z^2 = 0 .$$

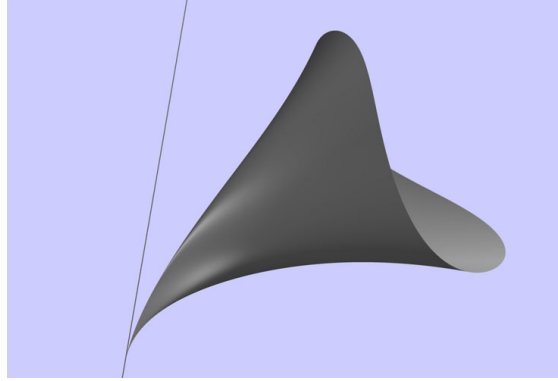


FIGURE 1.8. Parapluie cornu.

Solution des exercices du chapitre 1

1.2.2 Considérer par exemple l'ensemble $F := \{(x, y) \in K^2 \mid x - y = 0\}$ qui est fermé pour la topologie de Zariski de $\mathbf{A}^2(K)$. Son complémentaire $U := \{(x, y) \in K^2 \mid x \neq y\}$ n'est pas ouvert pour la topologie produit. En effet, un ouvert pour la topologie produit contient un produit d'ouverts de $\mathbf{A}^1(K)$, c'est-à-dire un produit de complémentaires de sous-ensembles finis de K .

1.2.9 1. L'ensemble U est quasi-algébrique si et seulement si U est un ouvert d'un ensemble algébrique F (F est un fermé de $\mathbf{A}^n(K)$ ou de $\mathbf{P}^n(K)$ pour un certain entier naturel n) donc, par définition de la topologie induite, si et seulement s'il existe un ouvert V de $\mathbf{A}^n(K)$ ou de $\mathbf{P}^n(K)$ tel que $U = V \cap F$, c'est-à-dire si et seulement si U est une partie localement fermée de $\mathbf{A}^n(K)$ ou de $\mathbf{P}^n(K)$.

2. Si U est un ouvert de \overline{U} , il existe par définition de la topologie induite un ouvert V de l'espace ambiant tel que $U = V \cap \overline{U}$ ce qui montre que U est une partie localement fermée. Pour montrer la réciproque, nous allons montrer que si U est une partie localement fermée de l'espace ambiant, alors $U = V \cap \overline{U}$ pour un ouvert V ce qui impliquera que U est un ouvert de \overline{U} .

D'après **1**, on a $U = V \cap F$ où V est un ouvert et F un fermé, d'où $U \subset V \cap \overline{U}$ puisque $U \subset V$ et $U \subset \overline{U}$. Réciproquement, $U \subset F$ et F est fermé donc $\overline{U} \subset F$, donc $V \cap \overline{U} \subset V \cap F = U$.

1.2.14 1. Si $x \in F$, alors pour tout élément $f \in \mathcal{I}(F)$, on a $f(x) = 0$ par définition de $\mathcal{I}(F)$ donc $x \in \mathcal{Z}(\mathcal{I}(F))$. Réciproquement, si $x \in \mathcal{Z}(\mathcal{I}(F))$, et si $F = \mathcal{Z}((f_1, \dots, f_n))$ pour $f_i \in K[X_1, \dots, X_n]$, alors les f_i appartiennent à $\mathcal{I}(F)$ donc pour tout $i = 1 \dots n$, $f_i(x) = 0$ donc $x \in F$.

3. Par exemple, prenons $n = 1$ et $I = (x^2)$: alors $\mathcal{Z}(I) = \{x \in \mathbf{A}^1(K) \mid x^2 = 0\} = \{0\}$ et $\mathcal{I}(\mathcal{Z}(I)) = (x) \neq I$.

4. Considérer $K = \mathbf{R}$ et $I = (x^2 + y^2 + 1)$, alors $\mathcal{I}(\mathcal{Z}(I)) = \mathcal{I}(\emptyset) = \mathbf{R}[x, y]$.

1.2.21 On ne corrige que le cas affine, le cas projectif se traite de manière similaire.

1.a. Soient F et G des fermés de Zariski tels que $\mathbf{A}^n(K) = F \cup G$. On montre qu'alors l'un des deux au moins n'est pas strict : il existe des polynômes $f, g \in K[X_1, \dots, X_n]$ tels que $F \subset \mathcal{Z}(f)$ et $G \subset \mathcal{Z}(g)$ et donc $\mathbf{A}^n(K) = \mathcal{Z}(f) \cup \mathcal{Z}(g) = \mathcal{Z}(fg)$. Mais K est infini donc $\mathcal{Z}(fg) = \mathbf{A}^n(K)$ implique que $fg \equiv 0$. En effet, il suffit d'évaluer le polynôme sur une droite affine (en fixant toutes les coordonnées sauf une par exemple), on obtient un polynôme en une variable avec une infinité de racines. Donc f ou g est nul et finalement, F ou G est égal à $\mathbf{A}^n(K)$.

2. Si $K = \{\alpha_1, \dots, \alpha_r\}$, alors $f = \prod_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq r}} (x_i - \alpha_j)$ vérifie $\mathbf{A}^n(K) = \mathcal{Z}(f)$ et $f \neq 0$. Finalement, $\mathbf{A}^n(K) = \cup_{i,j} \mathcal{Z}(x_i - \alpha_j)$.

1.2.32 Se reporter à la solution de l'exercice **1.2.14(1)** pour la condition suffisante (le raisonnement est valable aussi pour un fermé de $\mathbf{P}^n(K)$). La condition nécessaire est évidente.

1.2.37 Montrons que l'image réciproque de tout fermé de $\mathbf{A}^1(K)$ est un fermé de U . Un fermé de $\mathbf{A}^1(K)$ est un ensemble fini de points ou bien $\mathbf{A}^1(K)$ tout entier. Il suffit donc de montrer que $f^{-1}(y) = \{x \in U \mid f(x) = y\}$ est fermé ⁽¹⁶⁾ dans U pour tout $y \in \mathbf{A}^1(K)$. Ceci se montre localement, il suffit donc de considérer le cas où $U \subset \mathbf{A}^n(K)$ est un ouvert et de considérer un ouvert V de U sur lequel f peut être représentée par $\frac{g}{h}$ avec $g, h \in K[X_1, \dots, X_n]$ tels que pour tout $x \in V$, $h(x) \neq 0$. Alors $f^{-1}(y) \cap V = \{x \in V \mid \frac{g(x)}{h(x)} = y\}$. Mais $\frac{g(x)}{h(x)} = y$ si et seulement si $(g(x) - yh(x)) = 0$. Donc $f^{-1}(y) \cap V = \mathcal{Z}(g - yh) \cap V$ qui est fermé dans V . Finalement, $f^{-1}(y)$ est fermé dans U .

1.2.42 Remarquons que par l'injection naturelle $K[X_1, \dots, X_n] \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbf{A}^n(K), x}$ qui envoie f sur la classe du couple $(\mathbf{A}^n(K), f)$, l'image d'une fonction polynomiale non nulle en x est inversible dans $\mathcal{O}_{\mathbf{A}^n(K), x}$. En effet, si $f(x) \neq 0$, $\frac{1}{f}$ est régulière sur le voisinage $\mathcal{D}(f)$ de x . On en déduit un morphisme

$$\varphi: K[X_1, \dots, X_n]_{\mathfrak{m}_x} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbf{A}^n(K), x}$$

16. Ce qui serait évident pour une topologie séparée!

qui envoie la classe de $\frac{g}{h}$ sur la classe du couple $(\mathcal{D}(h), \frac{g}{h})$. Ce morphisme est injectif car $K[X_1, \dots, X_n] \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbf{A}^n(K), x}$ l'est ⁽¹⁷⁾. Soit maintenant un élément de $\mathcal{O}_{\mathbf{A}^n(K), x}$ représenté par (U, f) . Par définition d'application régulière, il existe un voisinage $V \subset U$ de x et des polynômes $g, h \in K[X_1, \dots, X_n]$ tels que h ne s'annule pas sur V et $\frac{g}{h} = f$ sur V . La fraction rationnelle $\frac{g}{h}$ représente un élément de $K[X_1, \dots, X_n]_{\mathfrak{m}_x}$ dont l'image par φ est équivalente à f .

1.2.51 1. La fonction f est régulière sur $K^2 \setminus \mathcal{Z}(x^2 + y^2 + 1)$, par contre elle n'est pas polynomiale. En effet, supposons qu'il existe $p \in K[x, y]$ telle que $\forall (x, y) \in K^2 \setminus \mathcal{Z}(x^2 + y^2 + 1), p(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2 + 1}$. Alors $p(x, y)(x^2 + y^2 + 1) = 1$ ce qui est impossible car pour n'importe quel y fixé, on aurait $\deg_y p + 2 = 0$ (Rappelons que K est infini car algébriquement clos).

2. Voir **1.** en remarquant que cette fois-ci $\mathcal{Z}(x^2 + y^2 + 1) = \emptyset$.

1.2.56 1. $\varphi: F_1 \rightarrow F_2$ étant un morphisme, pour tout ouvert $U \subset F_2$ et pour toute fonction régulière $f \in \mathcal{O}_{F_2}(U)$, on a $f \circ \varphi \in \mathcal{O}_{F_1}(\varphi^{-1}(U))$. En particulier, pour toute fonction régulière globale $f \in \mathcal{O}_{F_2}(F_2)$, $f \circ \varphi \in \mathcal{O}_{F_1}(F_1)$ c'est-à-dire d'après le théorème **1.2.50**, que $f \in \mathcal{P}(F_2)$ implique $f \circ \varphi \in \mathcal{P}(F_1)$. Appliquons ceci aux fonctions $y_i|_{F_2}$ pour $i = 1 \dots m$, alors $y_i \circ \varphi \in \mathcal{P}(F_1)$ i. e. il existe $f_i \in K[x_1, \dots, x_n]$ tel que, pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in F_1$, $y_i \circ \varphi(x_1, \dots, x_n) = f_i(x_1, \dots, x_n)$ d'où le résultat.

2. De la même façon, en utilisant cette fois le théorème **1.2.52**, on obtient $f \in \mathcal{S}_{F_2}^{-1}\mathcal{P}(F_2)$ implique $f \circ \varphi \in \mathcal{S}_{F_1}^{-1}\mathcal{P}(F_1)$ (où $\mathcal{S}_{F_k} = \{h \in \mathcal{P}(F_k) \mid \forall x \in F_k, h(x) \neq 0\}$). Considérons les fonctions $y_i|_{F_2}$ pour $i = 1 \dots m$, alors $y_i \circ \varphi \in \mathcal{S}_{F_1}^{-1}\mathcal{P}(F_1)$ i. e. pour $i = 1 \dots m$ il existe des fonctions polynomiales $g_i \in \mathbf{R}[x_1, \dots, x_n]$ et $h_i \in \mathbf{R}[x_1, \dots, x_n]$ telles que pour tout point $(x_1, \dots, x_n) \in F_1$, $h_i(x_1, \dots, x_n) \neq 0$ et $y_i \circ \varphi(x_1, \dots, x_n) = \frac{g_i(x_1, \dots, x_n)}{h_i(x_1, \dots, x_n)}$ d'où le résultat.

1.2.58 1 & 2 & 3. Notons $H := \mathcal{Z}(xy - 1) \subset \mathbf{A}^2(K)$. L'application $K \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow H, x \mapsto (x, \frac{1}{x})$ est un isomorphisme.

Dans le même ordre d'idées, remarquons que si A et B sont des matrices dans \mathcal{M}_n , la matrice $AB - I_n$ est formée de polynômes en les coefficients de A et B , notons $\mathcal{H} := \mathcal{Z}(AB - I_n) \subset \mathcal{M}_n \times \mathcal{M}_n \simeq K^{2n^2}$. L'application $\mathbf{GL}_n(K) \rightarrow \mathcal{H}, A \mapsto (A, A^{-1})$ est un isomorphisme.

Remarquons aussi que K^* et $\mathbf{GL}_n(K)$ sont des cas particuliers d'ouverts principaux, voir **1.2.60 (1)**. Il suffit de prendre $f: z \mapsto z$ et $f: A \mapsto \det A$.

^{17.} Le localisé $S^{-1}A$ est un A -module *plat* d'après la propriété universelle du localisé, voir la proposition **A.3.2**.

1.2.59 1. Soit d le degré de H , c'est-à-dire que $H = \mathcal{Z}(f)$ pour un polynôme homogène f de degré d . Considérer le plongement de Veronese de degré d , $\varphi_d: \mathbf{P}^n(K) \rightarrow \mathbf{P}^N(K)$, où $N = \binom{n+d}{n} - 1$, qui envoie le $n + 1$ -uplet $(x_0 : \dots : x_n)$ sur le $N + 1$ -uplet formé des monômes de degré d en les $n + 1$ variables x_0, \dots, x_n . Alors $\varphi_d(H)$ est un hyperplan H_0 de $\mathbf{P}^N(K)$ et via φ_d , $\mathbf{P}^n(K) \setminus H$ est isomorphe à $\mathbf{P}^N(K) \setminus H_0$. La conclusion est acquise car le complémentaire d'un hyperplan est affine. En effet, considérons des coordonnées sur $\mathbf{P}^N(K)$ telles que H_0 soit l'hyperplan d'équation $x_0 = 0$. Alors

$$\begin{aligned} \mathbf{P}^N(K) \setminus H_0 &\longrightarrow \mathbf{A}^N(K) \\ (x_0 : \dots : x_N) &\longmapsto \left(\frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_N}{x_0} \right) \end{aligned}$$

est un isomorphisme.

2. Pour montrer que $U := \mathbf{A}^2(K) \setminus \{(0, 0)\}$ n'est pas affine, on montre que $\mathcal{O}_{\mathbf{A}^2(K)}(U)$ est isomorphe à $K[x, y]$ c'est-à-dire que toute fonction régulière sur U s'étend en une fonction régulière sur $\mathbf{A}^2(K)$. Recouvrons U par les deux ouverts $U_1 := \mathcal{D}(x)$ et $U_2 := \mathcal{D}(y)$. Soit $f: U \rightarrow K$ une fonction régulière, la restriction de f à U_1 est de la forme $\frac{g_1}{x^n}$ pour un polynôme $g_1 \in K[x, y]$ et un entier naturel n . On peut supposer de plus que x^n ne divise pas g_1 . De la même façon, $f = \frac{g_2}{y^m}$ sur U_2 . Comme les restrictions coïncident sur $U_1 \cap U_2$, on a que $x^n g_2 = y^m g_1$. Par unicité de la décomposition en facteurs irréductibles dans l'anneau factoriel $K[x, y]$, on en déduit $n = m$ et $g_1 = g_2$, d'où la conclusion.

3. D'après le théorème 1.2.53, sur un ensemble algébrique projectif irréductible (en fait connexe suffit), les seules fonctions régulières sont les constantes, et d'après le Nullstellensatz A.5.12 (ou le théorème 1.2.50 qui l'utilise), un ensemble affine dont les seules fonctions régulières sont les constantes est un point.

1.2.60 1. Soit l'ensemble algébrique affine

$$\begin{aligned} Z &:= \{x \in K^{n+1} \mid \\ &\quad \forall g \in \mathcal{I}(F), g(x_1, \dots, x_n) = 0 \text{ et } x_{n+1}f(x_1, \dots, x_n) - 1 = 0\}. \end{aligned}$$

D'après l'exercice 1.2.56, il est clair que la restriction à Z de la projection $(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) \mapsto (x_1, \dots, x_n)$ est un isomorphisme sur $\mathcal{D}(f)$ qui induit donc un isomorphisme de K -algèbres $\mathcal{R}(Z) \xrightarrow{\cong} \mathcal{O}_F(\mathcal{D}(f))$.

Soit maintenant $\beta: \mathcal{R}(F)[\frac{1}{f}] \rightarrow \mathcal{R}(Z)$ le morphisme défini de la manière suivante : soit $h = \sum_{i=0}^d h_i (\frac{1}{f})^i$ avec $h_i \in \mathcal{R}(F)$, l'image de h par β est $(Z, x \mapsto \sum_{i=0}^d x_{n+1}^i h_i(x_1, \dots, x_n))$. Ce morphisme est injectif, en effet si $\sum_{i=0}^d x_{n+1}^i h_i(x_1, \dots, x_n) \equiv 0$ sur Z , alors pour tout i , $h_i \equiv 0$ sur F car K est infini. Soit maintenant $a \in \mathcal{R}(Z)$ et $x \in Z$, il existe donc un voisinage de

x dans Z tel que $a = \frac{b}{c}$ sur U avec $b, c \in \mathcal{P}(Z)$ et c non nulle sur U . Il est toujours loisible de décomposer $b(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) = \sum_{i=0}^{d_1} x_{n+1}^i b_i(x_1, \dots, x_n)$ et $c(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) = \sum_{i=0}^{d_2} x_{n+1}^i c_i(x_1, \dots, x_n)$. Comme f est une fonction régulière inversible sur $\mathcal{D}(f)$, on a $a = \frac{b'}{c'}$ sur U avec pour $x = (x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) \in Z$, $b'(x) = \sum_{i=0}^{d_1} f(x_1, \dots, x_n)^{d_2-i} b_i(x_1, \dots, x_n)$ et $c'(x) = \sum_{i=0}^{d_2} f(x_1, \dots, x_n)^{d_2-i} c_i(x_1, \dots, x_n)$. Par construction, c' appartient à $\mathcal{P}(F)$ et ne s'annule pas sur U et $b' \in \mathcal{P}(F)[\frac{1}{f}]$. Pour peu que l'on puisse supposer $U = F$, on a terminé. Ceci est possible dans au moins deux cas, si K est algébriquement clos, voir le théorème 1.2.50 et si K est un corps réel clos (définition A.5.18), voir le théorème 1.2.52.

2. On a $\mathcal{D}(f) \simeq \{(x, y, z) \in \mathbf{A}^3(\mathbf{R}) \mid z(x^2 + y^2) - 1 = 0\}$. En particulier $\mathbf{A}^2(\mathbf{R}) \setminus \{(0, 0)\}$ est affine; ce qui n'est pas le cas pour $\mathbf{A}^2(K) \setminus \{(0, 0)\}$ si K est algébriquement clos.

1.2.68 1. Soit P un polynôme irréductible de degré 2, alors si $\mathcal{Z}(P) \neq \emptyset$, $\mathcal{I}(\mathcal{Z}(P))$ est un idéal premier et $\mathcal{Z}(P)$ est alors irréductible d'après la proposition 1.2.30.

2. Notons $A := \mathcal{Z}(y - x^2)$ la parabole, et $B := \mathcal{Z}(xy - 1)$ l'hyperbole. On a $\mathcal{A}(A) = K[x, y]/(y - x^2) \simeq K[x, x^2] \simeq K[x]$ et $\mathcal{A}(B) = K[x, y]/(xy - 1) \simeq K[x, \frac{1}{x}]$ qui est la localisation de $K[x]$ en x . Un morphisme de K -algèbres $h: K[x, \frac{1}{x}] \rightarrow K[x]$ envoie nécessairement x sur une constante du fait que x est inversible dans $K[x, \frac{1}{x}]$. Donc h n'est pas surjective, et en particulier n'est pas un isomorphisme. Les deux courbes A et B ne sont donc pas isomorphes.

3a. Le corps K étant algébriquement clos, toute matrice symétrique S est congruente à une matrice diagonale $S = {}^tPDP$; un polynôme homogène de degré 2 à trois variables irréductible s'écrit donc $x^2 + y^2 + z^2$ ou $x^2 + y^2$ ou x^2 à un changement de variables linéaire près. Les deux derniers polynômes sont réductibles donc toute conique projective définie par un polynôme irréductible est isomorphe à $\mathcal{Z}(xz - y^2)$ qui est l'image de $\mathbf{P}^1(K)$ par le plongement de degré 2 : $\mathbf{P}^1(K) \rightarrow \mathbf{P}^2(K)$, $(u : v) \mapsto (u^2 : uv : v^2)$.

3b. Posons $U := \mathbf{A}^1(K) \setminus \{0\}$. On a $\Gamma(\mathbf{A}^1(K), \mathcal{O}_{\mathbf{A}^1(K)}) = K[x]$. Par ailleurs, comme U est un ouvert de $\mathbf{A}^1(K)$, on a l'égalité de faisceaux

$$\mathcal{O}_U = \mathcal{O}_{\mathbf{A}^1(K)}|_U.$$

D'où

$$\mathcal{O}_U(U) = \mathcal{O}_{\mathbf{A}^1(K)}(U)$$

qui, d'après l'exercice 1.2.60 est égal à $K[x]_x = K[x, \frac{1}{x}]$ qui n'est pas isomorphe à $K[x]$. On conclut avec le corollaire 1.2.65.

3c. Soit $P \in K[x, y]$ un polynôme irréductible de degré 2 et $C := \mathcal{Z}(P)$. La clôture projective est $\widehat{C} = \mathcal{Z}(Q) \subset \mathbf{P}^2(K)$ où $Q \in K[x, y, z]$ est le polynôme homogène irréductible $z^2 P(\frac{x}{z}, \frac{y}{z})$. L'intersection de la conique projective \widehat{C} avec la droite à l'infini $L := \mathcal{Z}(z)$ est déterminée par le polynôme homogène à deux variables $Q(x, y, 0)$ qui se décompose en un produit de deux facteurs de degré 1. Si $Q(x, y, 0)$ possède une racine double, \widehat{C} rencontre $\mathcal{Z}(z)$ en un seul point et $C = \widehat{C} \setminus \{\text{pt.}\} \simeq \mathbf{P}^1(K) \setminus \{\infty\} \simeq \mathbf{A}^1(K)$ d'après (3a). De même, si $Q(x, y, 0)$ possède deux racines distinctes, C est isomorphe à $\mathbf{P}^1(K)$ privé de deux points, c'est-à-dire à $\mathbf{A}^1(K)$ privé d'un point, en changeant les coordonnées pour ramener ce point en 0, on obtient l'anneau des coordonnées $\mathcal{A}(C) = K[x, \frac{1}{x}]$, voir la figure 1.10, deuxième ligne.

4a. L'invariant classifiant est le rang r du polynôme quadratique, les valeurs prises sont ici : $r = 1, 2$ et 3 correspondant respectivement (à un changement de variables linéaire près) à $x^2 = 0$ (une droite projective double), $x^2 + y^2 = 0$ (deux droites projectives se croisant en un point), et $x^2 + y^2 + z^2 = 0$ (une conique projective irréductible), voir la figure 1.9.

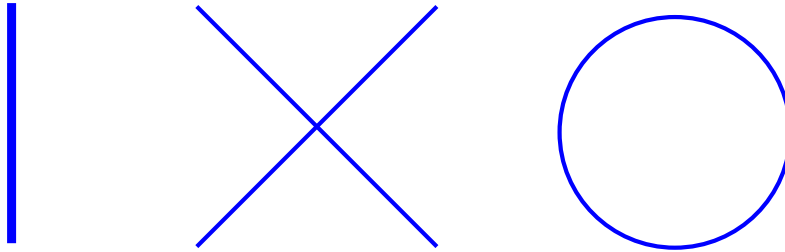


FIGURE 1.9. Coniques complexes projectives (par convention, une courbe double est représentée par une trait épais). De gauche à droite : $r = 1, x^2 = 0$, $r = 2, x^2 + y^2 = 0$, $r = 3, x^2 + y^2 + z^2 = 0$.

4b. Enlever un point sur une droite projective donne une droite affine. En considérant toutes les intersections possibles entre les coniques projectives de la classification précédente et la droite à l'infini, on obtient la liste suivante : une droite affine double, deux droites affines se croisant en un point, deux droites affines parallèles, une conique affine irréductible qui peut être ellipse ou une parabole. Voir la figure 1.10. (Pour obtenir une figure lisible, des changements de variables linéaires ont été effectués.)

5a. Considérons les coniques réelles projectives $\overline{C}_1 := \mathcal{Z}(x^2 + y^2 + z^2)$ et $\overline{C}_2 := \mathcal{Z}(x^2 + y^2 - z^2)$. La première est vide et la seconde est un cercle, elles ne sont donc pas isomorphes.

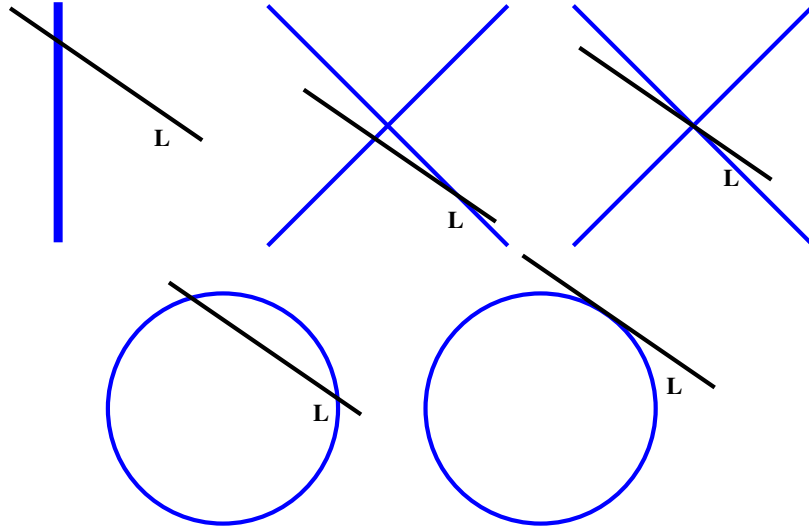


FIGURE 1.10. Coniques complexes affines (L est la droite à l'infini, la conique affine proprement dite est le complémentaire de L). Dans l'ordre : une droite affine double, deux droites affines sécantes, deux droites affines parallèles, une ellipse, une parabole.

Toute matrice symétrique à coefficients réels est diagonalisable dans une base orthonormée et un polynôme homogène de degré 2 à trois variables irréductible s'écrit donc $x^2 \pm y^2 \pm z^2$ à un changement de variables linéaire près. À une permutation des coordonnées près, toute conique réelle projective est donc isomorphe à C_1 ou à C_2 , cf. les deux coniques de droite de la figure 1.11.

5b. Considérons les coniques réelles affines $A := \mathcal{Z}(x^2 - y)$, $B := \mathcal{Z}(xy - 1)$, $C_1 := \mathcal{Z}(x^2 + y^2 + 1)$, $C_2 := \mathcal{Z}(x^2 + y^2 - 1)$ et $C_3 := \mathcal{Z}(x^2 - y^2 - 1)$. L'ensemble C_1 est vide, C_2 est compact et connexe, C_3 est non compact et non connexe, A est non compact et connexe, C_3 est isomorphe à B par le changement de variables $(x, y) \mapsto (x - y, x + y)$.

Soit C une conique affine définie par un polynôme irréductible et \widehat{C} sa complétée projective. Si \widehat{C} est vide, elle est isomorphe à $\mathcal{Z}(x^2 + y^2 + z^2)$ et C est isomorphe à C_1 . Si \widehat{C} est non vide, comme en 3c. on considère l'intersection de \widehat{C} avec la droite à l'infini $\mathcal{Z}(z)$. Cette intersection peut être vide (deux points imaginaires) : C est alors isomorphe à C_1 , réduite à un point (réel) : C est alors isomorphe à $\mathbf{P}^1(\mathbf{R})$ privé d'un point ; C est donc isomorphe à A , ou à deux points (réels) : C est alors isomorphe à $\mathbf{A}^1(\mathbf{R})$ privé d'un point ; C est donc isomorphe à $B \simeq C_3$, cf. les deux dernières lignes de la figure 1.12.

5c. L'invariant classifiant dans le cas réel est la signature (s^+, s^-) du polynôme quadratique (le rang r satisfait donc $r = s^+ + s^-$). À permutation près des variables, il y a cinq possibilités : $\{(1, 0), (0, 1)\}$, $\{(2, 0), (2, 0)\}$, $\{(1, 1)\}$, $\{(3, 0), (0, 3)\}$, $\{(2, 1), (1, 2)\}$ correspondant respectivement (à un changement de variables linéaire près) à $x^2 = 0$ (une droite réelle projective double), $x^2 + y^2 = 0$ (deux droites projectives imaginaires se croisant en un unique point réel), $x^2 - y^2 = 0$ (deux droites réelles projectives se croisant en un unique point), $x^2 + y^2 + z^2 = 0$ (une conique projective sans point réel) et $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ (une conique projective irréductible avec points réels), voir la figure 1.11.

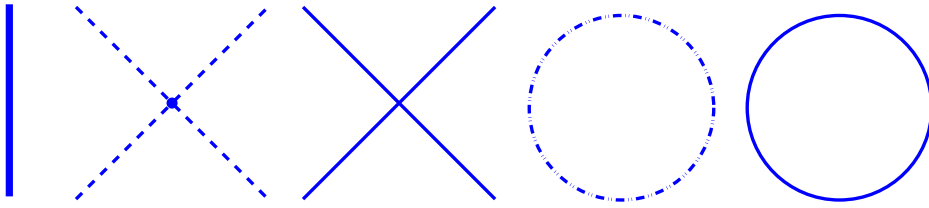


FIGURE 1.11. Coniques réelles projectives (par convention, une courbe en pointillés désigne une courbe non réelle). De gauche à droite : $x^2 = 0$, $x^2 + y^2 = 0$, $x^2 - y^2 = 0$, $x^2 + y^2 + z^2 = 0$, $x^2 + y^2 - z^2 = 0$. Lieu réel : une droite réelle projective double, un point réel isolé, deux droites réelles projectives sécantes, \emptyset , une ellipse.

5d. Le raisonnement est similaire au cas complexe, voir la figure 1.12.

1.2.80 1. Conséquence immédiate du corollaire 1.2.79, $K(\mathbf{A}^n(K)) = \text{Frac } \mathcal{P}(\mathbf{A}^n(K)) = \text{Frac } K[X_1, \dots, X_n]$.

2. On note $i: \mathbf{A}^n(K) \hookrightarrow \mathbf{P}^n(K)$, $(x_1, \dots, x_n) \mapsto (1 : x_1 : \dots : x_n)$, alors $i(\mathbf{A}^n(K))$ est un ouvert dense de $\mathbf{P}^n(K)$ (car non vide dans $\mathbf{P}^n(K)$ qui est irréductible car K est infini, voir l'exercice 1.2.21(1)). Donc d'après la proposition 1.2.71, $K(\mathbf{P}^n(K)) = K(\mathbf{A}^n(K))$.

3a. Clairement $P(f_1, f_2) = 0$ dans $K(f_1, f_2)$. Par conséquent, f_2 est un élément algébrique sur $K(f_1)$ et donc $K(C) = K(f_1, f_2)$ est de degré fini sur $K(f_1)$. De même $K(C)$ est de degré fini sur $K(f_2)$.

Si f_1 est transcendant sur K , alors $K(f_1) \simeq K(x) \simeq K(X)$. Si f_1 est algébrique sur K , alors f_2 est transcendant sur K par hypothèse sur le degré de P et $K(f_2) \simeq K(y) \simeq K(X)$.

3b. Conséquence du corollaire 1.2.79 et du Nullstellensatz, voir le corollaire A.5.13.

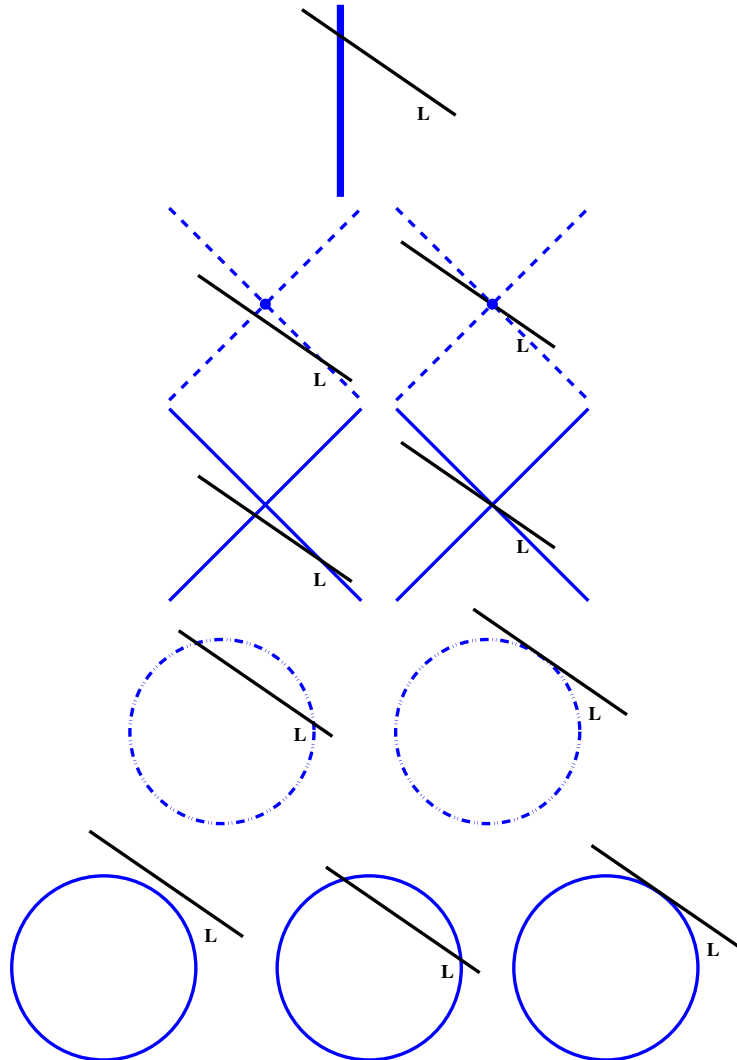


FIGURE 1.12. Coniques réelles affines (L est la droite à l'infini, la conique affine proprement dite est le complémentaire de L). Lieu réel dans l'ordre : une droite affine double, un point réel isolé, \emptyset , deux droites affines sécantes, deux droites affines parallèles, \emptyset , \emptyset , une ellipse, une hyperbole, une parabole.

1.3.15 1. Corollaire immédiat de la proposition 1.2.61.

2. On reprend les notations de la définition : $X = \mathcal{Z}(J) \setminus \mathcal{Z}(I)$. Soient f et g dans $\mathcal{I}(\mathcal{Z}(I))$ des fonctions, alors $\mathcal{D}(f) \cap \mathcal{D}(g) \cap \mathcal{Z}(J) = X \setminus (\mathcal{Z}(f) \cup \mathcal{Z}(g)) = X \setminus (fg)$.

3. Tout ouvert de X est de la forme $X \setminus \mathcal{Z}(L)$ pour un idéal L de $K[X_0, \dots, X_n]$. Soit $\{f_1, \dots, f_l\}$ un ensemble de générateurs de L . On a alors $\mathcal{Z}(L) = \bigcap_{i=1}^l \mathcal{Z}(f_i)$, donc $X \setminus \mathcal{Z}(L) = \bigcup_{i=1}^l \mathcal{D}(f_i)$. Remarquons en passant que si X est affine, on a $\mathcal{O}_X(X \setminus \mathcal{Z}(L)) = \bigcap_{i=1}^l \mathcal{O}_X(\mathcal{D}(f_i))$.

4. Voir [Ser55a, Proposition 1, page 234].

1.3.24 Il est clair que la relation \sim considérée est réflexive et symétrique. Montrons qu'elle est transitive : pour cela, supposons que $(U, \varphi_U) \sim (V, \varphi_V)$ et $(V, \varphi_V) \sim (W, \varphi_W)$. Alors $\varphi_U|_{U \cap V} = \varphi_V|_{U \cap V}$ et $\varphi_V|_{V \cap W} = \varphi_W|_{V \cap W}$ d'où $\varphi_U|_{U \cap V \cap W} = \varphi_W|_{U \cap V \cap W}$. Mais V est dense dans X donc $U \cap V \cap W$ est dense dans $U \cap W$ et donc $\varphi_U|_{U \cap W} = \varphi_W|_{U \cap W}$ c'est-à-dire $(U, \varphi_U) \sim (W, \varphi_W)$.

1.3.25 Même principe que pour l'exercice 1.2.56 : on tire en arrière les fonctions coordonnées et on obtient des fonctions régulières sur un ouvert dense de X (l'ouvert de définition de φ) ; si cet ouvert s'écrit $U = X \setminus \mathcal{Z}(I)$ pour un idéal I engendré par f_1, \dots, f_k , alors $U = \bigcup_{i=1}^k \mathcal{D}(f_i)$.

1.4.4 En fait la topologie euclidienne est la topologie la moins fine qui rende continues les fonctions f continues pour la topologie de Zariski.

1.5.14 D'après le lemme A.2.9, $I_{\mathbf{R}} := I \cap \mathbf{R}[X_1, \dots, X_n]$ est un idéal premier de $\mathbf{R}[X_1, \dots, X_n]$ et $I = I_{\mathbf{R}} \otimes \mathbf{C}[X_1, \dots, X_n]$ par hypothèse. Pour toute chaîne $I_{\mathbf{R}} = J_0 \subsetneq J_1 \subsetneq \dots \subsetneq J_l \subsetneq \mathbf{R}[X_1, \dots, X_n]$ d'idéaux premiers de longueur l , la chaîne $I = J_0 \otimes \mathbf{C}[X_1, \dots, X_n] \subsetneq J_1 \otimes \mathbf{C}[X_1, \dots, X_n] \subsetneq \dots \subsetneq J_l \otimes \mathbf{C}[X_1, \dots, X_n] \subsetneq \mathbf{C}[X_1, \dots, X_n]$ est une chaîne d'idéaux premiers de longueur l . On en déduit que $\dim I_{\mathbf{R}} \leq \dim I$ d'après l'exercice 1.5.13(1).

1.5.50 Soit $U \subset X$ un ouvert affine non vide, alors U est dense car X est irréductible et $K(X) = K(U)$ d'après la proposition 1.2.71. Comme $\dim X = \dim U$ d'après la remarque 1.5.44, il suffit d'appliquer le théorème 1.5.5 à l'anneau des coordonnées affines de U .

CHAPITRE 2

R-VARIÉTÉS

Nous avons introduit le chapitre 1 en précisant par avance que nos *variétés algébriques réelles* étaient insatisfaisantes. Nous étudions dans ce chapitre les variétés complexes munies d'une conjugaison qui sont des « espaces réels » selon Atiyah [Ati66].

On suppose pour fixer les idées que les variétés considérées dans cette introduction sont projectives. Soit $X \subset \mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ un ensemble algébrique complexe défini par des équations homogènes à coefficients *réels*. L'ensemble $V \subset \mathbf{P}^n(\mathbf{R})$ des solutions à coordonnées réelles de ces équations, c'est-à-dire l'intersection $X \cap \mathbf{P}^n(\mathbf{R})$, est alors un ensemble algébrique réel. Dans la littérature, et selon le type de problème posé, aussi bien X que V sont qualifiés de *réels*. Aussi, pour distinguer ces deux types d'objets, il est tentant de différencier V de X en appelant V une variété algébrique réelle, ce que nous avons fait au chapitre 1, et X une variété algébrique définie sur \mathbf{R} . On trouve cette distinction dans une partie de la littérature, voir par exemple [BK99, Hui95], mais pas partout, voir par exemple [Sil89, DIK00]. Un usage répandu est de considérer que « variété algébrique réelle » et « variété algébrique définie sur \mathbf{R} » désignent le même objet : c'est une variété algébrique complexe qui admet des équations à coefficients réels ou autrement dit, c'est une variété complexe stable par conjugaison.

En pratique, il suffit de préciser quel point de vue l'on utilise car bien souvent l'une des deux notions s'impose d'elle-même selon la nature du problème étudié. Mais il est parfois nécessaire de considérer les deux points de vue dans un même raisonnement. Nous avons fait le choix d'appeler *\mathbf{R} -variété algébrique* un couple formé d'une variété algébrique complexe et d'une conjugaison (voir la définition 2.1.10) et de réserver l'expression *variétés algébriques réelles* aux

sous-ensembles algébriques de $\mathbf{P}^n(\mathbf{R})$. Notons que les « variétés réelles » de [Sil89, I.2] et [DIK00] sont exactement nos \mathbf{R} -variétés.

Ce chapitre est consacré aux \mathbf{R} -variétés et à leurs relations avec les variétés algébriques réelles définies au chapitre précédent. Après avoir défini les \mathbf{R} -variétés et donné leurs premières propriétés en section 2.1, nous expliquons dans quelle mesure une \mathbf{R} -variété détermine une variété algébrique réelle en section 2.2. Dans la section suivante, nous considérons le problème inverse : une variété algébrique réelle détermine-t-elle une \mathbf{R} -variété ? Nous concluons cette section 2.3 par un récapitulatif des relations logiques entre les variétés algébriques réelles, les \mathbf{R} -variétés et les schémas sur \mathbf{R} , atteignant ainsi l'un des objectifs annoncés en introduction de cet ouvrage. La fin du chapitre est consacré à des développements et applications : la section 2.5, qui est assez technique et peut être omise en première lecture, est consacrée aux faisceaux et fibrés ; la section 2.6 est consacrée aux diviseurs ; et la section 2.7 aux \mathbf{R} -courbes planes.

2.1. Structures réelles sur une variété complexe

Dans cette section, nous introduisons la théorie des variétés complexes dans la théorie des variétés réelles. À titre de motivation, nous proposons l'exemple suivant. Un peu plus loin l'exemple 2.1.29 permettra de motiver l'introduction des structures réelles abstraites sur une variété complexe.

Exemple 2.1.1 (Suite de l'exemple 1.5.20). — Revenons à la variété algébrique réelle irréductible $F := \mathcal{Z}(x^2 + y^2) \subset \mathbf{A}^2(\mathbf{R})$ qui est le singleton formé du point singulier $(0, 0)$. Considérons l'ensemble algébrique $X := \mathcal{Z}_{\mathbf{C}}(x^2 + y^2) \subset \mathbf{A}^2(\mathbf{C})$ qui est une courbe complexe réductible. La restriction σ de $(x, y) \mapsto (\bar{x}, \bar{y})$ à X est une involution de X dans lui-même dont l'ensemble des points fixes est $F = X^\sigma = \{(0, 0)\}$. La courbe algébrique complexe X possède un unique point réel. Le point $(0, 0)$ est l'intersection des deux composantes irréductibles $\mathcal{Z}_{\mathbf{C}}(x - iy)$ et $\mathcal{Z}_{\mathbf{C}}(x + iy)$ et c'est bien le seul point réel de la courbe X . On a $\dim X = 1$ et $\dim F = 0$.

Pour aller plus loin, considérons la variété $V := \mathcal{Z}(x^2 + y^2 - z) \subset \mathbf{A}^3(\mathbf{R})$ et le morphisme $\pi : V \rightarrow \mathbf{A}^1(\mathbf{R})$, $(x, y, z) \mapsto z$. Pour tout $z_0 \in \mathbf{A}^1(\mathbf{R})$, la fibre $\pi^{-1}(z_0)$ est un sous-ensemble algébrique du plan affine $\mathcal{Z}((z - z_0)) \simeq \mathbf{A}^2(\mathbf{R})$. Si $z_0 > 0$, $\pi^{-1}(z_0)$ est une courbe réelle non singulière, en revanche $\pi^{-1}(0) \simeq F$ est un point et pour tout $z_0 < 0$, $\pi^{-1}(z_0)$ est vide. Considérons $Y := \mathcal{Z}_{\mathbf{C}}(x^2 + y^2 - z) \subset \mathbf{A}^3(\mathbf{C})$ et $\pi_{\mathbf{C}} : Y \rightarrow \mathbf{A}^1(\mathbf{C})$, $(x, y, z) \mapsto z$. Pour tout z_0 , la fibre

$\pi_{\mathbf{C}}^{-1}(z_0)$ est un sous-ensemble algébrique du plan affine $\mathcal{Z}((z - z_0)) \simeq \mathbf{A}^2(\mathbf{C})$. Soit $z_0 \in \mathbf{A}^1(\mathbf{R}) \subset \mathbf{A}^1(\mathbf{C})$. Si $z_0 > 0$, $\pi_{\mathbf{C}}^{-1}(z_0)$ est une courbe complexe non singulière dont le lieu réel est une courbe réelle non singulière. Si $z_0 = 0$, $\pi_{\mathbf{C}}^{-1}(0) \simeq X$ est une courbe complexe singulière dont le lieu réel est un point. Si $z_0 < 0$, $\pi_{\mathbf{C}}^{-1}(z_0)$ est une courbe complexe non singulière dont le lieu réel est vide.

Dans l'exemple ci-dessus, la variété complexe Y est utile pour comprendre la situation. On retrouve la variété réelle V comme lieu fixe de l'involution déduite de la conjugaison complexe sur \mathbf{C}^3 . Plus généralement, les conjugaisons usuelles nous serviront de modèle : sur $\mathbf{A}^n(\mathbf{C}) = \mathbf{C}^n$, nous noterons $\sigma_{\mathbf{A}} := \sigma_{\mathbf{A}^n}$ l'involution

$$\sigma_{\mathbf{A}}: \begin{cases} \mathbf{A}^n(\mathbf{C}) & \longrightarrow & \mathbf{A}^n(\mathbf{C}) \\ (z_1, \dots, z_n) & \longmapsto & (\bar{z}_1, \dots, \bar{z}_n) . \end{cases}$$

En particulier, pour tout $z \in \mathbf{C}$, $\sigma_{\mathbf{A}^1}(z) = \bar{z}$. De même, sur $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$, nous noterons $\sigma_{\mathbf{P}} := \sigma_{\mathbf{P}^n}$ la conjugaison usuelle

$$\sigma_{\mathbf{P}}: \begin{cases} \mathbf{P}^n(\mathbf{C}) & \longrightarrow & \mathbf{P}^n(\mathbf{C}) \\ (x_0 : x_1 : \dots : x_n) & \longmapsto & (\bar{x}_0 : \bar{x}_1 : \dots : \bar{x}_n) . \end{cases}$$

Nous retrouvons $\mathbf{R}^n \subset \mathbf{C}^n$ comme lieu des points fixes de $\sigma_{\mathbf{A}^n}$ et le projectif réel $\mathbf{P}^n(\mathbf{R}) \subset \mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ comme lieu des points fixes de $\sigma_{\mathbf{P}^n}$. Nous allons généraliser cette situation dans le cas d'une variété complexe (algébrique ou analytique), c'est-à-dire que nous allons introduire des *structures réelles* (analogues à $\sigma_{\mathbf{A}}$ et $\sigma_{\mathbf{P}}$) sur des variétés complexes, voir la définition 2.1.10. Remarquons tout de suite qu'en général, si $X \subset \mathbf{C}^n$, il ne suffit pas de considérer la restriction de $\sigma_{\mathbf{A}}$ à X pour deux raisons : la première est qu'il faudrait au moins imposer que cette restriction induise une application de X dans X (*i. e.* $\sigma_{\mathbf{A}}(X) \subset X$) et la seconde est qu'une même variété complexe X peut posséder plusieurs *formes réelles* (voir la définition 2.1.13) correspondant à des structures réelles différentes, c'est-à-dire des variétés complexes X_1 et X_2 définies par des équations à coefficients réels, isomorphes en tant que variétés complexes mais sans isomorphisme à coefficients réels, voir l'exemple 2.1.29.

Soit f une fonction holomorphe (par exemple une fonction polynomiale) définie dans un voisinage de $z_0 = (z_{0,1}, \dots, z_{0,n}) \in \mathbf{C}^n$ par

$$f(z) = \sum_{k \in \mathbf{N}^n} a_k (z_1 - z_{0,1})^{k_1} \dots (z_n - z_{0,n})^{k_n} ,$$

alors la fonction holomorphe *conjuguée* de f est la fonction holomorphe, notée σf , définie dans un voisinage de $\bar{z}_0 = (\bar{z}_{0,1}, \dots, \bar{z}_{0,n}) \in \mathbf{C}^n$ par

$$\sigma f(z) = \sum_{k \in \mathbf{N}^n} \bar{a}_k (z_1 - \bar{z}_{0,1})^{k_1} \dots (z_n - \bar{z}_{0,n})^{k_n}$$

c'est-à-dire que $\sigma f = \bar{f} \circ \sigma_{\mathbf{A}^n} = \sigma_{\mathbf{A}^1} \circ f \circ \sigma_{\mathbf{A}^n}$. Si F est un sous-ensemble de \mathbf{C}^n lieu des zéros communs aux fonctions f_1, \dots, f_k , alors

$$\bar{F} := \{z \in \mathbf{C}^n \mid \sigma_{\mathbf{A}^n}(z) \in F\}$$

est le lieu des zéros communs aux fonctions $\sigma f_1, \dots, \sigma f_k$. Par conséquent, si $F \subset \mathbf{A}^n(\mathbf{C})$ est un ensemble algébrique complexe affine, alors $\bar{F} \subset \mathbf{A}^n(\mathbf{C})$ est un ensemble algébrique complexe affine.

Remarque 2.1.2. — Attention à ne pas confondre σf et \bar{f} . Si f est une fonction holomorphe, σf est une fonction holomorphe alors que $\bar{f} = \sigma_{\mathbf{A}} \circ f$ est une fonction anti-holomorphe. Passer de f à σf consiste à conjuguer les coefficients. Si f est un polynôme, σf est un polynôme aussi alors que \bar{f} n'en est pas un. Les coefficients d'un polynôme f sont réels si et seulement si $\sigma f = f$.

Exercice 2.1.3. — (Faisceau sur un ensemble algébrique conjugué)

1. Soit \mathcal{O} le faisceau des fonctions régulières sur $\mathbf{A}^n(\mathbf{C})$ (resp. $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$). On définit un faisceau $\sigma \mathcal{O}$ sur $\mathbf{A}^n(\mathbf{C})$ (resp. $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$) en posant pour tout ouvert U de $\mathbf{A}^n(\mathbf{C})$ (resp. $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$) :

$$\sigma \mathcal{O}(U) := \left\{ \sigma f \mid f \in \mathcal{O}(\bar{U}) \right\} .$$

Montrer que $\sigma \mathcal{O} = \mathcal{O}$.

2. Soit $F \subset \mathbf{A}^n(\mathbf{C})$ un ensemble algébrique affine, le faisceau des fonctions régulières de F est noté \mathcal{O}_F et celui de \bar{F} est noté $\mathcal{O}_{\bar{F}}$ (ce sont les faisceaux déduits de \mathcal{O} qui font de F et \bar{F} des sous-variétés de $\mathbf{A}^n(\mathbf{C})$, voir la définition 1.3.7 et l'exemple 1.3.8).

Montrer que si $\bar{F} = F$, alors $\sigma \mathcal{O}_F := (\sigma \mathcal{O})_F$ est un faisceau sur F qui, d'après le point précédent, est égal au faisceau \mathcal{O}_F , on dira que \mathcal{O}_F est un \mathbf{R} -faisceau, voir la définition 2.2.1.

Proposition 2.1.4. — Soit $X \subset \mathbf{A}^n(\mathbf{C})$ un ensemble algébrique. La restriction de $\sigma_{\mathbf{A}^n}$ à X est une involution de X si et seulement si X peut être définie par des polynômes à coefficients réels.

Soit $X \subset \mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ un ensemble algébrique. La restriction de $\sigma_{\mathbf{P}^n}$ à X est une involution de X si et seulement si X peut être définie par des polynômes homogènes à coefficients réels.

Démonstration. — Si $X = \mathcal{Z}(P_1, \dots, P_l)$, alors par définition, on a $\overline{X} = \mathcal{Z}(\sigma P_1, \dots, \sigma P_l)$ et la restriction $\sigma_{\mathbf{A}}|_X$ est un endomorphisme de X si et seulement si $\overline{X} = X$. Supposons que $\overline{X} = X$, on a alors $\mathcal{Z}(P_1, \dots, P_l) = \mathcal{Z}(\sigma P_1, \dots, \sigma P_l) = \mathcal{Z}(\frac{1}{2}(P_1 + \sigma P_1), \dots, \frac{1}{2}(P_l + \sigma P_l), \frac{1}{2i}(P_1 - \sigma P_1), \dots, \frac{1}{2i}(P_l - \sigma P_l))$, il reste à remarquer que pour tout polynôme P à coefficients complexes, les expressions $\frac{1}{2}(P + \sigma P)$ et $\frac{1}{2i}(P - \sigma P)$ sont des polynômes à coefficients réels. La réciproque est évidente.

De la même façon, si X est une variété algébrique projective, définie dans un $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ par des équations polynomiales homogènes

$$P_1(z_0, \dots, z_n) = \dots = P_l(z_0, \dots, z_n) = 0,$$

alors \overline{X} définie par $\sigma_{\mathbf{A}^{n+1}} P_1(z_0, \dots, z_n) = \dots = \sigma_{\mathbf{A}^{n+1}} P_l(z_0, \dots, z_n) = 0$ est une sous-variété algébrique de $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$. On vérifie aisément que si P est un polynôme homogène, $\frac{1}{2}(P + \sigma P)$ et $\frac{1}{2i}(P - \sigma P)$ sont des polynômes homogènes. La restriction de $\sigma_{\mathbf{P}}$ à X est donc un endomorphisme de X si et seulement si X est définie par des polynômes homogènes à coefficients réels. \square

Avant de passer aux variétés abstraites, commençons par la définition suivante :

Définition 2.1.5. — Soit \mathcal{L} un faisceau de fonctions à valeurs complexes sur un espace topologique X , l'*anti-faisceau* $\overline{\mathcal{L}}$ de \mathcal{L} est défini sur tout ouvert U de X par

$$\overline{\mathcal{L}}(U) := \{\overline{f} := \sigma_{\mathbf{A}} \circ f \mid f \in \mathcal{L}(U)\}.$$

Plus généralement, soient X un espace topologique et \mathcal{L} un faisceau d'applications à valeurs dans \mathbf{C}^n ⁽¹⁾, le faisceau $\overline{\mathcal{L}}$ est défini sur tout ouvert U de X par

$$\overline{\mathcal{L}}(U) := \{\overline{f} := \sigma_{\mathbf{A}^n} \circ f \mid f \in \mathcal{L}(U)\}.$$

Définition 2.1.6. — Si (X, \mathcal{O}_X) est une variété algébrique complexe (resp. un espace analytique complexe ⁽²⁾), la variété *conjuguée* (resp. l'espace analytique *conjugué*) de X est l'espace topologique X muni de l'anti-faisceau de \mathcal{O}_X

$$\overline{X} := (X, \overline{\mathcal{O}_X}).$$

1. \mathcal{L} n'est donc plus un faisceau d'anneaux, mais un faisceau d'espaces vectoriels.

2. En géométrie analytique complexe, le terme *variété* est habituellement réservé aux espaces analytiques complexes non singuliers, voir l'appendice D.

Exercice 2.1.7. — Si F est un sous-ensemble de \mathbf{C}^n lieu des zéros communs des fonctions f_1, \dots, f_k , alors $\overline{F} := \{z \in \mathbf{C}^n \mid \sigma_{\mathbf{A}^n}(z) \in F\}$ est le lieu des zéros communs des fonctions $\sigma f_1, \dots, \sigma f_k$. Si $F \subset \mathbf{A}^n(\mathbf{C})$ est un ensemble algébrique complexe affine, alors \overline{F} est un ensemble algébrique complexe affine et $\sigma_{\mathbf{A}}$ induit un isomorphisme de variétés entre $(\overline{F}, \mathcal{O}_{\overline{F}})$ et la variété conjuguée $(F, \overline{\mathcal{O}_F})$.

Soient (X, \mathcal{O}_X) et (Y, \mathcal{O}_Y) des variétés algébriques complexes (resp. espaces analytiques complexes). En particulier \mathcal{O}_X et \mathcal{O}_Y sont des faisceaux de fonctions à valeurs complexes. Rappelons qu'une application $\varphi: X \rightarrow Y$ est *régulière* (resp. *holomorphe*) si elle est continue et si pour toute fonction $f \in \mathcal{O}_Y(V)$, la fonction $f \circ \varphi$ appartient à $\mathcal{O}_X(\varphi^{-1}(V))$, voir la définition 1.3.4.

Définition 2.1.8. — Une application $\varphi: (X, \mathcal{O}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$ est *anti-régulière* (resp. *anti-holomorphe*) si elle est continue et si pour tout ouvert V de Y , et toute fonction $f \in \mathcal{O}_Y(V)$, la fonction $\overline{f} \circ \varphi$ appartient à $\mathcal{O}_X(\varphi^{-1}(V))$.

Remarque 2.1.9. — Si X est une variété algébrique complexe (resp. espace analytique complexe) et \mathcal{O}_X son faisceau des fonctions régulières (resp. holomorphes), l'anti-faisceau $\overline{\mathcal{O}_X}$ est le faisceau des fonctions anti-régulières (resp. anti-holomorphes). Une application continue $\varphi: X \rightarrow Y$ est anti-régulière (ou anti-holomorphe) de (X, \mathcal{O}_X) vers (Y, \mathcal{O}_Y) si et seulement si elle est régulière (ou holomorphe) de (X, \mathcal{O}_X) vers la variété conjuguée $(Y, \overline{\mathcal{O}_Y})$, voir l'exercice 2.1.7.

Comme annoncé en introduction, nous généralisons les involutions $\sigma_{\mathbf{A}}$ et $\sigma_{\mathbf{P}}$ aux variétés complexes. (Voir aussi les « structures réelles sur un fibré » selon Atiyah [Ati66].)

Définition 2.1.10 (Structure réelle). — Une *structure réelle* sur une variété algébrique complexe (resp. espace analytique complexe) X est une involution anti-régulière (resp. anti-holomorphe) globale σ sur X .

Exemples 2.1.11. — Premiers exemples.

1. $\sigma_{\mathbf{A}}$ sur $\mathbf{A}^n(\mathbf{C})$;
2. $\sigma_{\mathbf{P}}$ sur $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$;
3. $(x : y) \mapsto (-\overline{y} : \overline{x})$ sur $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$.

Définition 2.1.12 (\mathbf{R} -variété). — Pour abrégé, nous dirons qu'un couple (X, σ) est une \mathbf{R} -variété si X est une variété complexe et σ une structure réelle sur X . On pourra préciser si besoin par l'ajout d'un adjectif : \mathbf{R} -variété

algébrique ou \mathbf{R} -variété analytique. Dans ce dernier cas, si on veut inclure les espaces singuliers, on pourra dire \mathbf{R} -espace analytique.

Définition 2.1.13. — On dit aussi qu'une \mathbf{R} -variété (X, σ) est une *forme réelle* de la variété complexe X .

Exemple 2.1.14. — Les formes réelles des groupes de Lie complexes forment une riche famille d'exemples, voir [MT86] par exemple.

Remarque 2.1.15. — La généralisation des \mathbf{R} -variétés aux variétés analytiques complexes est notamment nécessaire dans l'étude des \mathbf{R} -surfaces K3 (définition 4.5.3), des \mathbf{R} -tores complexes de dimension 2 (définition 4.5.22), des \mathbf{R} -surfaces elliptiques (définition 4.6.1) et des \mathbf{R} -variétés de Moishezon (définition 6.1.4).

Remarque 2.1.16. — Soient (X, σ) une \mathbf{R} -variété et $U \subset X$ un ouvert affine, alors $\sigma(U)$ est un ouvert affine. En effet, σ est un homéomorphisme donc $\sigma(U)$ est ouvert dans X ; de plus si $\varphi: U \rightarrow \mathbf{A}^n(\mathbf{C})$ est un plongement de U comme variété algébrique affine d'idéal $I = (P_1, \dots, P_l) \subset \mathbf{C}[X_1, \dots, X_n]$, alors $\sigma_{\mathbf{A}} \circ \varphi \circ \sigma: \sigma(U) \rightarrow \mathbf{A}^n(\mathbf{C})$ est un plongement de $\sigma(U)$ comme variété affine d'idéal ${}^{\sigma}I = ({}^{\sigma}P_1, \dots, {}^{\sigma}P_l) \subset \mathbf{C}[X_1, \dots, X_n]$.

Définition 2.1.17. — Un couple (Y, τ) est une \mathbf{R} -sous-variété de (X, σ) si $Y \subset X$ est une sous-variété complexe de X et si $\tau = \sigma|_Y$.

Par définition, une \mathbf{R} -variété (X, σ) est *quasi-affine* (resp. *affine*, resp. *quasi-projective*, resp. *projective*) si la variété complexe X admet un plongement régulier $\varphi: X \hookrightarrow \mathbf{A}^n(\mathbf{C})$ (resp. $\varphi: X \hookrightarrow \mathbf{A}^n(\mathbf{C})$ d'image fermée, resp. $\psi: X \hookrightarrow \mathbf{P}^n(\mathbf{C})$, resp. $\psi: X \hookrightarrow \mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ d'image fermée). Une question cruciale est donc de savoir s'il existe toujours un plongement régulier tel que $\varphi \circ \sigma = \sigma_{\mathbf{A}} \circ \varphi$ (resp. $\psi \circ \sigma = \sigma_{\mathbf{P}} \circ \psi$). Autrement dit, est-ce que (X, σ) est isomorphe à une \mathbf{R} -sous-variété de $(\mathbf{A}^n(\mathbf{C}), \sigma_{\mathbf{A}})$ (resp. $(\mathbf{P}^n(\mathbf{C}), \sigma_{\mathbf{P}})$)? La réponse est positive et c'est un résultat essentiel de la théorie : toute \mathbf{R} -variété quasi-projective peut être définie par des équations à coefficients réels, voir le théorème 2.1.33.

Pour une variété algébrique complexe projective, l'identification bien connue, [Ser56], avec une variété analytique est compatible avec les structures réelles.

Proposition 2.1.18. — Soit X une variété algébrique complexe projective. Alors X possède une structure réelle si et seulement s'il existe une involution anti-holomorphe sur l'espace analytique sous-jacent à X .

Démonstration. — Notons X^h l'espace analytique sous-jacent à X , c'est-à-dire que X^h est l'ensemble sous-jacent à X muni de la topologie euclidienne et du faisceau \mathcal{O}_X^h des fonctions holomorphes associé au faisceau \mathcal{O}_X . Si X est projective, alors la variété conjuguée \overline{X} est projective aussi. Soit $\sigma: X^h \rightarrow X^h$ une involution anti-holomorphe et $\psi: X^h \rightarrow \overline{X^h}$ l'application canonique induite par l'identité sur les espaces topologiques. L'application $\sigma \circ \psi: X^h \rightarrow X^h$ est holomorphe, et donc, puisque X est projective, régulière pour la topologie de Zariski d'après le **GAGA** de Serre [Ser56]. En d'autres termes, $\sigma: X \rightarrow X$ est une involution anti-régulière. \square

Soit $X \subset \mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ et $\psi: X \rightarrow \mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ un morphisme de variétés complexes, on note ${}^\sigma\psi := \sigma_{\mathbf{P}} \circ \psi \circ \sigma_{\mathbf{P}}$.

Proposition 2.1.19 (Condition d'existence d'une structure réelle)

Si une variété complexe quasi-projective $X \subset \mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ admet une structure réelle, alors il existe un isomorphisme $\psi: X \rightarrow \overline{X}$ qui satisfait ${}^\sigma\psi \circ \psi = \text{id}_X$.

Démonstration. — Si σ est une structure réelle sur X , il suffit de poser $\psi := \overline{\sigma} = \sigma_{\mathbf{P}} \circ \sigma$. On a alors $\psi^{-1} = \sigma^{-1} \circ \sigma_{\mathbf{P}}^{-1} = \sigma \circ \sigma_{\mathbf{P}}$. Par ailleurs, ${}^\sigma\psi = \sigma_{\mathbf{P}} \circ \psi \circ \sigma_{\mathbf{P}} = \sigma_{\mathbf{P}} \circ (\sigma_{\mathbf{P}} \circ \sigma) \circ \sigma_{\mathbf{P}} = \sigma \circ \sigma_{\mathbf{P}}$. \square

Remarque 2.1.20. — On fera particulièrement attention au fait qu'une structure réelle σ est une involution (*i. e.* $\sigma \circ \sigma = \text{id}$). L'exemple ci-dessous, dû à Shimura [Shi72a, page 177] (voir aussi [Sil92, page 152]), montre qu'une variété complexe peut être isomorphe à sa variété conjuguée sans admettre aucune structure réelle! (La variété en question admet un anti-automorphisme d'ordre 4 mais aucun anti-automorphisme d'ordre 2.)

Exercice 2.1.21 (Courbes sans structure réelle)

Soient m un entier impair, $a_0 \in \mathbf{R}$ un nombre réel et $a_k \in \mathbf{C} \setminus \mathbf{R}$, $k = 1, \dots, m$ des nombres complexes non réels. On considère la courbe C_{m,a_0,\dots,a_m} qui est la complétée projective (c'est-à-dire l'adhérence de Zariski de l'image de la courbe affine par l'injection $j: \mathbf{A}^2(\mathbf{C}) \hookrightarrow \mathbf{P}^2(\mathbf{C})$, voir le lemme 1.2.43 et l'exercice 1.2.44) de la courbe affine plane d'équation

$$y^2 = a_0x^m + \sum_{k=1}^m \left(a_k x^{m+k} + (-1)^k \overline{a_k} x^{m-k} \right).$$

1. Montrer que la courbe C_{m,a_0,\dots,a_m} est isomorphe à sa conjuguée via $\varphi: (x, y) \mapsto \left(-\frac{1}{x}, \frac{i}{x^m}y\right)$ pour $(x, y) \neq (0, 0)$ et $\varphi(0, 0) = (0, 0)$.
2. Montrer que φ induit un anti-automorphisme de C_{m,a_0,\dots,a_m} d'ordre 4.

3. Supposons que le nombre a_0 , les nombres a_k et les nombres $\overline{a_k}$ sont algébriquement indépendants sur \mathbf{Q} .
- (a) Montrer que les seuls automorphismes de C_{m,a_0,\dots,a_m} sont l'identité et $\rho: (x, y) \mapsto (x, -y)$. (Utiliser l'exercice 1.2.80(3a).)
- (b) En déduire que C_{m,a_0,\dots,a_m} n'admet aucune structure réelle.

Pour des exemples de surfaces complexes n'admettant aucune structure réelle et même aucun anti-automorphisme, voir la section 5.5 et [KK02, Theorem 5.1].

Définition 2.1.22. — Le *lieu réel*, ou *partie réelle*, d'une \mathbf{R} -variété (X, σ) est l'ensemble des points fixes $X^\sigma := \{x \in X \mid \sigma(x) = x\}$ de la structure réelle. Par analogie avec l'ensemble des points réels d'un schéma défini sur \mathbf{R} , le lieu fixe de σ est souvent noté

$$X(\mathbf{R}) := X^\sigma$$

lorsqu'aucune confusion n'est possible.

Remarque 2.1.23. — Bien entendu, si (Y, τ) est une \mathbf{R} -sous-variété de (X, σ) , alors $Y(\mathbf{R}) \subset X(\mathbf{R})$.

Exemples 2.1.24. — Lieux réels des exemples 2.1.11.

1. $\mathbf{A}^n(\mathbf{R})$;
2. $\mathbf{P}^n(\mathbf{R})$;
3. \emptyset .

Définition 2.1.25. — Soient (X, σ) et (Y, τ) des \mathbf{R} -variétés. Un *morphisme de \mathbf{R} -variétés* (ou *application régulière de \mathbf{R} -variétés*) $(X, \sigma) \rightarrow (Y, \tau)$ est un morphisme de variétés complexes $\varphi: X \rightarrow Y$ qui commute avec les structures réelles :

$$\forall x \in X, \quad \varphi(\sigma(x)) = \tau(\varphi(x)) .$$

Remarque 2.1.26. — Des \mathbf{R} -variétés (X, σ) et (Y, τ) sont donc *isomorphes* s'il existe un isomorphisme $X \xrightarrow{\varphi} Y$ de variétés complexes qui commute avec les structures réelles. En effet, si $\varphi: X \rightarrow Y$ commute *i. e.* $\varphi \circ \sigma = \tau \circ \varphi$, alors $\varphi^{-1}: Y \rightarrow X$ est un morphisme de \mathbf{R} -variétés ; soit $y \in Y$, et $x = \varphi^{-1}(y)$, alors $\varphi(\sigma(\varphi^{-1}(y))) = \varphi(\sigma(x)) = \tau(\varphi(x)) = \tau(y)$ et donc $\sigma(\varphi^{-1}(y)) = \varphi^{-1}(\tau(y))$.

Définition 2.1.27. — Soient (X, σ) et (Y, τ) des \mathbf{R} -variétés. Une *application rationnelle de \mathbf{R} -variétés* $(X, \sigma) \dashrightarrow (Y, \tau)$ est une application rationnelle de variétés complexes

$$\varphi: X \dashrightarrow Y$$

qui commute avec les structures réelles :

$$\forall x \in \text{dom}(\varphi) \subset X, \quad \varphi(\sigma(x)) = \tau(\varphi(x)) .$$

Remarque 2.1.28. — En notant $G := \text{Gal}(\mathbf{C}|\mathbf{R})$ le groupe de Galois, l'involution σ (resp. τ) munit X (resp. Y) d'une action de G . Une application régulière de \mathbf{R} -variétés $(X, \sigma) \rightarrow (Y, \tau)$ est alors par définition une application régulière G -équivariante de variétés complexes. De même, une application rationnelle de \mathbf{R} -variétés est une application rationnelle G -équivariante de variétés complexes.

Si X est une variété algébrique projective définie dans un $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ par des équations polynomiales homogènes

$$P_1(z_0, \dots, z_n) = \dots = P_l(z_0, \dots, z_n) = 0 ,$$

alors, comme on l'a vu plus haut, la variété complexe X admet une structure réelle induite par $\sigma_{\mathbf{P}}: \mathbf{P}^n(\mathbf{C}) \rightarrow \mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ si et seulement si on peut supposer que les polynômes P_i sont à coefficients réels (c'est-à-dire si l'idéal homogène engendré par les P_i admet un système de générateurs à coefficients réels). Dans ce cas, le lieu réel de la \mathbf{R} -variété $(X, \sigma_{\mathbf{P}}|_X)$ est $X(\mathbf{R}) = X \cap \mathbf{P}^n(\mathbf{R})$. De même, si X est une variété algébrique affine définie dans un $\mathbf{A}^n(\mathbf{C})$ par des équations polynomiales

$$P_1(z_1, \dots, z_n) = \dots = P_l(z_1, \dots, z_n) = 0 ,$$

alors $\sigma_{\mathbf{A}}: \mathbf{A}^n(\mathbf{C}) \rightarrow \mathbf{A}^n(\mathbf{C})$ induit une structure réelle sur la variété complexe X si et seulement si on peut supposer que les polynômes P_i sont à coefficients réels et dans ce cas, le lieu réel de la \mathbf{R} -variété $(X, \sigma_{\mathbf{A}}|_X)$ est

$$X(\mathbf{R}) = X \cap \mathbf{A}^n(\mathbf{R}) .$$

Notons cependant qu'une même variété peut avoir d'autres structures réelles que la restriction de $\sigma_{\mathbf{A}}$ ou $\sigma_{\mathbf{P}}$.

Exemple 2.1.29 (Deux structures réelles sur une variété complexe)

Considérons la courbe algébrique affine plane $C \subset \mathbf{A}^2(\mathbf{C})$ déterminée par l'équation $y^2 = x^3 - x$. L'équation de C étant à coefficients réels, la conjugaison $\sigma_{\mathbf{A}}$ se restreint en une structure réelle sur C . Notons $\sigma_1 := \sigma_{\mathbf{A}}|_C$, alors (C, σ_1) est une \mathbf{R} -variété dont l'ensemble des points réels $C(\mathbf{R}) =$

$\mathcal{Z}(y^2 - x(x-1)(x+1)) \cap \mathbf{A}^2(\mathbf{R})$ possède deux composantes connexes pour la topologie euclidienne, voir la figure 2.1.

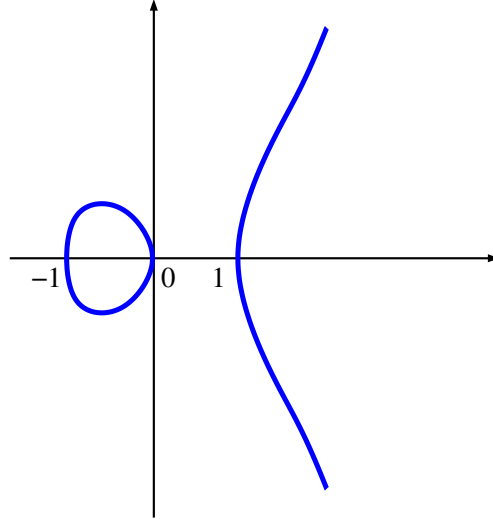
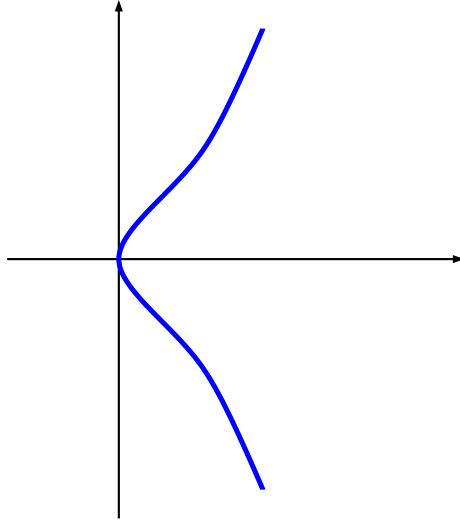


FIGURE 2.1. $C : y^2 = x(x-1)(x+1)$.

Considérons maintenant σ_2 la restriction à C de l'involution anti-régulière $\mathbf{A}^2(\mathbf{C}) \rightarrow \mathbf{A}^2(\mathbf{C})$, $(x, y) \mapsto (-\bar{x}, i\bar{y})$. On vérifie que $\sigma_2(C) \subset C$, le couple (C, σ_2) est donc une \mathbf{R} -variété dont la structure réelle n'est pas induite par $\sigma_{\mathbf{A}}$. Soit C' la courbe d'équation $y^2 = x^3 + x$ dans $\mathbf{A}^2(\mathbf{C})$ et soit ζ une racine carrée de $-i$, $\zeta^2 = -i$. Alors le morphisme $\varphi : \mathbf{A}^2(\mathbf{C}) \rightarrow \mathbf{A}^2(\mathbf{C})$, $(x, y) \mapsto (ix, \zeta y)$ est un automorphisme de $\mathbf{A}^2(\mathbf{C})$ dont la restriction $\varphi|_C : C \rightarrow C'$ est un isomorphisme de variétés complexes. Notons $\sigma' := \varphi|_C \circ \sigma_2 \circ \varphi^{-1}|_{C'}$, les \mathbf{R} -courbes (C, σ_2) et (C', σ') sont isomorphes. Il est facile de vérifier que $\sigma' = \sigma_{\mathbf{A}}|_{C'}$. L'ensemble des points réels $C'(\mathbf{R}) = \mathcal{Z}(y^2 - x(x-i)(x+i)) \cap \mathbf{A}^2(\mathbf{R})$ possède une seule composante connexe, voir la figure 2.2. Les \mathbf{R} -variétés (C, σ_1) et (C, σ_2) ne sont donc pas isomorphes d'après la proposition 2.1.38 ci-après.

Dans l'exemple ci-dessus, la \mathbf{R} -variété *abstraite* (C, σ_2) est isomorphe à la \mathbf{R} -variété (C', σ') dont la structure réelle est induite par celle de l'espace ambiant. L'existence d'une \mathbf{R} -sous-variété d'un \mathbf{A}^n isomorphe à une \mathbf{R} -variété affine abstraite donnée *a priori* est un fait général d'après le théorème fondamental 2.1.30 ci-dessous. Par contre, on prendra garde que contrairement à l'exemple, l'isomorphisme de variétés complexes $C \rightarrow C'$ n'est pas toujours induit par un automorphisme de l'espace ambiant.

FIGURE 2.2. $C' : y^2 = x(x - i)(x + i)$.**Théorème 2.1.30 (Plongement réel d'une \mathbf{R} -variété affine)**

Soit (X, σ) une \mathbf{R} -variété algébrique. Si la variété algébrique complexe X est affine, $X \hookrightarrow \mathbf{A}^m(\mathbf{C})$, alors il existe un ensemble algébrique affine $F \subset \mathbf{A}^n(\mathbf{C})$ tel que $\sigma_{\mathbf{A}}(F) \subset F$ et un isomorphisme de \mathbf{R} -variétés

$$(F, \sigma_{\mathbf{A}}|_F) \simeq (X, \sigma).$$

En particulier, l'idéal $\mathcal{I}(F)$ est engendré par des polynômes à coefficients réels, c'est-à-dire qu'il existe un idéal $I \subset \mathbf{R}[X_1, \dots, X_n]$ tel que $\mathcal{I}(F) = I_{\mathbf{C}}$, et $\mathcal{A}(X)$ est isomorphe à $\mathcal{A}(F) = (\mathbf{R}[X_1, \dots, X_n]/I) \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C}$.

Remarque 2.1.31. — Attention, $n \neq m$ en général.

Ce théorème est une reformulation, modulo le lemme A.7.3, du résultat suivant :

Lemme 2.1.32. — Soit (X, σ) une \mathbf{R} -variété algébrique affine, alors il existe un ensemble algébrique réel affine $V \subset \mathbf{A}^n(\mathbf{R})$ d'idéal $I = \mathcal{I}(V) \subset \mathbf{R}[X_1, \dots, X_n]$ tel que la \mathbf{R} -algèbre $\mathcal{A}(V) = \mathbf{R}[X_1, \dots, X_n]/I$ est isomorphe à la \mathbf{R} -algèbre des coordonnées affines invariantes $\mathcal{A}(X)^{\sigma} = \{f \in \mathcal{A}(X) \mid \sigma f = f\}$ de X .

Démonstration. — L'énoncé ci-dessus est un cas particulier de l'énoncé schématique qui dit qu'il y a équivalence entre la donnée d'un schéma affine X sur

\mathbf{C} muni d'une structure réelle σ et la donnée d'un schéma X_0 sur \mathbf{R} , à savoir si $X = \text{Spec } A$, alors $X_0 = \text{Spec } A^\sigma$, voir la section 2.4. \square

Théorème 2.1.33 (Plongement réel d'une \mathbf{R} -variété quasi-projective)

Soit (X, σ) une \mathbf{R} -variété algébrique. Si la variété algébrique complexe X est projective (resp. quasi-projective), $X \hookrightarrow \mathbf{P}^m(\mathbf{C})$, alors il existe un ensemble algébrique projectif (resp. quasi-projectif) $F \subset \mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ tel que $\sigma_{\mathbf{P}}(F) \subset F$ et un isomorphisme de \mathbf{R} -variétés

$$(F, \sigma_{\mathbf{P}}|_F) \simeq (X, \sigma).$$

Remarque 2.1.34. — Attention, comme dans le cas affine, $n \neq m$ en général.

Démonstration. — L'énoncé ci-dessus est un cas particulier de l'énoncé schématique qui dit qu'il y a équivalence entre la donnée d'un schéma quasi-projectif X sur \mathbf{C} muni d'une structure réelle σ et la donnée d'un schéma X_0 sur \mathbf{R} tel que $X_0 = X/\langle\sigma\rangle$, voir la section 2.4. \square

Parmi d'autres auteurs, Silhol [Sil89] énonce le résultat ci-dessus comme un cas particulier d'un résultat général de la théorie de descente galoisienne développée par Weil [Wei56, Theorem 7] puis Grothendieck [Gro95, Théorème 3]. Voir aussi Borel-Serre [BS64, Proposition 2.6, page 129]. Nous donnerons une preuve alternative du théorème 2.1.33 en section 2.6, ce sera le théorème 2.6.44.

Dans l'exemple 2.1.29, $\sigma_{\mathbf{A}}$ et $\sigma_{\mathbf{A}}' : (x, y) \mapsto (-\bar{x}, i\bar{y})$ sont deux structures réelles distinctes sur $\mathbf{A}^2(\mathbf{C})$. Pourtant les \mathbf{R} -variétés $(\mathbf{A}^2(\mathbf{C}), \sigma_{\mathbf{A}})$ et $(\mathbf{A}^2(\mathbf{C}), \sigma_{\mathbf{A}}')$ sont isomorphes via $\varphi : (x, y) \mapsto (ix, \zeta y)$. On dira dans ce type de situation que les structures réelles en question sont *équivalentes* :

Définition 2.1.35. — Deux structures réelles σ et τ sur une variété complexe X sont *équivalentes* si elles sont conjuguées par un automorphisme de la variété complexe X , c'est-à-dire s'il existe un automorphisme φ de la variété complexe X tel que

$$\sigma = \varphi^{-1} \circ \tau \circ \varphi$$

Autrement dit, σ et τ sont équivalentes s'il existe un isomorphisme de \mathbf{R} -variétés $\varphi : (X, \sigma) \rightarrow (X, \tau)$.

Remarque 2.1.36. — Deux formes réelles, voir la définition 2.1.13, (X, σ) et (X, τ) d'une variété complexe X sont isomorphes si et seulement si les structures réelles σ et τ sont équivalentes.

Exemple 2.1.37. — D'après [Kam75], toutes les structures réelles sur le plan complexe affine sont équivalentes.

Si (X, σ) est une \mathbf{R} -variété, on rappelle que $\#\pi_0(X^\sigma) = \#\pi_0(X(\mathbf{R}))$ désigne le nombre de composantes connexes du lieu réel pour la topologie euclidienne.

Proposition 2.1.38 (Lieu réel et isomorphisme)

Un isomorphisme de \mathbf{R} -variétés $\varphi: (X, \sigma) \rightarrow (Y, \tau)$ induit un homéomorphisme entre X^σ et Y^τ pour la topologie euclidienne. En particulier

$$\#\pi_0(X^\sigma) = \#\pi_0(Y^\tau) \quad \text{ou autrement dit} \quad \#\pi_0(X(\mathbf{R})) = \#\pi_0(Y(\mathbf{R})).$$

Démonstration. — Commençons par remarquer que pour une structure réelle donnée, la topologie euclidienne sur le lieu réel est égale à la topologie induite par la topologie euclidienne sur la variété complexe. Comme φ est un homéomorphisme pour la topologie euclidienne (voir l'exercice 1.4.4) et commute avec les structures réelles, il induit donc une bijection $X^\sigma \rightarrow Y^\tau$ entre les lieux fixes qui est un homéomorphisme. \square

Corollaire 2.1.39 (Lieu réel et équivalence). — Soient σ et τ des structures réelles sur une variété complexe X . Si σ et τ sont équivalentes, alors X^σ et X^τ sont homéomorphes pour la topologie euclidienne et en particulier

$$\#\pi_0(X^\sigma) = \#\pi_0(X^\tau).$$

Démonstration. — Les structures réelles σ et τ étant équivalentes, il existe un isomorphisme de \mathbf{R} -variétés $\varphi: (X, \sigma) \rightarrow (X, \tau)$. \square

Exemple 2.1.40 (Deux formes réelles d'une même variété complexe)

Revenons aux deux courbes algébriques complexes C et C' d'équations respectives $y^2 = x^3 - x$ et $y^2 = x^3 + x$ dans $\mathbf{A}^2(\mathbf{C})$ vues dans l'exemple 2.1.29. On vérifie facilement que l'ensemble des points réels $C(\mathbf{R}) \subset \mathbf{A}^2(\mathbf{R})$ possède deux composantes connexes, voir la figure 2.1 et que l'ensemble des points réels $C'(\mathbf{R}) \subset \mathbf{A}^2(\mathbf{R})$ possède une seule composante connexe, voir la figure 2.2. En particulier, d'après la proposition 2.1.38, les \mathbf{R} -courbes (C, σ_1) et (C, σ_2) ne sont pas isomorphes.

La variété complexe C possède donc deux structures réelles non équivalentes $\sigma_1 = \sigma_{\mathbf{A}}|_C: (x, y) \mapsto (\bar{x}, \bar{y})$ et $\sigma_2 = \varphi^{-1}|_{C'} \circ \sigma_{\mathbf{A}}|_{C'} \circ \varphi|_C: (x, y) \mapsto (-\bar{x}, i\bar{y})$. Il est intéressant de remarquer qu'ici ces structures réelles non équivalentes sont les restrictions des structures réelles $\sigma_{\mathbf{A}}$ et $\varphi^{-1} \circ \sigma_{\mathbf{A}} \circ \varphi$ de $\mathbf{A}^2(\mathbf{C})$ qui sont équivalentes par définition.

Remarque 2.1.41. — (Structure réelle non standard sur la droite projective) Nous avons déjà rencontré la symétrie centrée en l'origine sur la sphère de Riemann :

$$\sigma_{\mathbf{P}'}: \mathbf{P}^1(\mathbf{C}) \rightarrow \mathbf{P}^1(\mathbf{C}), \quad (x_0 : x_1) \mapsto (-\overline{x_1} : \overline{x_0})$$

qui est une structure réelle sur $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ dont l'ensemble des points fixes est vide ; elle n'est donc pas équivalente à $\sigma_{\mathbf{P}}$.

Exercice 2.1.42. — (Structures réelles sur le tore complexe) Trouver quatre structures réelles deux-à-deux non équivalentes sur $\mathbf{P}^1(\mathbf{C}) \times \mathbf{P}^1(\mathbf{C})$. Il y a en fait exactement quatre classes de structures réelles sur $\mathbf{P}^1(\mathbf{C}) \times \mathbf{P}^1(\mathbf{C})$.

Remarque 2.1.43. — Jusque récemment, on ne savait pas si le nombre de classes d'équivalences de formes réelles d'une variété complexe fixée était fini. Voir [DIK00, Appendix D] pour un tour d'horizon sur cette question.

Dans [Les18], John Lesieutre construit une variété de dimension 6 avec un groupe d'automorphismes discret ne pouvant être engendré par un nombre fini de générateurs et possédant une infinité de classes d'équivalences de formes réelles. Dans [DO19], Dinh et Oguiso construisent, par une méthode différente, des exemples de variétés projectives en toute dimension plus grande que 2 avec un groupe d'automorphismes non finiment engendré. Ces exemples donnent des variétés en toute dimension avec une infinité de formes réelles non équivalentes.

Dans [DFM18], Dubouloz, Freudenburg et Moser-Jauslin, construisent, par une méthode encore différente, des exemples de variétés affines en toute dimension ≥ 4 avec une infinité de formes réelles non équivalentes.

De façon surprenante, cette question de finitude est toujours ouverte pour les surfaces rationnelles, voir les travaux de Benzerga [Ben16a, Ben16b, Ben17] pour les résultats les plus récents dans cette direction.

2.2. \mathbf{R} -variétés et variétés algébriques réelles

Étant donné une \mathbf{R} -variété quasi-projective (X, σ) , on cherche à définir un faisceau de fonctions régulières sur $X(\mathbf{R})$ qui en fasse une variété algébrique réelle au sens de la définition 1.3.9. D'après le théorème 2.1.33 et l'exercice 2.1.3, le faisceau structural satisfait l'égalité $\sigma \mathcal{O}_X = \mathcal{O}_X$. Ceci motive la définition ci-dessous. Rappelons qu'une structure réelle est un homéomorphisme pour la topologie de Zariski et qu'en particulier, si U est un ouvert de X , $\sigma(U)$ est un ouvert de X . Soit \mathcal{L} un faisceau d'applications à valeurs

dans \mathbf{C}^n . Pour tout ouvert U de X et toute application $f \in \mathcal{L}(U)$, on note $\sigma f: \sigma(U) \rightarrow \mathbf{C}^n$ l'application $\bar{f} \circ \sigma = \sigma_{\mathbf{A}} \circ f \circ \sigma$. Alors $\sigma f \in \mathcal{L}(\sigma(U))$ et on généralise ainsi la notion de fonction conjuguée rencontrée en début de section 2.1.

Définition 2.2.1. — Soient (X, σ) une \mathbf{R} -variété et \mathcal{L} un faisceau d'applications à valeurs dans \mathbf{C}^n . Le faisceau ${}^\sigma\mathcal{L}$ défini sur tout ouvert U de X par :

$${}^\sigma\mathcal{L}(U) := \{\sigma f \mid f \in \mathcal{L}(\sigma(U))\} .$$

est un faisceau sur X appelé *faisceau conjugué*. On dit que \mathcal{L} est un \mathbf{R} -faisceau si et seulement si ${}^\sigma\mathcal{L} = \mathcal{L}$ (on exige ici une égalité et pas seulement un isomorphisme).

Du point de vue cohomologique (voir [Liu02, §5.2] pour les bases de la cohomologie des faisceaux), les faisceaux \mathcal{L} et ${}^\sigma\mathcal{L}$ sont similaires, et on a en particulier :

Proposition 2.2.2. — Soient (X, σ) une \mathbf{R} -variété et \mathcal{L} un faisceau cohérent (définition C.6.7) d'applications à valeurs dans \mathbf{C}^n . Alors

$$\dim_{\mathbf{C}} H^k(X, {}^\sigma\mathcal{L}) = \dim_{\mathbf{C}} H^k(X, \mathcal{L}) .$$

Démonstration. — Voir [Sil89, I.(1.9)]. □

Soit (X, σ) une \mathbf{R} -variété quasi-projective, on a vu plus haut que le faisceau de \mathbf{C} -algèbres \mathcal{O}_X est un \mathbf{R} -faisceau : ${}^\sigma\mathcal{O}_X = \mathcal{O}_X$. En particulier, pour tout ouvert U de X , le morphisme

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_X(U) & \longrightarrow & \mathcal{O}_X(\sigma(U)) \\ f & \longmapsto & \sigma f \end{array}$$

est un isomorphisme d'anneaux.

Remarque 2.2.3. — C'est même un anti-isomorphisme de \mathbf{C} -algèbres. Montrons l'anti-linéarité : soit $\lambda \in \mathbf{C}$, alors pour toute fonction f régulière sur U , on a $\sigma(\lambda f) = \bar{\lambda} \bar{f} \circ \sigma = \bar{\lambda}(\bar{f} \circ \sigma) = \bar{\lambda}(\sigma f)$.

Si A est une \mathbf{R} -algèbre munie d'une opération de $G := \text{Gal}(\mathbf{C}|\mathbf{R})$ et σ est l'involution de A correspondante, on note $A^G := A^\sigma = \{a \in A \mid \sigma(a) = a\}$ la sous-algèbre des invariants, voir la définition A.7.2.

Soit (X, σ) une \mathbf{R} -variété. Un sous-ensemble $U \subset X$ est *invariant* si $\sigma(U) = U$. Sur un tel sous-ensemble, G agit. Comme σ est un homéomorphisme, si U est un ouvert de X , l'intersection $U \cap \sigma(U)$ est un ouvert invariant de X . Soit U un ouvert invariant, on dit qu'une section locale f au-dessus de U

est *invariante* si $\sigma f = f$. Soit \mathcal{F} un \mathbf{R} -faisceau de fonctions sur X . On note $\mathcal{F}_{X(\mathbf{R})}$ le faisceau des restrictions sur $X(\mathbf{R})$, voir la définition C.1.6, et $\mathcal{F}_{X(\mathbf{R})}^G$ sa partie invariante. On applique cette définition à \mathcal{O}_X , qui est un \mathbf{R} -faisceau de fonctions sur X , et on obtient un faisceau

$$(\mathcal{O}_X)_{X(\mathbf{R})}^G := \left((\mathcal{O}_X)_{X(\mathbf{R})} \right)^G$$

de fonctions de $X(\mathbf{R})$ à valeurs dans \mathbf{R} (ce qui nécessite une justification, voir ci-dessous, car *a priori*, ce sont des fonctions à valeurs dans \mathbf{C}).

Décrivons les sections locales de ce nouveau faisceau. Soit $\Omega \subset X(\mathbf{R})$ un ouvert pour la topologie induite. Vérifions d'abord qu'un élément $f \in (\mathcal{O}_X)_{X(\mathbf{R})}^G(\Omega)$ est à valeurs dans \mathbf{R} . Soit $x \in \Omega$, la fonction f étant invariante, on a $f(x) = (\sigma f)(x) = \overline{f(\sigma(x))}$, et x étant un point de $X(\mathbf{R})$, on a $\sigma(x) = x$; ce qui prouve finalement que $f(x) \in \mathbf{R}$. Par définition de $(\mathcal{O}_X)_{X(\mathbf{R})}$, il existe un voisinage ouvert $U \subset X$ de x et un élément $g \in \mathcal{O}_X(U)$ tel que $g|_{U \cap \Omega} = f|_{U \cap \Omega}$. En remplaçant U par $U \cap \sigma(U)$ et g par $\frac{1}{2}(g + \sigma g)$ on obtient un élément $g \in (\mathcal{O}_X(U))^G$ vérifiant $g|_{U \cap \Omega} = f|_{U \cap \Omega}$. Autrement dit, les sections locales du faisceau $(\mathcal{O}_X)_{X(\mathbf{R})}^G$ au-dessus d'un ouvert Ω de $X(\mathbf{R})$ sont :

$$\begin{aligned} (\mathcal{O}_X)_{X(\mathbf{R})}^G(\Omega) &= \{f: \Omega \rightarrow \mathbf{R} \mid \forall x \in \Omega, \\ &\exists U \text{ voisinage ouvert invariant de } x \text{ dans } X \text{ et} \\ &\exists g \in (\mathcal{O}_X(U))^G \mid g|_{U \cap \Omega} = f|_{U \cap \Omega}\}. \end{aligned}$$

Le théorème suivant est à mettre en regard avec le théorème 2.1.30.

Théorème 2.2.4. — *Soit $F \subset \mathbf{A}^n(\mathbf{C})$ un ensemble algébrique complexe affine tel que $\mathcal{I}(F)$ est engendré par des polynômes à coefficients réels. En particulier, $F(\mathbf{R}) := F \cap \mathbf{A}^n(\mathbf{R})$ est un ensemble algébrique réel affine.*

Si $F(\mathbf{R})$ est dense dans F pour la topologie de Zariski, alors

$$\mathcal{O}_{F(\mathbf{R})} \simeq (\mathcal{O}_F)_{F(\mathbf{R})}^G.$$

Démonstration. — Soient $I \subset \mathbf{R}[X_1, \dots, X_n]$ un idéal et $F = \mathcal{Z}_{\mathbf{C}}(I) \subset \mathbf{A}^n(\mathbf{C})$ l'ensemble algébrique complexe d'idéal $\mathcal{I}(F) = I_{\mathbf{C}}$ et de faisceau des fonctions régulières \mathcal{O}_F . Alors $F(\mathbf{R}) = F \cap \mathbf{A}^n(\mathbf{R}) = \mathcal{Z}_{\mathbf{R}}(I) \subset \mathbf{A}^n(\mathbf{R})$ est un ensemble algébrique réel dont on note le faisceau des fonctions régulières par $\mathcal{O}_{F(\mathbf{R})}$. Par hypothèse, F est stable par $\sigma_{\mathbf{A}}$. D'après la proposition C.3.12, pour montrer que les faisceaux sont isomorphes, il suffit de montrer que leurs fibres sont isomorphes.

Soient $\Omega \subset F(\mathbf{R})$ un ouvert pour la topologie induite de $\mathbf{A}^n(\mathbf{R})$ et f un élément de $\mathcal{O}_{F(\mathbf{R})}(\Omega)$. En considérant un ouvert plus petit si besoin, on peut

supposer que sur Ω , $f = \frac{p}{q}$ avec p, q des polynômes à coefficients réels, q ne s'annulant pas sur Ω . Alors il existe un ouvert U de F dans $\mathbf{A}^n(\mathbf{C})$ sur lequel q ne s'annule pas et par conséquent $f \in \mathcal{O}_{F(\mathbf{R})}(\Omega)$ se prolonge en une fonction régulière $f_{\mathbf{C}} \in \mathcal{O}_F(U)$ telle que ${}^\sigma f_{\mathbf{C}} = f_{\mathbf{C}}$. Comme $F(\mathbf{R})$ est dense dans F , le germe du prolongement $f_{\mathbf{C}}$ de f est uniquement déterminé par le germe de f . On en déduit que $\mathcal{O}_{F(\mathbf{R})} \simeq (\mathcal{O}_F)_{F(\mathbf{R})}^G$. \square

Le théorème 2.2.4 motive la définition suivante :

Définition 2.2.5. — Soit (X, σ) une \mathbf{R} -variété. On dit que (X, σ) admet *suffisamment de points réels* si $X(\mathbf{R})$ est Zariski-dense dans X .

Exercice 2.2.6. — Soient $I \subset \mathbf{R}[X_1, \dots, X_n]$ un idéal radical, $F = \mathcal{Z}_{\mathbf{C}}(I) \subset \mathbf{A}^n(\mathbf{C})$ l'ensemble algébrique complexe associé (définition 1.2.12) et $(F, \sigma_{\mathbf{A}}|_F)$ la \mathbf{R} -variété affine associée.

1. Montrer que la \mathbf{R} -variété $(F, \sigma_{\mathbf{A}}|_F)$ admet suffisamment de points réels si et seulement si $\mathcal{I}(\mathcal{Z}(I)) \subset I$ dans $\mathbf{R}[X_1, \dots, X_n]$.
2. Montrer que la \mathbf{R} -variété $(F, \sigma_{\mathbf{A}}|_F)$ admet suffisamment de points réels si et seulement si I est un idéal réel, voir la définition A.5.14.

Exercice 2.2.7. — Montrer que la \mathbf{R} -variété $(F = \mathcal{Z}_{\mathbf{C}}(x^2 + y^2), \sigma_{\mathbf{A}}|_F)$ dont le lieu réel est non vide ne possède pas suffisamment de points réels (voir l'exemple 2.1.1); puis montrer que $\mathcal{O}_{F(\mathbf{R})} \neq (\mathcal{O}_F)_{F(\mathbf{R})}^G$.

Le théorème 2.2.9 ci-dessous caractérise les \mathbf{R} -variétés avec suffisamment de points réels. En particulier les \mathbf{R} -variétés irréductibles non singulières de lieu réel non vide possèdent suffisamment de points réels.

Lemme 2.2.8. — Soient (X, σ) une \mathbf{R} -variété algébrique, $a \in X(\mathbf{R})$ un point réel et \mathfrak{m}_a l'idéal maximal de l'anneau local $\mathcal{O}_{X,a}$. Alors

$$\dim_{\mathbf{C}} \mathfrak{m}_a / \mathfrak{m}_a^2 = \dim_{\mathbf{R}} ((\mathfrak{m}_a / \mathfrak{m}_a^2)^G).$$

Démonstration. — Comme le point a est réel, σ induit une involution anti-linéaire sur $\mathcal{O}_{X,a}$ et d'après le lemme A.7.3, il existe une base de $\mathfrak{m}_a / \mathfrak{m}_a^2$ formée d'éléments invariants par σ . \square

Théorème 2.2.9. — (*Densité du lieu réel dans le lieu complexe*)

1. L'espace $\mathbf{A}^n(\mathbf{R})$ est dense dans $\mathbf{A}^n(\mathbf{C})$ pour la topologie de Zariski.
2. Soit $V \subset \mathbf{A}^n(\mathbf{C})$ un ensemble algébrique affine irréductible dont l'idéal $I = \mathcal{I}(V)$ est engendré par des polynômes à coefficients réels. Le lieu

réel $V(\mathbf{R}) = V \cap \mathbf{A}^n(\mathbf{R})$ est Zariski-dense dans V si et seulement s'il contient au moins un point non singulier de V .

3. Soit (X, σ) une \mathbf{R} -variété algébrique. Le lieu réel $X(\mathbf{R})$ est Zariski-dense dans toute composante irréductible Z de X qui contient un point réel non singulier si et seulement si $X(\mathbf{R})$ n'est pas contenu dans le lieu singulier de X . Autrement dit, $\overline{X(\mathbf{R})}^{\text{Zar}} \cap Z = Z$ si et seulement si $(\text{Reg } Z) \cap X(\mathbf{R})$ est non vide.

Corollaire 2.2.10. — Soit (X, σ) une \mathbf{R} -variété algébrique. Si la variété complexe X est irréductible non singulière et si $X(\mathbf{R}) \neq \emptyset$, alors (X, σ) possèdent suffisamment de points réels, autrement dit $\overline{X(\mathbf{R})}^{\text{Zar}} = X$.

On prendra garde à ne pas confondre avec la situation en topologie euclidienne.

Proposition 2.2.11. — Le lieu réel $X(\mathbf{R})$ d'une \mathbf{R} -variété algébrique (X, σ) est fermé dans X pour la topologie euclidienne.

Démonstration. — La structure réelle σ est continue pour la topologie euclidienne et le lieu réel $X(\mathbf{R}) = \{x \in X \mid x = \sigma(x)\}$ est donc fermé dans X puisque la topologie euclidienne est séparée. \square

Preuve du théorème 2.2.9. — 1. On reprend un argument déjà utilisé dans la preuve de la proposition 1.5.29. Par récurrence sur la dimension de l'espace affine, on va montrer un peu plus loin que si une fonction polynomiale s'annule sur les points réels, alors elle est identiquement nulle. De là, soit $\mathcal{Z}(I)$ un fermé de $\mathbf{A}^n(\mathbf{C})$ contenant $\mathbf{A}^n(\mathbf{R})$. Soit $f \in I$, alors la fonction f s'annule en tout point de $\mathbf{A}^n(\mathbf{R})$ et d'après ce qui précède, f est donc la fonction nulle. Finalement $I = (0)$ et $\mathcal{Z}(I) = \mathbf{A}^n(\mathbf{C})$.

Si $n = 1$, le résultat est immédiat. Supposons que $n > 1$ et que le résultat est vrai pour $n - 1$. Soit $f \in \mathbf{C}[X_1, \dots, X_n]$ une fonction polynomiale qui s'annule sur \mathbf{R}^n . On peut écrire

$$f(X', X_n) = X_n^d f_d(X') + X_n^{d-1} f_{d-1}(X') + \dots + f_0(X')$$

où $X' = (X_1, \dots, X_{n-1})$, $d = \deg f$ et $\forall i = 0, \dots, d$, $f_i \in \mathbf{C}[X_1, \dots, X_{n-1}]$.

Pour tout $X' \in \mathbf{R}^{n-1}$, la fonction $X_n \mapsto f(X', X_n)$ s'annule en tout point de \mathbf{R} ; f est donc identiquement nulle. On en déduit que les fonctions polynomiales f_i s'annulent en tout point de \mathbf{R}^{n-1} et sont donc identiquement nulles par hypothèse de récurrence.

2. Comme V est irréductible dans $\mathbf{A}^n(\mathbf{C})$, $I = \mathcal{I}(V)$ est un idéal premier de $\mathbf{C}[X_1, \dots, X_n]$ et $I_{\mathbf{R}} := I \cap \mathbf{R}[X_1, \dots, X_n]$ est un idéal premier de $\mathbf{R}[X_1, \dots, X_n]$ (lemme A.2.9). On a alors $V = \mathcal{Z}_{\mathbf{C}}(I_{\mathbf{R}})$ et $V(\mathbf{R}) = \mathcal{Z}(I_{\mathbf{R}})$. Notons $d = \dim_{\mathbf{C}} V$, alors d'après le théorème des zéros (corollaire A.5.13), on a $\dim I = d$ (voir la définition 1.5.9) et $\dim I_{\mathbf{R}} = d$ d'après le lemme 1.5.15. Rappelons ici qu'*a priori* $\dim_{\mathbf{R}} V(\mathbf{R})$ n'est pas nécessairement égal à d , voir l'exemple 1.5.20 ou l'exemple 2.2.15.

On utilise ici le fait qu'il existe un point non singulier $a = (a_1, \dots, a_n) \in (\text{Reg } V) \cap \mathbf{A}^n(\mathbf{R})$. D'après la remarque 1.5.28, V est une sous-variété différentielle de dimension réelle $2d \leq 2n$ en a et par conséquent il existe un voisinage euclidien W de a dans \mathbf{C}^n tel que $W \cap V$ est un voisinage euclidien de a dans V de dimension réelle $2d$ et $W \cap V(\mathbf{R})$ est un voisinage euclidien de a dans $V(\mathbf{R})$ de dimension réelle d (prendre un ouvert de carte (W, φ) où $W = \sigma(W)$ et faire de φ une application G -équivariante en utilisant le lemme A.7.3 si besoin). Alors $V(\mathbf{R})$ est une sous-variété différentielle de dimension réelle d en a . L'ensemble algébrique réel $V(\mathbf{R})$ est alors de dimension de Zariski d d'après la proposition 1.5.29, c'est-à-dire que la dimension de l'idéal $\mathcal{I}(V(\mathbf{R}))$ est égale à d . Il existe donc une chaîne de longueur d d'idéaux premiers de $\mathbf{R}[X_1, \dots, X_n]$ contenant $\mathcal{I}(V(\mathbf{R}))$. Comme $\mathcal{I}(V(\mathbf{R})) \supset I_{\mathbf{R}}$ par définition, si $\mathcal{I}(V(\mathbf{R}))$ était différent de $I_{\mathbf{R}}$, on obtiendrait une chaîne de longueur $d+1$ d'idéaux premiers contenant $I_{\mathbf{R}}$, ce qui contredirait le fait que $\dim I_{\mathbf{R}} = d$. En conclusion, on obtient $\mathcal{I}(\mathcal{Z}(I_{\mathbf{R}})) = I_{\mathbf{R}}$ et finalement $\overline{V(\mathbf{R})} = V$ d'après 2.2.6(1).

3. On peut supposer X irréductible. Par définition de variété algébrique, X est recouverte par des ouverts affines. Par hypothèse, on peut donc choisir un ouvert affine U de X tel que $U \cap X(\mathbf{R})$ n'est pas contenu dans le lieu singulier de X (en particulier, U n'est pas vide et est donc Zariski-dense dans X irréductible). On peut de plus, quitte à remplacer U par $U \cap \sigma(U)$, supposer U stable par σ . Comme U est affine (voir l'exercice 1.3.15.(4)), la \mathbf{R} -variété $(U, \sigma|_U)$ est isomorphe à une \mathbf{R} -variété affine $(V, \sigma_{\mathbf{A}}|_V) \subset (\mathbf{A}^n(\mathbf{C}), \sigma_{\mathbf{A}})$ d'après le théorème 2.1.30, il ne reste qu'à appliquer (2) à cette \mathbf{R} -variété affine : $V \cap \mathbf{A}^n(\mathbf{R})$ est dense dans $V \cap \mathbf{A}^n(\mathbf{C}) = V$ et remarquer que $U \cap X(\mathbf{R}) = \varphi^{-1}(V \cap \mathbf{A}^n(\mathbf{R}))$ pour un \mathbf{R} -isomorphisme $\varphi : U \rightarrow V$. \square

Exemple 2.2.12 (Réductible, singulier, non vide, non dense)

En reprend l'exemple 1.5.20. Considérons la \mathbf{R} -variété algébrique affine réductible

$$(V, \sigma) := (\mathcal{Z}_{\mathbf{C}}(x^2 + y^2), \sigma_{\mathbf{A}}|_V)$$

dont le lieu réel est le singleton formé du point $a = (0, 0)$. On a par définition $\mathcal{O}_{V,a} = \left(\frac{\mathbf{C}[x,y]}{(x^2+y^2)} \right)_{(0,0)}$, d'où $\dim \mathcal{O}_{V,a} = \dim \mathcal{O}_{V,a}^G = 1$ et $\dim_{\mathbf{C}} \mathfrak{m}_{V,a} / \mathfrak{m}_{V,a}^2 = \dim_{\mathbf{R}} ((\mathfrak{m}_{V,a} / \mathfrak{m}_{V,a}^2)^G) = 2$, ce qui illustre le fait que a est un point singulier réel de la variété complexe de dimension 1. *A contrario* on a $\dim \mathcal{O}_{V(\mathbf{R}),a} = \dim_{\mathbf{R}} \mathfrak{m}_{V(\mathbf{R}),a} / \mathfrak{m}_{V(\mathbf{R}),a}^2 = 0$ ce qui illustre le fait que la variété algébrique réelle $\{a\}$ est une variété non singulière de dimension nulle.

Exemple 2.2.13 (Irréductible, singulier, dense)

En reprend l'exemple 1.5.21. Considérons la \mathbf{R} -courbe algébrique affine

$$(V, \sigma) := (\mathcal{Z}_{\mathbf{C}}(y^2 - x^2(x-2)), \sigma_{\mathbf{A}}|_V)$$

dont le lieu réel est représenté en figure 2.3. Si l'on considère l'adhérence de Zariski dans $\mathbf{A}^2(\mathbf{C})$ de la « branche » $(\text{Reg } V) \cap V(\mathbf{R}) = V(\mathbf{R}) \cap \{x > 1\}$, on obtient bien V .

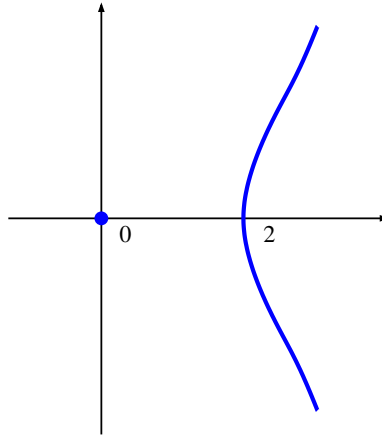


FIGURE 2.3. $V(\mathbf{R}) = \{y^2 - x^2(x-2) = 0\} \subset \mathbf{A}^2(\mathbf{R})$.

Remarque 2.2.14. — En revanche, l'adhérence euclidienne de cette même branche $V(\mathbf{R}) \cap \{x > 1\}$ omet le point $(0, 0)$.

Exemple 2.2.15 (Irréductible, singulier, non vide, non dense)

Dans cet exemple, l'ensemble algébrique V considéré est irréductible et singulier ; son lieu réel $V(\mathbf{R})$ n'est ni vide ni Zariski-dense dans V . On considère

$$\begin{aligned} P(x, y) &= ((x+i)^2 + y^2 - 1)((x-i)^2 + y^2 - 1) + x^2 = \\ &= x^4 + 2x^2y^2 + y^4 - 4y^2 + 4 + x^2 \end{aligned}$$

qui est un polynôme de $\mathbf{R}[x, y]$. Alors $V := \mathcal{Z}_{\mathbf{C}}(P) \subset \mathbf{A}^2(\mathbf{C})$ est un ensemble algébrique irréductible et son lieu réel est formé de deux points. En effet soit $P_1(x, y) = P(x, y) - x^2$ et $V_1 := \mathcal{Z}(P_1)$. Si (x, y) est un point réel de V_1 , alors $y^2 = 1 - (x + i)^2$ ou $y^2 = 1 - (x - i)^2$. Comme x et y sont réels, x est nécessairement nul donc $y = \pm\sqrt{2}$ et $V_1(\mathbf{R}) = \{(0, \sqrt{2}), (0, -\sqrt{2})\}$. Montrons que $V(\mathbf{R}) = \{(0, \sqrt{2}), (0, -\sqrt{2})\}$ aussi. Pour cela on remarque que $P(x, y) = 0$ pour x réel implique que $P_1(x, y) = x^4 + 2x^2y^2 + y^4 - 4y^2 + 4$ est un nombre réel négatif ou nul. Le discriminant réduit du polynôme de degré 2 en la variable $Y = y^2$ et à coefficients dans $\mathbf{R}[x]$ déduit de P_1 vaut $-4x^2$. Il est négatif si x est non nul donc pour x et y réels, $P(x, y) = 0$ si et seulement si $P_1(x, y) = 0$. Nous laissons au lecteur le soin de montrer que P est irréductible, un calcul un peu long mais sans surprise. (Pour construire cet exemple, on est parti du polynôme réductible P_1 et on a explicité une perturbation de P_1 qui préserve les points doubles réels de V_1 , l'existence d'une telle perturbation étant assurée par le théorème de Brusotti 2.7.10.).

Exercice 2.2.16. — Expliciter un exemple comparable à partir de l'exemple de la remarque 1.2.31(2).

Théorème 2.2.17. — Soit (X, σ) une \mathbf{R} -variété algébrique quasi-projective. Si la variété (X, σ) possède suffisamment de points réels, c'est-à-dire si $X(\mathbf{R})$ est dense dans X pour la topologie de Zariski, alors la restriction aux points réels $(X(\mathbf{R}), (\mathcal{O}_X)_{X(\mathbf{R})}^G)$ est une variété algébrique réelle au sens de la définition 1.3.9.

Démonstration. — Se déduit aisément à partir du théorème 2.1.33 et l'analogue projectif du théorème 2.2.4. \square

Corollaire 2.2.18. — Soit (X, σ) une \mathbf{R} -variété algébrique quasi-projective. Si la variété complexe X est irréductible non singulière et si $X(\mathbf{R}) \neq \emptyset$, alors $(X(\mathbf{R}), (\mathcal{O}_X)_{X(\mathbf{R})}^G)$ est une variété algébrique réelle.

Démonstration. — Se reporter au corollaire 2.2.10. \square

En complément des définitions 2.1.25 et 2.1.27, la proposition suivante motive l'introduction d'une troisième notion de flèche de \mathbf{R} -variétés qui est intermédiaire entre application régulière et application rationnelle.

Proposition 2.2.19. — Soient (X, σ) et (Y, τ) des \mathbf{R} -variétés possédant suffisamment de points réels et

$$\psi: (X, \sigma) \dashrightarrow (Y, \tau)$$

une application rationnelle de \mathbf{R} -variétés. Si le domaine de ψ contient le lieu réel $X(\mathbf{R})$, alors ψ induit par restriction une application régulière de variétés algébriques réelles $(X(\mathbf{R}), (\mathcal{O}_X)_{X(\mathbf{R})}^G) \rightarrow (Y(\mathbf{R}), (\mathcal{O}_Y)_{Y(\mathbf{R})}^G)$.

Démonstration. — Voir l'exercice 2.2.26(2). \square

Définition 2.2.20. — Soient (X, σ) et (Y, τ) des \mathbf{R} -variétés.

Une application rationnelle \mathbf{R} -régulière ou morphisme réel

$$\psi: (X, \sigma) \dashrightarrow (Y, \tau)$$

est une application rationnelle de \mathbf{R} -variétés telle que $X(\mathbf{R}) \subset \text{dom}(\psi)$.

Remarque 2.2.21. — Bien sûr, un morphisme de \mathbf{R} -variétés est toujours une application rationnelle \mathbf{R} -régulière mais la réciproque est fautive.

Proposition 2.2.22. — Soient (X, σ) et (Y, τ) des \mathbf{R} -variétés quasi-projectives. Supposons que ces variétés possèdent suffisamment de points réels. Alors :

1. Une application rationnelle \mathbf{R} -régulière de \mathbf{R} -variétés $(X, \sigma) \dashrightarrow (Y, \tau)$ induit par restriction une application régulière de variétés algébriques réelles

$$(X(\mathbf{R}), (\mathcal{O}_X)_{X(\mathbf{R})}^G) \rightarrow (Y(\mathbf{R}), (\mathcal{O}_Y)_{Y(\mathbf{R})}^G) .$$

2. Réciproquement, une application régulière

$$(X(\mathbf{R}), (\mathcal{O}_X)_{X(\mathbf{R})}^G) \rightarrow (Y(\mathbf{R}), (\mathcal{O}_Y)_{Y(\mathbf{R})}^G)$$

est la restriction d'une application rationnelle \mathbf{R} -régulière $\psi: (X, \sigma) \dashrightarrow (Y, \tau)$.

3. Une application rationnelle de \mathbf{R} -variétés $(X, \sigma) \dashrightarrow (Y, \tau)$ induit par restriction une application rationnelle de variétés algébriques réelles

$$(X(\mathbf{R}), (\mathcal{O}_X)_{X(\mathbf{R})}^G) \dashrightarrow (Y(\mathbf{R}), (\mathcal{O}_Y)_{Y(\mathbf{R})}^G) .$$

4. Réciproquement, une application rationnelle

$$(X(\mathbf{R}), (\mathcal{O}_X)_{X(\mathbf{R})}^G) \dashrightarrow (Y(\mathbf{R}), (\mathcal{O}_Y)_{Y(\mathbf{R})}^G)$$

est la restriction d'une application rationnelle $(X, \sigma) \dashrightarrow (Y, \tau)$.

Démonstration. — Exercice. \square

Remarque 2.2.23. — Attention au point (2) de la proposition ci-dessus, une extension d'application régulière n'est pas régulière en général. L'application $(x, y) \mapsto \frac{1}{x^2+y^2+1}$ de $\mathbf{A}^2(\mathbf{R})$ dans $\mathbf{A}^1(\mathbf{R})$ est un exemple d'application régulière de variétés algébriques réelles qui ne s'étend pas en un morphisme de \mathbf{R} -variétés.

Remarque 2.2.24. — Les « isomorphismes » correspondants aux applications rationnelles \mathbf{R} -régulières sont les *applications birationnelles \mathbf{R} -birégulières*. Attention, les deux préfixes « bi » sont essentiels : l'éclatement d'un point réel (ou, si l'on préfère, la contraction d'une (-1) -courbe réelle) sur une \mathbf{R} -surface, voir la définition 4.1.26, est un exemple d'application birationnelle \mathbf{R} -régulière qui n'est pas \mathbf{R} -birégulière.

Définition 2.2.25. — Soient (X, σ) et (Y, τ) des \mathbf{R} -variétés.

Une *application birationnelle \mathbf{R} -birégulière* ou *isomorphisme réel*

$$\psi: (X, \sigma) \dashrightarrow (Y, \tau)$$

est une application birationnelle de \mathbf{R} -variétés qui induit une application birégulière de variétés algébriques réelles

$$\left(X(\mathbf{R}), (\mathcal{O}_X)_{X(\mathbf{R})}^G \right) \xrightarrow{\simeq} \left(Y(\mathbf{R}), (\mathcal{O}_Y)_{Y(\mathbf{R})}^G \right) .$$

Exercice 2.2.26 (Utiliser les exercices 1.2.56 et 1.3.25)

Soient $F_1 \subset \mathbf{A}^n(\mathbf{C})$ et $F_2 \subset \mathbf{A}^m(\mathbf{C})$ des ensembles algébriques affines stables par $\sigma_{\mathbf{A}}$ de telle sorte que $(F_1, \sigma_{\mathbf{A}}|_{F_1})$ et $(F_2, \sigma_{\mathbf{A}}|_{F_2})$ sont des \mathbf{R} -variétés affines et $\varphi: F_1 \dashrightarrow F_2$ une application rationnelle de variétés complexes.

1. Montrer que φ est un morphisme de \mathbf{R} -variétés si et seulement s'il existe des fonctions polynomiales $f_1, \dots, f_m \in \mathbf{R}[x_1, \dots, x_n]$ telles que pour tout point $(x_1, \dots, x_n) \in F_1$,

$$\varphi(x_1, \dots, x_n) = (f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n)) .$$

Dans ce cas, $F_1 \subset \text{dom}(\varphi)$ et $\varphi: F_1 \rightarrow F_2$ est un morphisme de variétés complexes.

2. Montrer que φ est une application rationnelle \mathbf{R} -régulière si et seulement s'il existe des fonctions polynomiales $g_1, \dots, g_m \in \mathbf{R}[x_1, \dots, x_n]$ et $h_1, \dots, h_m \in \mathbf{R}[x_1, \dots, x_n]$ telles que pour tout point $(x_1, \dots, x_n) \in F_1(\mathbf{R})$, $h_1(x_1, \dots, x_n) \neq 0, \dots, h_m(x_1, \dots, x_n) \neq 0$ et

$$\varphi(x_1, \dots, x_n) = \left(\frac{g_1(x_1, \dots, x_n)}{h_1(x_1, \dots, x_n)}, \dots, \frac{g_m(x_1, \dots, x_n)}{h_m(x_1, \dots, x_n)} \right) .$$

Dans ce cas, $F_1(\mathbf{R}) \subset \text{dom}(\varphi)$ et, si F_1, F_2 possèdent suffisamment de points réels, $\varphi|_{F_1(\mathbf{R})}: F_1(\mathbf{R}) \rightarrow F_2(\mathbf{R})$ est une application régulière entre variétés algébriques réelles pour les structures induites.

\mathbf{R} -variétés non singulières. — Une variété complexe non singulière de dimension complexe n munie de sa topologie euclidienne possède une structure naturelle de variété différentielle de dimension réelle $2n$. Par exemple, si $X \subset \mathbf{P}^N(\mathbf{C})$ est non singulière, X hérite d'une structure de sous-variété différentielle de $\mathbf{P}^N(\mathbf{C})$. Si X est stable par $\sigma_{\mathbf{P}}$ et si $X(\mathbf{R}) \neq \emptyset$, alors $X(\mathbf{R})$ est une variété algébrique réelle d'après le corollaire 2.2.18. La variété $X(\mathbf{R})$ hérite de la topologie euclidienne de $\mathbf{P}^N(\mathbf{R})$ (on retrouve la topologie de la définition 1.4.1) ainsi que d'une structure de sous-variété différentielle de $\mathbf{P}^N(\mathbf{R})$.

Proposition 2.2.27. — *Soit (X, σ) une \mathbf{R} -variété. Si la variété complexe X est non singulière de dimension complexe n , alors l'ensemble X muni de sa topologie euclidienne est une variété différentielle de dimension réelle $2n$. Si de plus, $X(\mathbf{R}) \neq \emptyset$, alors l'ensemble $X(\mathbf{R})$ muni de sa topologie euclidienne est une variété différentielle de dimension réelle n .*

Comparer ce résultat à la remarque 1.5.28. Rappelons au passage que sous les hypothèses de la proposition ci-dessus, $X(\mathbf{R})$ est fermé dans X pour la topologie euclidienne, mais dense dans X pour la topologie de Zariski voir le corollaire 2.2.10 et la proposition 2.2.11.

Démonstration. — Comme on l'a vu plus haut, le faisceau \mathcal{O}_X étant un \mathbf{R} -faisceau, pour tout ouvert U de X , le morphisme

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_X(U) & \longrightarrow & \mathcal{O}_X(\sigma(U)) \\ f & \longmapsto & \sigma f \end{array}$$

est un isomorphisme d'anneaux. La variété X étant non singulière de dimension n , il existe des systèmes locaux de paramètres $\{\varphi_x\}_{x \in X}$, voir la définition 1.5.47. En termes de coordonnées locales, on a d'après l'exercice 1.5.48, un ensemble de systèmes (U_x, φ_x) où $\varphi_x: U_x \rightarrow \mathbf{C}^n$ est analytique et, quitte à raffiner le recouvrement ouvert en topologie euclidienne, on peut supposer que $\forall x \in X, U_{\sigma(x)} = \sigma(U_x)$ et que

$$(2.1) \quad \forall x \in X, \quad \sigma(\varphi_x) = \varphi_{\sigma(x)}.$$

où $\sigma(\varphi_x) = \sigma_{\mathbf{A}} \circ \varphi_x \circ \sigma$.

De là, si $(z_1, \dots, z_n)_x$ est un système de coordonnées locales satisfaisant (2.1), le système $(\Re(z_1), \Im(z_1), \dots, \Re(z_n), \Im(z_n))_x$ est un système de coordonnées locales à valeurs réelles pour la structure de variété différentielle,

qui est équivalent au système de coordonnées locales à valeurs complexes $(z_1, \bar{z}_1, \dots, z_n, \bar{z}_n)$.

La structure réelle σ transforme alors $(z_1, \bar{z}_1, \dots, z_n, \bar{z}_n)_x$ en

$$(\bar{z}_1, z_1, \dots, \bar{z}_n, z_n)_{\sigma(x)}.$$

En particulier, si $x \in X(\mathbf{R})$ est un point non singulier de X , on a d'après (2.1), $\sigma(\varphi_x) = \varphi_{\sigma(x)} = \varphi_x$ d'où $\sigma_{\mathbf{A}} \circ \varphi_x = \varphi_x \circ \sigma$ et si $y \in U_x \cap X(\mathbf{R})$, on a $\overline{\varphi_x(y)} = \varphi_x(y)$. Les coordonnées locales d'un point réel sont donc réelles et la restriction de φ_x à $X(\mathbf{R})$ induit donc un système de coordonnées différentielles (et même analytiques) réelles $(\Re(z_1), \dots, \Re(z_n))$ de $X(\mathbf{R})$ dans un voisinage de x .

Variante : on peut remplacer le début de l'argument en utilisant le lemme 2.2.8. Soit x un point réel de X , alors il existe un système local de paramètres invariants par σ . D'après l'exercice 1.5.48, on en déduit un système de coordonnées locales équivariantes. \square

La structure de variété différentielle de dimension $2n$ sous-jacente à la variété complexe non singulière X est non seulement *orientable* (un changement de carte biholomorphe est de déterminant positif), mais *orientée* par la structure complexe comme relèvement de l'orientation de \mathbf{R}^{2n} donnée par un isomorphisme $\mathbf{R}^{2n} \simeq \mathbf{C}^n$ fixé (voir l'exercice B.5.11).

Proposition 2.2.28. — *Soit (X, σ) une \mathbf{R} -variété non singulière. La structure réelle σ est un difféomorphisme de la variété différentielle orientée X de dimension $2n$ qui préserve l'orientation si n est pair et qui la renverse dans le cas contraire.*

Démonstration. — Se déduit immédiatement de la preuve précédente. En effet σ transforme $(z_1, \bar{z}_1, \dots, z_n, \bar{z}_n)_x$ en $(\bar{z}_1, z_1, \dots, \bar{z}_n, z_n)_{\sigma(x)}$. Le déterminant de sa différentielle vaut donc $(-1)^n$. \square

Atlas adapté. —

Exercice 2.2.29. — Si X est une variété analytique complexe non singulière de dimension n , on peut reformuler la définition de variété conjuguée à partir d'un atlas maximal $(U_i, \varphi_i)_i$ déterminant la structure complexe sur X : la structure complexe de la variété conjuguée $(X, \overline{\mathcal{O}_X})$ est donnée par l'atlas $(U_i, \sigma_{\mathbf{A}^n} \circ \varphi_i)_i$.

Définition 2.2.30. — Un atlas adapté sur une \mathbf{R} -variété analytique lisse (X, σ) de dimension n est un atlas $\mathcal{A} = \{(U_i, \varphi_i : U_i \rightarrow \mathbf{C}^n)\}_i$ sur la variété analytique complexe X qui vérifie (rappelons que ${}^\sigma\varphi_i = \sigma_{\mathbf{A}} \circ \varphi_i \circ \sigma$) :

1. L'atlas est globalement stable par la structure réelle :

$$(U_i, \varphi_i) \in \mathcal{A} \implies (\sigma(U_i), {}^\sigma\varphi_i) \in \mathcal{A} ;$$

2. Si $U_i \cap X(\mathbf{R}) \neq \emptyset$, alors $U_i = \sigma(U_i)$ et ${}^\sigma\varphi_i = \varphi_i$;
3. Si $U_i \cap X(\mathbf{R}) = \emptyset$, alors $U_i \cap \sigma(U_i) = \emptyset$.

Exercice 2.2.31. — Donner un atlas adapté pour $(\mathbf{P}^1(\mathbf{C}), \sigma_{\mathbf{P}})$.

Proposition 2.2.32. — Toute \mathbf{R} -variété analytique lisse admet un atlas adapté.

Démonstration. — Se déduit de l'existence de systèmes locaux de paramètres analytiques satisfaisant (2.1). \square

2.3. Complexification d'une variété réelle

Nous avons vu que s'il est dense, le lieu réel d'une \mathbf{R} -variété est une variété algébrique réelle. L'objet de cette section est l'étude de la réciproque : étant donnée une variété algébrique réelle V , existe-t-il une \mathbf{R} -variété dont le lieu réel soit isomorphe à V ?

Soient K un corps et $L \supset K$ une extension de K . Alors $\mathbf{A}^n(K)$ est un sous-espace de $\mathbf{A}^n(L)$ et $\mathbf{P}^n(K)$ est un sous-espace de $\mathbf{P}^n(L)$.

Définition 2.3.1 (Revoir la définition 1.2.12). — Soit $F \subset \mathbf{A}^n(K)$ un ensemble algébrique sur K d'idéal $I = \mathcal{I}(F) \subset K[X_1, \dots, X_n]$. On définit l'ensemble algébrique F_L sur L comme l'ensemble $\mathcal{Z}_L(I)$ des zéros de I dans $\mathbf{A}^n(L)$:

$$F_L := \mathcal{Z}_L(I) \subset \mathbf{A}^n(L) .$$

De même, si $F \subset \mathbf{P}^n(K)$ est un ensemble algébrique projectif d'idéal homogène $I = \mathcal{I}(F) \subset K[X_0, \dots, X_n]$, on définit l'ensemble algébrique

$$F_L := \mathcal{Z}_L(I) \subset \mathbf{P}^n(L) .$$

Plus généralement, si $U = F \setminus F' \subset \mathbf{A}^n(K)$ est un ensemble quasi-affine et si $I = \mathcal{I}(F) \subset K[X_1, \dots, X_n]$ et $I' = \mathcal{I}(F') \subset K[X_1, \dots, X_n]$ sont les idéaux associés, on définit l'ensemble quasi-affine

$$U_L := F_L \setminus F'_L = \mathcal{Z}_L(I) \setminus \mathcal{Z}_L(I') \subset \mathbf{A}^n(L) .$$

Enfin, si $U = F \setminus F' \subset \mathbf{P}^n(K)$ est un ensemble quasi-projectif et si $I = \mathcal{I}(F) \subset K[X_0, \dots, X_n]$ et $I' = \mathcal{I}(F') \subset K[X_0, \dots, X_n]$ sont les idéaux homogènes associés, on définit l'ensemble quasi-projectif

$$U_L := F_L \setminus F'_L = \mathcal{Z}_L(I) \setminus \mathcal{Z}_L(I') \subset \mathbf{P}^n(L) .$$

À un ensemble algébrique réel (affine pour simplifier) $F \subset \mathbf{R}^n$ d'idéal annulateur $I := \mathcal{I}(F) \subset \mathbf{R}[X_1, \dots, X_n]$ est donc naturellement associée une *complexification* $F_{\mathbf{C}} := \mathcal{Z}_{\mathbf{C}}(\mathcal{I}(F)) = \mathcal{Z}_{\mathbf{C}}(I) \subset \mathbf{C}^n$: l'ensemble des zéros *complexes* communs aux polynômes à coefficients réels qui s'annulent sur F . Attention ici, l'idéal I est formé de polynômes à coefficients réels alors que $F_{\mathbf{C}} \subset \mathbf{C}^n$ est un ensemble de points complexes. Comme $F_{\mathbf{C}}$ est défini par des polynômes à coefficients réels, on a $\sigma_{\mathbf{A}}(F_{\mathbf{C}}) \subset F_{\mathbf{C}}$ et la restriction σ de la structure réelle standard $\sigma_{\mathbf{A}}: (x_1, \dots, x_n) \mapsto (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$ à $F_{\mathbf{C}}$ est une structure réelle qui fait de $(F_{\mathbf{C}}, \sigma)$ une \mathbf{R} -variété. On retrouve la variété algébrique réelle de départ comme ensemble des points fixes $F = (F_{\mathbf{C}})^{\sigma}$.

La construction que nous venons de considérer dépend fortement des équations déterminant F . La définition suivante permet de considérer des complexifications abstraites, c'est-à-dire indépendantes d'un plongement particulier dans un espace affine ou projectif, ou encore indépendantes d'un choix d'équations.

Définition 2.3.2. — Soit (V, \mathcal{O}_V) une variété algébrique réelle. Une paire $((X, \sigma), j)$ est une *complexification* de V si (X, σ) est une \mathbf{R} -variété ayant suffisamment de points réels et $j: V \rightarrow X$ est une application injective qui induit un isomorphisme de variétés algébriques réelles

$$(V, \mathcal{O}_V) \xrightarrow{\cong} (X(\mathbf{R}), (\mathcal{O}_X)_{X(\mathbf{R})}^G) .$$

Une complexification $((X, \sigma), j)$ d'une variété algébrique réelle V est *quasi-projective* (resp. *non singulière*) si X est une variété complexe quasi-projective (resp. non singulière).

Soit $((X, \sigma), j)$ une complexification d'une variété algébrique réelle V et $\psi: (X, \sigma) \dashrightarrow (Y, \tau)$ une application birationnelle \mathbf{R} -birégulière, il est facile de vérifier qu'alors $((Y, \tau), \psi \circ j)$ est une complexification de V . En effet, $X(\mathbf{R})$ étant dense dans X et ψ birationnelle, le lieu réel $Y(\mathbf{R}) = \psi(X(\mathbf{R}))$ est dense dans Y . La réciproque fait l'objet de la proposition suivante.

Proposition 2.3.3. — Soient V une variété algébrique réelle et $((X, \sigma), j)$ une complexification de V . Alors pour toute complexification $((X', \sigma'), j')$ de

V , il existe une unique application birationnelle \mathbf{R} -birégulière $\psi: (X, \sigma) \dashrightarrow (X', \sigma')$, $X(\mathbf{R}) \subset \text{dom}(\psi)$, tel que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} X & \dashrightarrow^{\psi} & X' \\ \uparrow j & \nearrow j' & \\ V & & \end{array}$$

Démonstration. — On commence par démontrer la proposition dans le cas où V , X et X' sont affines. L'unicité dans le cas affine permet ensuite de recoller les complexifications et les applications birationnelles \mathbf{R} -birégulières des ouverts affines de V pour obtenir le résultat dans le cas général. Par hypothèse, le morphisme composé $h = j' \circ j^{-1}: X(\mathbf{R}) \rightarrow X'(\mathbf{R})$ est un isomorphisme de variétés algébriques réelles. D'après la solution de l'exercice 1.2.56(2), il existe un morphisme défini sur un voisinage ouvert de $X(\mathbf{R})$ dans X qui prolonge $j' \circ j^{-1}$. Comme $X(\mathbf{R})$ est dense dans X , l'application rationnelle $\psi: (X, \sigma) \dashrightarrow (X', \sigma')$ induite par ce prolongement est une application birationnelle \mathbf{R} -birégulière qui est uniquement déterminée par $j' \circ j^{-1}$. \square

Proposition 2.3.4. — *Toute variété algébrique réelle affine admet une complexification affine. Toute variété algébrique réelle projective admet une complexification projective.*

Démonstration. — Soient $X \subset \mathbf{A}^n(\mathbf{R})$ un ensemble algébrique réel affine et $I = \mathcal{I}(X) \subset \mathbf{R}[X_1, \dots, X_n]$ son idéal. Alors X est l'ensemble des zéros réels $\mathcal{Z}(I) \subset \mathbf{A}^n(\mathbf{R})$, et la clôture de Zariski $X_{\mathbf{C}}$ de X dans $\mathbf{A}^n(\mathbf{C})$ est l'ensemble des zéros complexes $\mathcal{Z}_{\mathbf{C}}(I) \subset \mathbf{A}^n(\mathbf{C})$ d'après la remarque 1.2.13. Par construction la \mathbf{R} -variété $(X_{\mathbf{C}}, \sigma_{\mathbf{A}}|_{X_{\mathbf{C}}})$ admet suffisamment de points réels; soit $j: X \hookrightarrow X_{\mathbf{C}}$ l'inclusion, le couple $((X_{\mathbf{C}}, \sigma_{\mathbf{A}}|_{X_{\mathbf{C}}}), j)$ est donc une complexification affine de X . De même, si $X \subset \mathbf{P}^n(\mathbf{R})$ est un ensemble algébrique réel projectif et $I = \mathcal{I}(X) \subset \mathbf{R}[X_0, \dots, X_n]$ son idéal homogène, on considère l'ensemble des zéros complexes $\mathcal{Z}_{\mathbf{C}}(I) \subset \mathbf{P}^n(\mathbf{C})$. \square

Remarque 2.3.5. — On a vu qu'une variété algébrique réelle projective est toujours affine, et admet donc aussi une complexification affine.

Une variété algébrique complexe projective n'est pas affine en général, et donc une \mathbf{R} -variété projective n'est pas affine non plus, et par conséquent une complexification projective n'est pas affine.

Certaines variétés algébriques réelles affines admettent aussi une complexification projective, c'est l'objet du théorème 2.3.7 ci-après.

Remarque 2.3.6. — Si X est une variété algébrique réelle quasi-projective $X = V \setminus W \subset \mathbf{P}^n(\mathbf{R})$. Notons $I_V \subset \mathbf{R}[X_0, \dots, X_n]$ l'idéal homogène de V et $I_W \subset \mathbf{R}[X_0, \dots, X_n]$ l'idéal homogène de W . D'après ce qui précède, $V_{\mathbf{C}} = \mathcal{Z}_{\mathbf{C}}(I_V)$ est une complexification projective de V et $W_{\mathbf{C}} = \mathcal{Z}_{\mathbf{C}}(I_W)$ est une complexification projective de W . La variété $X_{\mathbf{C}} = V_{\mathbf{C}} \setminus W_{\mathbf{C}}$ est donc une complexification quasi-projective de X .

Rappelons, définition 1.4.11, qu'une variété algébrique réelle est complète si elle est compacte pour la topologie euclidienne.

Théorème 2.3.7. — *Toute variété algébrique réelle affine complète non singulière admet une complexification projective non singulière.*

Avant de prouver le théorème ci-dessus, on énonce quelques lemmes bien utiles concernant les morphismes birationnels entre \mathbf{R} -variétés. Soient (X, σ) une \mathbf{R} -variété et $x \in X(\mathbf{R})$ un point réel. On note C_x la composante connexe de $X(\mathbf{R})$ contenant x . Ici et dans la suite de cette section, la connexité est entendue pour la topologie euclidienne.

Lemme 2.3.8. — *Soient (X, σ) une \mathbf{R} -variété et $x \in X(\mathbf{R}) \cap \text{Reg } X$ un point régulier réel. Alors la composante connexe euclidienne $C_x \subset X(\mathbf{R})$ n'est pas contenue dans un fermé de Zariski strict de X .*

Démonstration. — D'après la proposition 1.5.29, x possède un voisinage ouvert connexe euclidien $U \subset X(\mathbf{R})$ homéomorphe à un ouvert non vide de \mathbf{R}^n où n est égal à la dimension de Zariski de X en x . Comme $U \subset C_x$ et qu'un fermé de Zariski strict de X est de codimension non nulle, la conclusion est acquise. \square

Lemme 2.3.9. — *Soient $\varphi: (Y, \tau) \rightarrow (X, \sigma)$ un morphisme birationnel de \mathbf{R} -variétés et $Z \subset Y$ le plus petit fermé de Zariski tel que $\varphi|_{Y \setminus Z}$ soit un isomorphisme sur son image. Soit $y \in Y(\mathbf{R}) \cap \text{Reg } Y$, alors la composante connexe euclidienne $C_{\varphi(y)}$ n'est pas contenue dans $\varphi(Z)$.*

Démonstration. — Comme $\text{codim } Z > 0$, $C_y \cap (Y \setminus Z) \neq \emptyset$ d'après le lemme 2.3.8. De là, $\varphi(C_y) \cap (X \setminus \varphi(Z)) \neq \emptyset$ et, l'image d'un connexe par une application continue étant connexe, on a $\varphi(C_y) \subset C_{\varphi(y)}$ et finalement $C_{\varphi(y)} \cap (X \setminus \varphi(Z)) \neq \emptyset$. \square

Proposition 2.3.10. — *Soient (X, σ) une \mathbf{R} -variété et $\varphi: (Y, \tau) \rightarrow (X, \sigma)$ une résolution des singularités de X . Supposons que la composante connexe*

d'un point singulier réel $x \in X(\mathbf{R})$ soit contenue dans le lieu singulier, $C_x \subset \text{Sing } X$, alors on a $\varphi^{-1}(x) \cap Y(\mathbf{R}) = \emptyset$.

Démonstration. — D'après le théorème 1.5.51, $\text{Sing } X$ est un fermé de Zariski strict de X . Il suffit alors d'appliquer le lemme 2.3.9 avec $Z = \pi^{-1}(\text{Sing } X)$ au vu de la définition 1.5.53. \square

Preuve du théorème 2.3.7. — Soient V une variété algébrique réelle affine non singulière, compacte pour la topologie euclidienne. D'après la proposition 2.3.4, V admet une complexification affine $((X, \sigma), j)$. D'après le théorème 2.2.9, $X(\mathbf{R}) \simeq V$ est disjoint de $\text{Sing } X$. On considère une complétion projective (X', σ') de (X, σ) . En particulier X est une sous-variété de X' et $\sigma = \sigma'|_X$. D'après le théorème de résolution des singularités d'Hironaka 1.5.54, il existe une \mathbf{R} -variété (Y, τ) projective non singulière, et un morphisme birationnel $\pi: (Y, \tau) \rightarrow (X', \sigma')$ de \mathbf{R} -variétés qui se restreint en un isomorphisme $\pi^{-1}(\text{Reg } X') \rightarrow \text{Reg } X'$. Comme $X(\mathbf{R}) \subset \text{Reg } X$, la restriction du morphisme composé $(Y, \tau) \rightarrow (X, \sigma)$ au-dessus de $X(\mathbf{R})$ est un isomorphisme.

Comme V est compacte, $X(\mathbf{R})$ aussi, c'est donc un fermé dans $X'(\mathbf{R})$ pour la topologie euclidienne. De là, pour tout $x \in X'(\mathbf{R}) \setminus X(\mathbf{R})$, on a une inclusion $C_x \subset X'(\mathbf{R}) \setminus X(\mathbf{R})$ et on en conclut d'après la proposition 2.3.10 que $\pi^{-1}(X'(\mathbf{R}) \setminus X(\mathbf{R})) \cap Y(\mathbf{R}) = \emptyset$. En conclusion $((Y, \tau), (\pi|_{Y(\mathbf{R})})^{-1} \circ j)$ est une complexification projective non singulière de V . \square

Remarque 2.3.11. — Dans la preuve ci-dessus, $X'(\mathbf{R}) \setminus X(\mathbf{R})$ peut être non vide. Dans l'exemple 2.6.38 détaillé plus loin, on considère

$$W := \mathcal{Z}(16(x_1^2 + x_2^2) - (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 3)^2) \subset \mathbf{A}^3(\mathbf{R}).$$

et la complexification projective donnée par

$$\widehat{W}_{\mathbf{C}} := \mathcal{Z}\left(16(x_1^2 + x_2^2) - (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 3x_0^2)^2\right) \subset \mathbf{P}^3(\mathbf{C}).$$

La \mathbf{R} -variété $(\widehat{W}_{\mathbf{C}}, \sigma_{\mathbf{P}}|_{\widehat{W}_{\mathbf{C}}})$ contient des points réels n'appartenant pas au tore de révolution $W_{\mathbf{C}}(\mathbf{R}) = W$. En effet, si $x_1^2 + x_2^2 \leq 16$, alors le point $\left(0 : x_1 : x_2 : \sqrt{4\sqrt{(x_1^2 + x_2^2)} - (x_1^2 + x_2^2)}\right)$ appartient à $\widehat{W}_{\mathbf{C}}(\mathbf{R}) \setminus W_{\mathbf{C}}(\mathbf{R})$. Le \mathbf{R} -morphisme $\psi: \mathbf{P}^1(\mathbf{C}) \times \mathbf{P}^1(\mathbf{C}) \rightarrow \widehat{W}_{\mathbf{C}}$ est une résolution des singularités de $\widehat{W}_{\mathbf{C}}$.

Nous profitons des résultats précédents pour démontrer le théorème 1.5.55 dans le cadre des \mathbf{R} -variétés.

Théorème 2.3.12. — Soit $\varphi: (Y, \tau) \rightarrow (X, \sigma)$ un morphisme birationnel de \mathbf{R} -variétés non singulières. Si les lieux réels $X(\mathbf{R})$ et $Y(\mathbf{R})$ sont compacts pour la topologie euclidienne, alors ils possèdent le même nombre de composantes connexes :

$$\#\pi_0(Y(\mathbf{R})) = \#\pi_0(X(\mathbf{R})) .$$

Démonstration. — Notons $Z \subset Y$ le plus petit fermé de Zariski tel que $\varphi|_{Y \setminus Z}$ soit un isomorphisme sur son image. L'application φ étant continue pour la topologie euclidienne, on a $\#\pi_0(Y(\mathbf{R})) \geq \#\pi_0(X(\mathbf{R}))$. Pour montrer l'inégalité opposée, supposons par l'absurde qu'il existe deux composantes connexes distinctes Y_1 et Y_2 de $Y(\mathbf{R})$ et que $\varphi(Y_1) \cap \varphi(Y_2)$ soit non vide. Soit U un voisinage ouvert euclidien de $x \in \varphi(Y_1) \cap \varphi(Y_2)$ dans $X(\mathbf{R})$. Alors $U \cap \varphi(Y_1) \neq \emptyset$ et $U \cap \varphi(Y_2) \neq \emptyset$. En effet, pour $i = 1, 2$, $\varphi^{-1}(U) \cap Y_i$ est un ouvert non vide de $Y(\mathbf{R})$ et comme Y est non singulière, $\varphi^{-1}(U) \cap Y_i \setminus Z$ est non vide d'après le lemme 2.3.8. Comme X est non singulière, on peut supposer que U est homéomorphe à un ouvert non vide \mathbf{R}^n (où n est la dimension de X) qui, d'après ce qui précède, est découpé en deux parties disjointes par le sous-ensemble algébrique $\varphi(Z)$. La codimension de $\varphi(Z)$ est au moins deux, car φ est un morphisme birationnel, voir e.g. [Sha94, II.4.4, Theorem 2], ce qui contredit le fait que ce même $\varphi(Z)$ sépare l'ouvert U . On obtient donc une contradiction. \square

Assez souvent, le comportement d'une \mathbf{R} -variété au voisinage de ses points non réels n'est pas pertinent pour l'étude du lieu réel $X(\mathbf{R})$. Mais dans certains cas, comme nous l'avons vu notamment avec la remarque 2.3.11, il est crucial de considérer aussi les points non réels.

Définition 2.3.13. — Un ensemble U quasi-algébrique sur K , affine ou projectif est *géométriquement irréductible* si l'ensemble $U_{\overline{K}}$ (voir la définition 2.3.1) défini sur la clôture algébrique \overline{K} de K est irréductible.

Une variété V algébrique sur K , quasi-projective est *géométriquement irréductible* si l'image U de V par un plongement dans un espace projectif sur K est géométriquement irréductible (ceci est alors vrai pour tout plongement d'après l'exercice 2.3.14).

Une \mathbf{R} -variété (X, σ) est *irréductible* si la variété complexe X est irréductible en tant que variété complexe.

Exercice 2.3.14. — Vérifier que si $\varphi: V \rightarrow \mathbf{P}^N(K)$ et $\varphi': V \rightarrow \mathbf{P}^{N'}(K)$ sont deux plongements projectifs de V , alors $\varphi(V)_{\overline{K}}$ est irréductible si et seulement si $\varphi'(V)_{\overline{K}}$ est irréductible.

Proposition 2.3.15. — Soit K un corps.

1. Un ensemble algébrique sur K qui est géométriquement irréductible est irréductible.
2. Une variété algébrique sur K qui est géométriquement irréductible est irréductible.
3. Une variété algébrique réelle V est géométriquement irréductible si et seulement si elle admet une complexification irréductible.
4. Soit (X, σ) une \mathbf{R} -variété algébrique quasi-projective possédant suffisamment de points réels. Alors (X, σ) est irréductible si et seulement si la variété algébrique réelle $(X(\mathbf{R}), (\mathcal{O}_X)_{X(\mathbf{R})}^G)$ est géométriquement irréductible.

Démonstration. — Preuve laissée en exercice. □

Remarque 2.3.16. — Rappelons que d'après le corollaire 2.2.10, le lieu réel d'une \mathbf{R} -variété algébrique irréductible non singulière est Zariski-dense dès que non-vide.

- Exercice 2.3.17 (Reprise de l'exemple 2.1.1).** —
1. L'ensemble algébrique réel $F := \mathcal{Z}(x^2 + y^2) \subset \mathbf{A}^2(\mathbf{R})$ est géométriquement irréductible.
 2. En revanche la \mathbf{R} -variété (V, σ) , où $V := \mathcal{Z}_{\mathbf{C}}(x^2 + y^2) \subset \mathbf{A}^2(\mathbf{C})$ et $\sigma = \sigma_{\mathbf{A}}|_V$, n'est pas irréductible.
 3. Pourtant $V^\sigma = F$, quelle est la raison de cette apparente incohérence ?

Variétés rationnelles. —

Définition 2.3.18. — (\mathbf{R} -variétés rationnelles)

1. Une \mathbf{R} -variété (X, σ) de dimension n est *rationnelle* (ou *rationnelle sur \mathbf{R}*) si elle est birationnellement équivalente à la \mathbf{R} -variété $(\mathbf{P}^n(\mathbf{C}), \sigma_{\mathbf{P}})$, c'est-à-dire s'il existe une application birationnelle de \mathbf{R} -variétés $(X, \sigma) \dashrightarrow (\mathbf{P}^n(\mathbf{C}), \sigma_{\mathbf{P}})$.
2. Une \mathbf{R} -variété (X, σ) de dimension n est *géométriquement rationnelle* (ou *rationnelle sur \mathbf{C}*) si et seulement si la variété complexe X est rationnelle, c'est-à-dire s'il existe une application birationnelle de variétés complexes $X \dashrightarrow \mathbf{P}^n(\mathbf{C})$.

Remarque 2.3.19. — Comparer à la définition 1.3.37 du premier chapitre. Attention à l’adjectif « géométriquement » : si une variété est géométriquement irréductible, alors elle est irréductible. Si une variété est rationnelle, alors elle est géométriquement rationnelle.

Proposition 2.3.20. — *Toute \mathbf{R} -variété rationnelle sur \mathbf{R} est rationnelle sur \mathbf{C} .*

Remarque 2.3.21. — La réciproque de la proposition ci-dessus est fautive, comme le prouve l’exemple de $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ munie de l’involution anti-holomorphe $z \mapsto -\frac{1}{\bar{z}}$, voir la remarque 2.1.41. On trouvera de nombreux exemples en dimension 2 au chapitre 4.

Proposition 2.3.22. — *Soit (X, σ) une \mathbf{R} -variété quasi-projective non singulière. Si (X, σ) est rationnelle sur \mathbf{R} et de dimension non nulle, alors $X(\mathbf{R})$ est connexe et non vide.*

Démonstration. — Cette proposition est un corollaire du théorème 1.5.55 sachant que $\mathbf{P}^n(\mathbf{R})$ est connexe et non vide pour tout $n > 0$. \square

2.4. \mathbf{R} -variétés vs variétés algébriques réelles vs schémas sur \mathbf{R}

Cette section récapitule les différents avatars d’une \mathbf{R} -variété et leurs relations logiques. Dans cet ouvrage, nous avons distingué deux types de variétés : les variétés algébriques réelles et les \mathbf{R} -variétés. En toute rigueur, il faudrait considérer cinq incarnations d’une variété algébrique réelle :

1. Lieu réel d’équations réelles.
- 2a. Variété complexe définie par des équations à coefficients réels.
- 2b. Variété complexe munie d’une involution anti-régulière.

Ces deux sous-cas (variétés complexes particulières) étant équivalents sous l’hypothèse expresse que la variété soit *quasi-projective*.

- 3a. Schéma défini sur \mathbf{R} .
- 3b. Schéma défini sur \mathbf{C} muni d’une structure réelle.

Ces deux sous-cas étant de nouveau équivalents sous l’hypothèse que le schéma soit *quasi-projectif*.

Finalement, les quatre dernières incarnations sont équivalentes pour les variétés quasi-projectives et seule la première se distingue. Une variété du type (1) peut être vue comme un *germe* de variété du type (2a) au voisinage du lieu réel.

Nous disposons par ailleurs de deux topologies et de deux structures associées :

- Topologie de Zariski et variétés algébriques ;
- Topologie euclidienne et variétés analytiques.

Il existe un dictionnaire pour passer d'une structure algébrique à sa structure analytique sous-jacente. Par exemple, une application (anti-)régulière devient (anti-)holomorphe. En revanche, ce « passage » n'est une équivalence que pour les variétés *projectives*, voir l'appendice **D.5**.

Reprenons tout cela plus en détails.

1. (Section **1.3**) Une *variété algébrique réelle* (resp. *complexe*) est un espace topologique X muni d'un sous-faisceau \mathcal{O}_X du faisceau des fonctions et recouvert par un nombre fini d'ouverts *affines* U , c'est-à-dire que $(U, \mathcal{O}_X|_U)$ est isomorphe à l'ensemble des zéros $\mathcal{Z}(I) \subset \mathbf{A}^n(\mathbf{R})$ d'un idéal $I \subset \mathbf{R}[X_1, \dots, X_n]$ muni du faisceau des fonctions qui sont localement des fractions rationnelles sans pôle *réel* (resp. l'ensemble des zéros $\mathcal{Z}(I) \subset \mathbf{A}^n(\mathbf{C})$ d'un idéal $I \subset \mathbf{C}[X_1, \dots, X_n]$ muni du faisceau des fonctions qui sont localement des fractions rationnelles sans pôle). Des variétés X et Y sont isomorphes s'il existe une application *birégulière* $X \rightarrow Y$.
2. (Section **2.1**) Une **R**-variété (X, σ) est une variété complexe X munie d'une involution anti-régulière (une *structure réelle*) σ . Des **R**-variétés (X, σ) et (Y, τ) sont isomorphes s'il existe une application *birégulière* de variétés complexes qui commute avec les structures réelles. Les variétés (X, σ) et (Y, τ) sont *birationnellement R-birégulièrement isomorphes* s'il existe une application birationnelle $\varphi: X \dashrightarrow Y$ qui commute avec les structures réelles et telle que $X(\mathbf{R}) \subset \text{dom}(\varphi)$ et $Y(\mathbf{R}) \subset \text{dom}(\varphi^{-1})$. (Section **2.3**) Une *complexification* d'une variété algébrique réelle V est une **R**-variété (X, σ) possédant suffisamment de points réels dont le lieu réel $X(\mathbf{R})$ est isomorphe à V en tant que variété algébrique réelle.
 - (a) (Section **2.1**) Toute **R**-variété quasi-projective est définissable par des équations à coefficients réels (ainsi que les faisceaux importants qui lui sont associés, voir la section **2.5**).
 - (b) (Section **2.2**) Une **R**-variété quasi-projective possédant suffisamment de points réels induit par restriction une structure de variété algébrique réelle sur son lieu réel. Un morphisme de **R**-variétés quasi-projectives possédant suffisamment de points réels induit une application régulière de variétés algébriques réelles.

- (c) (Section 2.3) Réciproquement, toute variété algébrique réelle quasi-projective admet une complexification qui est une \mathbf{R} -variété possédant suffisamment de points réels. Un morphisme de variétés algébriques réelles quasi-projectives se prolonge en une application rationnelle \mathbf{R} -régulière de \mathbf{R} -variétés.
- (d) (Section 2.3) Deux \mathbf{R} -variétés qui sont complexifications de variétés algébriques réelles isomorphes sont birationnellement \mathbf{R} -isomorphes mais pas isomorphes en général.
3. Cet alinéa nécessite une connaissance de base des schémas, voir [Duc14] ou [Liu02]. Voir aussi [Ben16b, §3.1] pour une étude spécifique des avatars d'un schéma sur \mathbf{R} . Nous laissons les vérifications des énoncés en exercice.

Un schéma sur un corps K (ou K -schéma) est un schéma X muni d'un morphisme de schémas (appelé *morphisme structural*) $X \rightarrow \text{Spec } K$. Dans la suite, X est supposé de type fini sur K (c'est-à-dire recouvert par un nombre fini de spectres d'algèbres de type fini sur K). Deux \mathbf{R} -schémas X et Y sont *birationnellement \mathbf{R} -birégulièrement isomorphes* s'il existe une application birationnelle $\varphi: X \dashrightarrow Y$ de \mathbf{R} -schémas telle que φ soit régulière en tout point \mathbf{R} -rationnel de X et φ^{-1} soit régulière en tout point \mathbf{R} -rationnel de Y . Soit X un schéma sur \mathbf{C} muni d'une involution σ qui relève la conjugaison complexe $\sigma_{\mathbf{A}}^* = \text{Spec}(z \mapsto \bar{z}): \text{Spec } \mathbf{C} \rightarrow \text{Spec } \mathbf{C}$, ce qu'on appelle une *structure réelle sur X* . Si X est quasi-projectif, alors d'après [BS64, Proposition 2.6], il existe un schéma $Z = X/\langle\sigma\rangle$ sur \mathbf{R} et un isomorphisme de \mathbf{C} -schémas $\varphi: X \rightarrow Z \times_{\text{Spec } \mathbf{R}} \text{Spec } \mathbf{C}$ tel que $\sigma = \varphi^{-1} \circ (\text{id} \times \sigma_{\mathbf{A}}^*) \circ \varphi$. De plus, le couple (Z, φ) est uniquement déterminé par le couple (X, σ) à \mathbf{R} -isomorphisme près. Par exemple si $X = \text{Spec } A$ est affine, on a $Z = \text{Spec } A^\sigma$.

De façon implicite, les variétés algébriques considérées dans cet ouvrage sont dans la plupart des cas des avatars de schémas définis sur \mathbf{R} de type fini.

- (a) L'ensemble $X(\mathbf{R})$ des points \mathbf{R} -rationnels d'un schéma X sur \mathbf{R} muni de la restriction du faisceau structural est une variété algébrique réelle. Un morphisme de schémas sur \mathbf{R} induit un morphisme de variétés algébriques réelles.
- (b) Réciproquement, toute variété algébrique réelle quasi-projective est obtenue comme ensemble des points \mathbf{R} -rationnels d'un schéma X

sur \mathbf{R} . Un morphisme de variétés algébriques réelles quasi-projectives se prolonge en une application rationnelle \mathbf{R} -régulière de schémas sur \mathbf{R} .

- (c) Deux schémas sur \mathbf{R} dont les lieux réels sont des variétés algébriques réelles isomorphes sont birationnellement \mathbf{R} -birégulièrement isomorphes.
- (d) Soit Z un schéma de type fini sur \mathbf{R} . On peut lui associer la \mathbf{R} -variété suivante : X est l'espace topologique des points \mathbf{C} -rationnels du \mathbf{C} -schéma $Z \times_{\mathrm{Spec} \mathbf{R}} \mathrm{Spec} \mathbf{C}$, le couple (X, σ) est la \mathbf{R} -variété obtenue en munissant X de la structure réelle $\sigma := \mathrm{id} \times \mathrm{Spec}(z \mapsto \bar{z})$. On note $X(\mathbf{R})$ l'ensemble des points fermés fixés par σ . Si $Z(\mathbf{R})$ est l'ensemble des points \mathbf{R} -rationnels du \mathbf{R} -schéma Z , on a $X(\mathbf{R}) = Z(\mathbf{R})$. Un morphisme de schémas sur \mathbf{R} induit un morphisme de \mathbf{R} -variétés.
- (e) Réciproquement, si (X, σ) est une \mathbf{R} -variété, alors il existe un \mathbf{C} -schéma Z tel que $Z(\mathbf{C}) = X$, [Har77, II.2.6], et il existe un morphisme involutif $\sigma_Z : Z \rightarrow Z$ relevant $\sigma_{\mathbf{A}}^* : \mathrm{Spec} \mathbf{C} \rightarrow \mathrm{Spec} \mathbf{C}$ tel que $\sigma_Z|_{Z(\mathbf{C})} = \sigma$. Comme on l'a vu plus haut, si X est quasi-projective, le couple (Z, σ_Z) correspond à un \mathbf{R} -schéma. Un morphisme de \mathbf{R} -variétés induit un morphisme de schémas sur \mathbf{R} .

Formes réelles d'un \mathbf{C} -schéma. — D'après ce qui précède, la définition 2.1.13 donne lieu à la définition suivante

Définition 2.4.1. — Une *forme réelle* d'un schéma X sur \mathbf{C} est un schéma X_0 sur \mathbf{R} dont le complexifié $X_0 \times_{\mathrm{Spec} \mathbf{R}} \mathrm{Spec} \mathbf{C}$ est isomorphe à X .

Notations $X, X(\mathbf{R}), X(\mathbf{C}), X_{\mathbf{C}}, X_{\mathbf{R}}$. — Nous discutons ici des différentes notations rencontrées dans la littérature.

De façon analogue au cas des schémas où l'on omet souvent de préciser le morphisme structural $Z \rightarrow \mathrm{Spec} \mathbf{R}$, on utilise souvent la notation réduite X pour désigner la \mathbf{R} -variété (X, σ) . Du coup, on utilise parfois $X_{\mathbf{C}}$ pour insister sur le fait que l'on considère la variété complexe X en « oubliant » σ . On trouve aussi, pour les \mathbf{R} -variétés, en particulier chez les auteurs de l'école russe, la notation $X_{\mathbf{C}}$ ou $\mathbf{C}X$ pour le lieu complexe et $X_{\mathbf{R}}$ ou $\mathbf{R}X$ pour le lieu réel.

Remarque 2.4.2. — Histoire de rendre les notations encore plus abscones, il existe dans la littérature un autre objet noté $X_{\mathbf{R}}$ qui provient de la notion d'extension des scalaires. Dans le cas plongé, il s'agit de séparer les parties réelles et imaginaires des équations d'une variété complexe. Du point de vue

schématique, il suffit de considérer le morphisme de schémas $\text{Spec } \mathbf{C} \rightarrow \text{Spec } \mathbf{R}$ associé à l'inclusion $\mathbf{R} \hookrightarrow \mathbf{C}$ et de composer $X \rightarrow \text{Spec } \mathbf{C} \rightarrow \text{Spec } \mathbf{R}$ pour voir qu'un schéma défini sur \mathbf{C} l'est *a fortiori* sur \mathbf{R} . Par exemple, si $X \subset \mathbf{A}^n(\mathbf{C})$ est défini par r équations

$$\{P_i(z_1, \dots, z_n) = 0\}_{i=1, \dots, r}$$

alors $X_{\mathbf{R}} \subset \mathbf{A}^{2n}(\mathbf{R})$ est défini par les $2r$ équations

$$\begin{aligned} \{\Re(P_i(x_1 + iy_1, \dots, x_n + iy_n) = 0), \\ \Im(P_i(x_1 + iy_1, \dots, x_n + iy_n) = 0)\}_{i=1, \dots, r} . \end{aligned}$$

Soit X une variété algébrique (non singulière pour simplifier) définie sur \mathbf{C} et considérons la variété produit $Z := X \times \bar{X}$ munie de l'involution anti-régulière $\sigma_Z: (x, y) \mapsto (\bar{y}, \bar{x})$. L'ensemble des points réels de la \mathbf{R} -variété (Z, σ_Z) est alors une variété algébrique réelle au sens de la définition 1.3.9 qui est homéomorphe pour la topologie euclidienne à la variété topologique réelle sous-jacente à la variété complexe X . Plusieurs auteurs notent $X_{\mathbf{R}} = Z(\mathbf{R})$ cette variété algébrique réelle dite *sous-jacente*.

2.5. Faisceaux cohérents et fibrés algébriques

Nous allons maintenant généraliser les constructions des sections précédentes aux faisceaux et fibrés nécessaires pour développer la théorie.

\mathbf{R} -faisceaux cohérents. — Soient (X, σ) une \mathbf{R} -variété, \mathcal{L} un faisceau quasi-cohérent de \mathcal{O}_X -modules (voir le théorème C.7.3) et U un ouvert affine de X . Alors $M := \mathcal{L}(\sigma(U))$ est un $\mathcal{O}_X(\sigma(U))$ -module. On définit un $\mathcal{O}_X(U)$ -module ${}^\sigma M$ en munissant le groupe M de l'action tordue de $\mathcal{O}_X(U)$ suivante :

$$(2.2) \quad (f, m) \mapsto {}^\sigma f \cdot m$$

où

$$(f, m) \mapsto f \cdot m$$

désigne l'action de $\mathcal{O}_X(\sigma(U))$ sur M .

Définition 2.5.1. — Soient (X, σ) une \mathbf{R} -variété et \mathcal{L} un faisceau quasi-cohérent de \mathcal{O}_X -modules. Le *faisceau conjugué* ${}^\sigma \mathcal{L}$ est le faisceau de \mathcal{O}_X -modules défini sur U en décrétant que ${}^\sigma \mathcal{L}(U)$ est le $\mathcal{O}_X(U)$ -module tordu ${}^\sigma M$. On dit que \mathcal{L} est un *\mathbf{R} -faisceau* si et seulement si $\mathcal{L} = {}^\sigma \mathcal{L}$ (on exige ici une égalité et pas seulement un isomorphisme).

Remarque 2.5.2. — Ces définitions généralisent 2.2.1. En effet, pour tout ouvert U de X , on a une égalité de $\mathcal{O}_X(U)$ -modules ${}^\sigma\mathcal{L}(U) = \mathcal{L}(\sigma(U))$ à condition de munir le second membre de l'action tordue (2.2). En particulier si \mathcal{L} est un faisceau de fonctions à valeur dans \mathbf{C}^n , on a ${}^\sigma\mathcal{L}(U) = \{\sigma f \mid f \in \mathcal{L}(\sigma(U))\}$. Et \mathcal{L} est un \mathbf{R} -faisceau si et seulement si ${}^\sigma\mathcal{L}(U) = \mathcal{L}(U)$ pour tout ouvert U de X .

La définition de \mathbf{R} -faisceau est motivée par le résultat suivant qui explicite la relation entre les \mathbf{R} -faisceaux d'une \mathbf{R} -variété (X, σ) avec les faisceaux de fonctions invariantes. Un \mathbf{R} -faisceau est seulement *a priori* un faisceau globalement fixé par σ .

Lemme 2.5.3. — Soit (X, σ) une \mathbf{R} -variété quasi-projective et \mathcal{L} un faisceau quasi-cohérent de \mathcal{O}_X -modules. Si \mathcal{L} est un \mathbf{R} -faisceau, alors il existe un faisceau quasi-cohérent de \mathcal{O}_X -modules \mathcal{L}_0 tel que pour tout ouvert affine $U \subset X$,

$$\mathcal{L}(U \cap \sigma(U)) \simeq \mathcal{L}_0(U \cap \sigma(U)) \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C}$$

et tel que $\forall f \in \mathcal{L}_0(U \cap \sigma(U)), \sigma f = f$. On dira dans ce cas que f est à coefficients réels.

Démonstration. — Rappelons que par définition, σ est un homéomorphisme pour la topologie de Zariski de X et qu'en particulier, si U est un ouvert de X , l'intersection $U \cap \sigma(U)$ est un ouvert de X . De plus d'après l'exercice 1.3.15.(4), l'ouvert $U \cap \sigma(U)$ est affine. On peut donc réduire au cas d'une \mathbf{R} -variété affine, c'est-à-dire d'après le théorème 2.1.33, au cas où $X \subset \mathbf{A}^n(\mathbf{C})$ et $\mathcal{I}(X) \subset \mathbf{R}[X_1, \dots, X_n]$. Sous ces hypothèses, on a alors $\sigma = \sigma_{\mathbf{A}}|_X$ et

$$\mathcal{O}_X(X) = \mathcal{A}(X) = (\mathbf{R}[X_1, \dots, X_n]/\mathcal{I}(X)) \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C}.$$

Notons M le $\mathcal{A}(X)$ -module des sections globales du \mathcal{O}_X -module $\mathcal{L}(X)$. Par hypothèse, σ induit une action de Galois sur M pour laquelle, le sous-groupe des points fixes M^G étant muni de sa structure naturelle de $\mathcal{A}(X(\mathbf{R}))$ -module, on a

$$M = M^G \otimes_{\mathcal{A}(X(\mathbf{R}))} (\mathcal{A}(X(\mathbf{R})) \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C}).$$

Il suffit alors de définir \mathcal{L}_0 comme le faisceau associé, voir la définition C.7.2, au $\mathcal{A}(X(\mathbf{R}))$ -module M^G pour conclure. \square

Parmi les \mathbf{R} -faisceaux cohérents dont nous ferons grand usage, les faisceaux inversibles, définition C.5.8 (en correspondance bijective avec les fibrés en droites, corollaire 2.5.13), jouent un rôle essentiel, voir la section 2.6.

Soient (X, \mathcal{O}_X) une variété algébrique réelle ou complexe *affine* et \mathcal{F} un faisceau quasi-cohérent. Alors l'ensemble de ses sections globales $\Gamma(X, \mathcal{F})$ est un $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ -module. Si \mathcal{F} est localement libre, alors ce module est *projectif*, c'est-à-dire facteur direct d'un $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ -module libre, voir la définition A.4.6.

Pour énoncer le lemme ci-dessous, on généralise la définition C.7.2 : soit M un $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ -module, on note $\mathcal{O}_X \otimes_{\Gamma(X, \mathcal{O}_X)} M$ le faisceau de \mathcal{O}_X -modules associé au préfaisceau $U \mapsto \mathcal{O}_X(U) \otimes_{\Gamma(X, \mathcal{O}_X)} M$. Si (X, \mathcal{O}_X) est une variété *complexe*, alors $\mathcal{O}_X(U) = \Gamma(X, \mathcal{O}_X)_f$ pour tout ouvert principal $U = \mathcal{D}(f)$ et $\mathcal{O}_X \otimes_{\Gamma(X, \mathcal{O}_X)} M$ est identique au faisceau \widetilde{M} de la définition C.7.2. En particulier $(\mathcal{O}_X \otimes_{\Gamma(X, \mathcal{O}_X)} M)(U) = \widetilde{M}(U) = M_f$ pour tout ouvert principal $U = \mathcal{D}(f)$. Si (X, \mathcal{O}_X) est une variété *réelle*, alors pour tout ouvert U de X , $\mathcal{O}_X(U)$ s'identifie à la limite inductive $\varinjlim_{\mathcal{D}(f) \supset U} \Gamma(X, \mathcal{O}_X)_f$ des localisations $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)_f$ où f parcourt l'ensemble des fonctions régulières qui ne s'annulent pas sur U et $(\mathcal{O}_X \otimes_{\Gamma(X, \mathcal{O}_X)} M)(U) \simeq \varinjlim_{\mathcal{D}(f) \supset U} M_f$.

Le cas particulier des faisceaux localement libres de type fini nous emmènera aux fibrés vectoriels algébriques.

Lemme 2.5.4. — *Soit (X, \mathcal{O}_X) une variété algébrique réelle ou complexe affine. Soit \mathcal{F} un faisceau en \mathcal{O}_X -modules localement libre de type fini. Alors le $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ -module $\Gamma(X, \mathcal{F})$ des sections globales de \mathcal{F} est projectif de type fini. Réciproquement, soit M un $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ -module projectif de type fini, alors le \mathcal{O}_X -module $\mathcal{O}_X \otimes_{\Gamma(X, \mathcal{O}_X)} M$ associé est localement libre de type fini.*

Démonstration. — Exercice. □

Si (X, \mathcal{O}_X) est une variété *complexe*, tout \mathcal{O}_X -module localement libre de type fini \mathcal{F} est égal au faisceau $\widetilde{\Gamma(X, \mathcal{F})}$ associé au $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ -module $\Gamma(X, \mathcal{F})$ de ses sections globales.

Proposition 2.5.5. — *Si (X, \mathcal{O}_X) est une variété algébrique complexe affine, l'application $M \mapsto \widetilde{M}$ réalise une correspondance bijective entre les $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ -modules projectifs de type fini et les \mathcal{O}_X -modules localement libres de type fini.*

Démonstration. — Voir [Har77, Corollary II.5.5]. □

En revanche, comme le montre l'exemple ci-dessous, si (X, \mathcal{O}_X) est une variété *réelle* affine il existe des faisceaux localement libres de type fini qui ne sont pas associés à des $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ -modules comme le montre l'exemple ci-dessous.

Exemple 2.5.6. — Basé sur [BCR87, Exemple 12.1.5], voir aussi [FHMM16, Exemple 5.35].

Soit $P \in \mathbf{R}[x, y]$ le polynôme défini par

$$P(x, y) = x^2(x - 1)^2 + y^2$$

qui possède exactement deux zéros réels $a_0 = (0, 0)$ et $a_1 = (1, 0)$. Soit $U_i = \mathbf{R}^2 \setminus \{a_i\}$ pour $i = 0, 1$. Les ouverts de Zariski U_0 et U_1 forment un recouvrement ouvert de $\mathbf{A}^2(\mathbf{R})$. On définit un faisceau quasi-cohérent \mathcal{F} localement libre de rang 1 par rapport à ce recouvrement en recollant les faisceaux $\mathcal{O}_{\mathbf{A}^2(\mathbf{R})}|_{U_0}$ et $\mathcal{O}_{\mathbf{A}^2(\mathbf{R})}|_{U_1}$ au-dessus de $U_0 \cap U_1$ à l'aide de la fonction de transition $\psi_{01} = P$ sur $U_0 \cap U_1$. Autrement dit, deux sections $s_0 \in \mathcal{O}_{\mathbf{A}^2(\mathbf{R})}|_{U_0}(V_0)$ et $s_1 \in \mathcal{O}_{\mathbf{A}^2(\mathbf{R})}|_{U_1}(V_1)$ au-dessus d'ouverts de Zariski V_0 et V_1 , se recollent si $\psi_{01}s_1 = s_0$ sur $V_0 \cap V_1$.

Le $\mathcal{O}_{\mathbf{A}^2(\mathbf{R})}$ -module \mathcal{F} n'est pas engendré par ses sections globales car toute section globale s de \mathcal{F} s'annule en a_1 . En effet la restriction s_i de s à U_i est une fonction régulière sur U_i , pour $i = 0, 1$. La condition de recollement est $\psi_{01}s_1 = s_0$ sur $U_0 \cap U_1$. Écrivons $s_i = g_i/h_i$, où $g_i, h_i \in \mathbf{R}[x, y]$, avec $h_i \neq 0$ sur U_i et g_i, h_i premiers entre eux, pour $i = 0, 1$. La condition de recollement implique que $Ph_0g_1 = g_0h_1$ sur \mathbf{R}^2 . Comme P est irréductible, et comme $h_1(a_0) \neq 0$, le polynôme P divise g_0 , c'est-à-dire qu'il existe $\lambda \in \mathbf{R}^*$ tel que $g_0 = \lambda P g_1$ et $h_1 = \lambda^{-1} h_0$. En particulier, $g_0(a_1) = 0$ et donc $s(a_1) = 0$. Il s'ensuit que le faisceau quasi-cohérent \mathcal{F} sur $\mathbf{A}^2(\mathbf{R})$ n'est pas engendré par ses sections globales. *A fortiori*, il n'existe aucun $\Gamma(\mathbf{A}^2(\mathbf{R}), \mathcal{O}_{\mathbf{A}^2(\mathbf{R})})$ -module dont \mathcal{F} soit le faisceau associé.

Remarquons que le module des sections globales $\Gamma(\mathbf{A}^2(\mathbf{R}), \mathcal{F})$ est isomorphe à $\Gamma(\mathbf{A}^2(\mathbf{R}), \mathcal{O}_{\mathbf{A}^2(\mathbf{R})}) = \mathcal{R}(\mathbf{R}^2)$ via l'application $(s_0, s_1) \mapsto s_1 = \frac{g_1}{h_1}$ du fait que $h_1 = \lambda^{-1} h_0$ ne s'annule pas sur \mathbf{R}^2 .

Fibrés vectoriels algébriques. —

Définition 2.5.7. — Soient (X, \mathcal{O}_X) une variété algébrique sur un corps K . Un *fibré vectoriel pré-algébrique de rang r* sur X est un fibré K -vectoriel (E, π) , voir la définition C.3.5, où E est une variété algébrique sur K , $\pi: E \rightarrow X$ est une application régulière et les homéomorphismes $\psi_i: \pi^{-1}(U_i) \xrightarrow{\cong} U_i \times K^r$ sont des isomorphismes biréguliers. Plus généralement, un *fibré vectoriel pré-algébrique* possède un rang constant sur chaque composante connexe de X .

Remarque 2.5.8. — Sur une variété algébrique réelle affine, les fibrés vectoriels définis ci-dessus sont appelés *pré-algébriques* dans [BCR98] mais étaient appelés *algébriques* dans [BCR87].

Soit un fibré vectoriel pré-algébrique (resp. de rang r) sur X , alors le faisceau de ses sections algébriques locales est naturellement muni d'une structure de \mathcal{O}_X -module qui en fait un \mathcal{O}_X -module localement libre de type fini (resp. de rang r).

Proposition 2.5.9. — Soit (X, \mathcal{O}_X) une variété algébrique sur un corps K . On a une correspondance bijective entre les classes d'isomorphisme de faisceaux localement libres de type fini (resp. de rang r) sur X et les classes d'isomorphisme de fibrés vectoriels pré-algébriques (resp. de rang r) sur X .

Démonstration. — Voir [BCR87, Proposition 12.1.3]. \square

Si (X, \mathcal{O}_X) est une variété *complexe*, les fibrés pré-algébriques ont de bonnes propriétés, voir la proposition 2.5.5. Si (X, \mathcal{O}_X) est une variété *réelle*, le fibré pré-algébrique en droites associé au faisceau \mathcal{F} de l'exemple 2.5.6 n'est pas engendré par ses sections globales et montre que la notion de fibré vectoriel pré-algébrique sur une variété réelle n'est pas très utile. Ceci motive la définition suivante.

Définition 2.5.10. — Un fibré vectoriel pré-algébrique (E, π) sur une variété algébrique réelle affine X est dit *algébrique* s'il est isomorphe à un sous-fibré vectoriel pré-algébrique d'un fibré trivial. De même, un faisceau localement libre de type fini est *algébrique* si le fibré vectoriel associé est algébrique.

Remarque 2.5.11. — (Fibrés réels et complexes)

1. Sur une variété algébrique complexe affine, la proposition 2.5.5 implique que tout fibré vectoriel pré-algébrique est algébrique.
2. Sur une variété algébrique réelle affine, les fibrés vectoriels définis ci-dessus sont appelés *algébriques* dans [BCR98, définition 12.1.6] mais étaient appelés *fortement algébriques* dans [BCR87].

Définition 2.5.12. — Un fibré vectoriel algébrique de rang 1 est appelé *fibré en droites*.

Corollaire 2.5.13. — Soit (X, \mathcal{O}_X) une variété algébrique réelle ou complexe. On a une correspondance bijective entre les classes d'isomorphisme de faisceaux inversibles algébriques sur X et les fibrés (algébriques) en droites sur X .

Démonstration. — Corollaire immédiat de la proposition 2.5.9. \square

Théorème 2.5.14. — Soient (X, \mathcal{O}_X) une variété algébrique réelle affine et (E, π) un fibré vectoriel pré-algébrique sur X . Alors E est algébrique si et seulement s'il existe un $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ -module projectif de type fini M tel que le $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ -module des sections algébriques de (E, π) soit isomorphe au $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ -module $\mathcal{O}_X \otimes_{\Gamma(X, \mathcal{O}_X)} M$.

Démonstration. — Voir [BCR98, Theorem 12.1.7]. \square

En s'inspirant de [Hui95], on voit que la définition 2.5.10 des « bons » fibrés vectoriels algébriques sur une variété algébrique réelle V , qui peut sembler peu naturelle, peut être avantageusement remplacée en disant que les « bons » fibrés sont les restrictions des \mathbf{R} -fibrés vectoriels sur une complexification (X, σ) de V .

Soient (X, σ) une \mathbf{R} -variété algébrique quasi-projective possédant suffisamment de points réels (voir la définition 2.2.5 et le théorème 2.2.9) et \mathcal{L} un \mathbf{R} -faisceau localement libre de type fini. Il est immédiat que la restriction $\mathcal{L}_0|_{X(\mathbf{R})}$ du faisceau \mathcal{L}_0 défini au lemme 2.5.3 est un faisceau localement libre de type fini sur la variété algébrique réelle $(X(\mathbf{R}), (\mathcal{O}_X)_{X(\mathbf{R})}^G)$.

Théorème 2.5.15. — Soient (X, σ) une \mathbf{R} -variété algébrique quasi-projective possédant suffisamment de points réels et \mathcal{L} un \mathbf{R} -faisceau localement libre de type fini. Alors le faisceau localement libre de type fini $\mathcal{L}_0|_{X(\mathbf{R})}$ sur la variété algébrique réelle $(X(\mathbf{R}), (\mathcal{O}_X)_{X(\mathbf{R})}^G)$ est algébrique.

Corollaire 2.5.16. — Soient (X, σ) une \mathbf{R} -variété algébrique quasi-projective possédant suffisamment de points réels et (E, π) un fibré vectoriel topologique sur la variété algébrique réelle $(X(\mathbf{R}), (\mathcal{O}_X)_{X(\mathbf{R})}^G)$.

Alors le fibré vectoriel (E, π) est algébrique si et seulement s'il existe un \mathbf{R} -fibré vectoriel pré-algébrique (\mathcal{E}, η) sur (X, σ) dont la restriction $(\mathcal{E}|_{X(\mathbf{R})}, \eta|_{X(\mathbf{R})})$ est isomorphe à $(E \otimes \mathbf{C}, \pi \otimes \mathbf{C})$.

Remarque 2.5.17. — Autrement dit : un fibré \mathbf{R} -vectoriel topologique E sur une variété algébrique réelle affine V est algébrique si son tensorisé par \mathbf{C} est la restriction à V d'un fibré \mathbf{C} -vectoriel algébrique \mathcal{E} sur une complexification $V_{\mathbf{C}}$ de V , \mathcal{E} étant muni d'une structure réelle.

2.6. Diviseurs sur une \mathbf{R} -variété projective

Pour rédiger cette section, nous nous sommes inspirés de [Liu02, Chapitre 7]; nous y renvoyons pour les preuves omises dans ce qui suit. Par ailleurs,

quelques énoncés et leurs preuves nécessitent des connaissances de base de la cohomologie des faisceaux pour lesquelles nous renvoyons à [Liu02, §5.2].

Diviseurs de Weil. —

Définition 2.6.1. — Soit X une variété algébrique complexe quasi-projective irréductible normale (définition 1.5.37). Ce n'est pas l'hypothèse la plus générale, ce qui suit reste valable sur une variété *non singulière en codimension 1*.

- Un *diviseur premier* sur X est une sous-variété fermée irréductible de X de codimension 1.
- Un *diviseur de Weil* sur X est un *cycle de codimension 1*, c'est-à-dire une combinaison linéaire formelle finie de diviseurs premiers à coefficients entiers

$$D = \sum_{\substack{A \text{ diviseur} \\ \text{premier de } X}} a_A A, \quad a_A \in \mathbf{Z} \text{ presque tous nuls }^{(3)}.$$

- Soit $D = \sum a_A A$ un diviseur. Pour un diviseur premier A de X , l'entier a_A est la *multiplicité*, notée $\text{mult}_A(D)$ de D en A .
- Le *support* d'un diviseur est la sous-variété

$$\text{Supp } D = \bigsqcup_{a_A \neq 0} A.$$

- Si tous les coefficients sont nuls, c'est-à-dire si $\text{Supp } D = \emptyset$, on note $D = 0$.
- Si tous les coefficients sont positifs ou nuls, D est dit *effectif* ce que l'on note $D \geq 0$.

On note $Z^1(X)$ l'ensemble des diviseurs de Weil de X . Par définition, $Z^1(X)$ est donc le groupe abélien libre engendré par les diviseurs premiers.

Exemple 2.6.2. — 1. Si X est une courbe, les diviseurs premiers de X sont les points de X . On définit alors le *degré* d'un diviseur de Weil $\sum_{i=1}^s a_i D_i$ comme la somme de ses coefficients

$$\text{deg } D = \sum_{i=1}^s a_i.$$

3. Autrement dit, sauf pour un nombre fini d'entre eux.

2. Si X est une surface projective, les diviseurs premiers de X sont les courbes irréductibles de X . On n'a pas alors de définition intrinsèque de degré pour les diviseurs mais on peut définir un degré relativement à un diviseur très ample, ou autrement dit un degré relatif à un plongement projectif.
3. Si $X = \mathbf{P}^n$, les diviseurs premiers sont les hypersurfaces irréductibles. Dans ce cas, le degré d'une hypersurface D_i est bien déterminé (c'est par exemple le degré d'un polynôme générateur de l'idéal $\mathcal{I}(D_i)$ qui est principal, voir [Har77, Chapitre I]) et le *degré* d'un diviseur de Weil $\sum_{i=1}^s a_i D_i \in Z^1(\mathbf{P}^n)$ est

$$\deg D = \sum_{i=1}^s a_i \deg D_i .$$

Si $f \in K(X)^* = \mathbf{C}(X)^*$ est une fonction rationnelle non identiquement nulle (voir la définition 1.2.69 et la remarque 1.2.74) et A est un diviseur premier, on définit la *multiplicité* $\text{mult}_A(f)$ de f en A de la façon suivante :

- $\text{mult}_A(f) = k > 0$ si f s'annule sur A à l'ordre k ;
- $\text{mult}_A(f) = -k$ si f admet un pôle d'ordre k sur D (i. e. $\frac{1}{f}$ s'annule sur A à l'ordre k ;
- et $\text{mult}_A(f) = 0$ dans les autres cas.

À toute fonction rationnelle $f \in K(X)^*$, on associe un diviseur $\text{div}(f) \in Z^1(X)$ défini par

$$\text{div}(f) := \sum_{\substack{A \text{ diviseur} \\ \text{premier de } X}} \text{mult}_A(f) A .$$

Remarquons que $\text{div}(f) \in Z^1(X)$ du fait que $\text{mult}_A(f)$ est nul pour presque tout diviseur premier A . De tels diviseurs sont appelés *diviseurs principaux*. Du fait que $\text{div}(fg) = \text{div}(f) + \text{div}(g)$, l'ensemble des diviseurs principaux est un sous-groupe $\mathcal{P}(X)$ de $Z^1(X)$.

Exercice 2.6.3. — Montrer que sur \mathbf{P}^n , pour toute fonction rationnelle f , on a

$$\deg(\text{div}(f)) = 0 .$$

Définition 2.6.4. — Deux diviseurs D, D' sur une variété X sont *linéairement équivalents* si $D - D'$ est un diviseur principal. On note $D \sim D'$ la relation d'équivalence ainsi définie et

$$\text{Cl}(X) := Z^1(X)/\mathcal{P}(X) = Z^1(X)/\sim$$

le groupe des diviseurs modulo équivalence linéaire.

Exercice 2.6.5. — Montrer que le groupe $\text{Cl}(\mathbf{P}^n)$ est isomorphe à \mathbf{Z} et qu'il est engendré par la classe linéaire du diviseur $1H$ associé à un hyperplan $H \subset \mathbf{P}^n$.

Exemple 2.6.6. — Soient une C une courbe projective plane de degré d , voir la définition 1.6.1, et L une droite de $\mathbf{P}^2(\mathbf{C})$. Alors C est linéairement équivalente à d fois la droite L . En particulier, toute conique projective, voir l'exercice 1.2.68, est linéairement équivalente à la droite double $2L$.

Diviseurs de Cartier. — Soient X une variété algébrique, $U \subset X$ un ouvert et $f \in K(U)^*$ une fonction rationnelle non nulle sur U . Par définition, il existe un ouvert dense $V \subset U$ tel que $\forall p \in V, f(p) = \frac{g(p)}{h(p)}$ pour $g, h \in \mathcal{O}_X(V)$.

Définition 2.6.7. — Un *diviseur de Cartier* (ou diviseur localement principal) sur une variété algébrique X est une section globale du faisceau quotient donné par la suite exacte de faisceaux de groupes multiplicatifs

$$(2.3) \quad 1 \longrightarrow \mathcal{O}_X^* \longrightarrow \mathcal{M}_X^* \longrightarrow \mathcal{M}_X^*/\mathcal{O}_X^* \longrightarrow 1$$

où \mathcal{O}_X^* est le faisceau des fonctions régulières qui ne s'annulent pas et \mathcal{M}_X^* le faisceau des fonctions rationnelles non identiquement nulles ⁽⁴⁾. On note

$$\text{Div}(X) := \Gamma(X, \mathcal{M}_X^*/\mathcal{O}_X^*)$$

le groupe des diviseurs de Cartier. La loi de groupe de $\text{Div}(X)$ est abélienne et est notée additivement.

Définition 2.6.8. — Un diviseur de Cartier est *principal* s'il est associé à une fonction rationnelle globale. On dit que deux diviseurs D_1 et D_2 sont *linéairement équivalents* si $D_1 - D_2$ est principal. On note alors $D_1 \sim D_2$ comme pour les diviseurs de Weil. Le sous-groupe de $\text{Div}(X)$ formé des diviseurs principaux est isomorphe à $\mathcal{P}(X)$ et on note

$$\text{CaCl}(X) := \text{Div}(X)/\mathcal{P}(X) = \text{Div}(X)/\sim$$

le groupe des diviseurs de Cartier modulo équivalence linéaire.

Proposition 2.6.9. — Soit X une variété algébrique. Le groupe $\text{CaCl}(X)$ s'injecte dans le groupe de cohomologie $H^1(X, \mathcal{O}^*)$.

4. Bien sûr $\mathcal{M}_X^*(X) = K(X)^*$, la notation \mathcal{M}_X , qui rappelle que le faisceau analytique correspondant est celui des fonctions méromorphes, est choisie pour éviter la confusion avec le faisceau canonique \mathcal{K}_X , voir la définition 2.6.26.

Démonstration. — De la suite exacte (2.3) découle une suite exacte longue dont on extrait $H^0(X, \mathcal{M}_X^*) \xrightarrow{f} H^0(X, \mathcal{M}_X^*/\mathcal{O}_X^*) \xrightarrow{g} H^1(X, \mathcal{O}_X^*)$. Par définition, l'image de $H^0(X, \mathcal{M}_X^*)$ par f est le groupe des diviseurs principaux et g induit donc une injection

$$\mathrm{CaCl}(X) \hookrightarrow H^1(X, \mathcal{O}_X^*).$$

□

Soit $D = (U_i, f_i)_i \in \mathrm{Div}(X)$ un diviseur de Cartier donné relativement à un recouvrement ouvert $\{U_i\}_i$ de X . Cela signifie qu'il existe des germes de fonctions régulières $g_i, h_i \in \mathcal{O}_X(U_i)$ tels que

$$f_i = \frac{g_i}{h_i} \quad \text{et} \quad \frac{g_i}{h_i} \cdot \left(\frac{g_j}{h_j} \right)^{-1} \in \mathcal{O}_X^*(U_i \cap U_j).$$

Soit D un diviseur de Cartier de X , pour tout diviseur premier A de X , on définit la *multiplicité* $\mathrm{mult}_A(D)$ de D en A : si D est représenté par $(U_i, f_i)_{i \in I}$, on pose $\mathrm{mult}_A(D) = \mathrm{mult}_A(f_i)$. Par hypothèse $\frac{f_i}{f_j}$ prend des valeurs complexes non nulles et $\mathrm{mult}_A(D)$ ne dépend donc pas de i . À un diviseur de Cartier D représenté par $(U_i, f_i)_{i \in I}$, on associe le diviseur de Weil

$$[D] := \sum_{\substack{A \text{ diviseur} \\ \text{premier de } X}} \mathrm{mult}_A(D) A$$

L'application $\mathrm{Div}(X) \rightarrow Z^1(X)$, $D \mapsto [D]$ ainsi définie est un morphisme de groupes.

Proposition 2.6.10. — *Soit X une variété complexe irréductible.*

1. *Si X est une variété normale, alors l'application $\mathrm{Div}(X) \rightarrow Z^1(X)$, $D \mapsto [D]$ est injective et induit un morphisme injectif*

$$\mathrm{CaCl}(X) \rightarrow \mathrm{Cl}(X).$$

2. *Si X est non singulière, alors $D \mapsto [D]$ est un isomorphisme*

$$\mathrm{Div}(X) \simeq Z^1(X)$$

et le morphisme induit est un isomorphisme

$$\mathrm{CaCl}(X) \simeq \mathrm{Cl}(X).$$

Démonstration. — Voir [Har77, II.6].

□

Fibrés en droites. — On rappelle qu'un fibré (algébrique) en droites complexes est un fibré vectoriel algébrique de fibre \mathbf{C} , voir la définition 2.5.7, et que sur \mathbf{C} , tout fibré vectoriel pré-algébrique est algébrique, voir la remarque 2.5.11.(1). Le faisceau des sections d'un tel fibré est un faisceau inversible, voir la définition C.5.8, et la correspondance ainsi induite entre classes d'isomorphismes de fibré en droites et classes d'isomorphismes de faisceaux inversibles est biunivoque, voir la proposition 2.5.9.

À un diviseur de Cartier D représenté par $(U_i, f_i)_i$, on associe le sous-faisceau $\mathcal{O}_X(D) \subset \mathcal{M}_X$ défini par $\mathcal{O}_X(D)|_{U_i} = f_i^{-1}\mathcal{O}_X|_{U_i}$. Le faisceau $\mathcal{O}_X(D)$ est un faisceau inversible sur X . On note aussi abusivement $\mathcal{O}_X(D)$ le fibré en droites associé. De façon explicite : le fibré en droites $\mathcal{O}_X(D)$ est déterminé sur le recouvrement ouvert $\{U_i\}_{i \in I}$ de X par les fonctions de transition $f_{ij}: U_i \cap U_j \rightarrow \mathbf{C}^*$ où $f_{ij} = f_j|_{U_i \cap U_j} \circ f_i^{-1}|_{U_i \cap U_j}$. L'espace total du fibré est le quotient de l'union disjointe $\sqcup_i (U_i \times \mathbf{C})$ par la relation d'équivalence $(x, z) \sim (x, f_{jk}(x)z)$ pour toute paire d'ouverts U_j, U_k contenant x . Le quotient est bien déterminé car on peut vérifier que ces fonctions satisfont la *condition de cocycle* :

$$f_{ik} = f_{ij}f_{jk} \quad \text{sur } U_i \cap U_j \cap U_k \quad \forall i, j, k.$$

Par construction, D est effectif si et seulement si $\mathcal{O}_X(-D) \subset \mathcal{O}_X$. Si U est un ouvert de X , alors $\mathcal{O}_X(D)|_U = \mathcal{O}_U(D|_U)$.

Définition 2.6.11. — Le fibré $\mathcal{O}_X(D)$ est le fibré en droites *associé* à D .

On note $\text{Pic}(X)$ le *groupe de Picard* des fibrés en droites modulo isomorphisme muni du produit tensoriel et $\rho: \text{Div}(X) \rightarrow \text{Pic}(X)$ l'application qui à un diviseur D associe la classe d'isomorphisme du fibré $\mathcal{O}_X(D)$.

Proposition 2.6.12. — *Soit X une variété algébrique complexe. Le groupe de Picard $\text{Pic}(X)$ est isomorphe au groupe de cohomologie $H^1(X, \mathcal{O}^*)$.*

Démonstration. — Voir [Har77, III, exercice 4.5] ou [GH78, §1.1] pour une version analytique. \square

Exemple 2.6.13. — Considérons $X = \mathbf{P}^n$. D'après l'exercice 2.6.5, on sait que le groupe $\text{Cl}(\mathbf{P}^n)$ est isomorphe à \mathbf{Z} et qu'il est engendré par la classe d'un hyperplan $H \subset \mathbf{P}^n$. Le groupe de Picard $\text{Pic}(\mathbf{P}^n)$ est donc isomorphe à \mathbf{Z} et un générateur privilégié de $\text{Pic}(\mathbf{P}^n)$ est le fibré en droites associé à H . On note par convention $\mathcal{O}_{\mathbf{P}^n}(1) := \mathcal{O}_{\mathbf{P}^n}(H)$. L'autre générateur de $\text{Pic}(\mathbf{P}^n)$ est son fibré dual que l'on note $\mathcal{O}_{\mathbf{P}^n}(-1) := \mathcal{O}_{\mathbf{P}^n}(1)^\vee$.

Par extension on note $\mathcal{O}_{\mathbf{P}^n}(k) := \mathcal{O}_{\mathbf{P}^n}(1)^{\otimes k}$ et $\mathcal{O}_{\mathbf{P}^n}(-k) := \mathcal{O}_{\mathbf{P}^n}(-1)^{\otimes k}$ pour k positif. En particulier $\mathcal{O}_{\mathbf{P}^n}(0) = \mathcal{O}_{\mathbf{P}^n}$. Ainsi, le fibré en droites associé au diviseur kH est $\mathcal{O}_{\mathbf{P}^n}(k)$ pour tout $k \in \mathbf{Z}$. Voir [Ser55a, Chapitre III, §2] pour la construction originale des faisceaux $\mathcal{O}(k)$.

Définition 2.6.14. — Le fibré $\mathcal{O}_{\mathbf{P}^n}(1)$ est le *fibré associé aux hyperplans*⁽⁵⁾ et le fibré $\mathcal{O}_{\mathbf{P}^n}(-1)$ est le *fibré tautologique* (voir la section F.1 pour une construction directe de ce fibré).

Exercice 2.6.15. — Soit $d > 1$. Montrer que l'espace vectoriel $\Gamma(\mathbf{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbf{P}^n}^n(dH))$ des sections globales du fibré $\mathcal{O}_{\mathbf{P}^n}(d)$ est formé des polynômes homogènes de degré d en $n + 1$ variables. En déduire que $\dim H^0(\mathbf{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbf{P}^n}^n(d)) = \binom{n+d}{d}$.

Proposition 2.6.16. — Soit X une variété algébrique complexe quasi-projective irréductible.

1. Soient $D_1, D_2 \in \text{Div}(X)$, alors

$$\rho(D_1 + D_2) = \mathcal{O}_X(D_1) \otimes \mathcal{O}_X(D_2).$$

2. L'application $\rho: \text{Div}(X) \rightarrow \text{Pic}(X)$ induit un isomorphisme

$$\text{CaCl}(X) \simeq \text{Pic}(X).$$

Démonstration. — Voir [Har77, II.6]. □

On écrira souvent abusivement $D \in \text{Pic}(X)$ pour la classe linéaire d'un diviseur $D \in \text{Div}(X)$.

Corollaire 2.6.17. — Soit X une variété algébrique complexe quasi-projective, irréductible et non singulière. On a les isomorphismes :

$$\text{Cl}(X) \simeq \text{CaCl}(X) \simeq \text{Pic}(X) \simeq \text{Div}(X)/\mathcal{P}(X).$$

Définition 2.6.18. — Soit D un diviseur sur une variété algébrique X , le *système linéaire* $|D|$ est l'ensemble des diviseurs effectifs linéairement équivalents à D qu'on identifie à l'espace projectif associé à l'espace vectoriel complexe $H^0(X, \mathcal{O}_X(D))$ des sections globales de $\mathcal{O}_X(D)$.

On a $H^0(X, \mathcal{O}_X(D)) = \{f \in K(X)^* \mid D + (f) \geq 0\} \cup \{0\}$. Si cet espace vectoriel complexe est de dimension finie, une base $\{s_0, \dots, s_N\}$ de $H^0(X, \mathcal{O}_X(D))$

5. En anglais : *twisting sheaf of Serre*.

est formée d'un nombre fini de fonctions rationnelles globales sur X qui permettent de définir une application rationnelle

$$\varphi_D: \begin{cases} X & \dashrightarrow \mathbf{P}(H^0(X, \mathcal{O}_X(D))) = \mathbf{P}^N(\mathbf{C}) \\ x & \mapsto (s_0(x) : \cdots : s_N(x)) . \end{cases}$$

Remarque 2.6.19. — L'application φ_D dépend en fait du choix d'une base de $H^0(X, \mathcal{O}_X(D))$, et n'est donc déterminée par D qu'à un automorphisme de $\mathbf{P}(H^0(X, \mathcal{O}_X(D)))$ près.

Définition 2.6.20. — Un diviseur D sur une variété X est *très ample* si l'application rationnelle φ_D est un morphisme qui réalise un plongement de X dans $\mathbf{P}(H^0(X, \mathcal{O}_X(D)))$. Un diviseur D est *ample* si l'un de ses multiples mD , $m \geq 1$, est très ample.

De même, un faisceau inversible \mathcal{L} est *très ample* s'il est associé à un diviseur très ample $\mathcal{L} = \mathcal{O}_X(D)$. Et il est *ample* si $\mathcal{L}^{\otimes m}$ est très ample pour un certain $m \geq 1$.

Proposition 2.6.21. — Une variété algébrique abstraite (c'est-à-dire donnée par une « liste » de variétés algébriques affines, voir la définition 1.3.1) est projective si et seulement si elle possède un diviseur ample.

Démonstration. — En effet, soit D un diviseur ample sur X , alors il existe un multiple mD , $m \geq 1$, qui est très ample et le morphisme associé φ_{mD} plonge X comme sous-variété fermée d'un espace projectif. Réciproquement, soit X une variété algébrique projective et $\varphi: X \rightarrow \mathbf{P}^N$ un plongement. Soit H un hyperplan de \mathbf{P}^N , alors $\varphi^*(H)$ est un diviseur très ample sur X (ou, en termes de fibrés en droites, le fibré $\varphi^*(\mathcal{O}_{\mathbf{P}^N}(1))$ est très ample sur X). Le diviseur $\varphi^*(H)$ est le diviseur de la *section hyperplane* de X relativement au plongement φ . \square

Définition 2.6.22. — Un diviseur D sur une variété algébrique X (variété que l'on suppose *complète* pour assurer l'existence des φ_{mD}) est *gros* (ou *big*) si pour un certain $m > 0$, la dimension de l'image de l'application rationnelle $\varphi_{mD}: X \dashrightarrow \mathbf{P}(H^0(X, \mathcal{O}_X(mD)))$ est maximale, c'est-à-dire si

$$\dim \varphi_{mD}(X) = \dim X .$$

De même, un fibré en droites \mathcal{L} est *gros* (ou *big*) si pour un certain $m > 0$, on a

$$\varphi_{\mathcal{L}^{\otimes m}}(X) = \dim X .$$

Exemple 2.6.23. — 1. Bien sûr, tout fibré ample est gros.

2. L'image réciproque d'un fibré en droites ample par un morphisme génériquement fini est un fibré en droites gros. Voir [Laz04, §2.2].

Théorème 2.6.24. — Si X est une variété normale (par exemple non singulière), alors un fibré en droites \mathcal{L} est gros si et seulement si pour un certain $m > 0$, l'application rationnelle $\varphi_{\mathcal{L}^{\otimes m}} : X \dashrightarrow \mathbf{P}(H^0(X, \mathcal{O}_X(mD)))$ est birationnelle sur son image.

Démonstration. — Ce résultat est une conséquence du théorème de fibration d'Itaka. Voir [Laz04, §2.2]. \square

Remarque 2.6.25. — Le fait d'être gros pour un fibré en droites est invariant par transformation birationnelle.

Si X une variété algébrique complexe quasi-projective non singulière, alors le faisceau des formes différentielles régulières (voir [Liu02, Chapter 6] ou [Har77, II.8] pour les formes différentielles régulières et la définition D.3.2 pour les formes différentielles holomorphes) de degré 1 sur X , noté $\Omega_X := \Omega_X^1$, est un faisceau localement libre de type fini. Le fibré vectoriel associé, encore noté Ω_X , est de rang égal à la dimension de X ; son fibré déterminant $\det \Omega_X$ est un fibré en droites.

Définition 2.6.26. — Soit X une variété algébrique complexe quasi-projective non singulière. Le *fibré canonique* sur X est le fibré en droites complexes défini par :

$$\mathcal{K}_X := \det \Omega_X = \bigwedge^n \Omega_X .$$

Le *diviseur canonique* de X est un diviseur associé au fibré canonique :

$$\mathcal{O}_X(K_X) = \mathcal{K}_X .$$

Traditionnellement, on dit « le » diviseur canonique alors qu'il n'est défini qu'à équivalence linéaire près.

Exercice 2.6.27. — Montrer que $\mathcal{K}_{\mathbf{P}^n}$ est isomorphe au fibré $\mathcal{O}_{\mathbf{P}^n}(-n-1)$.

Exercice 2.6.28 (Voir [CM09, Theorem 4.3]). — Soit X une variété projective non singulière. Montrer que si $H^0(X, \mathcal{O}_X(-K_X)) \neq 0$ et $H^0(X, \Omega_X^1) = 0$, alors $H^0(X, \Omega_X^1(K_X)) = 0$.

En utilisant la dualité de Serre, théorème D.2.5, en déduire que

$$H^2(X, \Theta_X) = 0$$

où Θ_X est le fibré tangent.

Définition 2.6.29. — Une variété projective non singulière X est de *type général* si son fibré canonique \mathcal{K}_X est gros.

Action de Galois sur le groupe de Picard. — Soit (X, σ) une \mathbf{R} -surface, on note encore σ l'involution induite sur le groupe des diviseurs de X . Si $D = \sum n_i D_i$ est un diviseur de Weil de X , alors $\sigma D := \sum n_i \sigma(D_i)$. Si $D = (U_i, f_i)_i$ est un diviseur de Cartier de X , alors $\sigma D = (\sigma(U_i), \sigma f_i)_i$. Si \mathcal{L} est un fibré en droites sur X de cocycle (U_{ij}, g_{ij}) , alors le faisceau conjugué (définition 2.5.1) ${}^\sigma \mathcal{L}$ est le fibré en droites sur X de cocycle $(\sigma(U_{ij}), {}^\sigma g_{ij})$.

Proposition 2.6.30. — *Supposons X projective. Si D est un diviseur de Cartier et $\mathcal{O}_X(D)$ le faisceau inversible associé, on a*

$$\mathcal{O}_X(\sigma D) = \sigma(\mathcal{O}_X(D)).$$

Réciproquement, si \mathcal{L} est un faisceau inversible sur X , D un diviseur associé à \mathcal{L} et D' un diviseur associé à ${}^\sigma \mathcal{L}$, alors $D' \sim \sigma D$.

Démonstration. — Soit $D = (U_i, f_i)_i$ un diviseur de Cartier, le faisceau $\mathcal{O}_X(D)$ est déterminé par le cocycle $(g_{ij})_{ij} = (\frac{f_i}{f_j})_{ij}$. En effet, $\Gamma(U, \mathcal{O}_X(D)) = \{f \in \mathcal{O}_X(U) \mid (f) + D \geq 0\}$. Soit $(s_i)_i$ une famille de sections locales de $\mathcal{O}_X(D)$, alors

$$(2.4) \quad \forall i, j, s_i = g_{ij} s_j .$$

Par définition de faisceau conjugué, $({}^\sigma s_i)_i$ est une famille de sections locales du faisceau ${}^\sigma(\mathcal{O}_X(D))$ et on a d'après (2.4)

$$(2.5) \quad \forall i, j, {}^\sigma s_i = {}^\sigma g_{ij} {}^\sigma s_j .$$

La preuve est acquise sachant que le faisceau $\mathcal{O}_X(\sigma D)$ est déterminé par le cocycle $({}^\sigma g_{ij})_{ij} = (\frac{{}^\sigma f_i}{{}^\sigma f_j})_{ij}$. \square

Proposition 2.6.31. — *Soit D un diviseur invariant sur (X, σ) , alors il existe une base $\{s_0, \dots, s_N\}$ de l'espace vectoriel complexe $H^0(X, \mathcal{O}_X(D)) = \{f \in K(X)^* \mid D + (f) \geq 0\} \cup \{0\}$ formée de fonctions invariantes : ${}^\sigma s_i = s_i$, $i = 0, \dots, N$.*

Démonstration. — Corollaire immédiat du lemme A.7.3. \square

Théorème 2.6.32. — *Soit (X, σ) une \mathbf{R} -variété algébrique projective irréductible et non singulière. Si $X(\mathbf{R}) \neq \emptyset$, alors pour tout diviseur D linéairement équivalent à $\sigma(D)$, il existe un diviseur D' linéairement équivalent à D*

tel que $D' = \sigma(D')$. Autrement dit, dans ce cas⁽⁶⁾,

$$\mathrm{Div}(X)^G/\mathcal{P}(X)^G = \mathrm{Pic}(X)^G .$$

Démonstration. — Voir [Sil89, pages 19–20]. \square

Exemple 2.6.33 ($\mathrm{Div}(X)^G/\mathcal{P}(X)^G \neq \mathrm{Pic}(X)^G$). — L'exemple de la conique X de \mathbf{P}^2 d'équation $x_0^2 + x_1^2 + x_3^2 = 0$ montre que lorsque $X(\mathbf{R}) = \emptyset$, $\mathrm{Pic}(X)^G$ peut contenir strictement $\mathrm{Div}(X)^G/\mathcal{P}(X)^G$. En effet, ici $\mathrm{Pic}(X)^G = \mathrm{Pic}(X) = \mathbf{Z}$ est engendré par un seul point, mais tous les diviseurs invariants sont de degré pair et on a une suite exacte

$$0 \rightarrow \mathrm{Div}(X)^G/\mathcal{P}(X)^G \rightarrow \mathrm{Pic}(X)^G \rightarrow \mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \rightarrow 0 .$$

Nous avons étudié jusqu'ici le groupe de Picard des classes linéaires de diviseurs. Nous présentons maintenant un autre groupe de classes de diviseurs, le *groupe de Néron-Severi*.

Définition 2.6.34. — Soit X une variété complexe projective non singulière et notons $\mathrm{Pic}^0(X)$ la composante connexe de $\mathrm{Pic}(X)$ contenant l'identité ($\mathrm{Pic}^0(X)$ est la *variété de Picard* de X , voir la définition D.6.6). Le *groupe de Néron-Severi* $\mathrm{NS}(X)$ est le groupe des composantes de $\mathrm{Pic}(X)$:

$$0 \rightarrow \mathrm{Pic}^0(X) \rightarrow \mathrm{Pic}(X) \rightarrow \mathrm{NS}(X) \rightarrow 0 .$$

Deux diviseurs appartenant à une même classe dans le groupe de Néron-Severi sont dit *algébriquement équivalents*⁽⁷⁾.

Théorème 2.6.35 (Théorème de Néron-Severi)

Soit X une variété complexe projective non singulière. Le groupe $\mathrm{NS}(X)$ est de type fini.

Démonstration. — Voir [GH78, IV.6, pages 461–462]. \square

Définition 2.6.36. — Soit X une variété complexe projective non singulière. Le rang du groupe de Néron-Severi $\rho(X) := \mathrm{rg} \mathrm{NS}(X) = \mathrm{rg}(\mathrm{Pic}(X)/\mathrm{Pic}^0(X))$ est appelé *nombre de Picard* de X . Soit (X, σ) une \mathbf{R} -variété projective non singulière. Si $X(\mathbf{R})$ est non vide, le *nombre de Picard réel* de (X, σ) est le rang du groupe de Néron-Severi *réel* $\rho_{\mathbf{R}}(X) := \mathrm{rg}(\mathrm{Pic}(X)^G/\mathrm{Pic}^0(X)^G)$.

6. Dans le langage des schémas : si X est un schéma défini sur \mathbf{R} satisfaisant les hypothèses du théorème, on a $\mathrm{Pic}(X) = \mathrm{Pic}(X_{\mathbf{C}})^G$.

7. Voir [GH78, III.5] pour une explication de cette terminologie. On trouve aussi "numériquement équivalent" dans la littérature, ces deux terminologies coïncident sur une variété projective non singulière, voir [Ful98, §19.3].

Proposition 2.6.37. — Soit X une variété complexe projective non singulière telle que $q(X) = \dim H^1(X, \mathcal{O}_X) = 0$, alors

$$\mathrm{NS}(X) \simeq \mathrm{Pic}(X) .$$

Démonstration. — On déduit de la suite exacte (D.3) qui suit la proposition D.6.7 que si $q(X) = 0$, alors le groupe $\mathrm{Pic}^0(X)$ est trivial. \square

Plongements projectifs. — On a vu que toute variété algébrique réelle affine compacte admet une complexification projective. L'objet de cette section est d'étudier ces modèles projectifs en utilisant la théorie des diviseurs amples.

Exemple 2.6.38 (R-plongement du tore produit)

Cet exemple est inspiré de [BCR98, Ex. 3.2.8]. Soient V le tore produit $V := \mathcal{Z}(t^2 + u^2 - 1) \times \mathcal{Z}(v^2 + w^2 - 1) \subset \mathbf{A}^2(\mathbf{R}) \times \mathbf{A}^2(\mathbf{R})$ et W le tore quartique de $\mathbf{R}_{x_1, x_2, x_3}^3$ obtenu comme surface de révolution autour de l'axe des x_3 du cercle de centre $(2, 0)$ et de rayon 1 du plan (x_1, x_3)

$$W := \mathcal{Z}(16(x_1^2 + x_2^2) - (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 3)^2) \subset \mathbf{A}^3(\mathbf{R}) .$$

Munis de leur topologie euclidienne, ces deux ensembles algébriques réels sont difféomorphes au tore $V \approx W \approx \mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^1$.

Considérons W comme un sous-ensemble de $\mathbf{P}^3(\mathbf{R})$ à travers l'inclusion $\mathbf{R}_{x_1, x_2, x_3}^3 \subset \mathbf{P}^3(\mathbf{R})_{x_0 : x_1 : x_2 : x_3}$. L'application polynomiale

$$\begin{aligned} \varphi : \quad V &\longrightarrow W \\ (t, u, v, w) &\longmapsto (1 : t(2+v) : u(2+v) : w) \end{aligned}$$

est bijective et sa réciproque $\varphi^{-1} : W \rightarrow V$,

$$\varphi^{-1}(x_0 : x_1 : x_2 : x_3) = \left(x_1 x_0 / \rho, x_2 x_0 / \rho, (\rho - 2x_0^2) / x_0^2, x_3 / x_0 \right)$$

où $\rho = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 3x_0^2) / 4$, est une application régulière de variétés algébriques réelles puisque $W \cap \{x_0 = 0\} = \emptyset$.

L'application φ est donc un isomorphisme de variétés algébriques réelles et les algèbres $\mathcal{R}(V)$ et $\mathcal{R}(W)$ sont isomorphes d'après le corollaire 1.3.20. En revanche les algèbres $\mathcal{P}(V)$ et $\mathcal{P}(W)$ ne le sont pas. La première est régulière contrairement à la seconde. Considérons des complexifiés projectifs des tores V et $W : \overline{V}_{\mathbf{C}} \simeq \mathbf{P}^1(\mathbf{C}) \times \mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ pour le premier et l'hypersurface quartique, singulière

$$\widehat{W}_{\mathbf{C}} := \mathcal{Z}(16(x_1^2 + x_2^2) - (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 3x_0^2)^2) \subset \mathbf{P}^3(\mathbf{C}) .$$

pour le second. L'application φ est alors la restriction d'une application birationnelle de \mathbf{R} -variétés

$$\psi: \mathbf{P}^1(\mathbf{C}) \times \mathbf{P}^1(\mathbf{C}) \rightarrow \widehat{W}_{\mathbf{C}}$$

qui est une résolution des singularités de $\widehat{W}_{\mathbf{C}}$.

Remarquons que ψ est un morphisme de \mathbf{R} -variétés mais que ψ^{-1} est seulement une application rationnelle. Remarquons aussi que $\widehat{W}_{\mathbf{C}}$ étant une quartique de $\mathbf{P}^3(\mathbf{C})$ birationnelle à $\mathbf{P}^1(\mathbf{C}) \times \mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ elle est nécessairement singulière. En effet $\mathbf{P}^1(\mathbf{C}) \times \mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ est une surface rationnelle alors qu'une quartique non singulière de \mathbf{P}^3 est une surface non rationnelle (c'est une *surface K3*, voir la définition 4.5.3). Les \mathbf{R} -surfaces $(\mathbf{P}^1(\mathbf{C}) \times \mathbf{P}^1(\mathbf{C}), \sigma_{\mathbf{P}} \times \sigma_{\mathbf{P}})$ et $(\widehat{W}_{\mathbf{C}}, \sigma_{\mathbf{P}}|_{\widehat{W}_{\mathbf{C}}})$ sont birationnellement équivalentes mais non isomorphes.

Retour sur le théorème 2.1.33. — On a vu que sur une variété X plongée dans $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ stable par la conjugaison $\sigma_{\mathbf{P}}$, il est naturel de considérer la structure réelle σ induite par $\sigma_{\mathbf{P}}$. Remarquons que si X est une variété complexe projective munie d'une structure réelle σ , son image par un plongement projectif quelconque n'est pas forcément stable par $\sigma_{\mathbf{P}}$. Heureusement, on peut toujours trouver un plongement réel d'après le théorème 2.6.44 ci-dessous. Nous donnons une preuve de ce théorème basée sur le critère de Nakai-Moishezon. Bien sûr, le théorème 2.6.44 implique le théorème 2.1.33 pour lequel nous avons seulement indiqué une référence de preuve. Dans la suite, et ce, jusqu'à la fin de la preuve du théorème 2.6.44, nous ne supposons pas connu le résultat du théorème 2.1.33.

Ce qu'il faut retenir : si X est une variété complexe projective, alors pour toute structure réelle σ sur X , la \mathbf{R} -variété (X, σ) admet un plongement équivariant dans un espace projectif.

Critère de Nakai-Moishezon. — On renvoie à [Har77, Appendix A, page 424] pour la définition et les premières propriétés de la théorie de l'intersection sur une variété de dimension quelconque. Si la variété ambiante est munie d'une structure réelle, cette théorie de l'intersection est compatible avec la structure réelle en question. Si r est la dimension d'une variété non singulière Y et D_1, D_2, \dots, D_r sont des diviseurs sur Y , alors leur produit d'intersection $(D_1 \cdot D_2 \cdots D_r)$ appartient à \mathbf{Z} et ne dépend que de la classe linéaire des diviseurs. En particulier, si les D_i sont des hypersurfaces se rencontrant transversalement alors le nombre $(D_1 \cdot D_2 \cdots D_r)$ est égal au nombre de points d'intersections des D_i .

Théorème 2.6.39 (Critère de Nakai-Moishezon)

Soit D un diviseur de Cartier sur une variété algébrique complexe projective X . Alors D est ample sur X si et seulement si pour toute sous-variété irréductible $Y \subset X$ de dimension r , on a

$$(D|_Y)^r > 0.$$

Démonstration. — Voir par exemple [Har77, Appendix A, Theorem 5.1, page 434]. L'énoncé ci-dessus est valable y compris pour X singulière, mais il faut dans ce cas utiliser une théorie de l'intersection adaptée, voir [Kle66], [Ful98]. \square

Corollaire 2.6.40 (Critère de Nakai-Moishezon pour les surfaces)

Un diviseur D sur une surface algébrique complexe projective irréductible non singulière X est ample si et seulement si $(D)^2 > 0$ et $D \cdot C > 0$ pour toute courbe irréductible C dans X .

Démonstration. — Il suffit de prendre $Y = X$ dans le critère général pour obtenir $(D)^2 > 0$ et pour toute courbe irréductible $C \subset X$, $D \cdot C > 0$. \square

Définition 2.6.41. — Un diviseur D sur une variété X est *nef* (pour *numerically eventually free*⁽⁸⁾) si pour toute sous-variété irréductible $Y \subset X$ de dimension r , on a

$$(D|_Y)^r \geq 0.$$

De même, un fibré en droites \mathcal{L} est *nef* s'il est associé à un diviseur nef $\mathcal{L} = \mathcal{O}_X(D)$.

Remarque 2.6.42. — Bien sûr, tout fibré ample est nef.

Proposition 2.6.43. — Soit X une variété complexe projective munie d'une structure réelle σ , alors il existe un diviseur ample D tel que $D = \sigma D$.

Démonstration. — Soit H un diviseur ample sur X . Pour toute sous-variété irréductible $Y \subset X$ de dimension r , la sous-variété conjuguée σY est irréductible de dimension r et d'après le critère de Nakai-Moishezon (théorème 2.6.39), on a $(H|_{\sigma Y})^r > 0$. La structure réelle étant involutive, on a $(\sigma H)|_Y = \sigma(H|_{\sigma Y})$ et puisque la structure réelle est compatible avec le produit d'intersection, on

8. Si le système linéaire $|mD|$ est libre pour un certain $m > 0$ (eventually free), alors D est nef. On rencontre souvent l'interprétation incorrecte *numériquement effectif* ou *numerically effective*, mais l'exemple d'une (-1) -courbe, définition 4.3.2, montre qu'un diviseur peut être effectif sans être nef ni même linéairement équivalent à un diviseur nef.

obtient $((\sigma H)|_Y)^r = (H|_{\sigma Y})^r > 0$. D'après le critère de Nakai-Moishezon, σH est donc ample ainsi que

$$D := H + \sigma H .$$

□

Théorème 2.6.44. — Soit (X, σ) une \mathbf{R} -variété algébrique. Si la variété algébrique complexe X est quasi-projective, alors il existe un \mathbf{R} -plongement

$$\varphi: (X, \sigma) \hookrightarrow (\mathbf{P}^N(\mathbf{C}), \sigma_{\mathbf{P}}) .$$

Démonstration. — Commençons par supposer que X est projective, alors d'après la proposition 2.6.43, il existe un diviseur ample D_0 et un entier m positif tel que $D = mD_0$ est très ample sur X et satisfait $\sigma D = D$. D'après la proposition 2.6.31, il existe une base $\{s_0, \dots, s_N\}$ de $H^0(X, \mathcal{O}_X(D))$ telle que $\sigma s_i = s_i$, $i = 0, \dots, N$. Le diviseur D étant très ample, l'application

$$\varphi_D: \begin{cases} X & \dashrightarrow & \mathbf{P}^N(\mathbf{C}) \\ x & \mapsto & (s_0(x) : \dots : s_N(x)) \end{cases}$$

est un morphisme qui induit un isomorphisme de \mathbf{R} -variétés

$$(X, \sigma) \simeq (\varphi_D(X), \sigma_{\mathbf{P}}|_{\varphi_D(X)}) .$$

Maintenant considérons une variété quasi-projective $U = X \setminus Y$ où X est une \mathbf{R} -variété projective et $Y \subset X$ est une \mathbf{R} -sous-variété fermée de X . Nous venons de prouver l'existence d'un \mathbf{R} -plongement $\varphi: (X, \sigma) \hookrightarrow (\mathbf{P}^N(\mathbf{C}), \sigma_{\mathbf{P}})$, en particulier φ est un homéomorphisme sur son image donc $\varphi(X \setminus Y) = \varphi(X) \setminus \varphi(Y)$ et φ induit donc un plongement de U comme ensemble algébrique quasi-projectif

$$(U, \sigma|_U) \simeq (\varphi(X) \setminus \varphi(Y), \sigma_{\mathbf{P}}|_{\varphi(X) \setminus \varphi(Y)}) .$$

□

Degré d'une sous-variété de l'espace projectif. — Classiquement on définit le degré d'une sous-variété algébrique de \mathbf{P}^N à partir de son polynôme de Hilbert [Har77, § I.7] puis on montre qu'il est équivalent de le définir comme ci-dessous.

Définition 2.6.45 (Degré d'une sous-variété de l'espace projectif)

Le degré d'une sous-variété X de dimension n de \mathbf{P}^N est le degré du 0-cycle $D := (H \cdot X)$ obtenu par intersection de X avec un sous-espace projectif H de codimension n de \mathbf{P}^N en position générale.

Dans la définition ci-dessus, une difficulté est cachée dans la détermination des coefficients du 0-cycle $D := (H \cdot X)$ pour X quelconque, voir [Har77, paragraphe précédant le théorème 7.7, page 53]. Si X est complexe non singulière, on peut d'après le théorème de Bertini D.9.1 choisir pour H un sous-espace suffisamment général pour lequel le 0-cycle D est la somme des points $H \cap X$.

Définition 2.6.46 (Degré complexe). — Le *degré complexe* d'une variété algébrique complexe projective est le plus petit degré d'un plongement dans un espace projectif $\mathbf{P}^N(\mathbf{C})$.

Définition 2.6.47 (Degré réel). — Soit (X, σ) une \mathbf{R} -variété projective. Le *degré réel* de (X, σ) est le plus petit degré d'un plongement réel dans un espace projectif $(\mathbf{P}^N(\mathbf{C}), \sigma_{\mathbf{P}})$.

Le degré réel existe d'après la proposition 2.6.43. Un plongement réel est en particulier un plongement complexe, le degré réel est donc supérieur ou égal au degré complexe. Il est courant que le degré minimum d'un plongement non réel soit strictement inférieur au degré minimum d'un plongement projectif réel. L'exemple le plus simple est sans doute celui d'une conique sans point réel dont le degré complexe est 1 alors que son degré réel est 2. Notons X la courbe projective plane définie par l'équation $x^2 + y^2 + z^2 = 0$ munie de la restriction de $\sigma_{\mathbf{A}}$. En tant que courbe complexe abstraite, X est isomorphe à la courbe $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ et admet donc des plongements de degré 1 (qui sont donc des droites) dans tous les $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ pour $n \geq 1$. Aucun de ces plongements ne peut être réel car le lieu réel d'une \mathbf{R} -droite possède des points réels. La proposition suivante généralise d'ailleurs cet exemple.

Proposition 2.6.48. — Soit $X \subset \mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ une sous-variété algébrique, stable par $\sigma_{\mathbf{P}}$. Si le degré de X est impair, alors $X(\mathbf{R}) \neq \emptyset$.

Démonstration. — On peut supposer que $r := n - \dim X > 0$. Soit H un sous-espace projectif réel de dimension r de \mathbf{P}^n non contenu dans X , alors le degré du 0-cycle $D := (H \cdot X)$ est impair par hypothèse. En particulier, la partie réelle de D est de degré impair et son support est donc formé d'un nombre impair de points; il est donc non vide. \square

2.7. \mathbf{R} -courbes planes

Pour conclure ce chapitre, nous allons appliquer ce qui précède aux courbes planes. On se réfère à la section 1.6 du premier chapitre pour les définitions

générales. Le théorème de Bézout pour les courbes du plan, énoncé au chapitre 1, est appliqué ici aux \mathbf{R} -courbes et sera généralisé aux courbes sur les surfaces autres que le plan au chapitre 4.

Théorème 2.7.1 (Théorème de Bézout pour les \mathbf{R} -courbes planes)

Soient C_1 et C_2 des \mathbf{R} -courbes projectives planes de degrés respectifs d_1 et d_2 .

1. Si C_1 et C_2 n'ont aucune composante commune, alors :

$$(C_1 \cdot C_2) = d_1 d_2 .$$

2. Si l'intersection $C_1(\mathbf{R}) \cap C_2(\mathbf{R})$ est finie alors :

$$(C_1(\mathbf{R}) \cdot C_2(\mathbf{R})) \leq d_1 d_2 .$$

3. Si de plus les branches sont transverses en chaque point, alors le nombre de points d'intersection $\#(C_1(\mathbf{R}) \cap C_2(\mathbf{R}))$ est congru modulo 2 au produit $d_1 d_2$.

Démonstration. — Il suffit de définir la multiplicité d'intersection modulo 2 en un point $a \in \mathbf{A}^2(\mathbf{R})$ de deux \mathbf{R} -courbes affines planes C_1 et C_2 d'équations $P_1(x, y)$ et $P_2(x, y)$:

$$(C_1 \cdot C_2)_a^{\mathbf{R}} := \dim_{\mathbf{R}} \mathcal{O}_{\mathbf{A}^2(\mathbf{R}), a} / (P_1, P_2) \pmod{2} ;$$

et le nombre d'intersection modulo 2

$$(C_1 \cdot C_2)^{\mathbf{R}} := \sum_{a \in C_1(\mathbf{R}) \cap C_2(\mathbf{R})} (C_1 \cdot C_2)_a^{\mathbf{R}} \pmod{2} .$$

Ensuite, on applique le théorème 1.6.16 aux courbes complexes C_1 et C_2 . \square

Rappelons la formule du genre démontrée au chapitre 1, théorème 1.6.17. Si C une courbe projective plane irréductible non singulière de genre $g = g(C)$, alors

$$g = \frac{(d-1)(d-2)}{2} .$$

Le lieu réel d'une \mathbf{R} -courbe projective non singulière est une variété différentielle de dimension 1 compacte et donc homéomorphe à une réunion finie de cercles plongés disjoints.

Théorème 2.7.2 (Harnack 1876). — Soit (C, σ) une \mathbf{R} -courbe projective plane non singulière de degré d . Notons s le nombre de composantes connexes de $C(\mathbf{R})$, alors

$$(2.6) \quad s \leq \frac{(d-1)(d-2)}{2} + 1 = g(C) + 1 .$$

Remarque 2.7.3. — Nous donnons un peu plus loin une preuve élémentaire de cette inégalité basée sur le théorème de Bézout. Il peut être utile de remarquer que le nombre de composantes connexes d'une courbe plane de degré d est majoré par $\frac{(d-1)(d-2)}{2} + 1$ y compris si C est singulière. En premier lieu, il suffit de démontrer le résultat pour C irréductible. En effet, si C est définie par un produit de polynômes de degrés respectifs d_1 et d_2 , alors $d = d_1 + d_2$ et

$$\frac{(d_1 - 1)(d_1 - 2)}{2} + 1 + \frac{(d_2 - 1)(d_2 - 2)}{2} + 1 \leq \frac{(d - 1)(d - 2)}{2} + 1.$$

On montre ensuite qu'on peut supposer que $C(\mathbf{R})$ contient au moins une composante de dimension 1 en utilisant le théorème de Brusotti 2.7.10 comme dans le corollaire 3.3.20. La suite de la preuve est similaire à la preuve donnée plus loin, voir [BR90, Second proof of 5.3.2].

Remarque 2.7.4. — Plus généralement pour une \mathbf{R} -courbe projective non singulière (C, σ) (sans l'hypothèse de planéité donc), on a encore l'inégalité $s \leq g(C) + 1$, où $g(C)$ est le genre de la surface topologique C . Nous en donnons deux preuves au chapitre 3, corollaire 3.3.7. Nous verrons aussi dans le chapitre 3 que cette inégalité admet une généralisation en dimension supérieure grâce à la théorie de Smith.

Lemme 2.7.5. — Par $\binom{d+2}{2} - 1 = \frac{1}{2}(d+2)(d+1) - 1$ points de $\mathbf{P}^2(\mathbf{R})$ donnés passe une courbe projective réelle de degré d .

Démonstration. — En effet, le nombre de monômes de degré d à trois variables est $\binom{d+2}{2}$. On en déduit immédiatement une identification entre l'espace des courbes de degré d du plan projectif réel et un espace projectif réel de dimension $\frac{1}{2}(d+2)(d+1) - 1$. \square

Proposition 2.7.6. — Pour tout point $p \in \mathbf{RP}^2$,

$$\pi_1(\mathbf{RP}^2, p) \simeq \mathbf{Z}_2.$$

Démonstration. — Voir \mathbf{RP}^2 comme le quotient de \mathbf{S}^2 par l'antipodie. \square

Définition 2.7.7. — Une courbe simple fermée dans le plan projectif réel est un *ovale* si elle est homotope à 0, c'est une *pseudo-droite* si elle est non homotopiquement triviale.

Lemme 2.7.8 (Ovales et pseudo-droites). — Soit (C, σ) une \mathbf{R} -courbe projective plane non singulière de degré d .

1. Si d est pair, toutes les composantes connexes de $C(\mathbf{R})$ sont des ovales.

2. Si d est impair, une composante connexe de $C(\mathbf{R})$ est une pseudo-droite et toutes les autres sont des ovales.
3. Une courbe rencontre un ovale en un nombre pair de points d'intersection (comptés avec multiplicités).

Démonstration. — Preuve en exercice, penser au théorème de Bézout. \square

Preuve du théorème 2.7.2. — Supposons que $d > 2$. Supposons, par l'absurde, que Γ est une \mathbf{R} -courbe (irréductible) non singulière de degré d dont le lieu réel possède plus de $g(d) + 1$ composantes connexes. Notons $h = g(d) + 1$ et $\Omega_1, \dots, \Omega_h$ des ovales de $\Gamma(\mathbf{R})$, alors $\Gamma(\mathbf{R})$ contient au moins une autre composante connexe. Choisissons $\frac{1}{2}d(d-1) - 1$ points sur $\Gamma(\mathbf{R})$. Du fait que $\frac{1}{2}d(d-1) - 1 \geq g(d) + 1$ pour $d > 2$, on peut choisir un point sur chaque ovale $\Omega_1, \dots, \Omega_h$ et les autres points sur une autre composante connexe de $\Gamma(\mathbf{R})$. Considérons une \mathbf{R} -courbe Δ de degré $d-2$ passant par ces $\frac{1}{2}d(d-1) - 1$ points. Les courbes Γ et Δ n'ont pas de composante commune car Γ est irréductible et le degré de Δ est $d-2$. D'après le théorème de Bézout, le nombre de points d'intersection de Γ avec Δ comptés avec multiplicités est inférieur ou égal à $d(d-2)$. Si Δ rencontre un ovale Ω_i avec une multiplicité 1, alors Δ rencontre Ω_i en un autre point. De là, $\Gamma \cdot \Delta \geq \frac{1}{2}d(d-1) - 1 + g(d) + 1 = (d-1)^2$ qui est plus grand que $d(d-2)$. De cette contradiction découle le théorème. \square

La majoration (2.6) est optimale, en effet la borne de Harnack est atteinte pour tout degré d :

Proposition 2.7.9. — *Pour tout $d \in \mathbf{N}^*$, il existe une \mathbf{R} -courbe projective plane non singulière (C, σ) de degré d dont le lieu réel $C(\mathbf{R})$ est constitué de $s = \frac{(d-1)(d-2)}{2} + 1$ composantes connexes.*

Démonstration. — Voir [BCR98, pages 287–288] ou [BR90, 5.3.11] pour la construction initiale de Harnack. \square

Les constructions de courbes référencées ci-dessus utilisent des déformations explicites de courbes réductibles. On peut souvent prouver l'existence de configurations d'ovales à degré donné sans construire explicitement de telles déformations grâce au très utile théorème de Brusotti :

Théorème 2.7.10 (Théorème de Brusotti). — *Soit $C \subset \mathbf{P}^2(\mathbf{R})$ une courbe réelle plane de degré d avec comme seules singularités, des points doubles ordinaires. Choissant une déformation locale pour chaque point double, il existe une déformation de la courbe C dans l'espace des courbes*

réelles de degré d de telle façon que chacune des déformations locales soit réalisée.

Démonstration. — Voir [BR90, § 5.5]. \square

En sus de (2.6) qui borne le nombre de composantes connexes de son lieu réel, une \mathbf{R} -courbe plane est soumise à des contraintes concernant les positions relatives de ses ovals.

Définition 2.7.11. — Le complémentaire $\mathbf{RP}^2 \setminus \Omega$ d'un ovale dans le plan projectif réel possède deux composantes connexes : l'une diffeomorphe au disque que l'on appelle *intérieur* de l'ovale et l'autre à un ruban de Möbius. On dit qu'un ovale est *contenu* dans Ω s'il est inclus dans son intérieur. Un ovale est *vide* s'il ne contient aucun ovale. Une réunion disjointe d'ovales E est un *emboîtement* d'ovales si et seulement si il est totalement ordonné par inclusion.

Définition 2.7.12. — Un ovale est *positif* (ou *pair*) s'il est contenu dans un nombre pair d'ovales et *négatif* (ou *impair*) dans le cas contraire ⁽⁹⁾.

Théorème 2.7.13 (Inégalités de Petrovskii). — Soit (C, σ) une \mathbf{R} -courbe projective plane de degré pair $d = 2k$ non singulière. Notons p le nombre d'ovales positifs de $C(\mathbf{R})$ et n le nombre d'ovales négatifs, alors

$$\begin{aligned} p - n &\leq \frac{3}{8}d(d-2) + 1 = \frac{3}{2}k(k-1) + 1 ; \\ n - p &\leq \frac{3}{8}d(d-2) = \frac{3}{2}k(k-1) . \end{aligned}$$

Voir [Pet33, Pet38] ou [Arn71]. Au chapitre 3, théorème 3.3.14, nous prouvons les inégalités de Petrovskii en utilisant la théorie des revêtements doubles.

Corollaire 2.7.14. — Soit (C, σ) une \mathbf{R} -courbe projective plane de degré pair $d = 2k$ non singulière. Notons p le nombre d'ovales positifs de $C(\mathbf{R})$ et n le nombre d'ovales négatifs, alors

$$p \leq \frac{7}{4}k^2 - \frac{9}{4}k + \frac{3}{2} \quad ; \quad n \leq \frac{7}{4}k^2 - \frac{9}{4}k + 1 .$$

Démonstration. — Pour une courbe de degré pair $d = 2k$, l'inégalité de Harnack (2.6) devient $p + n \leq 2k^2 - 3k + 2$. La somme avec chacune des inégalités de Petrovskii donne chacune des inégalités ci-dessus. \square

9. Voir [Pet38, page 190] pour une justification de cette terminologie.

Remarque 2.7.15 (Conjecture de Ragsdale). — Une célèbre conjecture, incorrecte, de Ragsdale [Rag06], affirme que p et n sont en fait soumis aux inégalités $p \leq \frac{3}{2}k(k-1) + 1$, et $n \leq \frac{3}{2}k(k-1)$. Nous reviendrons sur cette conjecture au chapitre 3 en fin de section 3.5.

Dans le cas où la courbe ne possède aucun emboîtement d'ovales, tous les ovales sont positifs et la première inégalité de Petrovskii implique le corollaire suivant :

Corollaire 2.7.16. — *Soit C une \mathbf{R} -courbe projective plane de degré pair $d = 2k$ non singulière et sans emboîtement d'ovales. Alors le nombre d'ovales $s := \#\pi_0(C(\mathbf{R}))$ est majoré :*

$$s \leq \frac{3}{2}k(k-1) + 1.$$

Corollaire 2.7.17. — *Les courbes de degré d pair maximales, c'est-à-dire dont le nombre de composantes connexes du lieu réel est égal à $\frac{(d-1)(d-2)}{2} + 1$ (voir la définition 3.3.10) possèdent au moins un emboîtement à partir du degré 6.*

Solution des exercices du chapitre 2

2.1.3 1. Soient U un ouvert de $\mathbf{A}^n(\mathbf{C})$ et $f \in {}^\sigma\mathcal{O}(U)$, par définition il existe $g \in \mathcal{O}(\sigma_{\mathbf{A}}(U))$ tel que $f = {}^\sigma g$, donc $f = \bar{g} \circ \sigma_{\mathbf{A}}: U \rightarrow \mathbf{C}$ est régulière, autrement dit $f \in \mathcal{O}(U)$. L'inclusion réciproque $\mathcal{O}(U) \subset {}^\sigma\mathcal{O}(U)$ est obtenue de manière similaire.

2. On applique la définition 1.3.7 au faisceau ${}^\sigma\mathcal{O}$ et au sous-espace F pour obtenir le faisceau ${}^\sigma\mathcal{O}_F$. Si U est un ouvert de F , \bar{U} est un ouvert de \bar{F} donc de F par hypothèse. Une fonction $f: U \rightarrow \mathbf{C}$ appartient à ${}^\sigma\mathcal{O}_F(U)$ si pour tout point x de U , il existe un voisinage V de x dans $\mathbf{A}^n(\mathbf{C})$ et une fonction $g \in {}^\sigma\mathcal{O}(V)$ telle que $g(y) = f(y)$ pour tout $y \in V \cap U$. D'après la question précédente, on a en fait $g \in \mathcal{O}(V)$ et donc finalement ${}^\sigma\mathcal{O}_F = \mathcal{O}_F$.

2.1.7 Les ensembles F et \bar{F} sont des sous-ensembles de $\mathbf{A}^n(\mathbf{C})$ et $\mathcal{O}_{\bar{F}} = (\mathcal{O}_{\mathbf{A}^n})_{\bar{F}}$ (voir la définition 1.3.7). La restriction $\sigma_{\mathbf{A}}: \bar{F} \rightarrow F$ est clairement bijective; $\sigma_{\mathbf{A}}$ est continue car si $Z = \mathcal{Z}(I)$ est un fermé de Zariski de F , pour un idéal I de $\mathbf{C}[X_1, \dots, X_n]$, alors $\sigma_{\mathbf{A}}^{-1}(Z) = \sigma_{\mathbf{A}}(Z) = \bar{Z} = \mathcal{Z}(\sigma I)$ où $\sigma I := \{\sigma f \mid f \in I\}$. Enfin, $\sigma_{\mathbf{A}}|_{\bar{F}}$ induit un morphisme d'espaces annelés (voir l'exercice C.5.3) $(\bar{F}, \mathcal{O}_{\bar{F}}) \rightarrow (F, \mathcal{O}_F)$ car si U est un ouvert de F , alors $\sigma_{\mathbf{A}}(U)$ est un ouvert de \bar{F} et si $f \in \mathcal{O}_F(U)$, alors $f \circ \sigma_{\mathbf{A}}: \sigma_{\mathbf{A}}(U) \rightarrow \mathbf{C}$ est régulière, c'est-à-dire que $f \circ \sigma_{\mathbf{A}} \in \mathcal{O}_{\bar{F}}(\sigma_{\mathbf{A}}(U))$. En effet, comme $f \in \mathcal{O}_F(U)$, il existe une fonction $f_0 \in \mathcal{O}_F(U)$ telle que $f = \bar{f}_0$. Alors $f \circ \sigma_{\mathbf{A}} = \bar{f}_0 \circ \sigma_{\mathbf{A}} = {}^\sigma f_0$. Comme f_0 est régulière sur U , ${}^\sigma f_0$ est régulière sur $\sigma_{\mathbf{A}}(U)$.

$$\begin{array}{ccc} & & \mathbf{C} \\ & \nearrow f_0 & \downarrow z \mapsto \bar{z} \\ F & \xrightarrow{\sigma_{\mathbf{A}}} \bar{F} & \xrightarrow{f} \mathbf{C} \end{array}$$

2.1.21 1. Commençons par rappeler que si C est le lieu des zéros d'un polynôme P , alors \bar{C} est le lieu des zéros de ${}^\sigma P$. On vérifie directement que $(\varphi \circ \varphi)(x, y) = (x, y)$, ce qui prouve que φ est un automorphisme involutif de $\mathbf{A}^2(\mathbf{C})$ et en particulier que $\varphi^{-1} = \varphi$. Maintenant, soit $P(x, y) = y^2 - a_0 x^m - \sum_{k=1}^m (a_k x^{m+k} + (-1)^k \bar{a}_k x^{m-k})$, la substitution $P(\varphi(x, y))$ donne $-\frac{y^2}{x^{2m}} + a_0 \frac{1}{x^m} + \sum_{k=1}^m (a_k \frac{1}{x^{m-k}} + (-1)^k \bar{a}_k \frac{1}{x^{m+k}})$ d'où $-x^{2m} P(\varphi(x, y)) = {}^\sigma P(x, y)$.

2. Posons $\tau = \sigma_{\mathbf{A}} \circ \varphi$, alors $\tau(x, y) = (-\frac{1}{x}, -\frac{iy}{x^m})$ et $(\tau \circ \tau)(x, y) = (x, -y)$.

3a. La restriction de la projection $(x, y) \mapsto x$ fait de la courbe $C := \mathcal{C}_{m, a_0, \dots, a_m}$ un revêtement de degré 2 de $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$. Son corps des fonctions $\mathbf{C}(C)$ est donc une extension de degré 2 de $\mathbf{C}(x) = \mathbf{C}(\mathbf{P}^1(\mathbf{C}))$. Par ailleurs, les

automorphismes de C sont en correspondance biunivoque avec les automorphismes du corps $\mathbf{C}(C)$.⁽¹⁰⁾ Les deux éléments du groupe d'automorphisme de l'extension $\mathbf{C}(C)|\mathbf{C}(x)$ sont représentés par id_C et ρ . Un automorphisme de $\mathbf{C}(C)$ induit donc un automorphisme de $\text{Frac}(\mathbf{C}[x, y]/(P))$. Si les coefficients du polynôme à une variable $P(x, y) - y^2$ sont indépendants sur \mathbf{Q} , le seul automorphisme non trivial est représenté par ρ .

3b. D'après la proposition 2.1.19, si C possède une structure réelle, alors il existe un isomorphisme entre C et \overline{C} qui satisfait $\sigma^{\mathbf{A}}\psi \circ \psi = \text{id}_C$.

Par ailleurs, on déduit de 3a que les seuls isomorphismes entre C_{m, a_0, \dots, a_m} et sa conjuguée sont φ et $\varphi' : (x, y) \mapsto (-\frac{1}{x}, -\frac{i}{x^m}y)$. Or $\varphi \circ \sigma^{\mathbf{A}}\varphi = (\varphi') \circ (\sigma^{\mathbf{A}}(\varphi')) = \rho \neq \text{id}_{C_{m, a_0, \dots, a_m}}$. Nous pouvons donc conclure que si $a_0, a_k, \overline{a_k}$ sont indépendants sur \mathbf{Q} , alors la courbe C_{m, a_0, \dots, a_m} ne possède aucune structure réelle.

2.1.42 On a deux structures réelles non équivalentes sur $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$:

$$\sigma_{\mathbf{P}} : (x_0 : x_1) \mapsto (\overline{x_0} : \overline{x_1})$$

et

$$\sigma_{\mathbf{P}'} : (x_0 : x_1) \mapsto (-\overline{x_1} : \overline{x_0})$$

d'où trois structures réelles non équivalentes sur $\mathbf{P}^1(\mathbf{C}) \times \mathbf{P}^1(\mathbf{C})$: l'involution $\sigma_{\mathbf{P}} \times \sigma_{\mathbf{P}}$ dont le lieu fixe est le tore $\mathbf{T}^2 = \mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^1$, et les involutions $\sigma_{\mathbf{P}} \times \sigma_{\mathbf{P}'}$ et $\sigma_{\mathbf{P}'} \times \sigma_{\mathbf{P}'}$ dont les lieux fixes sont vides.

Comme quatrième structure, nous avons : $((x : y), (z : t)) \mapsto ((\overline{z} : \overline{t}), (\overline{x} : \overline{y}))$ dont le lieu fixe est la sphère \mathbf{S}^2 .

2.2.6 1. On a $F(\mathbf{R}) = \mathcal{Z}(I)$ et $\overline{F(\mathbf{R})} = \mathcal{Z}_{\mathbf{C}}(\mathcal{I}(F(\mathbf{R})))$.

Si $\mathcal{I}(\mathcal{Z}(I)) \subseteq I$, alors $\mathcal{Z}_{\mathbf{C}}(\mathcal{I}(F(\mathbf{R}))) \supseteq \mathcal{Z}_{\mathbf{C}}(I)$, c'est-à-dire $\overline{F(\mathbf{R})} \supseteq F$ c'est-à-dire que $F(\mathbf{R})$ est dense dans F .

Si $F(\mathbf{R})$ est dense dans F alors $\mathcal{Z}_{\mathbf{C}}(\mathcal{I}(F(\mathbf{R}))) = F = \mathcal{Z}_{\mathbf{C}}(I)$. L'idéal I est radical donc $I_{\mathbf{C}} = I \otimes_{\mathbf{R}[X_1, \dots, X_n]} \mathbf{C}[X_1, \dots, X_n]$ est radical aussi. D'après le théorème des zéros, on a donc $\mathcal{I}_{\mathbf{C}}(F(\mathbf{R})) \subseteq I_{\mathbf{C}}$. Et finalement $\mathcal{I}(F(\mathbf{R})) \subseteq I$.

2. Se déduit immédiatement du (1) grâce au théorème A.5.15.

2.2.7 Soit $I = (x^2 + y^2)$, alors $F = \mathcal{Z}_{\mathbf{C}}(I) = \{x \pm iy = 0\}$, le lieu réel est $F(\mathbf{R}) = \mathcal{Z}(I) = \{(0, 0)\}$ et $\mathcal{I}(\mathcal{Z}(I)) = (x, y) \subsetneq I$ dans $\mathbf{R}[X_1, \dots, X_n]$.

10. En fait, un automorphisme de C étant en particulier une transformation birationnelle de C , il suffit d'utiliser le théorème 1.3.30 qui affirme qu'il y a correspondance entre les automorphismes de $\mathbf{C}(C)$ et les transformations birationnelles de C . La correspondance plus forte évoquée ici utilise le fait que C est une courbe projective lisse.

On pose $a = (0, 0)$. On a d'une part, $\mathcal{O}_{F(\mathbf{R}),a} = \left(\frac{\mathbf{R}[x,y]}{(x,y)} \right)_{\mathfrak{m}_{F(\mathbf{R}),a}} = \mathbf{R}$, et d'autre part, $\left(\mathcal{O}_F^G|_{F(\mathbf{R})} \right)_a = \mathcal{O}_{F,a}^G = \left(\left(\frac{\mathbf{C}[x,y]}{(x^2+y^2)} \right)_{\mathfrak{m}_{F,a}} \right)^G \not\supseteq \mathbf{R}$ car la classe du polynôme x modulo $(x^2 + y^2)$ appartient à $\mathcal{O}_{F,a}^G$ puisque ses coefficients sont réels.

2.2.26 1. φ est un morphisme de \mathbf{R} -variétés si et seulement si

- φ est un morphisme de variétés complexes ;
- $\varphi \circ \sigma_{\mathbf{A}}|_{F_1} = \sigma_{\mathbf{A}}|_{F_2} \circ \varphi$.

La première condition est équivalente, d'après l'exercice 1.2.56, à l'existence de fonctions polynomiales $f_1, \dots, f_m \in \mathbf{C}[x_1, \dots, x_n]$ telles que pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in F_1$, $\varphi(x_1, \dots, x_n) = (f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n))$. La seconde condition est équivalente à

$$\varphi(\overline{x_1}, \dots, \overline{x_n}) = \overline{\varphi(x_1, \dots, x_n)},$$

c'est-à-dire que pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in F_1$ et pour tout $i = 1 \dots m$,

$$f_i(\overline{x_1}, \dots, \overline{x_n}) = \overline{f_i(x_1, \dots, x_n)}.$$

c'est-à-dire pour tout $i = 1 \dots m$, ${}^\sigma f_i = f_i$, *i. e.* f_i est à coefficients réels.

2. φ est une application rationnelle \mathbf{R} -régulière si et seulement si

- φ est une application rationnelle de \mathbf{R} -variétés ;
- $F_1(\mathbf{R}) \subset \text{dom}(\varphi)$.

Autrement dit, φ est une application rationnelle \mathbf{R} -régulière si et seulement si

- φ est une application rationnelle de variétés complexes ;
- $\varphi \circ \sigma_{\mathbf{A}}|_{F_1} = \sigma_{\mathbf{A}}|_{F_2} \circ \varphi$;
- $F_1(\mathbf{R}) \subset \text{dom}(\varphi)$.

D'après l'exercice 1.3.25, la première condition est équivalente à l'existence de fonctions polynomiales $g_1, \dots, g_m \in \mathbf{C}[x_1, \dots, x_n]$ et $h_1, \dots, h_m \in \mathbf{C}[x_1, \dots, x_n]$ telles que pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in \text{dom}(\varphi)$,

$$\varphi(x_1, \dots, x_n) = \left(\frac{g_1(x_1, \dots, x_n)}{h_1(x_1, \dots, x_n)}, \dots, \frac{g_m(x_1, \dots, x_n)}{h_m(x_1, \dots, x_n)} \right).$$

L'application φ est donc une application rationnelle \mathbf{R} -régulière si et seulement si les fonctions g_i et h_i sont à coefficients réels et les fonctions h_i ne s'annulent jamais sur $F_1(\mathbf{R})$.

2.2.31 L'atlas habituel est un atlas adapté. La raison en est que les fonctions qui définissent les ouverts sont à coefficients réels. Posons donc

$$U_0 := \{(x_0 : x_1) \in \mathbf{P}^1(\mathbf{C}) \mid x_0 \neq 0\}$$

et

$$\varphi_0: \begin{cases} U_0 & \longrightarrow \mathbf{C} \\ (x_0 : x_1) & \longmapsto \frac{x_1}{x_0} \end{cases} .$$

Posons de même $U_1 := \{(x_0 : x_1) \in \mathbf{P}^1(\mathbf{C}) \mid x_1 \neq 0\}$ et

$$\varphi_1: \begin{cases} U_1 & \longrightarrow \mathbf{C} \\ (x_0 : x_1) & \longmapsto \frac{x_0}{x_1} \end{cases} .$$

Alors

$$\sigma\varphi_0: \begin{cases} \sigma(U_0) & \xrightarrow{\sigma_{\mathbf{P}}} U_0 & \xrightarrow{\varphi_0} \mathbf{C} & \xrightarrow{\sigma_{\mathbf{A}}} \mathbf{C} \\ (x_0 : x_1) & \longmapsto (\overline{x_0} : \overline{x_1}) & \longmapsto \frac{\overline{x_1}}{\overline{x_0}} & \longmapsto \frac{x_1}{x_0} \end{cases}$$

et

$$\sigma\varphi_1: \begin{cases} U_1 & \longrightarrow \mathbf{C} \\ (x_0 : x_1) & \longmapsto \frac{x_0}{x_1} \end{cases} .$$

2.3.14 Utiliser l'exercice 1.2.56(3) pour exprimer l'isomorphisme

$$\varphi' \circ \varphi^{-1}: \varphi'(V) \rightarrow \varphi(V)$$

en coordonnées homogènes puis vérifier que $\varphi' \circ \varphi^{-1}$ s'étend en un isomorphisme $\varphi(V)_{\overline{\mathbf{C}}} \rightarrow \varphi'(V)_{\overline{\mathbf{C}}}$.

2.3.17 1. $\mathcal{I}(F) = (x, y)$ donc $F_{\mathbf{C}} = \{(0, 0)\}$ est une complexification de F qui est irréductible. Donc F est géométriquement irréductible.

2. $V = \mathcal{Z}_{\mathbf{C}}(x + iy) \cup \mathcal{Z}_{\mathbf{C}}(x - iy)$.

3. La \mathbf{R} -variété (V, σ) ne possède pas suffisamment de points réels, ce n'est donc pas une complexification de F .

2.6.15 Voir [Ser55a, Chapitre III, §2] si besoin.

2.6.27 Pour simplifier les notations, contentons nous de prouver le résultat dans le cas $n = 2$. Pour un système de coordonnées homogènes $(x_0 : x_1 : x_2)$ fixé, on note $U_k := \mathbf{P}^2 \setminus \mathcal{Z}(x_k)$ l'ouvert affine standard défini par $x_k \neq 0$. Considérons U_0 avec des coordonnées u_1, u_2 . Les sections de $\mathcal{K}_{\mathbf{P}^2}$ au-dessus de U_0 sont de la forme $p(u_1, u_2) du_1 \wedge du_2$. Nous allons calculer les pôles et les zéros de la section $du_1 \wedge du_2$ au-dessus de U_0 . Il y a un seul diviseur hors de U_0 , il s'agit de l'hyperplan $x_0 = 0$, et il suffit donc de vérifier sur ce diviseur. Calculons au-dessus de U_1 , avec les coordonnées v_0, v_2 telles que $(1 : u_1 : u_2) = (v_0 : 1 : v_2)$. Alors $u_1 = \frac{1}{v_0}$ et $u_2 = \frac{v_2}{v_0}$. On obtient

$$du_1 \wedge du_2 = \left(-\frac{1}{v_0^2} dv_0 \right) \wedge \left(\frac{v_0 dv_2 - v_2 dv_0}{v_0^2} \right) = -\frac{1}{v_0^3} dv_0 \wedge dv_2 .$$

Nous voyons donc un pôle d'ordre 3 le long de $v_0 = 0$, ce qu'il fallait démontrer.

2.6.28 En effet, du fait que $H^0(X, \mathcal{O}_X(-K_X)) \neq 0$, il existe un diviseur C *effectif* linéairement équivalent à $-K_X$.

On a donc la suite exacte

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_X(-C) \rightarrow \mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{O}_C \rightarrow 0$$

qui, tensorisée par Ω_X^1 , donne la suite exacte

$$0 \rightarrow \Omega_X^1(K_X) \rightarrow \Omega_X^1 \rightarrow \Omega_X^1|_C \rightarrow 0$$

dont la suite longue associée commence par

$$0 \rightarrow H^0(X, \Omega_X^1(K_X)) \rightarrow H^0(X, \Omega_X^1) \rightarrow \dots$$

d'où la conclusion puisque $H^0(X, \Omega_X^1) = 0$.

Pour la deuxième question, il suffit de remarquer que Θ_X est le fibré dual de Ω_X^1 et d'appliquer le théorème [D.2.5](#).

CHAPITRE 3

TOPOLOGIE DES VARIÉTÉS AVEC INVOLUTION

Munie de la topologie euclidienne, une \mathbf{R} -variété (X, σ) est un espace topologique muni d'une involution continue. Nous étudions dans ce chapitre l'action de cette involution sur l'homologie de l'espace topologique X .

Après une série de résultats préliminaires sur les modules involutifs, la dualité de Poincaré et les classes caractéristiques, nous exposons la théorie de Smith appliquée aux \mathbf{R} -variétés. Les applications principales sont des contraintes (prohibitions) sur la topologie du lieu réel en fonction de la topologie du lieu complexe. Ces contraintes prennent la forme de majorations/minorations : notamment Smith-Thom (3.8), Harnack (3.9), Petrovskii (3.11) et (3.12), Comessatti (3.14).

Si la variété X est non singulière, X et $X(\mathbf{R})$ sont alors des variétés topologiques et même des variétés différentielles. Rappelons en effet, voir la définition 1.4.1 et la proposition 2.2.27, que le lieu complexe est une variété différentielle de dimension $\dim_{\mathbf{R}} X = 2n$ et que le lieu réel est lui aussi une variété différentielle dont la dimension vaut $\dim_{\mathbf{R}} X(\mathbf{R}) = n$ si $X(\mathbf{R}) \neq \emptyset$. On peut alors utiliser des résultats supplémentaires, notamment la dualité de Poincaré et la théorie des classes caractéristiques. Nous obtenons ainsi des prohibitions sur la topologie du lieu réel sous forme de congruences : notamment celles de Rokhlin (3.15) et de Gudkov-Kharlamov-Krakhnov (3.16).

Nous nous concentrons alors sur le cas des \mathbf{R} -courbes avec une attention particulière portée aux courbes planes ce qui nous amène à discuter de la première partie du célèbre XVI^e problème de Hilbert.

Ensuite nous étudions la cohomologie de Galois de l'homologie de X et définissons les différentes notions de *Galois-Maximalité*. Dans de nombreux cas, cette méthode permet de calculer l'homologie du lieu réel à partir de

l'action du groupe de Galois $\text{Gal}(\mathbf{C}|\mathbf{R})$ sur l'homologie du lieu complexe. On obtient ainsi des majorations plus fines que précédemment.

Nous concluons le chapitre par l'étude des *cycles algébriques*, c'est-à-dire les classes d'homologie représentables par des sous-variétés algébriques.

3.1. Homologie et cohomologie des \mathbf{R} -variétés

La théorie d'homologie (et de cohomologie) utilisée est l'homologie singulière lorsqu'aucune précision n'est donnée. Bien entendu, lorsque l'espace topologique est sous-jacent à une variété différentielle ou à une variété algébrique complexe ou réelle quasi-projective munie de la topologie euclidienne, on détermine son homologie singulière en calculant son homologie simpliciale, voir la remarque B.3.3 et [Hat02, § 2.1]. Les groupes d'homologie d'une variété topologique ou différentielle *compacte* sont de type fini ainsi que ceux d'une variété algébrique complexe ou réelle *projective*, voir [Hat02, Corollary A.8]. Nous notons $H_k(X, L; A)$ le k^e groupe d'homologie et $H^k(X, L; A)$ le k^e groupe de cohomologie de la paire (X, L) à coefficients dans un groupe abélien A , typiquement A sera un anneau ou même un corps $A = \mathbf{Z}_2, \mathbf{Z}, \mathbf{Q}, \mathbf{R}, \mathbf{C}$; si $L = \emptyset$, on abrège « X, \emptyset » en « X » dans les notations. On renvoie en appendice, section B.3, pour les définitions de base. Rappelons que selon un usage courant (à ne pas confondre avec le groupe profini $\mathbf{Z}_p = \varprojlim \mathbf{Z}/p^n \mathbf{Z}$ où p est un entier premier fixé et n parcourt les entiers naturels), nous notons

$$\mathbf{Z}_m := \mathbf{Z}/m\mathbf{Z}$$

le groupe cyclique d'ordre $m > 1$.

Modules involutifs. — Un *module involutif* est un couple (M, σ) où M est un \mathbf{Z} -module muni d'une involution linéaire σ . Un module involutif est un G -groupe pour le groupe $G = \{1, \sigma\} \simeq \mathbf{Z}_2$. En effet un \mathbf{Z} -module est en particulier un groupe abélien et tout groupe abélien est muni d'une unique structure de \mathbf{Z} -module. On note M^G ou M^σ le sous-module de M formé des éléments invariants par σ et $M^{-\sigma}$ le sous-module constitué des éléments anti-invariants.

Lemme 3.1.1. — *Soit M un \mathbf{Z} -module libre de rang fini n muni d'une involution linéaire σ . Alors il existe une base*

$$(a_1, \dots, a_r, b_1, \dots, b_\lambda, c_{\lambda+1}, \dots, c_{n-r})$$

de M telle que

1. pour $1 \leq i \leq r$, $\sigma(a_i) = a_i$;
2. pour $1 \leq i \leq \lambda$, $\sigma(b_i) = a_i - b_i$;
3. pour $\lambda \leq i \leq n - r$, $\sigma(c_i) = -c_i$.

Autrement dit, M admet une décomposition en somme directe

$$M_1 \oplus M_2 \oplus B_1 \oplus \cdots \oplus B_\lambda$$

où $\sigma|_{M_1} = \text{id}_{M_1}$, $\sigma|_{M_2} = -\text{id}_{M_2}$ et $\sigma|_{B_i}$ admet une matrice de la forme $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Démonstration. — Par convention ⁽¹⁾, on note $1 = \sigma \circ \sigma$ l'application identité de M . Le sous-module invariant $\ker(1 - \sigma)$ est facteur direct dans M et le morphisme induit par $1 + \sigma$ sur $M/\ker(1 - \sigma)$ est identiquement nul puisque $(1 - \sigma) \circ (1 + \sigma) \equiv 0$. Autrement dit, l'application induite par σ sur $M/\ker(1 - \sigma)$ est $-\text{id}$. Dans une base de M complétant une base de $\ker(1 - \sigma)$, une matrice de σ est donc de la forme

$$\begin{pmatrix} \mathbf{I}_r & N \\ 0 & -\mathbf{I}_{n-r} \end{pmatrix}.$$

En utilisant des matrices de la forme $\begin{pmatrix} \mathbf{I}_r & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$ pour effectuer des changements de base, on voit que l'on peut réduire N modulo 2 et remplacer N par des matrices de la forme NC avec C inversible. Le lemme suit.

Pour la seconde partie du lemme, il suffit de considérer la base

$$(a_1 - b_1, \dots, a_\lambda - b_\lambda, b_1, \dots, b_\lambda)$$

du sous-module engendré par $(a_1, \dots, a_\lambda, b_1, \dots, b_\lambda)$ et de réordonner les termes. \square

Remarquons que l'entier λ apparaissant dans le lemme ci-dessus correspond à la dimension $\lambda := \lambda_\sigma$ du \mathbf{Z}_2 -espace vectoriel $(1 + \sigma)(M \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Z}_2)$ (voir l'appendice A.4 pour la définition du produit tensoriel \otimes). Il s'agit donc d'un invariant du module involutif (M, σ) . De même le rang $r := r_\sigma = \text{rg } M^\sigma$ (qui est aussi égal à $\text{rg } M_1 + \lambda_\sigma$) du sous-module des invariants M^σ est indépendant du choix d'une base particulière de M . On a donc la proposition suivante :

1. Cette notation provient du fait que l'identité correspond à l'élément unité de l'algèbre $\mathbf{Z}[G]$ du groupe G .

Proposition 3.1.2. — Soient (M, σ) et (N, τ) des \mathbf{Z} -modules libres de type fini munis d'involutions et $(M, \sigma) \rightarrow (N, \tau)$ un isomorphisme G -équivariant (autrement dit $(M, \sigma) \rightarrow (N, \tau)$ est un isomorphisme de modules involutifs). Alors $\lambda_\sigma = \lambda_\tau$ et $r_\sigma = r_\tau$.

Définition 3.1.3. — Soit M un \mathbf{Z} -module libre de rang fini n muni d'une involution linéaire σ . On appelle *caractéristique de Comessatti*⁽²⁾, de (M, σ) la dimension $\lambda := \lambda_\sigma$ du \mathbf{Z}_2 -espace vectoriel $(1 + \sigma)(M \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Z}_2)$.

Comme M est un G -groupe abélien, les ensembles de cohomologie de Galois $H^k(G, M)$ sont des groupes (et même des espaces vectoriels sur \mathbf{Z}_2), voir [Ser94, §I.5] pour une définition générale des groupes $H^k(G, M)$.

Proposition 3.1.4. — Soient (M, σ) un module involutif et $G = \{1, \sigma\}$. On a pour tout $k > 0$, $H^k(G, M) \simeq H^{k+2}(G, M)$ et

$$\begin{aligned} H^0(G, M) &= \ker(1 - \sigma) &= M^\sigma ; \\ H^1(G, M) &= \ker(1 + \sigma) / \operatorname{Im}(1 - \sigma) &= M^{-\sigma} / \operatorname{Im}(1 - \sigma) ; \\ H^2(G, M) &= \ker(1 - \sigma) / \operatorname{Im}(1 + \sigma) &= M^\sigma / \operatorname{Im}(1 + \sigma) . \end{aligned}$$

Démonstration. — Voir [Wei94, Theorem 6.2.2] en remarquant que la norme sur $\mathbf{Z}[G]$ est l'élément $1 + \sigma$. \square

Lemme 3.1.5. — Soit E un \mathbf{Z}_2 -espace vectoriel muni d'une involution linéaire σ ⁽³⁾, on a $E^\sigma = E^{-\sigma}$ et $(1 + \sigma)E = (1 - \sigma)E$ d'où

$$H^1(G, E) = H^2(G, E)$$

et en posant $\lambda_\sigma = \dim_{\mathbf{Z}_2}(1 + \sigma)E$, on a

$$\begin{aligned} \dim_{\mathbf{Z}_2} E^G &= \dim_{\mathbf{Z}_2} E - \lambda_\sigma ; \\ \dim_{\mathbf{Z}_2} H^1(G, E) &= \dim_{\mathbf{Z}_2} E - 2\lambda_\sigma . \end{aligned}$$

Démonstration. — Il suffit de remarquer que $E^G = \ker(1 + \sigma)$. \square

Proposition 3.1.6. — Soit M un \mathbf{Z} -module libre de rang n muni d'une action de G . Le groupe G agit aussi sur le \mathbf{Z}_2 -espace vectoriel $M_2 = M \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Z}_2 =$

2. Nous suivons en cela Silhol [Sil89, I.(3.5.1), page 15].

3. L'espace E est muni d'une unique structure de \mathbf{Z} -module en composant à gauche l'action de \mathbf{Z}_2 par l'unique morphisme d'anneaux $\mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z}_2$.

$M/2M$ et en notant $r = \text{rg } M^\sigma$ et $\lambda = \dim_{\mathbf{Z}_2}(1 + \sigma)M_2$, on a alors

$$\begin{aligned} \dim_{\mathbf{Z}_2} H^1(G, M) &= \text{rg } M^{-\sigma} - \lambda = n - r - \lambda ; \\ \dim_{\mathbf{Z}_2} H^2(G, M) &= r - \lambda ; \\ \dim_{\mathbf{Z}_2} M_2^\sigma &= n - \lambda ; \\ \dim_{\mathbf{Z}_2} H^1(G, M_2) &= n - 2\lambda . \end{aligned}$$

Démonstration. — Il suffit d'appliquer les lemmes 3.1.1 et 3.1.5. \square

Nous concluons cette sous-section avec un résultat bien utile sur les réseaux entiers involutifs, c'est-à-dire les \mathbf{Z} -modules libres de rang fini n munis de formes bilinéaires symétriques à valeurs entières, voir la définition A.6.5, munis d'involutions.

Proposition 3.1.7. — *Soit (M, Q) un réseau quadratique entier muni d'une isométrie involutive σ . Alors le discriminant de la restriction de Q à la partie invariante (resp. anti-invariante) de M vérifie*

$$|\det(Q|_{M^\sigma})| = |\det(Q|_{M^{-\sigma}})| = 2^\lambda .$$

Démonstration. — On applique le lemme A.6.9 au sous-module des invariants pour obtenir $|\det(Q|_{M^\sigma})| = |\det(Q|_{M^{-\sigma}})| = [M : M^\sigma \oplus M^{-\sigma}]$ puis le lemme 3.1.1 qui nous permet de conclure. \square

Dualité de Poincaré sur les \mathbf{R} -variétés. — La dualité de Poincaré est valide pour les espaces topologiques qui sont des variétés topologiques, voir la définition B.5.1, et à ce titre, elle s'applique aux \mathbf{R} -variétés non singulières. Nous considérons ici le cas où la variété complexe sous-jacente est compacte pour la topologie euclidienne. Pour le cas non compact, on renvoie au théorème B.7.1.

Proposition 3.1.8. — *Soit (M, σ) une variété topologique compacte et orientée de dimension n munie d'une involution qui préserve (resp. qui renverse) l'orientation et soit $k \in \{0, \dots, n\}$. Alors l'isomorphisme de dualité de Poincaré (corollaire B.7.2)*

$$\begin{aligned} D_M: H^k(M; \mathbf{Z}) &\xrightarrow{\cong} H_{n-k}(M; \mathbf{Z}) \\ \phi &\longmapsto [M] \frown \phi \end{aligned}$$

est équivariant (resp. anti-équivariant) pour l'action de $G = \mathbf{Z}_2$ déterminée par σ .

Démonstration. — Il suffit d'appliquer la naturalité du cap-produit, proposition B.7.5, à l'application continue $\sigma: M \rightarrow M$ pour $l = n$ et $\alpha = [M]$:

$$\sigma_*([M]) \frown \phi = \sigma_*([M] \frown \sigma^*(\phi)) .$$

Comme l'application linéaire σ_* est involutive, on en déduit que

$$\sigma_*(D_M(\phi)) = D_M(\sigma^*(\phi)) \quad (\text{resp.} \quad \sigma_*(D_M(\phi)) = -D_M(\sigma^*(\phi)))$$

si $\sigma_*([M]) = [M]$ (resp. $\sigma_*([M]) = -[M]$). \square

Corollaire 3.1.9. — *Soit (X, σ) une \mathbf{R} -variété projective (ou une \mathbf{R} -variété analytique compacte) non singulière de dimension n . Alors l'isomorphisme de dualité de Poincaré*

$$\begin{aligned} D_X: H^k(X; \mathbf{Z}) &\xrightarrow{\cong} H_{2n-k}(X; \mathbf{Z}) \\ \phi &\longmapsto [X] \frown \phi \end{aligned}$$

est équivariant si n est pair et anti-équivariant si n est impair.

Démonstration. — En effet d'après la proposition 2.2.27, la variété complexe X munie de sa topologie euclidienne possède une structure de variété différentielle orientée de dimension réelle $2n$ et d'après la proposition 2.2.28, la structure réelle σ préserve l'orientation si n est pair et la renverse si n est impair. \square

Orientabilité et classes caractéristiques. — Une variété complexe est toujours orientable (et même orientée), voir l'exercice B.5.11 et la remarque E.2.2(4), ce qui n'est pas toujours le cas d'une variété réelle. Dans cette sous-section, nous établissons quelques résultats d'orientabilité pour le lieu réel d'une \mathbf{R} -variété. Le premier cas intéressant est celui des surfaces car le lieu réel d'une \mathbf{R} -courbe non singulière étant de dimension réelle 1, il est orientable, voir la remarque B.5.5.

Nous traitons tout d'abord le cas des hypersurfaces non singulières de \mathbf{P}^3 .

Proposition 3.1.10. — *Soit $X_d \subset \mathbf{P}^3(\mathbf{C})$ une surface algébrique non singulière définie par un polynôme de degré d à coefficients réels. On suppose que $X_d(\mathbf{R}) = X_d \cap \mathbf{P}^3(\mathbf{R})$ est non vide. Alors la surface topologique compacte $X_d(\mathbf{R})$ est orientable si et seulement si d est pair.*

Démonstration. — Par dualité de Poincaré, voir la proposition B.7.17, une surface topologique $V \subset \mathbf{P}^3(\mathbf{R})$ est orientable si et seulement si sa classe d'homologie $[V] \in H_2(\mathbf{P}^3(\mathbf{R}); \mathbf{Z}_2)$ est nulle. Le groupe $H_2(\mathbf{P}^3(\mathbf{R}); \mathbf{Z}_2)$ est engendré par la classe d'un hyperplan réel $H \subset \mathbf{P}^3(\mathbf{R})$. La classe $[X_d(\mathbf{R})] = d[H]$ est donc nulle dans $H_2(\mathbf{P}^3(\mathbf{R}); \mathbf{Z}_2)$ si et seulement si d est pair. \square

Remarque 3.1.11. — Le groupe $H_4(\mathbf{P}^3(\mathbf{C}); \mathbf{Z})$ étant engendré par la classe d'un hyperplan complexe $H \subset \mathbf{P}^3(\mathbf{C})$, on a $[X_d] = d[H]$ dans $H_4(\mathbf{P}^3(\mathbf{C}); \mathbf{Z})$. On pourrait donc être tenté de raisonner à partir du lieu complexe, cette idée est illustrée par l'exemple 3.1.17, voir aussi la section 3.7.

Dans le cas où le degré d est impair, on a mieux :

Proposition 3.1.12. — *Soit $X_d \subset \mathbf{P}^3(\mathbf{C})$ une surface algébrique non singulière définie par un polynôme de degré d à coefficients réels. Si d est impair, alors $X_d(\mathbf{R}) \neq \emptyset$ et possède une unique composante connexe non orientable (et éventuellement une ou plusieurs composantes connexes orientables). De plus l'unique composante connexe non orientable est de caractéristique d'Euler impaire.*

Démonstration. — 1. D'après la proposition 2.6.48, on a $X_d(\mathbf{R}) \neq \emptyset$.

2. D'après la proposition 3.1.10, le lieu réel $X_d(\mathbf{R})$ possède au moins une composante connexe non orientable puisqu'une droite de $\mathbf{P}^3(\mathbf{R})$ transverse à $X_d(\mathbf{R})$ le coupe en un nombre impair d de points.
3. Il ne peut pas y avoir d'autre composante non orientable car dans $\mathbf{P}^3(\mathbf{R})$ deux surfaces non orientables se rencontrent nécessairement. En effet, soit H un plan transverse à $X_d(\mathbf{R})$ (un tel plan existe d'après le théorème de Bertini D.9.1), alors la courbe découpée sur H par chaque composante non orientable contient une pseudo-droite. Or deux pseudo-droites de $H \simeq \mathbf{RP}^2$ se rencontrent nécessairement, voir [BR90, 5.1.6] si besoin.
4. Enfin, l'affirmation sur la caractéristique d'Euler vient du fait qu'une surface non orientable de \mathbf{RP}^3 est nécessairement cobordante à \mathbf{RP}^2 , [BW69], donc nécessairement difféomorphe à la somme connexe de \mathbf{RP}^2 avec un nombre fini de bouteilles de Klein \mathbf{K}^2 (rappelons que la somme connexe $\mathbf{V} \# \mathbf{K}^2$ d'une surface non orientable \mathbf{V} avec une bouteille de Klein est homéomorphe à la somme connexe $\mathbf{V} \# \mathbf{T}^2$ de \mathbf{V} avec un tore).

□

Exemple 3.1.13. — Une surface cubique non singulière $X_3(\mathbf{R})$ dans \mathbf{RP}^3 est homéomorphe à l'une des surfaces de la liste suivante (dans cette liste, \mathbf{V}_g est la surface non orientable de caractéristique d'Euler topologique $2 - g$ et \sqcup désigne la somme disjointe, voir la notation 4.2.15)

$$\mathbf{V}_1 = \mathbf{RP}^2, \quad \mathbf{V}_3, \quad \mathbf{V}_5, \quad \mathbf{V}_7, \quad \mathbf{RP}^2 \sqcup \mathbf{S}^2.$$

On renvoie à [BR90, Proposition 5.6.4] pour une preuve élémentaire. Par anticipation du chapitre 4, nous pouvons aussi profiter du fait qu'une surface cubique non singulière de $\mathbf{P}^3(\mathbf{C})$ est une surface de del Pezzo de degré 3, c'est-à-dire que la surface complexe X_3 est isomorphe à l'éclatée de $\mathbf{P}^2(\mathbf{C})$ en 6 points en position générale, c'est-à-dire qu'ils n'appartiennent pas à une même conique (ils ne sont pas *coconiques*) et trois d'entre eux ne sont pas alignés. Considérons le cas où ces six points sont globalement fixés par $\sigma_{\mathbf{P}}$. Le nombre de paires de points non réels conjugués pouvant être 0, 2, 4 ou 6, on trouve les quatre premières possibilités (voir l'exemple 4.2.18 pour le calcul de la topologie de l'éclatée en un point). Pour la dernière forme, il suffit d'éclater un point réel sur un fibré en coniques au-dessus de \mathbf{P}^1 , \mathbf{R} -minimal avec quatre fibres singulières, voir l'exemple 4.2.8. Un tel fibré possède un lieu réel formé de deux sphères, après éclatement, on obtient le type topologique cherché. Pour assurer que la surface complexe soit bien l'éclatée de \mathbf{P}^2 en 6 points, il faut imposer qu'un modèle relativement minimal, qui est une surface de Hirzebruch d'après l'exercice 4.2.11, soit d'indice 1. Il suffit alors de se rappeler que chaque fibre singulière est formée de deux (-1) -courbes non réelles conjuguées, cela fait donc quatre contractions, auxquelles il faut ajouter notre éclatement supplémentaire, et la contraction de la section exceptionnelle qui est une (-1) -courbe par hypothèse, voir aussi [Sil89, §VI.5].

Revenons aux surfaces abstraites. Grâce à la structure de variété différentielle d'une variété algébrique réelle ou complexe non singulière, on peut utiliser la théorie des classes caractéristiques de son fibré tangent. On renvoie à [MS74, §4 et §14] pour la construction et les premières propriétés de ces classes.

Définition 3.1.14. — Soit (X, σ) une \mathbf{R} -variété non singulière de dimension n . On note T_X le fibré différentiel tangent à la variété différentielle de dimension $2n$ sous-jacente à X et, si $X(\mathbf{R}) \neq \emptyset$, $T_{X(\mathbf{R})}$ le fibré différentiel tangent à la variété différentielle de dimension n sous-jacente à $X(\mathbf{R})$. Le fibré $T_{X(\mathbf{R})}$ est un fibré vectoriel réel de rang n et sa k^e classe de Stiefel-Whitney

$$w_k(X(\mathbf{R})) := w_k(T_{X(\mathbf{R})}) \in H^k(X(\mathbf{R}); \mathbf{Z}_2)$$

est la k^e classe de Stiefel-Whitney de $X(\mathbf{R})$.

Le fibré T_X est un fibré vectoriel réel de rang $2n$ et sa k^e classe de Stiefel-Whitney

$$w_k(X) := w_k(T_X) \in H^k(X; \mathbf{Z}_2)$$

est la k^e classe de Stiefel-Whitney de X . Le fibré T_X est naturellement muni d'une structure de fibré vectoriel complexe de rang n et sa k^e classe de Chern

$$c_k(X) := c_k(T_X) \in H^{2k}(X; \mathbf{Z})$$

est la k^e classe de Chern de X .

La nullité de la première classe de Stiefel-Whitney $w_1(V)$ d'une variété différentielle compacte V caractérise son orientabilité, voir [MS74, Problem 12.A]. La classe $w_1(X(\mathbf{R}))$ caractérise donc l'orientabilité du lieu réel $X(\mathbf{R})$ (*a contrario* la première classe de Stiefel-Whitney de X , $w_1(X)$, est toujours nulle puisque X est orientable). À savoir :

Proposition 3.1.15. — *Soit (X, σ) une \mathbf{R} -variété non singulière de lieu réel non vide. Alors $X(\mathbf{R})$ est orientable si et seulement si*

$$w_1(X(\mathbf{R})) = 0 \quad \text{dans} \quad H^1(X(\mathbf{R}); \mathbf{Z}_2).$$

Il n'est pas toujours aisé de calculer les classes caractéristiques du lieu réel mais on peut dans certains cas utiliser celles du lieu complexe.

Proposition 3.1.16. — *Soit X une variété complexe projective non singulière de dimension n . Les classes de Stiefel-Whitney et de Chern de X satisfont les relations suivantes :*

1. $w_{2k+1}(X) = 0$;
2. $w_{2k}(X) \equiv c_k(X) \pmod{2}$.

De plus, si σ est une structure réelle sur X , alors

3. $\sigma^* c_k(X) = (-1)^k c_k(X)$;
4. $\sigma^* w_{2k}(X) = w_{2k}(X)$.

Démonstration. — Pour les deux premières identités, voir [MS74, Problem 14.B]. Pour la troisième, on commence par remarquer que l'image par σ du fibré tangent T_X est isomorphe au fibré conjugué $\overline{T_X}$ puis on applique [MS74, Lemma 14.9]. La dernière égalité est alors une conséquence des trois précédentes. \square

Exemple 3.1.17. — Soit $X_d \subset \mathbf{P}^3(\mathbf{C})$ une surface algébrique non singulière de degré d , alors $w_2(X_d) = 0$ si et seulement si d est pair. En effet, $w_2(X) \equiv c_1(X) \pmod{2}$ et $c_1(X) = c_1(dH) = dc_1(H)$ pour un hyperplan $H \subset \mathbf{P}^3(\mathbf{C})$.

Théorème 3.1.18. — Soit (X, σ) une \mathbf{R} -variété non singulière de dimension paire $n = 2m$, de lieu réel non vide et telle que $b_1(X; \mathbf{Z}_2) = 0$.

Si la seconde classe de Stiefel-Whitney de X , $w_2(X) \in H^2(X; \mathbf{Z}_2)$ est nulle, alors $X(\mathbf{R})$ est orientable.

Remarque 3.1.19. — Ce théorème s'applique en particulier au cas où la variété X est simplement connexe.

Preuve du théorème 3.1.18. — Nous nous sommes inspiré de [DK00, 2.9.1 Remark, page 753]). L'idée est d'appliquer un théorème d'Edmonds :

Lemme 3.1.20 ([Edm81, Theorem 3]). — Soit V une variété différentielle orientée spinorielle (c'est-à-dire qu'elle possède au moins une structure spin, voir la section B.5) munie d'une involution σ de classe C^∞ qui préserve l'orientation et une structure spin. Alors si le lieu fixe V^σ est non vide, il est orientable.

Munie de sa topologie euclidienne, la variété complexe X possède une structure de variété différentielle orientée, voir la proposition 2.2.27, or une variété différentielle orientée V est spinorielle si et seulement si $w_2(T_V) = 0$, voir la proposition B.5.20. D'après [LM89, Chapter II, Theorem 2.1], comme $b_1(X; \mathbf{Z}_2) = 0$, il n'existe qu'une seule structure spin qui est donc fixée par σ . Par ailleurs, comme n est pair, σ fixe l'orientation d'après la proposition 2.2.28. Il ne reste plus qu'à appliquer le théorème d'Edmonds ci-dessus. \square

Exemple 3.1.21. — Le lieu réel d'une \mathbf{R} -surface K3, voir la définition 4.5.3, est vide ou orientable. voir la preuve de la proposition 4.5.6.

3.2. Théorie de Smith

Suivant [Bre72, Chapitre III], nous présentons une version de la théorie de Smith basée sur l'homologie simpliciale, c'est-à-dire restreinte en principe aux espaces topologiques triangulables, voir la définition B.3.2, ce qui comprend en particulier les variétés différentielles mais aussi les variétés algébriques complexes ou réelles quasi-projectives munies de leur topologie euclidienne, voir la remarque B.3.3.

Soit (X, σ) une \mathbf{R} -variété projective de dimension n . On munit le lieu complexe X et le lieu réel $X(\mathbf{R})$ de la topologie euclidienne, ce qui en fait des espaces topologiques compacts triangulables, voir la remarque B.3.3. La variété X n'est pas supposée non singulière. En revanche, nous la supposons

projective, donc compacte pour la topologie euclidienne, ce qui nous permet d'assurer que les groupes d'homologie sont de type fini.

Remarque 3.2.1. — La plupart des résultats de cette section restent valables pour un espace analytique complexe compact muni d'une involution anti-holomorphe. En particulier lorsque X est une variété kählérienne compacte, voir la définition D.3.4, et σ une involution anti-holomorphe sur X . Cette généralisation sera notamment utile pour l'étude des surfaces K3 réelles au chapitre 4.

L'involution σ munit X d'une action du groupe de Galois $G = \text{Gal}(\mathbf{C}|\mathbf{R}) \simeq \mathbf{Z}_2$. Soit $L \subset X$ une sous-variété stable par σ (une \mathbf{R} -sous-variété). Une triangulation de la paire (X, L) est une paire simpliciale (\tilde{X}, \tilde{L}) , voir la définition B.3.1, munie d'une action de G . En particulier σ agit sur \tilde{X} de manière simpliciale. Comme X est compacte, \tilde{X} est un complexe simplicial fini. Quitte à passer à une subdivision barycentrique, on peut supposer que si σ fixe globalement un simplexe s de \tilde{X} , elle fixe tous les sommets de s [Bre72, Proposition III.1.1]. On note \tilde{X}^G le sous-complexe fixé par σ et $\tilde{L}^G = \tilde{L} \cap \tilde{X}^G$. Le complexe \tilde{X}^G (resp. \tilde{L}^G) est alors une triangulation de $X(\mathbf{R})$ (resp. $L(\mathbf{R})$). On note $C(\tilde{X}, \tilde{L}; \mathbf{Z}_2)$ le groupe des chaînes de la paire (\tilde{X}, \tilde{L}) à coefficients dans \mathbf{Z}_2 .

Théorème 3.2.2. — *La suite*

$$(3.1) \quad 0 \rightarrow \rho C(\tilde{X}, \tilde{L}; \mathbf{Z}_2) \oplus C(\tilde{X}^G, \tilde{L}^G; \mathbf{Z}_2) \xrightarrow{i} C(\tilde{X}, \tilde{L}; \mathbf{Z}_2) \xrightarrow{\rho} \rho C(\tilde{X}, \tilde{L}; \mathbf{Z}_2) \rightarrow 0$$

où i est la somme des injections canoniques et $\rho = 1 + \sigma$, est une suite exacte de complexes de chaînes (on rappelle que $1 = \sigma \circ \sigma$ est l'application identité).

Démonstration. — En effet, l'avant-dernière flèche est évidemment surjective et si s est un simplexe fixé par l'involution σ , on a $\rho(s) = 2s = 0$, on en déduit que i est injective. Il reste à montrer l'exactitude en $C(\tilde{X}, \tilde{L}; \mathbf{Z}_2)$. Pour chaque n , il suffit de considérer les n -chaînes dans l'orbite de s pour chaque n -simplexe $s \subset \tilde{X} \setminus \tilde{L}$. On a clairement $\rho \circ \rho = 2(1 + \sigma) = 0$, ce qui montre que $\text{Im } i \subset \ker \rho$. Soit $s \in \ker \rho$. Si s est invariant, alors $\rho(s) = 2s = 0$ et $s = i(s) \in \text{Im } i$. Si $s \notin \tilde{X}^G$, une n -chaîne dans l'orbite de s s'écrit $k_1 s + k_2 \sigma(s)$ avec $k_i \in \{0, 1\}$ pour $i = 1, 2$ et correspond à l'unique élément $k_1 + k_2 \sigma$ de l'algèbre $\Lambda := \mathbf{Z}_2[G]$ du groupe G . La suite (3.1) est réduite à la suite d'espaces vectoriels

$$0 \rightarrow \rho \Lambda \xrightarrow{i} \Lambda \xrightarrow{\rho} \rho \Lambda \rightarrow 0.$$

L'exactitude de cette dernière est immédiate : Λ est un espace vectoriel de dimension 2 sur \mathbf{Z}_2 , et $\ker(\sigma: \Lambda \rightarrow \Lambda) = \langle \sigma \rangle$ est un sous-espace vectoriel de dimension 1. \square

Remarque 3.2.3. — Plus généralement, si G est un groupe d'ordre p premier, on a une suite exacte analogue à (3.1) pour les chaînes à coefficients dans \mathbf{Z}_p , voir [Bre72, Chapitre III, Theorem 3.1].

Les groupes d'homologie singulière des paires (X, L) et $(X(\mathbf{R}), L(\mathbf{R}))$ sont isomorphes aux groupes d'homologie associés aux complexes simpliciaux $C(\tilde{X}, \tilde{L}; \mathbf{Z}_2)$ et $C(\tilde{X}^G, \tilde{L}^G; \mathbf{Z}_2)$ (voir [Hat02, § 2.1]), la suite exacte (3.1) induit donc une suite longue en homologie :

$$(3.2) \quad \cdots \xrightarrow{\rho_{k+1}} H_{k+1}(\rho C(\tilde{X}, \tilde{L}; \mathbf{Z}_2)) \xrightarrow{\gamma_{k+1}} \\ H_k(\rho C(\tilde{X}, \tilde{L}; \mathbf{Z}_2)) \oplus H_k(X(\mathbf{R}), L(\mathbf{R}); \mathbf{Z}_2) \xrightarrow{i_k} \\ H_k(X, L; \mathbf{Z}_2) \xrightarrow{\rho_k} H_k(\rho C(\tilde{X}, \tilde{L}; \mathbf{Z}_2)) \xrightarrow{\gamma_k} \cdots$$

où ρ_k est l'application induite par ρ sur chaque groupe d'homologie.

Remarque 3.2.4. — Notons σ_* l'action de σ sur $H_k(X, L; \mathbf{Z}_2)$. Alors la restriction de σ_* à $\text{Im } i_k$ est l'identité.

À k fixé, on déduit de la suite exacte (3.2) la suite exacte

$$(3.3) \quad 0 \rightarrow H_{k+1}(\rho C(\tilde{X}, \tilde{L}; \mathbf{Z}_2)) / \text{Im } \rho_{k+1} \rightarrow \\ H_k(\rho C(\tilde{X}, \tilde{L}; \mathbf{Z}_2)) \oplus H_k(X(\mathbf{R}), L(\mathbf{R}); \mathbf{Z}_2) \rightarrow H_k(X, L; \mathbf{Z}_2) \rightarrow \text{Im } \rho_k \rightarrow 0.$$

Les groupes d'homologie apparaissant dans la suite exacte ci-dessus sont des \mathbf{Z}_2 -espaces vectoriels. Pour $k = 0, \dots, 2n$ on pose $a_k := \dim_{\mathbf{Z}_2} \text{Im } \rho_k$ et $c_k :=$

$\dim_{\mathbf{Z}_2} H_k(\rho C(\tilde{X}, \tilde{L}; \mathbf{Z}_2))$ et l'on obtient

$$\begin{array}{rcll}
 0 & = & \dim H_{2n}(X, L) & -c_{2n} & -a_{2n} \\
 0 & = & \dim H_{2n-1}(X, L) & -c_{2n-1} + c_{2n} & -a_{2n} - a_{2n-1} \\
 \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\
 0 & = & \dim H_{n+1}(X, L) & -c_{n+1} + c_{n+2} & -a_{n+2} - a_{n+1} \\
 \dim H_n(X(\mathbf{R}), L(\mathbf{R})) & = & \dim H_n(X, L) & -c_n + c_{n+1} & -a_{n+1} - a_n \\
 \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\
 \dim H_k(X(\mathbf{R}), L(\mathbf{R})) & = & \dim H_k(X, L) & -c_k + c_{k+1} & -a_{k+1} - a_k \\
 \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\
 \dim H_1(X(\mathbf{R}), L(\mathbf{R})) & = & \dim H_1(X, L) & -c_1 + c_2 & -a_2 - a_1 \\
 \dim H_0(X(\mathbf{R}), L(\mathbf{R})) & = & \dim H_0(X, L) & -c_0 + c_1 & -a_1 - a_0 .
 \end{array}$$

En sommant les égalités et en remarquant que $c_0 = a_0 = 0$, on obtient :

$$(3.4) \quad \sum_{l=0}^n \dim H_l(X(\mathbf{R}), L(\mathbf{R}); \mathbf{Z}_2) = \sum_{k=0}^{2n} (\dim H_k(X, L; \mathbf{Z}_2) - 2a_k) .$$

Afin d'alléger les notations, restreignons-nous au cas où $L = \emptyset$ et donnons une interprétation géométrique des groupes $H_r(\rho C(\tilde{X}; \mathbf{Z}_2))$ en utilisant la projection $p: X \rightarrow Y$ vers l'espace des orbites $Y := X/G$ (qui est triangulable, voir [Bre72, III.§ 1, page 117]). L'espace topologique

$$Y = X/G$$

est le *quotient topologique* (ou *espace topologique quotient*) de Y par G , c'est-à-dire que Y est muni de la topologie la plus fine pour laquelle la projection p est continue. On considère $X(\mathbf{R})$ comme un sous-espace aussi bien de X que de Y , ce qui revient à identifier le lieu de ramification $X(\mathbf{R})$ et le lieu de branchement $p(X(\mathbf{R}))$. La projection p est un revêtement double ramifié le long de $X(\mathbf{R})$ et la restriction $X \setminus X(\mathbf{R}) \rightarrow Y \setminus X(\mathbf{R})$ de p est un revêtement double non ramifié (voir [Hat02, § 1.3]).

Proposition 3.2.5. — *Les groupes $H_k(\rho C(\tilde{X}; \mathbf{Z}_2))$ intervenant dans la suite exacte (3.2) sont isomorphes aux groupes d'homologie de la paire $(Y, X(\mathbf{R}))$:*

$$\forall k, \quad H_k(\rho C(\tilde{X}; \mathbf{Z}_2)) \simeq H_k(Y, X(\mathbf{R}); \mathbf{Z}_2) .$$

Démonstration. — On commence par montrer que

$$H_k(\rho C(\tilde{X}, \tilde{L}; \mathbf{Z}_2)) \simeq H_k(\tilde{X}/G, \tilde{X}^G \cup \tilde{L}/G; \mathbf{Z}_2)$$

en suivant [Bre72, III.(3.4)]. Soit s un simplexe de $\tilde{X} \setminus \tilde{L}$, alors $\rho((k_1 + k_2\sigma)(s)) = (k_1 + k_2)\rho(s)$ et $\rho((k_1 + k_2\sigma)(s)) = 0$ si et seulement si $k_1 + k_2 = 0$ ou

$s \in \tilde{X}^G$. L'application $\rho: C(\tilde{X}, \tilde{L}; \mathbf{Z}_2) \rightarrow C(\tilde{X}, \tilde{L}; \mathbf{Z}_2)$ possède donc le même noyau que la composition

$$C(\tilde{X}, \tilde{L}; \mathbf{Z}_2) \xrightarrow{j} C(\tilde{X}, \tilde{X}^G \cup \tilde{L}; \mathbf{Z}_2) \xrightarrow{\pi} C(\tilde{X}/G, \tilde{X}^G \cup \tilde{L}/G; \mathbf{Z}_2).$$

Les images de ces morphismes sont donc isomorphes via $\rho(c) \mapsto (\pi \circ j)(c)$ pour une chaîne c . En passant aux groupes d'homologie, on a pour $L = \emptyset$:

$$H_k(\rho C(\tilde{X}; \mathbf{Z}_2)) \simeq H_k(\tilde{X}/G, \tilde{X}^G; \mathbf{Z}_2)$$

et

$$H_k(\tilde{X}/G, \tilde{X}^G; \mathbf{Z}_2) \simeq H_k(Y, X(\mathbf{R}); \mathbf{Z}_2).$$

□

Pour un usage ultérieur, on en profite pour remarquer que le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \rightarrow \rho C(\tilde{X}) \oplus C(\tilde{X}^G) & \xrightarrow{i} & C(\tilde{X}) & \xrightarrow{\rho} & \rho C(\tilde{X}) & \rightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow \simeq & & \\ 0 \rightarrow C(\tilde{X}^G) & \longrightarrow & C(\tilde{X}/G) & \longrightarrow & C(\tilde{X}/G, \tilde{X}^G) & \rightarrow & 0 \end{array}$$

et induit donc un diagramme commutatif en homologie :

$$(3.5) \quad \begin{array}{ccccccc} \rightarrow H_k(\rho C(\tilde{X})) \oplus H_k(X(\mathbf{R})) & \longrightarrow & H_k(X) & \longrightarrow & H_k(\rho C(\tilde{X})) & \rightarrow & \\ & & \downarrow & & \downarrow \simeq & & \\ \rightarrow H_k(X(\mathbf{R})) & \longrightarrow & H_k(Y) & \longrightarrow & H_k(Y, X(\mathbf{R})) & \rightarrow & . \end{array}$$

De la suite exacte (3.2) on déduit le théorème suivant :

Théorème 3.2.6. — *Soit (X, σ) une \mathbf{R} -surface projective. On a une suite exacte longue en homologie :*

$$(3.6) \quad \cdots \rightarrow H_k(Y, X(\mathbf{R}); \mathbf{Z}_2) \oplus H_k(X(\mathbf{R}); \mathbf{Z}_2) \rightarrow H_k(X; \mathbf{Z}_2) \rightarrow \\ H_k(Y, X(\mathbf{R}); \mathbf{Z}_2) \xrightarrow{\Delta_k} H_{k-1}(Y, X(\mathbf{R}); \mathbf{Z}_2) \oplus H_{k-1}(X(\mathbf{R}); \mathbf{Z}_2) \rightarrow \cdots$$

où $G = \{1, \sigma\} \simeq \mathbf{Z}_2$, $X(\mathbf{R}) = X^G$ et $Y = X/G$ est l'espace topologique quotient de X par G .

Par ailleurs, on déduit du diagramme (3.5) que la seconde composante de Δ_k est l'application bord δ_k de la suite d'homologie associée à la paire $(Y, X(\mathbf{R}))$

$$(3.7) \quad H_k(Y, X(\mathbf{R}); \mathbf{Z}_2) \xrightarrow{\delta_k} H_{k-1}(X(\mathbf{R}); \mathbf{Z}_2) \rightarrow H_{k-1}(Y; \mathbf{Z}_2).$$

3.3. Majoration des nombres de Betti

Définition 3.3.1. — Soit (X, L) (si $L = \emptyset$, on abrège « X, \emptyset » en « X » dans les notations) une paire d'espaces topologiques $L \subset X$ telle que pour tout k , $\dim_{\mathbf{Q}} H_k(X, L; \mathbf{Q}) < \infty$. Le k -ième nombre de Betti $b_k(X, L)$ de (X, L) est la dimension du k -ième groupe d'homologie de (X, L) à coefficients dans \mathbf{Q}

$$b_k(X, L) := \dim_{\mathbf{Q}} H_k(X, L; \mathbf{Q}) .$$

On notera par $b_k(X, L; \mathbf{Z}_2)$ le k -ième nombre de Betti à coefficients dans \mathbf{Z}_2 , c'est-à-dire que

$$b_k(X, L; \mathbf{Z}_2) := \dim_{\mathbf{Z}_2} H_k(X, L; \mathbf{Z}_2) .$$

On notera aussi pour abrégier

$$b_*(X) = \sum b_k(X) \quad \text{et} \quad b_*(X; \mathbf{Z}_2) = \sum b_k(X; \mathbf{Z}_2)$$

le nombre de Betti total de X et le nombre de Betti total de X à coefficients dans \mathbf{Z}_2 .

Remarque 3.3.2. — Bien entendu, comme

$$H_k(X, L; \mathbf{C}) = H_k(X, L; \mathbf{Q}) \otimes_{\mathbf{Q}} \mathbf{C}$$

(voir la section B.4), on a

$$b_k(X, L) = \dim_{\mathbf{C}} H_k(X, L; \mathbf{C}) .$$

Remarque 3.3.3. — Les nombres de Betti à coefficients dans \mathbf{Z}_2 ne sont pas toujours égaux aux nombres de Betti, voir la section B.4 pour une étude générale et l'exercice ci-dessous pour des exemples.

Exercice 3.3.4. — Montrer les affirmations suivantes :

1. Si $X = \mathbf{RP}^2$, alors $b_1(X) = 0$ mais $b_1(X; \mathbf{Z}_2) = 1$.
2. Si $X = \mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^1$, alors $b_1(X) = b_1(X; \mathbf{Z}_2) = 2$.
3. Si $X = \mathbf{K}^2$ une bouteille de Klein, alors $b_1(X) = 1$ mais $b_1(X; \mathbf{Z}_2) = 2$.

[Indication : utiliser les coefficients universels, voir le corollaire B.4.5.]

Proposition 3.3.5. — Soit (X, σ) une \mathbf{R} -variété projective de dimension n et $L \subset X$ une \mathbf{R} -sous-variété. On a pour les nombres de Betti à coefficients dans \mathbf{Z}_2 :

$$\sum_{k=0}^{2n} b_k(X, L; \mathbf{Z}_2) - \sum_{l=0}^n b_l(X(\mathbf{R}), L(\mathbf{R}); \mathbf{Z}_2) \equiv 0 \pmod{2}$$

et en particulier

$$\sum_{k=0}^{2n} b_k(X; \mathbf{Z}_2) - \sum_{l=0}^n b_l(X(\mathbf{R}); \mathbf{Z}_2) \equiv 0 \pmod{2}.$$

Démonstration. — Comme la variété X est projective, munie de la topologie euclidienne c'est un espace compact et ses groupes d'homologie sont donc de type fini. Il suffit alors d'appliquer l'équation (3.4). \square

Théorème 3.3.6 (Inégalité de Smith-Thom). — Soit (X, σ) une \mathbf{R} -variété projective de dimension n et $L \subset X$ une \mathbf{R} -sous-variété. On a pour les nombres de Betti à coefficients dans \mathbf{Z}_2 :

$$\sum_{l=0}^n b_l(X(\mathbf{R}), L(\mathbf{R}); \mathbf{Z}_2) \leq \sum_{k=0}^{2n} b_k(X, L; \mathbf{Z}_2)$$

et en particulier

$$(3.8) \quad \sum_{l=0}^n b_l(X(\mathbf{R}); \mathbf{Z}_2) \leq \sum_{k=0}^{2n} b_k(X; \mathbf{Z}_2).$$

Démonstration. — Immédiat d'après (3.4) comme pour la preuve précédente. \square

Lorsque la \mathbf{R} -variété est donnée par des équations explicites et à l'aide la théorie de Morse sur les variétés à bord, Thom [Tho65] et indépendamment Milnor [Mil64] ont donné une majoration de $\sum_{l=0}^n b_l(X(\mathbf{R}); \mathbf{Z}_2)$ par une fonction des degrés des équations considérées. Une telle fonction étant un invariant de la variété complexe, cette inégalité est de même nature que (3.8).

Dans le cas des courbes, le théorème 3.3.6 admet le corollaire suivant qui est souvent appelé *théorème de Harnack* ou *inégalité de Harnack* bien que dans cette généralité, cette inégalité soit due à Klein, Harnack ne l'ayant prouvé que dans le cas des courbes planes.

Corollaire 3.3.7 (Inégalité de Harnack). — Soit (C, σ) une \mathbf{R} -courbe projective irréductible non singulière, notons $g(C)$ le genre de la surface topologique sous-jacente à la courbe complexe C et notons $s(C(\mathbf{R}))$ le nombre de composantes connexes du lieu réel $C(\mathbf{R})$, alors

$$(3.9) \quad s(C(\mathbf{R})) \leq g(C) + 1.$$

Démonstration. — On va donner deux preuves de l'inégalité (3.9). La première est une application de l'inégalité (3.8), la seconde est la preuve originale de Klein, voir [Kle82, page 72].

1. Sachant que la surface topologique C est compacte connexe sans bord orientable de genre $g := g(C)$, ses nombres de Betti sont $b_0(C) = b_2(C) = 1$ et $b_1(C) = 2g$. Par ailleurs, la partie réelle $C(\mathbf{R})$ étant une courbe compacte lisse d'après la proposition 2.2.27 (on peut aussi raisonner par linéarisation comme ci-dessous), elle est homéomorphe à une réunion de $s := s(C(\mathbf{R}))$ cercles disjoints, et nous en déduisons que $b_0(C(\mathbf{R})) = b_1(C(\mathbf{R})) = s$.
2. L'involution σ renverse l'orientation de la surface topologique C , son action se linéarise donc au voisinage d'un point du lieu réel en une symétrie par rapport à une droite. En effet, la surface topologique C est munie d'une structure de variété différentielle C^∞ de dimension 2 et si P est un point fixe de l'involution σ , cette dernière induit une involution linéaire sur l'espace vectoriel tangent $T_{X,p}$. Il en résulte que le quotient $Y = C/\langle\sigma\rangle$ est une surface connexe à bord dont le bord, qui peut être vide, s'identifie à $C(\mathbf{R})$. La base du revêtement à deux feuillets $C \setminus C(\mathbf{R}) \rightarrow Y \setminus \partial Y$ est connexe puisqu'une surface à bord connexe privée de son bord reste connexe. Il en résulte que $C \setminus C(\mathbf{R})$ possède au plus deux composantes connexes, et que dans ce cas, ses composantes sont échangées par σ . La surface topologique C privée de tous les cercles invariants sauf un est encore connexe. Ainsi si l'on avait $s(C(\mathbf{R})) > g(C) + 1$, on pourrait effectuer $g + 1$ coupures sur C sans la déconnecter, ce qui contredirait la définition de Riemann du genre, voir la définition E.1.2.

□

On retrouve alors le théorème 2.7.2 du chapitre 2 :

Corollaire 3.3.8. — Soit (C, σ) une \mathbf{R} -courbe projective plane irréductible non singulière de degré d , alors :

$$(3.10) \quad s(C(\mathbf{R})) \leq \frac{(d-1)(d-2)}{2} + 1.$$

Démonstration. — Il suffit d'appliquer la formule du genre, voir le théorème 1.6.17, à l'inégalité (3.9). □

Remarque 3.3.9. — L'inégalité (3.9) est optimale et on a même mieux : pour tout entier $g \geq 0$ et tout entier s tels que $0 \leq s \leq g + 1$, il existe une \mathbf{R} -courbe projective non singulière (C, σ) telle que $g(C) = g$ et $s(C(\mathbf{R})) = s$, voir la section 3.5.

Définition 3.3.10. — Une \mathbf{R} -courbe projective irréductible non singulière (C, σ) est *maximale* (on dit aussi que (C, σ) est une *M-courbe*) si l'inégalité de Harnack (3.9) est une égalité, c'est-à-dire si

$$s = g + 1 .$$

Plus généralement, une \mathbf{R} -variété (X, σ) non singulière de dimension n est *maximale* (on dit aussi que (X, σ) est une *M-variété*) si l'inégalité (3.8) est une égalité, c'est-à-dire si

$$b_*(X(\mathbf{R}); \mathbf{Z}_2) = b_*(X; \mathbf{Z}_2).$$

D'après l'identité (3.4) $b_*(X; \mathbf{Z}_2) - b_*(X(\mathbf{R}); \mathbf{Z}_2) = \sum_{k=0}^{2n} 2a_k$, on peut « mesurer » la non-maximalité d'une \mathbf{R} -variété par $a = \sum a_k$.

Définition 3.3.11. — Soit $a \in \mathbf{N}$. Une \mathbf{R} -variété (X, σ) de dimension n est une $(M - a)$ -variété si

$$b_*(X; \mathbf{Z}_2) - b_*(X(\mathbf{R}); \mathbf{Z}_2) = 2a .$$

L'origine de cette terminologie remonte au cas des courbes comme l'illustre l'exercice ci-dessous.

Exercice 3.3.12. — Montrer qu'une \mathbf{R} -courbe projective irréductible non singulière (C, σ) de genre g et de nombre de composante connexes s est une $(M - a)$ -courbe si et seulement si

$$s = g + 1 - a .$$

Exemple 3.3.13. — 1. (Voir l'exemple 2.1.29.) Une cubique plane projective non singulière avec deux composantes connexes (par exemple la cubique d'équation $zy^2 - x(x - z)(x + z) = 0$) est une M -courbe ; avec une composante connexe (par exemple la cubique d'équation $zy^2 = x^3 + z^2x = 0$) c'est une $(M - 1)$ -courbe. En effet la courbe complexe est de genre 1.

2. (Voir l'exemple 4.2.19.) La sphère quadrique d'équation $x^2 + y^2 + z^2 - w^2 = 0$ dans \mathbf{P}^3 est une $(M - 1)$ -surface, alors que le tore $x^2 + y^2 - z^2 - w^2 = 0$ est une M -surface. En effet, dans les deux cas, la variété complexe X est isomorphe à $\mathbf{P}^1(\mathbf{C}) \times \mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ d'où $\sum_{r=0}^4 b_r(X; \mathbf{Z}_2) = 4$.

Les \mathbf{R} -courbes planes maximales sont soumises à une contrainte plus forte que (3.10). Par exemple, une \mathbf{R} -courbe de degré au moins 6 admet un emboîtement d'ovales, voir le corollaire 2.7.17. Nous donnons ici une preuve des inégalités de Petrovskii énoncées au chapitre 2, théorème 2.7.13.

Théorème 3.3.14 (Inégalités de Petrovskii). — Soit (C, σ) une \mathbf{R} -courbe projective plane de degré pair $d = 2k$ non singulière. Notons p le nombre d'ovales positifs de $C(\mathbf{R})$ et n le nombre d'ovales négatifs, voir la définition 2.7.12, alors

$$(3.11) \quad p - n \leq \frac{3}{2}k(k - 1) + 1 ;$$

$$(3.12) \quad n - p \leq \frac{3}{2}k(k - 1) .$$

Pour prouver ce théorème, nous aurons besoin d'un raffinement très utile des inégalité de Smith-Thom du théorème 3.3.6 qui utilise la décomposition de Hodge de la cohomologie, voir la section D.3.

Remarque 3.3.15. — Kharlamov dans [Har74] présente les inégalités (3.13) ci-dessous comme une généralisation des inégalités de Petrovskii (3.11) et (3.12) ci-dessus.

Théorème 3.3.16 (Inégalités de Petrovskii-Oleinik)

Soit (X, σ) une \mathbf{R} -variété kählérienne compacte connexe de dimension complexe paire $2n$. Alors

$$(3.13) \quad 2 - h^{n,n}(X) \leq \chi_{top}(X(\mathbf{R})) \leq h^{n,n}(X) .$$

Démonstration. — On peut déduire ce résultat du théorème de l'indice d'Atiyah-Singer (corollaire 3.4.15), voir [Wil78, Remarque 1 après le preuve de la proposition 4.2]. Ce résultat a été démontré originalement dans [Har74] (en russe) en utilisant la formule du point fixe de Lefschetz, voir le théorème 3.4.23. On renvoie à [Wil78, Proposition 4.2] pour une preuve rédigée en anglais. \square

Appliquées aux surfaces, les inégalités de Petrovskii-Oleinik (3.13) sont appelées inégalités de Comessatti, voir [Com28] :

Corollaire 3.3.17 (Inégalités de Comessatti). — Soit (X, σ) une \mathbf{R} -surface projective non singulière. Alors

$$(3.14) \quad 2 - h^{1,1}(X) \leq \chi_{top}(X(\mathbf{R})) \leq h^{1,1}(X) .$$

Preuve du théorème 3.3.14. — Cette preuve est basée sur les idées développées par Arnol'd [Arn71]. Soit C une courbe complexe projective plane de degré pair $d = 2k$ non singulière (C n'est pas forcément irréductible, c'est un diviseur effectif réduit). On va définir un revêtement double $X \rightarrow \mathbf{P}^2$ ramifié au-dessus de C tel que si $(C, \sigma_{\mathbf{P}}|_C)$ est une \mathbf{R} -courbe, alors X possède deux structures réelles qui relèvent $\sigma_{\mathbf{P}}$. On suit la construction donnée par Wilson

[Wil78, §5, page 64]. Soit $P(x_0 : x_1 : x_2) = 0$ une équation de C dans $\mathbf{P}^2(\mathbf{C})$. Le polynôme homogène P est de degré pair $d = 2k$, posons

$$Z := \{(x_0 : x_1 : x_2 : x_3) \in \mathbf{P}^3(\mathbf{C}) \mid x_3^{2k} - P(x_0 : x_1 : x_2) = 0\}$$

et $p_Z : Z \rightarrow \mathbf{P}^2(\mathbf{C})$ la restriction à Z de la projection $(x_0 : x_1 : x_2 : x_3) \mapsto (x_0 : x_1 : x_2)$. L'application p_Z est un revêtement ramifié de degré d de lieu de branchement C . On définit un revêtement intermédiaire $Z \rightarrow X \rightarrow \mathbf{P}^2(\mathbf{C})$ en considérant l'action sur Z du groupe μ_d des racines d -ièmes de l'unité donnée pour $\varepsilon \in \mu_d$ par

$$(x_0 : x_1 : x_2 : x_3) \mapsto (x_0 : x_1 : x_2 : \varepsilon x_3) .$$

Le revêtement $Z \rightarrow \mathbf{P}^2(\mathbf{C})$ est alors identifié à l'application quotient $Z \rightarrow Z/\mu_d$ et on pose

$$X := Z/\mu_k .$$

La surface complexe X ainsi obtenue est un revêtement double de $\mathbf{P}^2(\mathbf{C})$ ramifié au-dessus de C . On note $\eta : X \rightarrow X$ l'involution du revêtement. Supposons que le polynôme homogène P soit à coefficients réels, alors la restriction $\sigma_{\mathbf{P}}|_Z$ de la structure réelle canonique de $\mathbf{P}^3(\mathbf{C})$ est une structure réelle sur Z qui induit une structure réelle σ_1 sur X qui elle-même relève la structure réelle $\sigma_{\mathbf{P}}$ de $\mathbf{P}^2(\mathbf{C})$. La composée $\sigma_2 := \eta \circ \sigma_1 = \sigma_1 \circ \eta$ est une autre structure réelle sur X qui elle aussi relève $\sigma_{\mathbf{P}}$. Remarquons que le passage de σ_1 à σ_2 revient à remplacer P par $-P$ dans l'équation $x_3^{2k} - P(x_0 : x_1 : x_2) = 0$.

En remplaçant le polynôme P par $-P$ si besoin, on peut donc supposer que P prends des valeurs négatives sur l'unique composante non orientable du complémentaire de $C(\mathbf{R})$ dans $\mathbf{P}^2(\mathbf{R})$. On note alors $F := \{(x_0 : x_1 : x_2) \in \mathbf{P}^2(\mathbf{R}) \mid P(x_0 : x_1 : x_2) \geq 0\}$ la surface à bord formée par la réunion des zones où le polynôme P prend des valeurs positives ou nulles. Le bord de F est donc le lieu des zéros $C(\mathbf{R})$ de P . Par construction, la caractéristique d'Euler de F vaut alors $p - n$. La caractéristique d'Euler du revêtement double $X(\mathbf{R})$ de F ramifié le long de $C(\mathbf{R})$ est donc égale à $2\chi(F) = 2(p - n)$. Par ailleurs, les nombres de Hodge d'un plan double s'expriment en fonction du degré de la courbe de branchement, voir l'exemple D.4.5, et on a en particulier :

$$h^{1,1}(X) = 3k^2 - 3k + 2 .$$

Il ne reste plus qu'à appliquer les inégalités (3.14). □

Courbes singulières. — Le théorème de Brusotti 2.7.10 permet de majorer le nombre de points doubles localement \mathbf{R} -analytiquement isomorphes à $x^2 + y^2 = 0$ que peut posséder une \mathbf{R} -courbe plane de degré donné.

Lemme 3.3.18. — À degré d fixé, le nombre de points doubles ordinaires isolés, c'est-à-dire localement \mathbf{R} -analytiquement isomorphes à $x^2 + y^2 = 0$, que peut posséder une courbe algébrique réelle de degré d est majoré par le nombre maximal d'ovales vides que peut posséder une courbe algébrique réelle non singulière de degré d .

Remarque 3.3.19. — Consulter [Cos92] pour une généralisation de ce lemme en dimension supérieure.

Corollaire 3.3.20. — Soit C une \mathbf{R} -courbe projective plane de degré d . Si $C(\mathbf{R})$ est un ensemble fini, alors le degré est pair, $d = 2k$, et

$$\#(C(\mathbf{R})) \leq \frac{3k(k-1)}{2} + 1.$$

Démonstration. — Si le degré est impair, le lieu réel contient au moins une pseudo-droite car chaque droite d'un pinceau centré en un point extérieur à C rencontre le lieu réel en au moins un point. Il existe donc un entier naturel k tel que $d = 2k$. Si tous les points de $C(\mathbf{R})$ sont des points doubles ordinaires isolés, la majoration du nombre de points de $C(\mathbf{R})$ est alors une conséquence immédiate du lemme 3.3.18 et de l'inégalité du corollaire 2.7.16. Le cas général demande un peu plus de travail, on peut utiliser [Cos92] ou [BDIM19]. \square

3.4. Forme d'intersection sur une \mathbf{R} -variété de dimension paire

L'irruption des formes quadratiques dans la théorie des variétés algébriques complexes non singulières provient du fait que sur une variété compacte orientable de dimension $4m$, la forme d'intersection sur l'homologie (ou la cohomologie, sur laquelle il serait plus correct de parler de cup-produit) en dimension moitié, est unimodulaire, voir le corollaire B.7.7. On renvoie en appendice A.6 pour des rappels sur les formes quadratiques sur les \mathbf{Z} -modules libres. Le coeur de cette section est formé du célèbre théorème de Rokhlin 3.4.2(3.15) qui établit pour certaines \mathbf{R} -variétés, une relation de congruence entre la caractéristique d'Euler du lieu réel et l'indice de la forme d'intersection en dimension moitié de la variété complexe.

Soit (X, σ) une \mathbf{R} -variété projective non singulière de dimension (complexe) paire $n = 2m$. La variété différentielle sous-jacente est donc de dimension réelle $4m$. Notons $Q_{\mathbf{R}}$ la forme d'intersection sur $H^{2m}(X; \mathbf{R})$, c'est une forme quadratique unimodulaire d'après la dualité de Poincaré B.7.7.

Définition 3.4.1. — Si (a, b) est la *signature* (définition A.6.10) de la forme d'intersection $Q_{\mathbf{R}}$, on définit l'*indice* de la forme $Q_{\mathbf{R}}$:

$$\tau := \tau(X) = a - b .$$

Théorème 3.4.2 (Congruences extrémales). — Soit (X, σ) une \mathbf{R} -variété projective non singulière de dimension paire $n = 2m$.

Si (X, σ) est une M -variété (définition 3.3.10), alors

$$(3.15) \quad \chi_{top}(X(\mathbf{R})) \equiv \tau(X) \pmod{16} \quad (\text{Rokhlin}).$$

Si (X, σ) est une $(M - 1)$ -variété (définition 3.3.11), alors

$$(3.16) \quad \chi_{top}(X(\mathbf{R})) \equiv \tau(X) \pm 2 \pmod{16} \quad (\text{Gudkov-Kharlamov-Krakhnov})$$

où $\tau(X)$ est l'indice de la forme d'intersection sur l'espace vectoriel réel $H^{2m}(X; \mathbf{R})$.

Remarque 3.4.3. — On peut aller plus loin, voir [Wel02] où plusieurs résultats classiques de congruences ont été unifiés et étendus.

Avant de passer à la preuve de ce théorème, nous énonçons une série de résultats intermédiaires. En premier lieu, nous introduisons les *classes de Wu* qui sont un outil clef de cette preuve. À titre de motivation, commençons par étudier le cas de la dimension réelle 2, en s'inspirant de [MH73, Chapter V].

Lemme 3.4.4. — Une surface topologique compacte sans bord V est orientable si et seulement si

$$(x \cdot x) = 0 \quad \text{pour tout } x \in H_1(V; \mathbf{Z}_2)$$

où $(x, y) \mapsto (x \cdot y)$ est la forme d'intersection sur $H_1(V; \mathbf{Z}_2)$.

Démonstration. — On peut se ramener au cas où V est connexe. Alors chaque classe d'homologie $x \in H_1(V; \mathbf{Z}_2)$ peut être représentée par une courbe simple fermée $\gamma \subset V$. Remarquons que le nombre d'auto-intersection $(x \cdot x)$ est nul si et seulement si un petit voisinage $W \subset V$ de γ est orientable. En effet, si W est orientable, alors une homotopie proche de l'identité permet de déformer γ en une courbe $\gamma' \subset W$ qui est disjointe de γ . Mais si γ ne possède pas de voisinage orientable, alors elle doit posséder un voisinage W qui est un ruban de Möbius. Dans ce cas, on déforme γ en une courbe γ' qui coupe γ transversalement et le nombre de points d'intersection est alors impair. Le lemme suit. \square

De la classification des surfaces topologiques compactes, voir le théorème E.1.6, on tire alors le corollaire suivant :

Corollaire 3.4.5. — Deux surfaces topologiques connexes compactes sans bord V et V' sont homéomorphes si et seulement si les \mathbf{Z}_2 -modules quadratiques $H_1(V; \mathbf{Z}_2)$ et $H_1(V'; \mathbf{Z}_2)$ sont isomorphes.

Exemple 3.4.6. — Pour le tore \mathbf{T}^2 , $H_1(\mathbf{T}^2; \mathbf{Z}_2)$ est un plan vectoriel et la matrice du produit scalaire est $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ pour une base formée des classes (e_1, e_2) de deux bords d'un quadrilatère (faire un dessin avec les identifications).

Exemple 3.4.7. — Pour la bouteille de Klein \mathbf{K}^2 , $H_1(\mathbf{K}^2; \mathbf{Z}_2)$ est aussi un plan engendré par les classes (e_1, e_2) de deux bords d'un quadrilatère et la matrice du produit scalaire est cette fois-ci $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. On peut aussi choisir la base $(e_1 + e_2, e_2)$ et dans ce cas la matrice est $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On renvoie à [MS74, page 131] pour la définition et la construction des classes de Wu $v_k \in H^k(V; \mathbf{Z}_2)$ d'une variété différentielle compacte V . On a en particulier :

Proposition 3.4.8. — Soit V une variété différentielle compacte de dimension paire $2n$. Il existe un unique élément $v_n \in H^n(V; \mathbf{Z}_2)$ tel que pour tout élément $x \in H^n(V; \mathbf{Z}_2)$,

$$(x \cdot x) = (x \cdot v_n) .$$

L'élément $v_n \in H^n(V; \mathbf{Z}_2)$ est la n^e classe de Wu de V .

D'après l'équivalent du lemme 3.4.4 en cohomologie, une surface topologique compacte sans bord V est donc orientable si et seulement si la classe de Wu

$$v_1(V) \in H^1(X; \mathbf{Z}_2)$$

est nulle. On a vu avec la proposition 3.1.15 que l'orientabilité de V dépendait de l'annulation de sa première classe de Stiefel-Whitney

$$w_1(V) \in H^1(X; \mathbf{Z}_2) .$$

La relation entre ces deux résultats est simple, on a en fait :

$$v_1(V) = w_1(V) .$$

Cette égalité se déduit de la proposition ci-dessous qui elle-même se déduit du théorème de Wu [MS74, Theorem 11.14], voir aussi [Wil78, Lemma 3.8].

Proposition 3.4.9. — Soit V une variété différentielle compacte. Alors pour tout k , la k^e classe de Wu de V est un polynôme en les classes de Stiefel-Whitney de V . En particulier

$$v_1 = w_1 \quad \text{et} \quad v_2 = w_2 + w_1 \smile w_1 .$$

Exercice 3.4.10. — Rappelons, voir [MS74, pages 90–91], que les carrés de Steenrod

$$\text{Sq}^l: H^k(V; \mathbf{Z}_2) \rightarrow H^{k+l}(V; \mathbf{Z}_2)$$

sont des morphismes qui satisfont pour tout $x \in H^k(V; \mathbf{Z}_2)$, $\text{Sq}^0(x) = x$, $\text{Sq}^k(x) = x \smile x$ et $\text{Sq}^l(x) = 0$ pour tout $l > k$. À partir du théorème de Wu [MS74, Theorem 11.14]

$$(3.17) \quad w_k = \sum_{p+q=k} \text{Sq}^p(v_q) ,$$

retrouver les formules de la proposition 3.4.9 ci-dessus. Calculer ensuite v_3 en fonctions des classes w_1, w_2, w_3 , puis v_4 en fonctions des classes w_1, w_2, w_3, w_4 en utilisant la formule de Wu, [MS74, Problem 8-A], et la formule de Cartan, [MS74, (4) page 91].

Rappelons, définition A.6.12, qu'une forme bilinéaire symétrique Q sur un \mathbf{Z} -module libre est *paire* (ou *de type II*) si et seulement si pour tout x , $Q(x, x)$ est pair.

Corollaire 3.4.11. — Soit V une variété différentielle orientée de dimension 4 simplement connexe. Alors V admet une structure spin si et seulement si la forme d'intersection en degré 2 est paire.

Démonstration. — En effet, la première classe de Stiefel-Whitney est nulle car V est orientable donc $v_2(V) = w_2(V)$ dans $H^2(V; \mathbf{Z}_2)$. Par ailleurs, la seconde classe de Stiefel-Whitney $w_2(V)$ est nulle si et seulement si V est spinorielle, d'où le résultat d'après la proposition 3.4.8. \square

Définition 3.4.12. — Soit (X, σ) une \mathbf{R} -variété projective non singulière de dimension paire $n = 2m$ de forme d'intersection sur $H^{2m}(X; \mathbf{R})$ notée $Q_{\mathbf{R}}$. L'indice $\tau(\sigma)$ de l'involution σ est l'indice de la forme bilinéaire symétrique $(x, y) \mapsto Q_{\mathbf{R}}(x, \sigma(y))$.

Remarque 3.4.13. — L'indice $\tau(\sigma)$ peut être défini de façon équivalente par

$$\tau(\sigma) = \tau_+ - \tau_-$$

où, $Q_{\mathbf{R}}$ étant la forme d'intersection sur $H^{2m}(X; \mathbf{R})$, on a noté $\tau_+ := \tau_+(\sigma) = \tau(Q_{\mathbf{R}}|_{H^{2m}(X; \mathbf{R})^\sigma})$ et $\tau_- := \tau_-(\sigma) = \tau(Q_{\mathbf{R}}|_{H^{2m}(X; \mathbf{R})^{-\sigma}})$.

Théorème 3.4.14 (Atiyah, Singer). — *Sur une variété différentielle compacte orientée de dimension réelle $4m$, l'indice d'une involution préservant l'orientation est égal à l'indice de l'auto-intersection de son lieu fixe.*

Démonstration. — Voir [AS68] pour la preuve originale ou [JO69] pour une preuve plus élémentaire. \square

Corollaire 3.4.15. — *Soit (X, σ) une \mathbf{R} -variété projective non singulière de dimension $n = 2m$, alors*

$$\tau(\sigma) = (-1)^m \chi_{\text{top}}(X(\mathbf{R}))$$

Démonstration. — On se réfère aux propositions 2.2.27 et 2.2.28 pour les structures de variétés différentielles sur X et $X(\mathbf{R})$. Comme X est de dimension réelle $4m$, σ^* préserve l'orientation d'après la proposition 2.2.28. L'indice de l'auto-intersection de $X(\mathbf{R})$ dans X est donc égal, d'après [Hir76, page 132], à l'auto-intersection de $X(\mathbf{R})$ dans son fibré normal $N_{X|X(\mathbf{R})}$ (voir aussi [MS74, page 119]). Au dessus d'un point réel, la multiplication par i dans le fibré tangent T_X induit un isomorphisme de fibrés vectoriels réels entre le fibré tangent $T_{X(\mathbf{R})}$ et le fibré normal $N_{X|X(\mathbf{R})}$. En effet, soit $x \in X(\mathbf{R})$, et soit (u_1, \dots, u_{2m}) une base de l'espace vectoriel $T_{X(\mathbf{R}),x}$. Du fait que x est un point du lieu réel, on a $T_{X,x} = T_{X(\mathbf{R}),x} \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C}$. Le $4m$ -uplet $(u_1, iu_1, \dots, u_{2m}, iu_{2m})$ est donc une base de $T_{X,x}$ et le $2m$ -uplet (iu_1, \dots, iu_{2m}) est une base de l'espace vectoriel normal $N_{X|X(\mathbf{R}),x}$. Maintenant, comme l'orientation naturelle de la variété différentielle X de dimension réelle $4m$ est donnée par $(u_1, iu_1, \dots, u_{2m}, iu_{2m})$, l'orientation induite sur $N_{X|X(\mathbf{R}),x}$ est obtenue à partir d'une permutation de signature $(-1)^m$ de l'ensemble des vecteurs $(u_1, iu_1, \dots, u_{2m}, iu_{2m})$. Comme la caractéristique d'Euler $\chi_{\text{top}}(X(\mathbf{R}))$ est égale à l'auto-intersection de $X(\mathbf{R})$ dans son propre fibré tangent $T_{X(\mathbf{R})}$ [Hir76, page 13] on obtient le résultat. \square

Remarque 3.4.16. — Le même énoncé et la même preuve restent valides en remplaçant « projective » par « kählérienne compacte », voir l'appendice D.

Lemme 3.4.17. — *Soit (X, σ) une \mathbf{R} -variété projective. Si $b_*(X(\mathbf{R}); \mathbf{Z}_2) = b_*(X; \mathbf{Z}_2)$, alors σ_* est l'identité sur $H_*(X; \mathbf{Z}_2)$.*

Démonstration. — Immédiat d'après la remarque 3.2.4 et l'équation (3.4) page 165. \square

Exercice 3.4.18. — Vérifier que la réciproque du lemme 3.4.17 est fautive en montrant que la conique projective plane de lieu réel vide donnée par l'équation $x^2 + y^2 + z^2 = 0$ en est un contre-exemple.

Lemme 3.4.19. — Soit (X, σ) une \mathbf{R} -variété projective non singulière de dimension paire $n = 2m$. Alors les sous-modules $H^{2m}(X; \mathbf{Z})^G$ et $H^{2m}(X; \mathbf{Z})^{-\sigma}$ sont orthogonaux pour la forme d'intersection sur $H^{2m}(X; \mathbf{Z})$.

Démonstration. — Rappelons que

$$H^{2m}(X; \mathbf{Z}) = H^{2m}(X; \mathbf{Z})_f \oplus \text{Tor}(H^{2m}(X; \mathbf{Z}))$$

où $H^{2m}(X; \mathbf{Z})_f := H^{2m}(X; \mathbf{Z}) / \text{Tor}(H^{2m}(X; \mathbf{Z}))$ est la partie libre de $H^{2m}(X; \mathbf{Z})$. D'après la proposition 3.1.8, les sous-modules $H^{2m}(X; \mathbf{Z})_f^G$ et $H^{2m}(X; \mathbf{Z})_f^{-\sigma}$ sont orthogonaux pour la forme induite par la forme d'intersection Q de $H^{2m}(X; \mathbf{Z})$. Par ailleurs, pour tout $x \in \text{Tor}(H^{2m}(X; \mathbf{Z}))$ et pour tout $y \in H^{2m}(X; \mathbf{Z})$, on a $Q(x, y) = 0$. En effet soit $k \in \mathbf{N}^*$ tel que $kx = 0$ dans $H^{2m}(X; \mathbf{Z})$, alors par linéarité en la première variable, on a $0 = Q(kx, y) = kQ(x, y)$, d'où $Q(x, y) = 0$ dans l'anneau intègre \mathbf{Z} . \square

Lemme 3.4.20. — Soit (X, σ) une \mathbf{R} -variété projective non singulière de dimension paire $n = 2m$. On considère la forme d'intersection Q sur $H^{2m}(X; \mathbf{Z})$. Alors si m est pair, la restriction de Q à $H^{2m}(X; \mathbf{Z})^{-\sigma}$ est paire (définition A.6.12); et si m est impair, la restriction de Q à $H^{2m}(X; \mathbf{Z})^G$ est paire.

Démonstration. — D'après la proposition 3.4.9 et la proposition 3.1.16(1), la classe de Wu $v_{2m} := v_{2m}(X) \in H^{2m}(X; \mathbf{Z}_2)$ est un polynôme $P(w)$ en les classes de Stiefel-Whitney $w_{2k}(X)$ qui sont elles-mêmes les réductions modulo 2 des classes de Chern $c_k(X)$ d'après la proposition 3.1.16(2). Sachant que $\sigma^* c_k(X) = (-1)^k c_k(X)$, on en déduit, exercice 3.4.21 ci-dessous, que si m est pair, alors v_{2m} est la réduction modulo 2 d'un élément $y \in H^{2m}(X; \mathbf{Z})^G$. L'élément y étant obtenu en considérant le même polynôme $P(c)$ en les classes de Chern. Soit alors $x \in H^{2m}(X; \mathbf{Z})^{-\sigma}$ et $x_2 \in H^{2m}(X; \mathbf{Z}_2)$ sa réduction modulo 2. Comme $H^{2m}(X; \mathbf{Z})^{-\sigma}$ et $H^{2m}(X; \mathbf{Z})^G$ sont orthogonaux pour Q , on a $(x \cdot y) = 0$ donc $(x_2 \cdot v_{2m}) = (x_2 \cdot x_2) = 0$, ce qui implique que $(x \cdot x) = Q(x, x)$ est pair. On obtient de la même façon le résultat pour n impair car dans ce cas, v_{2m} est la réduction modulo 2 d'un élément de $H^{2m}(X; \mathbf{Z})^{-\sigma}$. \square

Exercice 3.4.21. — En remarquant que chaque monôme de $P(w)$ appartient à $H^{2m}(X; \mathbf{Z}_2)$, montrer que $P(c) \in H^{2m}(X; \mathbf{Z})^G$ si m est pair et que $P(c) \in H^{2m}(X; \mathbf{Z})^{-\sigma}$ si m est impair.

Preuve du théorème 3.4.2. — Nous montrons ici la congruence de Rokhlin (3.15) et renvoyons à [DK00, 2.7.1] (ou [Sil89, II.(2.9)] dans le cas $m = 1$) pour la congruence de Gudkov-Kharlamov-Krakhnov. On a $\tau(X) = \tau_+(\sigma) + \tau_-(\sigma)$, d'où grâce au corollaire 3.4.15 :

$$\begin{aligned} \tau(X) - 2\tau_-(\sigma) &= \chi_{top}(X(\mathbf{R})) \quad \text{si } m \text{ est pair,} \\ \tau(X) - 2\tau_+(\sigma) &= \chi_{top}(X(\mathbf{R})) \quad \text{si } m \text{ est impair.} \end{aligned}$$

Si (X, σ) est une M -variété, alors σ^* est l'identité sur $H^{2m}(X; \mathbf{Z}_2)$ d'après le lemme 3.4.17. On applique maintenant le lemme 3.4.20 : si m est pair, alors la restriction de Q à $H^{2m}(X; \mathbf{Z})_f^{-\sigma}$ est une forme quadratique paire d'où $\tau_-(\sigma) \equiv 0 \pmod{8}$ d'après la proposition A.6.13. De même si m est impair, alors la restriction de Q à $H^{2m}(X; \mathbf{Z})_f^{\sigma}$ est une forme quadratique paire d'où $\tau_+(\sigma) \equiv 0 \pmod{8}$. \square

Remarque 3.4.22. — Nous avons suivi l'exposé de Risler, [Ris85, Théorème 2.1]. Dans [DK00, 2.7.1], Degtyarev et Kharlamov proposent une preuve différente avec un résultat supplémentaire sur les $(M - 2)$ -variétés. Dans le cas des surfaces ($m = 1$), Silhol donne une preuve encore différente, [Sil89, II.(2.4)].

Nous terminons cette section par une série de résultats fort utiles et concluons par une application au cas de surfaces de \mathbf{P}^3 .

La formule de Lefschetz relie la caractéristique d'Euler du lieu fixe d'une involution sur un espace triangulable X aux traces des endomorphismes qu'elle induit sur l'homologie de X . On trouve aussi cette formule sous le nom de « formule des traces de Lefschetz », ou « formule des indices de Lefschetz ».

Théorème 3.4.23 (Formule de Lefschetz). — *Soit (X, σ) une \mathbf{R} -variété projective. Alors*

$$(3.18) \quad \chi_{top}(X(\mathbf{R})) = \sum_{k \geq 0} (-1)^k \operatorname{tr}(\sigma^* : H_k(X; \mathbf{Q}) \rightarrow H_k(X; \mathbf{Q})) .$$

Démonstration. — La suite exacte de Smith (3.6) nous donne immédiatement

$$\chi_{top}(X) = \chi_{top}(X(\mathbf{R})) + 2\chi_{top}(Y, X(\mathbf{R})) .$$

En utilisant la suite exacte de la paire $(Y, X(\mathbf{R}))$ (le théorème B.3.6 donne $\chi_{top}(Y, X(\mathbf{R})) - \chi_{top}(Y) + \chi_{top}(X(\mathbf{R})) = 0$), on en déduit

$$(3.19) \quad \chi_{top}(X) = 2\chi_{top}(Y) - \chi_{top}(X(\mathbf{R})) .$$

Par ailleurs, en prenant soin de choisir un corps de caractéristique différente de 2 comme anneau des coefficients, on a (voir [DIK00, Corollary I.1.3.3])

$$(3.20) \quad H_k(X; \mathbf{Q})^\sigma \simeq H_k(Y; \mathbf{Q}) .$$

En diagonalisant sa matrice, on voit immédiatement que la trace d'une involution linéaire τ sur un \mathbf{Q} -espace vectoriel E satisfait

$$\mathrm{tr}(\tau: E \rightarrow E) = 2 \dim E^\sigma - \dim E .$$

Le second membre de l'égalité (3.18) devient

$$2 \sum_{k \geq 0} (-1)^k \dim_{\mathbf{Q}} H_k(X; \mathbf{Q})^\sigma - \sum_{k \geq 0} (-1)^k \dim_{\mathbf{Q}} H_k(X; \mathbf{Q}) ,$$

c'est-à-dire

$$2\chi_{top}(Y) - \chi_{top}(X)$$

d'après (3.20). On obtient alors le résultat grâce à (3.19).

Nous avons suivi la preuve de [DIK00, I.1.3.5]. Pour une preuve du théorème de Lefschetz-Hopf, voir [Mun84, Chapter 2, §22] ou [Hat02, Theorem 2C.3].

□

Considérons maintenant une \mathbf{R} -variété kählérienne compacte (X, σ) . On renvoie en appendice D.3 pour des rappels sur la décomposition de Hodge de la cohomologie de X . On rappelle en particulier le corollaire D.3.15 :

$$\overline{H^{p,q}(X)} = H^{q,p}(X)$$

et le lemme D.3.17 :

$$(3.21) \quad \sigma^* H^{p,q}(X) = H^{q,p}(X)$$

où σ^* est l'action sur $H^*(X; \mathbf{C}) = H^*(X; \mathbf{Q}) \otimes_{\mathbf{Q}} \mathbf{C}$ induite de σ .

Proposition 3.4.24. — Soient (X, σ) une \mathbf{R} -variété kählérienne compacte de dimension n et $k \in \{0, \dots, 2n\}$. On note $r_k(X) = \dim H_k(X; \mathbf{Q})^G$ la dimension du sous- \mathbf{Q} -espace vectoriel des classes d'homologie invariantes par $G = \{1, \sigma\}$. Le nombre $r_k(X)$ est alors soumis aux contraintes suivantes en fonction du k -ième nombre de Betti et des nombres de Hodge de X :

$$(3.22) \quad r_k(X) = \frac{1}{2} b_k(X) \quad \text{si } k \text{ est impair}$$

et

$$(3.23) \quad \sum_{\substack{p+q=2n-k \\ p < q}} h^{p,q}(X) \leq r_k(X) \leq b_k(X) - \sum_{\substack{p+q=2n-k \\ p < q}} h^{p,q}(X) \quad \text{si } k \text{ est pair.}$$

Démonstration. — D'après le corollaire 3.1.9, $H_k(X; \mathbf{Z})$ est isomorphe (ou anti-isomorphe selon la parité de n) à $H^{2n-k}(X; \mathbf{Z})$ en tant que module involutif. Supposons pour fixer les idées que n soit pair, le cas n impair se traitant de la même manière par symétrie des énoncés, alors en particulier, $b_k(X) = \dim_{\mathbf{C}} H^{2n-k}(X; \mathbf{C})$ et $r_k(X) = \dim_{\mathbf{C}} H^{2n-k}(X; \mathbf{C})^G$. Considérons la décomposition de Hodge $H^{2n-k}(X; \mathbf{C}) = \bigoplus_{p+q=2n-k} H^{p,q}(X)$. D'après l'égalité (3.21) rappelée plus haut, un élément de

$$\bigoplus_{\substack{p+q=2n-k \\ p \neq q}} H^{p,q}(X)$$

est fixé par σ^* si et seulement s'il est de la forme $\omega + \sigma^*\omega$. En d'autres termes, la dimension du sous-espace de $\bigoplus_{\{p+q=2n-k, p \neq q\}} H^{p,q}(X)$ fixé par σ^* est égale à

$$\sum_{\substack{p+q=2n-k \\ p < q}} h^{p,q}(X) .$$

Si k est impair, ceci implique que

$$r_k(X) = \frac{1}{2} b_k(X)$$

et si k est pair, que

$$r_k(X) \geq \sum_{\substack{p+q=2n-k \\ p < q}} h^{p,q}(X) .$$

Comme bien entendu le lemme D.3.17 s'applique aussi à $-\sigma$, on a de même $\dim_{\mathbf{C}} H^{2n-k}(X; \mathbf{C})^{-\sigma} \geq \sum_{\substack{p+q=2n-k \\ p < q}} h^{p,q}(X)$ aussi. Par ailleurs $H^{2n-k}(X; \mathbf{C})$ étant un espace vectoriel et σ^* une involution, on a une décomposition en somme directe $H^{2n-k}(X; \mathbf{C}) = H^{2n-k}(X; \mathbf{C})^{\sigma} \oplus H^{2n-k}(X; \mathbf{C})^{-\sigma}$ d'où finalement

$$r_k(X) \leq b_k(X) - \sum_{\substack{p+q=2n-k \\ p < q}} h^{p,q}(X) .$$

□

Proposition 3.4.25. — *Soient (X, σ) une \mathbf{R} -variété projective non singulière de dimension n et $G = \text{Gal}(\mathbf{C}|\mathbf{R})$ agissant sur X via σ , alors la caractéristique d'Euler topologique du lieu réel $X(\mathbf{R})$ vérifie*

$$(3.24) \quad \chi_{\text{top}}(X(\mathbf{R})) = \sum_{r \text{ pair}} (2r_k(X) - b_k(X))$$

où $r_k(X) = \dim H_k(X; \mathbf{Q})^G$.

Démonstration. — Dans le cas où (X, σ) est une \mathbf{R} -surface, une version de ce résultat a été prouvée par Comessatti [Com28]. Nous reprenons ici la preuve de Silhol [Sil89, Proposition I.(2.1), page 9]. On considère à nouveau le revêtement double $p: X \rightarrow Y = X/G$ ramifié le long de $X(\mathbf{R})$, voir la section 3.2. En utilisant une triangulation de X dont $X(\mathbf{R})$ est une sous-triangulation, on a

$$(3.25) \quad \chi_{top}(X) = 2\chi_{top}(Y) - \chi_{top}(X(\mathbf{R})) .$$

Par ailleurs, le morphisme p^* en homologie induit un isomorphisme

$$(3.26) \quad H_r(Y; \mathbf{Q}) \simeq H_r(X; \mathbf{Q})^G$$

(voir [Gro57, page 202] ou [Flo60, page 38] dans [Bor60]). Rappelons que $\chi_{top}(X) = \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k H_k(X; \mathbf{Q})$ et que $\chi_{top}(Y) = \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k H_k(Y; \mathbf{Q})$. En combinant (3.25) et (3.26) ci-dessus, on obtient

$$\chi_{top}(X(\mathbf{R})) = \sum_{k=0}^{2n} 2r_k(X) - b_k(X) .$$

Il ne reste plus qu'à appliquer la proposition 3.4.24 pour obtenir (3.24). \square

Remarque 3.4.26. — L'identité (3.24) reste valable si X est une \mathbf{R} -variété kählérienne compacte.

Surfaces de \mathbf{P}^3 . — En appliquant les majorations et congruences énoncées dans les paragraphes précédents aux hypersurfaces de \mathbf{P}^3 de degré d , on obtient les majorations suivantes en fonction de d .

Théorème 3.4.27. — Soit (X, σ) une \mathbf{R} -surface non singulière de degré d dans \mathbf{P}^3 . On a la majoration suivante pour le nombre de composantes connexes du lieu réel :

$$\#\pi_0(X(\mathbf{R})) \leq \frac{d(5d^2 - 18d + 25)}{12} - \varepsilon(d)$$

où

$$\begin{cases} \varepsilon(d) = 0 & \text{si } d \equiv 0 \pmod{16} \text{ ou } d \equiv 1 \pmod{4}; \\ \varepsilon(d) = \frac{1}{2} & \text{si } d \equiv \pm 2 \pmod{16}; \\ \varepsilon(3) = 2; \\ \varepsilon(d) = 1 & \text{si } d \equiv \pm 4 \text{ ou } 8 \pmod{16} \text{ ou } d \neq 3 \text{ et } d \equiv 3 \pmod{4}; \\ \varepsilon(d) = \frac{3}{2} & \text{si } d \equiv \pm 6 \pmod{16}. \end{cases}$$

Démonstration. — La preuve est détaillée dans [Si189, Chapter II, Theorem 3.9, Corollary 3.10] et utilise en particulier le calcul des nombres de Hodge d’une hypersurface non singulière de degré d dans \mathbf{P}^3 , voir l’exemple D.4.4. \square

Remarque 3.4.28. — Comme $\varepsilon(2) = \frac{1}{2}$, on retrouve qu’une quadrique réelle non vide est connexe. Comme $\varepsilon(3) = 2$, on trouve la majoration $\#\pi_0(X(\mathbf{R})) \leq 2$ pour une cubique non singulière ; cette majoration est donc optimale d’après l’exemple 3.1.13. Comme $\varepsilon(4) = 1$, on a $\#\pi_0(X(\mathbf{R})) \leq 10$ pour une quartique, ce qui est optimal, voir le chapitre 4 pour plus de détails. Il est à noter que le nombre maximal de composantes connexes d’une quintique, majoré par 25, est toujours inconnu à ce jour. Voir [KI96] pour une construction avec 22 composantes et [Ore01] pour une construction avec 23 composantes, maximum connu à l’écriture de ces lignes.

3.5. Classification des \mathbf{R} -courbes et XVI^e problème de Hilbert

Dans cette section, nous appliquons les résultats obtenus dans les sections précédentes aux courbes projectives non singulières. Nous commençons par énoncer leur classification abstraite, c’est-à-dire indépendamment de tout plongement, puis nous nous intéressons au cas classique des courbes plongées dans \mathbf{P}^2 , à savoir les courbes planes. On obtient une classification qui restreint la précédente car une courbe ne peut pas toujours être plongée de façon non singulière dans le plan. La caractérisation des \mathbf{R} -courbes projectives non singulières qui admettent un plongement dans le plan étant achevée, se pose une question beaucoup plus fine : « Quelle peut-être la position relative des ovals d’une courbe donnée ? » En d’autres mots il s’agit, à degré fixé, de classifier les paires topologiques $(\mathbf{P}^2(\mathbf{R}), X(\mathbf{R}))$ plutôt que les paires $(X, X(\mathbf{R}))$.

Classification abstraite. — Pour commencer, reprenons rapidement l’analyse de la situation donnée dans la seconde preuve du corollaire 3.3.7. Soit (X, σ) une \mathbf{R} -courbe projective non singulière. L’involution σ renverse l’orientation de la surface topologique X munie de la topologie euclidienne, son action se linéarise donc au voisinage d’un point du lieu réel en une symétrie par rapport à une droite. Il en résulte que le quotient $Y = X/\langle\sigma\rangle$ est une surface compacte connexe dont le bord s’identifie à $X(\mathbf{R})$. La base du revêtement à deux feuilletts $X \setminus X(\mathbf{R}) \rightarrow Y \setminus \partial Y$ étant connexe, $X \setminus X(\mathbf{R})$ possède au plus deux composantes connexes, qui sont échangées par σ . La surface topologique X privée de tous les cercles invariants sauf un est encore connexe. D’après la définition de Riemann du genre, définition E.1.2, si $X(\mathbf{R})$ est formée de

$g(X) + 1$ cercles, alors nécessairement $X \setminus X(\mathbf{R})$ est non connexe : le lieu réel $X(\mathbf{R})$ déconnecte ou *sépare* X . On définit plus généralement,

Définition 3.5.1 (Klein). — Soit (X, σ) une \mathbf{R} -courbe projective non singulière. La courbe (X, σ) est *séparante* si $X(\mathbf{R})$ déconnecte X et *non séparante* sinon.

À toute \mathbf{R} -courbe projective (X, σ) non singulière correspond donc un triplet d'entiers (g, s, a) où $g := g(X)$ est le genre de la surface compacte orientable X , $s := s(X) = s(X, \sigma)$ est le nombre de composantes connexes de $X(\mathbf{R})$ et $a := a(X) = a(X, \sigma)$ est l'invariant binaire déterminé par $a := 2 - \#\pi_0(X \setminus X(\mathbf{R}))$. Ce triplet est un invariant d'équi-homéomorphie complet pour nos surfaces munies d'involutions. Nous précisons maintenant cette affirmation. Comme Gabard, [Gab00], appelons *surface symétrique* une surface topologique compacte connexe sans bord orientable munie d'une involution qui renverse l'orientation. Comme on l'a vu, une \mathbf{R} -courbe projective dont on « oublie » la structure algébrique pour ne conserver que la structure topologique devient naturellement une surface symétrique. Le théorème de Klein-Weichold, voir [Gab00, Théorème 2.4], affirme alors que deux surfaces symétriques étant données, il existe un homéomorphisme de l'une sur l'autre qui commute avec les involutions si et seulement si ces surfaces ont même triplet. Pour aller plus loin, on pourra aussi consulter [Nat99, § 1] où Natanzon classe les surfaces symétriques et les munit de façon explicite et très simple (ce sont les exemples 1.1 et 1.2 de [Nat99]) d'une structure de surface de Riemann. De sorte que cela fournit des courbes algébriques réelles dès lors que l'on sait que toute surface de Riemann compacte est algébrique, voir le théorème E.2.28.

La surface X étant orientable, on a $\chi_{top}(X) = 2 - 2g$, voir la proposition E.1.5. Comme la caractéristique d'Euler d'un cercle est nulle, la caractéristique d'Euler du quotient Y vaut $g - 1$. De plus Y est orientable si et seulement si $a = 0$, c'est-à-dire si et seulement si la courbe est séparante. En effet, $X \setminus X(\mathbf{R}) \rightarrow Y \setminus \partial Y$ est le revêtement des orientations de $Y \setminus \partial Y$ qui est donc orientable si et seulement si $X \setminus X(\mathbf{R})$ est non connexe. Le bord de la surface compacte Y possédant s composantes connexes, on déduit alors de la classification des surfaces compactes, voir le théorème E.1.6, les contraintes :

$$(3.27) \quad \begin{array}{ll} \text{Si } a = 0 & \text{alors } 1 \leq s \leq g + 1 \text{ et } g - s \equiv 1 \pmod{2}. \\ \text{Si } a = 1 & \text{alors } 0 \leq s \leq g. \end{array}$$

La classification est achevée par le fait que réciproquement, pour tout triplet satisfaisant ces contraintes, il existe une \mathbf{R} -courbe projective non singulière qui le réalise :

Théorème 3.5.2. — Soit (g, s, a) , $a \in \{0, 1\}$ un triplet d'entiers. Il existe une \mathbf{R} -courbe projective plane irréductible non singulière (X, σ) de genre $g(X) = g$, telle que $\#\pi_0(X(\mathbf{R})) = s$ et $2 - \#\pi_0(X \setminus X(\mathbf{R})) = a$ si et seulement si les conditions (3.27) ci-dessus sont satisfaites.

Démonstration. — Voir [Gab00, §4]. □

Abordons maintenant les courbes planes. Si d est le degré d'une courbe plane, la formule du genre $g = \frac{(d-1)(d-2)}{2} = \frac{1}{2}d(d-3) + 1$, voir théorème 1.6.17, nous amène à considérer le triplet (d, s, a) en lieu et place de (g, s, a) . En plus des restrictions sur le genre de la courbe complexe qu'impose la formule susdite et des restrictions (3.27), deux restrictions sont spécifiques aux \mathbf{R} -courbes projectives planes non singulières.

Théorème 3.5.3. — Soit (d, s, a) un triplet d'entiers satisfaisant $d > 0$, $s \geq 0$, $a \in \{0, 1\}$. Il existe une \mathbf{R} -courbe projective plane irréductible non singulière (X, σ) de degré $\deg(X) = d$, telle que $\#\pi_0(X(\mathbf{R})) = s$ et $2 - \#\pi_0(X \setminus X(\mathbf{R})) = a$ si et seulement si les conditions suivantes sont satisfaites

$$\begin{aligned} d &\equiv 1 \pmod{2} \implies s \geq 1, \\ a = 0 &\implies \left\lfloor \frac{d+1}{2} \right\rfloor \leq s \leq \frac{(d-1)(d-2)}{2} + 1 \quad \text{et} \quad \frac{1}{2}d(d-3) - s \equiv 0 \pmod{2}, \\ a = 1 &\implies 0 \leq s \leq \frac{(d-1)(d-2)}{2}. \end{aligned}$$

Démonstration. — Voir [Gab00, Théorème 5.2] pour la preuve de l'existence de telles courbes. Nous explicitons seulement l'origine des conditions imposées aux entiers (d, s, a) . La première implication provient du fait qu'une courbe plane de degré impair possède toujours des points réels. En effet, une droite réelle générale du plan rencontre X en un ensemble de points globalement fixé par σ . Le nombre de points en question étant impair, au moins l'un d'entre eux est fixé par σ (il s'agit d'un cas particulier de la proposition 2.6.48). La troisième implication est simplement la seconde condition (3.27) avec $g = \frac{(d-1)(d-2)}{2}$ par la formule du genre, voir le théorème 1.6.17. La deuxième implication est la conjonction de la première condition (3.27) avec $g = \frac{1}{2}d(d-3) + 1$ et de la formule de Rokhlin du théorème 3.5.5 ci-dessous, voir [Mar80, page 59] ou [Gab00, Théorème 5.1]. □

Première partie du XVI^e problème de Hilbert. — Pour rédiger cette sous-section, nous nous sommes inspiré de [Wil78], [A'C80] et [BR90].

En 1891, Hilbert posa le problème : quelles sont à isotopie près les positions relatives possibles des composantes connexes d'une courbe algébrique non singulière de degré d dans $\mathbf{P}^2(\mathbf{R})$ pour $d = 1, 2, 3, \dots$. Cette question pour les courbes (et plus généralement pour les surfaces non singulières de $\mathbf{P}^3(\mathbf{R})$, dont Hilbert a mentionné explicitement le cas des surfaces de degré 4) est devenue en 1900 la première partie de ce que l'on appelle maintenant le XVI^e problème de Hilbert. Pour les courbes de degré 6 et les surfaces de degré 4, la solution de ce problème a été donnée par Gudkov et Kharlamov dans les années 70. L'un des avatars les plus récents est la solution (asymptotique) de la question posée par la conjecture (inexacte) de Ragsdale de 1906, voir remarque 2.7.15, solution établie cent ans après par Brugallé en 2006 [Bru06] après les travaux d'Arnol'd [Arn71], Viro [Vir80], Itenberg [Ite93] (qui a donné le premier contre-exemple) et de nombreux auteurs.

Nous exposons ici quelques contraintes connues sur les arrangements d'ovales d'une courbe dans le plan et renvoyons à [A'C80], [Gab04, page 50], [Gab00], pour les méthodes classiques de constructions de courbes, notamment celles de Harnack et de Hilbert. Pour les méthodes plus modernes, à savoir les méthodes de Viro, la méthode des « dessins d'enfants » appliquée aux courbes trigonales, les constructions tropicales, on se reportera par exemple à [Ris93], [Ore03], [BB06] et [IMS09]. La première contrainte que nous rencontrons est une conséquence immédiate du théorème de Bézout 2.7.1.

Théorème 3.5.4 (Hilbert). — *Pour une courbe de degré $d = 2k$, le nombre d'ovales contenus dans un emboîtement (voir la définition 2.7.11), ou dans la réunion disjointe de deux emboîtements, est au plus k .*

Associé au théorème 3.5.3, on obtient la classification pour $k = 1, 2$. Pour $k = 1$, il s'agit d'une conique non singulière, qui est donc vide ou connexe, voir l'exercice 1.2.68. Pour $k = 2$, il s'agit d'une quartique, son genre est donc 3 et son nombre d'ovales est 0, 2, 3 ou 4. D'après le théorème ci-dessus, il y a au plus un emboîtement d'ovales et dans ce cas, la courbe ne possède que deux ovales emboîtés. Elle est réalisée par une petite perturbation d'un produit d'équations de cercles de même centre (avant perturbation, le théorème de Bézout implique que la courbe complexe possède quatre points singuliers non réels). Le cas d'une courbe sextique, $k = 3$, est plus intéressant et faisait l'objet de la question initiale de Hilbert. Pour obtenir des contraintes supplémentaires,

on utilise le théorème suivant. On renvoie à la définition 2.7.12 du signe d'un ovale d'une \mathbf{R} -courbe, et on note ici p le nombre d'ovales positifs (appelés aussi *ovales pairs*) et n le nombre d'ovales négatifs (ou *impairs*), alors

Théorème 3.5.5 (Congruence de Gudkov-Rokhlin)

Pour une M -courbe de degré $2k$, on a

$$(3.28) \quad p - n \equiv k^2 \pmod{8}.$$

Ce théorème se déduit en fait du théorème 3.4.2 appliqué à la surface obtenue comme revêtement double du plan ramifié le long de la courbe considérée comme dans la preuve du théorème 3.3.14.

La question de Hilbert sur les courbes de degré 6 a été résolue par Gudkov en 1969 [Gud69] (voir aussi [Gud71] et [Arn71]) après les travaux de Petrovskii [Pet33]. La question sur les surfaces de degré 4 dans \mathbf{P}^3 , liée à la précédente par le fait qu'un revêtement double du plan ramifié le long d'une sextique est une surface K3 de même qu'une surface quartique, a été résolue par Kharlamov en 1975 [Har76]. Ce sujet a connu une intense activité dans l'espoir de classifier les courbes de degré ≥ 7 et les surfaces de degré ≥ 5 dans \mathbf{P}^3 . Le résultat le plus complet dans ce domaine étant la classification des courbes de degré 7 obtenue par Viro [Vir80].

Conjecture de Ragsdale. — D'après le corollaire 2.7.14, le nombre p d'ovales positifs d'une courbe algébrique réelle non singulière de degré $2k$ est majoré par $7k^2/4 - 9k/4 + 3/2$. Une célèbre conjecture, incorrecte, de Ragsdale, voir remarque 2.7.15, affirme que p doit être inférieur à $3k^2/2 - 3k/2 + 1$. On renvoie aux articles majeurs [Ite93, Ite95] et [Bru06] et à leurs bibliographies pour un historique sur la conjecture de Ragsdale et sur les nombreux travaux que cette conjecture a engendré. Dans [Ite93, Ite95], Itenberg montre que la conjecture de Ragsdale est incorrecte et dans [Bru06], Brugallé montre l'existence d'une famille de courbes algébriques réelles non singulières de degré $2k$ telle que $p/k^2 \rightarrow_{k \rightarrow \infty} 7/4$. Plus récemment, Renaudineau a donné une preuve constructive de l'existence d'une telle famille de courbes [Ren17]. Signalons aussi l'article [Haa95] dans lequel Haas améliore le résultat de [Ite93].

L'étude des courbes du plan se généralise en l'étude des courbes sur une surface X donnée. Par exemple lorsque X est une surface de Hirzebruch, la classification des courbes trigonales a connu de nombreuses avancées ces dernières années. On pourra notamment consulter [DIK08, Deg12, DIZ14].

Nous aborderons les surfaces de manière systématique au chapitre 4. En attendant, voici un exemple de construction de M -surface de degré 4 dans \mathbf{P}^3 .

Construction d'une \mathbf{R} -surface quartique maximale⁽⁵⁾. — On propose à titre d'illustration la construction d'une surface quartique de \mathbf{P}^3 obtenue comme revêtement double d'une surface quadrique ramifiée le long d'une courbe de bidegré $(4, 4)$. La représentation graphique dans \mathbf{R}^3 montre le revêtement double d'un hyperboloïde de révolution à une nappe ramifié le long de la trace de quatre hyperplans en position générale, voir la figure 3.1. Les figures qui suivent sont tracées dans une boule ronde de \mathbf{R}^3 .

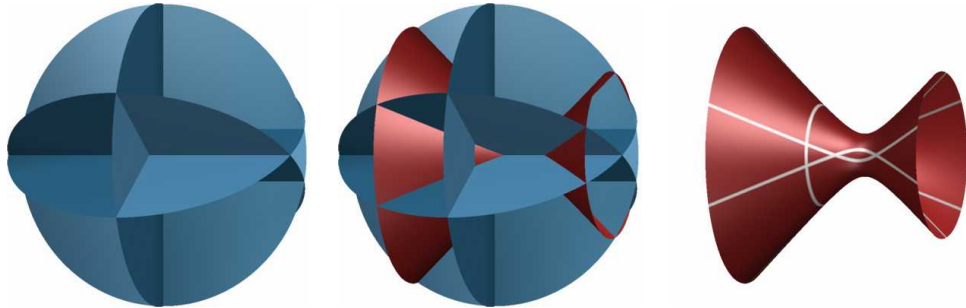


FIGURE 3.1. Construction d'une \mathbf{R} -quartique maximale. De gauche à droite : les quatre plans, ajout de l'hyperboloïde, courbe singulière découpée par la réunion des plans sur l'hyperboloïde.

Après avoir construit la courbe singulière sur l'hyperboloïde, nous procédons au revêtement double. Pour cela, nous choisissons une distribution de signes, indiquée par le choix des couleurs, puis nous effectuons un revêtement double, d'abord représenté avec l'hyperboloïde, puis seul dans l'espace, voir la figure 3.2.

Le résultat est une surface singulière dont les points singuliers sont tous des points doubles ordinaires.

Sur la figure 3.3, nous considérons une petite perturbation et obtenons une surface non singulière (à partir de la deuxième vue nous avons modifié l'inclinaison de la représentation graphique) qui est une $(M - 1)$ -surface. Pour le vérifier, on calcule tout d'abord le nombre de Betti total d'une quartique de \mathbf{P}^3 , sachant que $b^*(X_d) = d(d^2 - 4d + 6)$ pour une surface de degré d ; puis la caractéristique d'Euler de la surface lisse compacte et connexe $X(\mathbf{R})$. La

5. Illustrations réalisées en collaboration avec C. Raffalli en 2001.

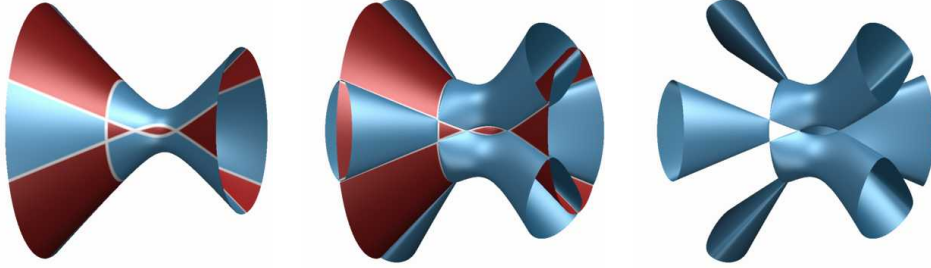


FIGURE 3.2. Construction d'une \mathbf{R} -quartique maximale (suite). De gauche à droite : distribution des signes, revêtement double avec l'hyperboloïde, revêtement double sans l'hyperboloïde.

caractéristique d'Euler du revêtement double est le double de la caractéristique d'Euler de la surface de couleur claire découpée sur l'hyperboloïde. En ôtant les points singuliers, il reste trois surfaces chacune homéomorphe à un disque de caractéristique d'Euler 1. Le nombre de points doubles est douze : $\chi_{top}(X(\mathbf{R})) = 2(3 - 12) = -18$, on conclut que le lieu réel est difféomorphe à la surface orientable (le lieu réel est orientable car X est de degré pair) \mathbf{S}_{10} de genre 10 ; en prolongeant la déformation, une seconde composante, difféomorphe à une sphère, apparaît au centre de la figure. Ce qui nous donne finalement $X(\mathbf{R}) \approx \mathbf{S}^2 \sqcup \mathbf{S}_{10}$ et (X, σ) est alors une M -surface.

3.6. Variétés Galois-Maximales

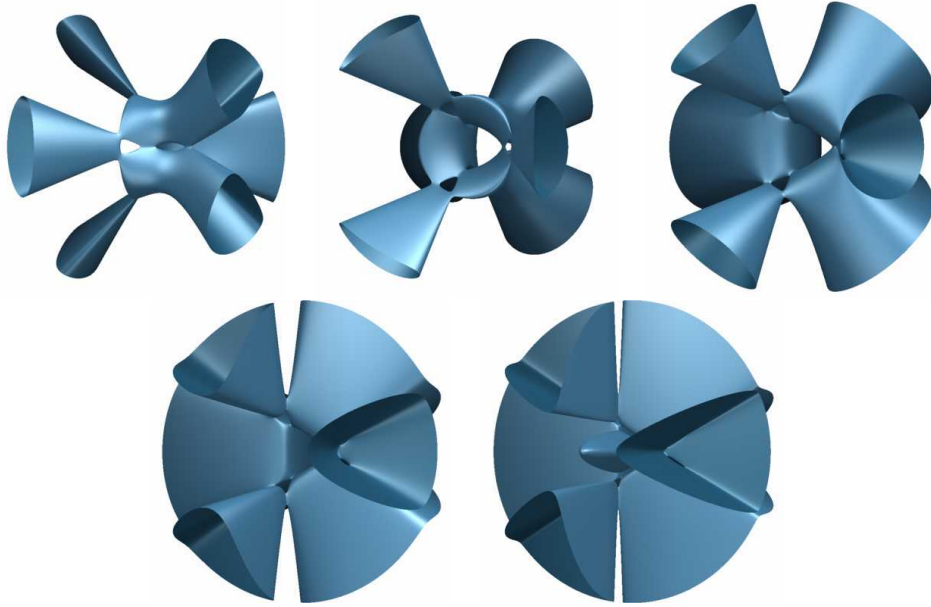
Soit (X, σ) une \mathbf{R} -variété projective irréductible, c'est-à-dire que la variété complexe X est irréductible, voir la définition 2.3.13. En considérant les groupes de cohomologie galoisienne (voir la proposition 3.1.4) de l'homologie de la variété complexe X , on obtient des raffinements de l'inégalité de Smith-Thom (3.8), voir (3.30), (3.32) et (3.33).

Lemme 3.6.1. — Soit (X, σ) une \mathbf{R} -variété projective. Pour $0 \leq k \leq 2n$, posons $\lambda_k := \dim_{\mathbf{Z}_2}(1 + \sigma_*)H_k(X; \mathbf{Z}_2)$, on a

$$\dim_{\mathbf{Z}_2} H_k(X; \mathbf{Z}_2)^G = \dim_{\mathbf{Z}_2} H_k(X; \mathbf{Z}_2) - \lambda_k ;$$

$$\dim_{\mathbf{Z}_2} H^1(G, H_k(X; \mathbf{Z}_2)) = \dim_{\mathbf{Z}_2} H_k(X; \mathbf{Z}_2) - 2\lambda_k .$$

Démonstration. — Il suffit d'appliquer le lemme 3.1.5 au \mathbf{Z}_2 -espace vectoriel $H_k(X; \mathbf{Z}_2)$ muni de l'involution σ_* . \square

FIGURE 3.3. Construction d'une \mathbf{R} -quartique maximale (suite et fin).

Remarque 3.6.2. — L'invariant λ_k défini ci-dessus sur $H_k(X; \mathbf{Z}_2)$ peut être différent de celui défini en définition 3.1.3 sur $H_k(X; \mathbf{Z}) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Z}_2$ si l'homologie de X contient de la torsion.

Lemme 3.6.3. — Soit (X, σ) une \mathbf{R} -variété projective. Pour $0 \leq k \leq 2n$, posons $a_k := \dim_{\mathbf{Z}_2} \text{Im } \rho_k$. Alors

$$(3.29) \quad \forall k, \quad \lambda_k \leq a_k .$$

Démonstration. — Soit $0 \leq k \leq 2n$. On a $(1 + \sigma_*)H_k(X; \mathbf{Z}_2) \subset \text{Im } \rho_k$ par définition de ρ , d'où l'inégalité $\lambda_k \leq a_k$. \square

Théorème 3.6.4. — Soit (X, σ) une \mathbf{R} -variété projective irréductible. Alors

$$(3.30) \quad \sum_{l=1}^n b_l(X(\mathbf{R}); \mathbf{Z}_2) \leq \sum_{k=0}^{2n} \dim H^1(G, H_k(X; \mathbf{Z}_2)) .$$

Définition 3.6.5. — Une \mathbf{R} -variété non singulière (X, σ) est *Galois-Maximale* (on dit aussi que (X, σ) est une *GM-variété*) si l'inégalité (3.30) est une égalité.

Preuve du théorème 3.6.4. — D'après le lemme 3.6.3 et l'identité (3.4), on a

$$(3.31) \quad b_*(X(\mathbf{R}); \mathbf{Z}_2) \leq \sum_{k=0}^{2n} (b_k(X; \mathbf{Z}_2) - 2\lambda_k) .$$

d'où la conclusion d'après le lemme 3.6.1. \square

Lemme 3.6.6. — *Une \mathbf{R} -variété projective irréductible non singulière (X, σ) est Galois-Maximale si et seulement si $\forall k, \lambda_k = a_k$.*

Démonstration. — D'après le lemme 3.6.1, la variété (X, σ) est Galois-Maximale si et seulement si

$$\sum_{l=1}^n b_l(X(\mathbf{R}); \mathbf{Z}_2) = \sum_{k=0}^{2n} (b_k(X; \mathbf{Z}_2) - 2\lambda_k) .$$

De l'égalité (3.4), $\sum_{l=0}^n b_l(X(\mathbf{R}); \mathbf{Z}_2) = \sum_{k=0}^{2n} (b_k(X; \mathbf{Z}_2) - 2a_k)$, on déduit donc que (X, σ) est Galois-Maximale si et seulement si $\sum_{k=0}^{2n} \lambda_k = \sum_{k=0}^{2n} a_k$ et par (3.29), si et seulement si $\forall k, \lambda_k = a_k$. \square

On a aussi les majorations suivantes (voir [Kra83, Thm. 2.3] pour une preuve à l'aide suites spectrales ou [Sil89, I.3.13] pour une preuve directe utilisant l'action de Galois sur la décomposition de Hodge) :

$$(3.32) \quad \sum_{l \text{ pair}} \dim_{\mathbf{Z}_2} H_l(X(\mathbf{R}); \mathbf{Z}_2) \leq \sum_{k=0}^{2n} \dim_{\mathbf{Z}_2} H^2(G, H_k(X; \mathbf{Z})) ;$$

$$(3.33) \quad \sum_{l \text{ impair}} \dim_{\mathbf{Z}_2} H_l(X(\mathbf{R}); \mathbf{Z}_2) \leq \sum_{k=0}^{2n} \dim_{\mathbf{Z}_2} H^1(G, H_k(X; \mathbf{Z})) .$$

On prendra garde que dans les inégalités (3.32) et (3.33), les groupes d'homologie de X considérés sont à coefficients dans \mathbf{Z} alors que les groupes de cohomologie de Galois $H^2(G, H_k(X; \mathbf{Z}))$ et $H^1(G, H_k(X; \mathbf{Z}))$ sont bien des \mathbf{Z}_2 -espace vectoriels.

Définition 3.6.7. — *Une \mathbf{R} -variété non singulière (X, σ) est \mathbf{Z} -Galois-Maximale (\mathbf{ZGM} -variété) si les inégalités (3.32) et (3.33) sont des égalités.*

Proposition 3.6.8. — *Soit (X, σ) une \mathbf{R} -variété projective non singulière.*

1. *Si (X, σ) est \mathbf{Z} -Galois-Maximale alors elle est Galois-Maximale.*
2. *Si l'homologie de X est sans 2-torsion, alors (X, σ) est Galois-Maximale si et seulement si elle est \mathbf{Z} -Galois-Maximale.*

Démonstration. — Voir [Kra83, Proposition 3.6]. □

Exemple 3.6.9 (Variétés \mathbf{Z} -Galois-Maximales)

1. Les courbes projectives lisses de lieu réel non vide sont \mathbf{Z} -Galois-Maximales (et donc Galois-Maximales), voir [Sil82].
2. Les variétés abéliennes de lieu réel non vide en toute dimension, sont \mathbf{Z} -Galois-Maximales, voir [Kra83].
3. Les surfaces projectives non singulières de lieu réel non vide telles que $H_1(X; \mathbf{Z}_2) = 0$ sont \mathbf{Z} -Galois-Maximales, voir le théorème 3.6.11 et le corollaire 3.6.12 ci-dessous.

Exemple 3.6.10. — Soit (X, σ) une \mathbf{R} -surface projective non singulière telle que $H_1(X; \mathbf{Z}) = 0$ (par exemple une surface dans \mathbf{P}^3 d'après le théorème de Lefschetz sur les sections hyperplanes D.9.2), alors les inégalités (3.32) et (3.33) deviennent

$$\#\pi_0(X(\mathbf{R})) \leq 1 + \frac{1}{2} \dim_{\mathbf{Z}_2} H^2(G, H_2(X; \mathbf{Z})) ;$$

$$b_1(X(\mathbf{R}); \mathbf{Z}_2) \leq \dim_{\mathbf{Z}_2} H^1(G, H_2(X; \mathbf{Z})) .$$

En effet, par hypothèse et par dualité de Poincaré, $H_k(X; \mathbf{Z}) = 0$ pour $k \in \{1, 3\}$ et comme X est globalement invariante par σ , on a $H_k(X; \mathbf{Z})^G = H_k(X; \mathbf{Z}) = \mathbf{Z}$ pour $k \in \{0, 4\}$ ce qui implique que $H^2(G, H_k(X; \mathbf{Z})) = \mathbf{Z}_2$ et $H^1(G, H_k(X; \mathbf{Z})) = 0$ pour $k \in \{0, 4\}$.

En réalité, si sous les hypothèses de l'exemple ci-dessus on suppose de plus que $X(\mathbf{R}) \neq \emptyset$, on a même des égalités.

Théorème 3.6.11 (Krasnov). — Soit (X, σ) une \mathbf{R} -surface projective non singulière telle que $X(\mathbf{R}) \neq \emptyset$ et $H_1(X; \mathbf{Z}_2) = 0$, alors (X, σ) est Galois-Maximale.

La preuve originale de ce théorème se trouve dans [Kra83, page 262]. Nous proposons une preuve alternative sans usage de suite spectrale en fin de section.

Corollaire 3.6.12. — Soit (X, σ) une \mathbf{R} -surface projective non singulière telle que $X(\mathbf{R}) \neq \emptyset$ et $H_1(X; \mathbf{Z}_2) = 0$, alors (X, σ) est \mathbf{Z} -Galois-Maximale et

$$\#\pi_0(X(\mathbf{R})) = 1 + \frac{1}{2} \dim_{\mathbf{Z}_2} H^2(G, H_2(X; \mathbf{Z})) ;$$

$$b_1(X(\mathbf{R}); \mathbf{Z}_2) = \dim_{\mathbf{Z}_2} H^1(G, H_2(X; \mathbf{Z})) .$$

Démonstration. — D’après le théorème 3.6.11 et la proposition 3.6.8, la \mathbf{R} -variété (X, σ) est \mathbf{Z} -Galois-Maximale et les inégalités de l’exemple 3.6.10 sont des égalités. \square

Les hypothèses du théorème 3.6.11 sont optimales comme le montrent les exemples suivants.

Exemple 3.6.13 ($b_1(X) \neq 0$). — Soit une \mathbf{R} -courbe C de genre $g > 0$ dont le lieu réel possède deux composantes connexes C_1 et C_2 , par exemple la \mathbf{R} -courbe (C, σ_1) de l’exemple 2.1.29. Remarquons que $b_1(X) = g(C) \neq 0$. D’après un théorème de Witt, [Wit34] ou [Kne76a, Kne76b], il existe une fonction rationnelle $f \in \mathbf{R}(C)^*$ telle que $f > 0$ sur C_1 et $f < 0$ sur C_2 (on peut aussi se reporter à [Sil89, V.(2.3)]). Soit $\pi : X \rightarrow C$ le fibré en coniques déterminé par l’équation dans $\mathbf{A}_{x,y}^2 \times C_t$

$$x^2 + y^2 = f(t) .$$

Alors $X(\mathbf{R}) \approx \mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^1$ est connexe, c’est un tore au-dessus de $C_1 \approx \mathbf{S}^1$, donc $b_*(X(\mathbf{R})) = 4$. Par ailleurs, comme $\dim H^1(G, H_4(X; \mathbf{Z}_2)) = \dim H^1(G, H_0(X; \mathbf{Z}_2)) = 1$ et comme C est une $(M - (g - 1))$ -courbe, on a d’après [Sil89, V.4, page 108], $\dim H^1(G, H_1(X; \mathbf{Z}_2)) = \dim H^1(G, H_1(C; \mathbf{Z}_2)) = 2g - 2(g - 1)$ d’où

$$\dim H^1(G, H_1(X; \mathbf{Z}_2)) = \dim H^1(G, H_3(X; \mathbf{Z}_2)) = 2 .$$

Alors $\sum_{k=0}^4 \dim H^1(G, H_k(X; \mathbf{Z}_2)) \geq 6$ et (X, σ) n’est pas Galois-Maximale. On peut généraliser cet exemple, voir [Sil89, V.4], [vH00] : soit (X, σ) une \mathbf{R} -surface munie d’un fibré en coniques $\pi : X \rightarrow C$ au-dessus d’une \mathbf{R} -courbe projective (C, σ_C) . On suppose que les structures réelles de X et C sont compatibles avec π (i. e. que π est un \mathbf{R} -morphisme : $\sigma_C \circ \pi = \pi \circ \sigma$). Alors on peut prouver que (X, σ) est \mathbf{Z} -Galois-Maximale si et seulement si le nombre de composantes connexes du lieu réel $X(\mathbf{R})$ est égal au nombre de composantes connexes du lieu réel $C(\mathbf{R})$ de la courbe de base.

Exemple 3.6.14 ($b_1(X) = 0$). — On renvoie à la section 4.5 pour la définition et les propriétés des \mathbf{R} -surfaces d’Enriques. En particulier le groupe fondamental d’une surface d’Enriques complexe X est égal à \mathbf{Z}_2 , et donc $b_1(X) = 0$ et $b_1(X; \mathbf{Z}_2) = 1$. On verra dans la section 4.5 qu’il existe des \mathbf{R} -surfaces d’Enriques de lieu réel non vide non Galois-Maximales (voir le théorème 4.5.20), par exemple celles dont le lieu réel est connexe et orientable (d’après le théorème 4.5.16, $X(\mathbf{R})$ est alors difféomorphe à \mathbf{S}^2 ou \mathbf{T}^2). En

fait, on a même mieux : tous les cas de Galois-Maximalité sont réalisés par des \mathbf{R} -surfaces d'Enriques, voir le théorème 4.5.20, c'est-à-dire qu'il existe des \mathbf{R} -surfaces d'Enriques \mathbf{Z} -Galois-Maximales, des \mathbf{R} -surfaces d'Enriques Galois-Maximales mais non \mathbf{Z} -Galois-Maximales et des \mathbf{R} -surfaces d'Enriques non Galois-Maximales.

Nous concluons cette sous-section avec un résultat qui répond par l'affirmative à une conjecture de R. Silhol de 1989, voir [Sil89, Remark I.4.5]. Nous avons vu au chapitre 2 le théorème 2.6.32 donnant une condition suffisante pour qu'une classe linéaire invariante soit représentée par un diviseur invariant. Nous présentons maintenant un résultat du même type sur un autre groupe de classes de diviseurs, le groupe de Néron-Severi $\text{NS}(X)$, voir la définition 2.6.34.

Théorème 3.6.15 (van Hamel 1998). — *Soit (X, σ) une \mathbf{R} -variété algébrique projective irréductible et non singulière. Si X est \mathbf{Z} -Galois-Maximale, alors pour tout diviseur D algébriquement équivalent à $\sigma(D)$, il existe un diviseur D' algébriquement équivalent à D tel que $D' = \sigma(D')$. Autrement dit⁽⁶⁾ :*

$$\text{Div}(X)^G / \text{Div}^0(X)^G = \text{NS}(X)^G .$$

Démonstration. — La preuve, délicate, utilise la cohomologie équivariante, [vH00, Cor. IV.5.2]. \square

En reprenant l'exemple 3.6.13, on peut montrer que l'hypothèse de \mathbf{Z} -Galois-maximalité ne peut être affaiblie.

Exemple 3.6.16 $(\text{Div}(X)^G / \text{Div}^0(X)^G \neq \text{NS}(X)^G)$

Soit $X \rightarrow C$ un fibré en coniques sur une courbe avec une partie réelle $X(\mathbf{R})$ non vide, mais possédant moins de composantes connexes que la partie réelle $C(\mathbf{R})$ de la courbe de base. Alors X est une \mathbf{R} -variété algébrique projective irréductible et non singulière qui n'est pas \mathbf{Z} -Galois-Maximale et vérifie :

$$\text{Div}(X)^G / \mathcal{P}(X)^G = \text{Pic}(X)^G ,$$

mais

$$\text{Div}(X)^G / \text{Div}^0(X)^G \neq \text{NS}(X)^G .$$

Voir [vH00, Exemple III.9.5].

6. Dans le langage des schémas : si X est un schéma défini sur \mathbf{R} satisfaisant les hypothèses du théorème, on a $\text{NS}(X) = \text{NS}(X_{\mathbf{C}})^G$.

Classes σ -représentables et preuve du théorème 3.6.11. — Nous avons vu au chapitre 2 que si le lieu réel d'une \mathbf{R} -variété (X, σ) est non vide, toute classe linéaire de diviseurs de X invariante par σ est *représentable* par un diviseur de X lui-même invariant par σ (théorème 2.6.32). Par analogie, on introduit pour les cycles topologiques, la notion de classe invariante σ -représentable, qui permet de caractériser les variétés Galois-Maximales (proposition 3.6.19). De surcroît, cette notion nous permet de donner une preuve du théorème de Krasnov 3.6.11 qui n'utilise pas de suite spectrale.

Dans tout ce paragraphe (X, σ) désigne une \mathbf{R} -variété algébrique projective de dimension n . On reprend les conventions du § 3.2, \tilde{X} est un complexe simplicial fini sous-jacent à l'espace topologique compact X tel que si la structure réelle σ fixe globalement un simplexe s de \tilde{X} , elle fixe tous les sommets de s ; le sous-complexe fixé par σ est noté \tilde{X}^G ; $C(\tilde{X}; \mathbf{Z}_2)$ et $C(\tilde{X}^G; \mathbf{Z}_2)$ sont les groupes de chaînes à coefficients dans \mathbf{Z}_2 . On identifie librement les groupes d'homologie $H_k(C(\tilde{X}; \mathbf{Z}_2))$ avec les groupes $H_k(X; \mathbf{Z}_2)$ et $H_k(C(\tilde{X}^G; \mathbf{Z}_2))$ avec $H_k(X(\mathbf{R}); \mathbf{Z}_2)$.

Définition 3.6.17. — Soit (X, σ) une \mathbf{R} -variété. Une classe invariante $\alpha \in H_k(X; \mathbf{Z}_2)^G$ est dite σ -représentable s'il existe un k -cycle invariant $c \in C(\tilde{X}; \mathbf{Z}_2)^G$ qui représente α .

Lemme 3.6.18. — On reprend les notations des suites exactes (3.1) et (3.2) avec $L = \emptyset$. Soit $\alpha \in H_k(X; \mathbf{Z}_2)$, les deux conditions suivantes sont équivalentes :

- $\rho_k(\alpha) = 0$ dans $H_k(\rho C(\tilde{X}; \mathbf{Z}_2))$;
- α est une classe invariante σ -représentable.

Démonstration. — Si α est une classe invariante σ -représentable, et c un représentant invariant, il est clair que

$$\rho(c) = (1 + \sigma)(c) \equiv 0 \pmod{2} \quad \text{d'où} \quad \rho_k(\alpha) = 0 .$$

Réciproquement, soit $\alpha \in H_k(X; \mathbf{Z}_2)$ telle que $\rho_k(\alpha) = 0$ dans $H_k(\rho C(\tilde{X}; \mathbf{Z}_2))$ et $c \in C_k(\tilde{X}; \mathbf{Z}_2)$ un k -cycle représentant α . Il existe une $(k + 1)$ -chaîne $b \in \rho C_{k+1}(\tilde{X}; \mathbf{Z}_2)$ telle que

$$\rho(c) = \partial b .$$

Donc il existe une chaîne $\tilde{b} \in C_{k+1}(\tilde{X}; \mathbf{Z}_2)$ telle que

$$\rho(\tilde{b}) = b \quad \text{et} \quad \rho(c) = \partial b = \rho(\partial \tilde{b}) .$$

Le k -cycle $c' = \partial\tilde{b} - c = \partial\tilde{b} + c$ représente aussi α et vérifie alors $\rho(c') = 0$; d'après la suite exacte (3.1), on a $c' \in \rho C(\tilde{X}; \mathbf{Z}_2) \oplus C(\tilde{X}^G; \mathbf{Z}_2)$ d'où l'invariance de c' . \square

Proposition 3.6.19. — Soit (X, σ) une \mathbf{R} -variété, les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

- (X, σ) est Galois-Maximale ;
- Pour tout $0 \leq k \leq 2n$, toute classe d'homologie $\alpha \in H_k(X; \mathbf{Z}_2)$ invariante par σ peut se représenter par un cycle invariant par σ .

Remarque 3.6.20. — En codimension complexe 1, Il est intéressant de comparer le résultat ci-dessus avec le théorème 3.6.15. En effet, le théorème en question caractérise les classes algébriques invariantes représentables par des diviseurs invariants.

Démonstration. — Soit $0 \leq k \leq 2n$. D'après le lemme 3.6.18, on a $\ker \rho_k \subset H_k(X; \mathbf{Z}_2)^G$. Rappelons qu'avec les notations $a_k = \dim_{\mathbf{Z}_2} \text{Im } \rho_k$ et $\lambda_k = \dim_{\mathbf{Z}_2} (1 + \sigma_*) H_k(X; \mathbf{Z}_2)$, on a d'après le lemme 3.6.3, $\lambda_k \leq a_k$ et d'après le lemme 3.6.6, $\lambda_k = a_k$ pour tout k si et seulement si (X, σ) est Galois-Maximale. Supposons pour commencer que toute classe invariante soit σ -représentable, on a alors

$$\ker \rho_k = H_k(X; \mathbf{Z}_2)^G$$

d'après le lemme 3.6.18. De là, $a_k = \dim \text{Im } \rho_k = \lambda_k$ d'après le lemme 3.6.1 et la \mathbf{R} -variété (X, σ) est Galois-Maximale.

Réciproquement supposons que (X, σ) soit Galois-Maximale, on a alors pour tout $k \in \{0, \dots, 2n\}$, $\dim \text{Im } \rho_k = \lambda_k$ d'où l'on déduit, en rappelant que $\ker \rho_k \subset H_k(X; \mathbf{Z}_2)^G$, que $\dim \ker \rho_k = \dim H_k(X; \mathbf{Z}_2)^G$. En utilisant encore une fois le lemme 3.6.18, on trouve que toute classe invariante est alors σ -représentable. \square

La proposition 3.6.19 est l'élément clef d'une démonstration élémentaire du théorème 3.6.11. La démonstration originale [Kra83, page 262] est basée sur la dégénérescence de suites spectrales de Grothendieck. On peut en trouver une version en anglais dans [Sil89, A1.7]. Commençons pas rappeler un lemme essentiellement dû à Hirzebruch, lemme dont nous aurons l'usage à plusieurs reprises dans la suite de l'ouvrage.

Lemme 3.6.21. — Soit (X, σ) une \mathbf{R} -surface algébrique projective non singulière. On note $G = \{1, \sigma\} \simeq \mathbf{Z}_2$ et $Y = X/G$ le quotient topologique de X par G . Alors la classe fondamentale de $X(\mathbf{R})$ dans $H_2(Y; \mathbf{Z}_2)$ est nulle.

Démonstration. — La surface complexe X munie de la topologie euclidienne est une variété différentielle compacte orientée de dimension 4 sur laquelle G agit par difféomorphismes préservant l'orientation (voir la proposition 2.2.28). Le sous-ensemble des points fixes $X(\mathbf{R})$ est une sous-variété différentielle compacte dont toutes les composantes connexes sont de codimension 2 dans X ; la projection $p: X \rightarrow Y$ est alors un revêtement double ramifié de Y de lieu de branchement $p(X(\mathbf{R}))$ [Hir69, § 1]. Si $X(\mathbf{R})$ est orientable, le fibré normal \mathcal{N} de $p(X(\mathbf{R}))$ dans Y est le carré tensoriel du fibré normal $N_{X|X(\mathbf{R})}$ de $X(\mathbf{R})$ dans X , ces fibrés étant considérés comme des fibrés (différentiels) en droites complexes (voir Hirzebruch [Hir69, pages 259–260]). La première classe de Chern du fibré \mathcal{N} est donc 2-divisible dans $H^2(Y; \mathbf{Z})$. La classe fondamentale de $X(\mathbf{R})$ dans $H_2(Y; \mathbf{Z})$, c'est-à-dire celle de $p(X(\mathbf{R}))$, est la classe duale de Poincaré de $c_1(\mathcal{N})$. Cette classe est donc 2-divisible. De même, toujours selon [Hir69, pages 259–260], si $X(\mathbf{R})$ est non orientable, sa classe fondamentale modulo 2 dans Y est nulle. Par réduction modulo 2, on en déduit que la classe fondamentale de $X(\mathbf{R})$ dans $H_2(Y; \mathbf{Z}_2)$ est nulle dans tous les cas. \square

Lemme 3.6.22. — *On reprend les notations de la suite de Smith (3.2). Soit (X, σ) une \mathbf{R} -surface projective non singulière telle que $X(\mathbf{R}) \neq \emptyset$ et $H_1(X; \mathbf{Z}_2) = 0$, alors*

$$H_3(Y, X(\mathbf{R}); \mathbf{Z}_2) \simeq \mathbf{Z}_2 .$$

De plus si β_0 est la seule classe non nulle de $H_3(\rho C(\tilde{X}; \mathbf{Z}_2))$, la deuxième composante de $\gamma_3(\beta_0)$ dans $H_2(\rho C(\tilde{X}; \mathbf{Z}_2)) \oplus H_2(X(\mathbf{R}); \mathbf{Z}_2)$, voir la suite (3.2), est non triviale.

Démonstration. — Le lieu réel $X(\mathbf{R})$ est une sous-variété différentielle de X de dimension 2 et en particulier, $b_k(X(\mathbf{R}); \mathbf{Z}_2) = 0$ pour $k > 2$. L'hypothèse $H_1(X; \mathbf{Z}_2) = 0$ implique que $H^3(X; \mathbf{Z}_2) = 0$ par dualité de Poincaré et donc que $H_3(X; \mathbf{Z}_2) \simeq H^3(X; \mathbf{Z}_2) = 0$; la suite exacte longue (3.2) se divise :

$$(3.34) \quad 0 \rightarrow H_4(\rho C(\tilde{X})) \rightarrow H_4(X; \mathbf{Z}_2) \rightarrow H_4(\rho C(\tilde{X})) \rightarrow H_3(\rho C(\tilde{X})) \rightarrow 0$$

$$(3.35) \quad \begin{array}{c} 0 \rightarrow H_3(\rho C(\tilde{X})) \xrightarrow{\gamma_3} H_2(\rho C(\tilde{X})) \oplus H_2(X(\mathbf{R}); \mathbf{Z}_2) \xrightarrow{i_2} H_2(X; \mathbf{Z}_2) \xrightarrow{\rho_2} \\ H_2(\rho C(\tilde{X})) \rightarrow H_1(\rho C(\tilde{X})) \oplus H_1(X(\mathbf{R}); \mathbf{Z}_2) \rightarrow 0 \end{array}$$

La surface complexe X étant connexe par convention, on a alors d'après (3.34) :

$$\dim H_4(\rho C(\tilde{X}; \mathbf{Z}_2)) = \dim H_4(X; \mathbf{Z}_2) = \dim H_3(\rho C(\tilde{X}; \mathbf{Z}_2)) = 1 .$$

Le groupe $H_r(\rho C(\tilde{X}; \mathbf{Z}_2))$ est isomorphe à $H_r(Y, X(\mathbf{R}); \mathbf{Z}_2)$ (proposition 3.2.5) et cet isomorphisme est naturel, il est donc loisible d'identifier les applications γ_r et Δ_r des suites exactes (3.2) et (3.6). On note encore β_0 l'unique classe non nulle de $H_3(Y, X(\mathbf{R}); \mathbf{Z}_2)$. À partir de la suite exacte (3.7)

$$H_3(Y, X(\mathbf{R}); \mathbf{Z}_2) \xrightarrow{\delta_3} H_2(X(\mathbf{R}); \mathbf{Z}_2) \rightarrow H_2(Y; \mathbf{Z}_2)$$

et du lemme 3.6.21 on déduit que la classe fondamentale de $X(\mathbf{R})$ dans $H_2(X(\mathbf{R}); \mathbf{Z}_2)$ est l'image de β_0 par δ_3 . Comme $X(\mathbf{R})$ est non vide, sa classe fondamentale est non nulle dans $H_2(X(\mathbf{R}); \mathbf{Z}_2)$ et comme δ_3 est la deuxième composante de $\Delta_3: H_3(Y, X(\mathbf{R})) \rightarrow H_2(Y, X(\mathbf{R})) \oplus H_2(X(\mathbf{R}))$, c'est-à-dire la deuxième composante de $\gamma_3: H_3(\rho C(\tilde{X})) \rightarrow H_2(\rho C(\tilde{X})) \oplus H_2(X(\mathbf{R}))$. Comme $H_3(Y, X(\mathbf{R}); \mathbf{Z}_2) \simeq H_3(\rho C(\tilde{X}; \mathbf{Z}_2))$, le lemme est démontré. \square

Preuve du théorème 3.6.11. — Pour tout $k \in \{0, 1, 3, 4\}$, on a $H_k(X; \mathbf{Z}_2)^G = H_k(X; \mathbf{Z}_2)$ et par suite $\lambda_k = a_k$; en effet par hypothèse, $b_1(X; \mathbf{Z}_2) = b_3(X; \mathbf{Z}_2) = 0$. Le défaut de Galois-Maximalité de X est donc concentré dans le groupe $H_2(X; \mathbf{Z}_2)$. Supposons que (X, σ) ne soit pas Galois-Maximale. On peut alors déduire de la proposition 3.6.19 qu'il existe une classe invariante $\alpha \in H_2(X; \mathbf{Z}_2)^G$ qui n'est pas σ -représentable.

On utilise maintenant le fait que dans la suite exacte (3.35), l'espace d'arrivée de ρ_2 est aussi l'espace d'arrivée de la première composante de γ_3 . Grâce au lemme 3.6.18, on en déduit que $\rho_2(\alpha) \neq 0$ dans $H_2(\rho C(\tilde{X}; \mathbf{Z}_2))$. On note $\alpha' = \rho_2(\alpha)$ cette classe non nulle de $H_2(\rho C(\tilde{X}; \mathbf{Z}_2))$. Par définition de ρ , si c est un représentant de α , non invariant par hypothèse, α' est la classe de $c + \sigma(c)$ dans $H_2(\rho C(\tilde{X}; \mathbf{Z}_2))$. Comme α est invariante, on a $i_2(\alpha' \oplus 0) = \alpha + \sigma(\alpha) = 2\alpha = 0$ dans $H_2(X; \mathbf{Z}_2)$. La classe β_0 étant la seule classe non nulle de $H_3(\rho C(\tilde{X}; \mathbf{Z}_2))$, on peut alors déduire de l'exactitude de la suite (3.35) en $H_2(\rho C(\tilde{X}; \mathbf{Z}_2))$ que α' est l'image de β_0 par γ_3 . Mais ceci est en contradiction avec le lemme 3.6.22 qui implique que l'image de γ_3 n'est pas incluse dans $H_2(\rho C(\tilde{X}; \mathbf{Z}_2))$. \square

3.7. Cycles algébriques

Classe fondamentale. — Une variété topologique compacte (sans bord) connexe V de dimension n possède une \mathbf{Z}_2 -classe d'homologie fondamentale $[V] \in H_n(V; \mathbf{Z}_2)$. Si la variété V est de surcroît *orientée* (voir la définition B.5.3), alors elle possède une \mathbf{Z} -classe d'homologie fondamentale $[V] \in H_n(V; \mathbf{Z})$, voir la remarque B.5.8.

Une variété analytique complexe (non singulière) compacte V de dimension complexe n possède donc une classe d'homologie fondamentale $[V] \in H_{2n}(V; \mathbf{Z})$. De même, une variété analytique réelle (non singulière) compacte L de dimension n possède une classe d'homologie fondamentale $[L] \in H_n(L; \mathbf{Z}_2)$.

Dans l'article [BH61], Borel et Haefliger montrent comment définir une classe fondamentale $[V] \in H_{2n}(V; \mathbf{Z})$ dans le cas plus général où V est un espace analytique complexe avec singularités ainsi qu'une classe fondamentale $[L] \in H_n(L; \mathbf{Z}_2)$ lorsque L est un espace localement analytique réel. On trouvera une construction de cette classe fondamentale à l'aide d'une triangulation semi-algébrique (voir l'appendice B.2) dans [BCR87, Theorem 11.1.1 et proposition 11.3.1].

Définition 3.7.1. — Soit X un espace analytique complexe de dimension (complexe) n et Y un sous-espace analytique compact de dimension (complexe) k . On appelle *classe d'homologie représentée par Y* (ou *classe de Y*) et on note $[Y] \in H_{2k}(X; \mathbf{Z})$ l'image de la classe d'homologie fondamentale $[Y] \in H_{2k}(Y; \mathbf{Z})$ par le morphisme $i_*: H_{2k}(Y; \mathbf{Z}) \rightarrow H_{2k}(X; \mathbf{Z})$ induit par l'inclusion $i: Y \hookrightarrow X$.

Si X est non singulier, on appelle *classe de cohomologie représentée par Y* et on note η_Y l'image dans $H_c^{2n-2k}(X; \mathbf{Z})$ de la classe $[Y] \in H_{2k}(X; \mathbf{Z})$ par le morphisme de dualité de Poincaré (voir le corollaire 3.1.9 pour X est compact et le théorème B.7.1 pour le cas général)

$$D_X^{-1}: H_{2k}(X; \mathbf{Z}_2) \rightarrow H_c^{2n-2k}(X; \mathbf{Z}_2).$$

De la même façon, soit $L \subset V$ un sous-espace localement analytique réel de dimension k d'un espace localement analytique réel de dimension n . Si L est compact, on appelle *classe d'homologie représentée par L* et on note $[L] \in H_k(V; \mathbf{Z}_2)$ l'image de la classe d'homologie fondamentale $[L] \in H_k(L; \mathbf{Z}_2)$ par le morphisme induit par l'inclusion $L \hookrightarrow V$.

Si V est non singulier, on appelle *classe de cohomologie représentée par L* et on note η_V l'image dans $H_c^{n-k}(V; \mathbf{Z}_2)$ de $[L] \in H_k(V; \mathbf{Z}_2)$ par le morphisme de dualité de Poincaré

$$D_V^{-1}: H_k(V; \mathbf{Z}_2) \rightarrow H_c^{n-k}(V; \mathbf{Z}_2).$$

Cycles algébriques. — Soit (X, σ) une \mathbf{R} -surface projective. Le lieu complexe X et le lieu réel $X(\mathbf{R})$ sont chacun munis de la topologie euclidienne. On considère le sous-groupe

$$H_1^{\text{alg}}(X(\mathbf{R}); \mathbf{Z}_2) \subset H_1(X(\mathbf{R}); \mathbf{Z}_2)$$

des classes d'homologie représentables par le lieu réel d'une \mathbf{R} -courbe algébrique. Un problème basique est la détermination de ce groupe et l'étude de ses applications en topologie et dans des problèmes de classification.

Plus généralement, on considère (X, σ) une \mathbf{R} -variété projective de dimension n et $Y \subset X$ une sous-variété algébrique irréductible stable par σ (ce qui fait de $(Y, \sigma|_Y)$ une \mathbf{R} -sous-variété) de codimension k dans X . Si $Y(\mathbf{R})$ est de codimension k dans $X(\mathbf{R})$, on a une classe d'homologie $[Y(\mathbf{R})] \in H_{n-k}(X(\mathbf{R}); \mathbf{Z}_2)$ où n est la dimension de X . Notons $H_{n-k}^{\text{alg}}(X(\mathbf{R}); \mathbf{Z}_2)$ le sous-groupe de $H_{n-k}(X(\mathbf{R}); \mathbf{Z}_2)$ engendré par de telles classes. Si X est non singulière, on note aussi $H_{\text{alg}}^k(X(\mathbf{R}); \mathbf{Z}_2)$ le groupe engendré par les classes duales de Poincaré.

Définition 3.7.2. — Le groupe $H_{n-k}^{\text{alg}}(X(\mathbf{R}); \mathbf{Z}_2)$ est le groupe des $(n-k)$ -cycles algébriques de $X(\mathbf{R})$ ou le groupe des cycles algébriques de codimension k de $X(\mathbf{R})$. (Remarquons que lorsque X est non singulière, il est d'usage d'appeler aussi « cycles algébriques » plutôt que « cocycles algébriques » les éléments du groupe $H_{\text{alg}}^k(X(\mathbf{R}); \mathbf{Z}_2)$).

Remarque 3.7.3. — On commet ici abus de langage, un élément de $H_{n-k}^{\text{alg}}(X(\mathbf{R}); \mathbf{Z}_2)$ étant une classe d'homologie plutôt qu'un cycle.

Soit (X, σ) une \mathbf{R} -variété projective, on note

$$H_*^{\text{alg}}(X(\mathbf{R}); \mathbf{Z}_2) = \bigoplus_{k \geq 0} H_k^{\text{alg}}(X(\mathbf{R}); \mathbf{Z}_2) ;$$

et si X est non singulière

$$H_{\text{alg}}^*(X(\mathbf{R}); \mathbf{Z}_2) = \bigoplus_{k \geq 0} H_{\text{alg}}^k(X(\mathbf{R}); \mathbf{Z}_2) .$$

Théorème 3.7.4. — Soient (X, σ) et (Y, τ) des \mathbf{R} -variétés projectives et $f: X \rightarrow Y$ un morphisme de \mathbf{R} -variétés. Alors

$$f_*(H_*^{\text{alg}}(X(\mathbf{R}); \mathbf{Z}_2)) \subset H_*^{\text{alg}}(Y(\mathbf{R}); \mathbf{Z}_2) ;$$

et si X et Y sont non singulières,

$$f^*(H_{\text{alg}}^*(Y(\mathbf{R}); \mathbf{Z}_2)) \subset H_{\text{alg}}^*(X(\mathbf{R}); \mathbf{Z}_2) .$$

Démonstration. — Se déduit immédiatement des résultats de [BH61, §5]. Voir aussi [BCR98, Theorem 11.3.4]. \square

Théorème 3.7.5. — Soit (X, σ) une \mathbf{R} -variété projective non singulière. La somme directe

$$H_{\text{alg}}^*(X(\mathbf{R}); \mathbf{Z}_2) = \bigoplus_{k \geq 0} H_{\text{alg}}^k(X(\mathbf{R}); \mathbf{Z}_2)$$

est un anneau gradué pour le cup-produit.

Démonstration. — Se déduit immédiatement des résultats de [BH61, §5]. Voir aussi [BCR98, Theorem 11.3.5]. \square

Définition 3.7.6 (Variété totalement algébrique)

Une variété algébrique réelle V telle que

$$H_*^{\text{alg}}(V; \mathbf{Z}_2) = H_*(V; \mathbf{Z}_2)$$

est dite *totalement algébrique*. De même, une \mathbf{R} -variété (X, σ) telle que

$$H_*^{\text{alg}}(X(\mathbf{R}); \mathbf{Z}_2) = H_*(X(\mathbf{R}); \mathbf{Z}_2)$$

est dite *totalement algébrique*.

Exemple 3.7.7. — Les espaces projectifs $\mathbf{P}^n(\mathbf{R})$ et les grassmanniennes $\mathbf{G}_{n,k}(\mathbf{R})$, voir ci-dessous, sont totalement algébriques :

$$\begin{aligned} H_*^{\text{alg}}(\mathbf{P}^n(\mathbf{R}); \mathbf{Z}_2) &= H_*(\mathbf{P}^n(\mathbf{R}); \mathbf{Z}_2) ; \\ H_*^{\text{alg}}(\mathbf{G}_{n,k}(\mathbf{R}); \mathbf{Z}_2) &= H_*(\mathbf{G}_{n,k}(\mathbf{R}); \mathbf{Z}_2) . \end{aligned}$$

Voir [BCR87, Proposition 11.3.3].

Définition 3.7.8 (Grassmannienne). — Soient K un corps et $n \geq k$ des entiers naturels. La *grassmannienne* (ou *variété de Grassmann*) $\mathbf{G}_{n,k}(K)$ est l'ensemble des k -sous-espaces vectoriels de K^n .

Remarque 3.7.9. — Cette notion généralise celle d'espace projectif. En effet, pour tout entier naturel n , $\mathbf{P}^n(K) = \mathbf{G}_{n+1,1}(K)$.

Proposition 3.7.10. — Soient $n \geq k$ des entiers naturels. La grassmannienne $\mathbf{G}_{n,k}(\mathbf{R})$ est une variété algébrique réelle affine non singulière complète.

Démonstration. — Voir [BCR87, Proposition 3.4.7]. \square

Proposition 3.7.11. — Soient $n \geq k$ des entiers naturels. Les variétés algébriques réelles $\mathbf{G}_{n,k}(\mathbf{R})$ et $\mathbf{G}_{n,n-k}(\mathbf{R})$ sont isomorphes.

Démonstration. — Voir [BCR87, Propositions 3.4.3, 3.4.4 et 3.4.6]. \square

En dehors d'un intérêt intrinsèque : caractériser les classes d'homologie pouvant être représentées par des sous-variétés algébriques, les groupes de cycles algébriques interviennent dans les problèmes d'approximation d'hypersurfaces \mathcal{C}^∞ par des hypersurfaces algébriques, voir par exemple [BCR87, § 12.4]. Une sous-variété \mathcal{C}^∞ fermée M d'une variété algébrique réelle V admet une approximation algébrique dans V si pour tout voisinage ouvert Ω de l'inclusion $M \hookrightarrow V$, dans $\mathcal{C}^\infty(M, V)$ (muni de la topologie \mathcal{C}^∞ , voir la remarque 5.2.2), il existe $h \in \Omega$ tel que $h(M)$ est un sous-ensemble algébrique non singulier de V . On a notamment le résultat suivant :

Théorème 3.7.12. — Soient (X, σ) une \mathbf{R} -variété quasi-projective non singulière de dimension n telle que $X(\mathbf{R})$ soit compacte non vide (i. e. $X(\mathbf{R})$ est complète, voir la définition 1.4.11) et $M \subset X(\mathbf{R})$ une hypersurface \mathcal{C}^∞ compacte. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

- La classe fondamentale $[M]$ de M appartient à $H_{n-1}^{\text{alg}}(X(\mathbf{R}); \mathbf{Z}_2)$.
- M admet une approximation algébrique dans $X(\mathbf{R})$.
- Il existe une difféotopie \mathcal{C}^∞ de $X(\mathbf{R})$, arbitrairement proche de l'identité, qui envoie M sur un sous-ensemble algébrique non singulier de codimension 1 de $X(\mathbf{R})$.

Démonstration. — Voir [BCR87, Théorème 12.4.10]. □

Application cycle. — Soit (X, σ) une \mathbf{R} -variété telle que $X(\mathbf{R}) \neq \emptyset$. On note $H_{2k}^{\mathbf{R}\text{-alg}}(X; \mathbf{Z})$ le sous-groupe de $H_{2k}(X; \mathbf{Z})$ engendré par les classes représentables par des sous-variétés algébriques complexes de dimension k fixées par σ . On peut définir une application cycle

$$(3.36) \quad \psi_X: H_{2k}^{\mathbf{R}\text{-alg}}(X; \mathbf{Z}) \rightarrow H_k^{\text{alg}}(X(\mathbf{R}); \mathbf{Z}_2)$$

comme suit. Soit $\alpha \in H_{2k}^{\mathbf{R}\text{-alg}}(X; \mathbf{Z})$. Par hypothèse, il existe des sous-variétés algébriques complexes irréductibles D_j $j = 1, \dots, s$ de dimension k telles que $\sigma D_j = D_j$ et des entiers $n_j \in \mathbf{Z}$ tels que $\alpha = \sum_{j=1}^s n_j [D_j]$. Si $\dim_{\mathbf{R}} D_j(\mathbf{R}) = k$, l'image de D_j par ψ_X est la classe $[D_j(\mathbf{R})]$ dans $H_k(X(\mathbf{R}); \mathbf{Z}_2)$, sinon $\psi_X(D_j) = 0$. L'image de α par ψ_X est alors la combinaison linéaire $\sum_{j=1}^s n_j [D_j(\mathbf{R})]$ où la somme est restreinte aux indices j pour lesquels $\dim_{\mathbf{R}} D_j(\mathbf{R}) = k$.

Pour des variétés algébriques réelles très particulières, on a le résultat suivant.

Lemme 3.7.13. — [BH61, § 5.15, Proposition, page 496] Soit (X, σ) une \mathbf{R} -variété projective non singulière. Si toute classe d'homologie modulo 2 de

X (resp. de $X(\mathbf{R})$), à support compact ou non, peut être représentée par un cycle algébrique σ -invariant de X (resp. un cycle algébrique réel de $X(\mathbf{R})$). Alors la réciproque de l'application cycle induit un morphisme d'anneaux

$$H_*(X(\mathbf{R}); \mathbf{Z}_2) \rightarrow H_*(X; \mathbf{Z}_2)$$

qui double les dimensions.

Exemple 3.7.14. — Un exemple fondamental est l'espace projectif. Dans ce cas, l'application cycle

$$H_{2k}(\mathbf{P}^n(\mathbf{C}); \mathbf{Z}) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Z}_2 \simeq H_{2k}(\mathbf{P}^n(\mathbf{C}); \mathbf{Z}_2) \longrightarrow H_k(\mathbf{P}^n(\mathbf{R}); \mathbf{Z}_2)$$

est un isomorphisme de \mathbf{Z}_2 -modules.

Application aux \mathbf{R} -surfaces. — Nous concluons cette section en montrant qu'une \mathbf{R} -surface rationnelle est totalement algébrique. Nous poursuivons l'étude des \mathbf{R} -surfaces totalement algébriques au chapitre 4.

Lorsque (X, σ) est une \mathbf{R} -surface projective non singulière, les \mathbf{Z}_2 -espaces vectoriels $H^1(X(\mathbf{R}); \mathbf{Z}_2)$ et $H_1(X(\mathbf{R}); \mathbf{Z}_2)$ sont isomorphes par dualité de Poincaré. On note $b^1(X(\mathbf{R}))$ leur dimension commune. On note de façon analogue

$$b_{\text{alg}}^1(X(\mathbf{R})) = \dim_{\mathbf{Z}_2} H_{\text{alg}}^1(X(\mathbf{R}); \mathbf{Z}_2).$$

Une \mathbf{R} -surface algébrique X est donc totalement algébrique (définition 3.7.6) si et seulement si

$$b_{\text{alg}}^1(X(\mathbf{R})) = b^1(X(\mathbf{R})).$$

On a des majorations naturelles de b_{alg}^1 qui proviennent de la géométrie complexe, par exemple lorsque X est simplement connexe, $b_{\text{alg}}^1(X(\mathbf{R}))$ est majoré par le nombre de Hodge $h^{1,1}(X) = \dim_{\mathbf{C}} H^1(X, \Omega_X^1)$. D'autres majorations proviennent de la structure réelle σ , par exemple la majoration évidente $b_{\text{alg}}^1(X(\mathbf{R})) \leq b^1(X(\mathbf{R}))$.

À toutes fins utiles, remarquons que la décomposition

$$H^1(X(\mathbf{R}); \mathbf{Z}_2) = \bigoplus_{V \subset X(\mathbf{R})} H^1(V; \mathbf{Z}_2)$$

où V décrit l'ensemble des composantes connexes de $X(\mathbf{R})$ est orthogonale pour la forme d'intersection, voir la section B.7, en particulier le corollaire B.7.7.

Dans le cas des surfaces, il existe une application cycle plus fine que celle définie au paragraphe précédent.

Proposition 3.7.15. — Soit (X, σ) une \mathbf{R} -surface projective non singulière. Alors il existe un morphisme surjectif

$$(3.37) \quad \varphi_X: \text{Pic}(X)^G \rightarrow H_{\text{alg}}^1(X(\mathbf{R}); \mathbf{Z}_2)$$

défini essentiellement en associant à une courbe algébrique réelle la classe fondamentale de sa partie réelle.

Démonstration. — On se réfère à [Sil89, Chapter III]. Si (X, σ) est de lieu réel non vide, on sait que toute classe linéaire de diviseurs qui est invariante par σ est représentable par un diviseur lui-même invariant. L'application canonique $\text{Div}(X)^G \rightarrow \text{Pic}(X)^G$ est donc surjective. Comme pour (3.36), on associe à un diviseur irréductible la classe fondamentale de son lieu réel si ce dernier est de codimension 1 et zéro sinon. On obtient ainsi un morphisme $\text{Div}(X)^G \rightarrow H_1(X(\mathbf{R}); \mathbf{Z}_2)$. On peut montrer qu'à travers cette construction, l'image d'un diviseur principal est nulle, puis on compose avec la dualité de Poincaré $D_{X(\mathbf{R})}^{-1}: H_1(X(\mathbf{R}); \mathbf{Z}_2) \rightarrow H^1(X(\mathbf{R}); \mathbf{Z}_2)$. On a alors un morphisme bien défini $\varphi_X: \text{Pic}(X)^G \rightarrow H^1(X(\mathbf{R}); \mathbf{Z}_2)$. Réciproquement, on montre la surjectivité de φ_X sur $H_{\text{alg}}^1(X(\mathbf{R}); \mathbf{Z}_2)$ par complexification des cycles algébriques de $X(\mathbf{R})$. Dans le cas vide, φ_X est par convention (et par nécessité) le morphisme nul. \square

On rappelle, voir la définition 3.1.14, que $w_1(V)$ est la première classe de Stiefel-Whitney du fibré tangent d'une variété différentielle compacte V . Soit K_X un diviseur canonique de X . Nous utiliserons les propriétés suivantes de φ_X :

Proposition 3.7.16. — Soit (X, σ) une \mathbf{R} -surface projective non singulière. Le morphisme φ_X défini ci-dessus satisfait les propriétés suivantes :

(3.38a)

$$\forall D \in \text{Div}(X)^\sigma, \forall D' \in \text{Div}(X)^\sigma, \quad \varphi_X(D) \cdot \varphi_X(D') \equiv (D \cdot D') \pmod{2};$$

(3.38b)

$$w_1(X(\mathbf{R})) - \varphi_X(K_X) \in \varphi_X(\text{Pic}^0(X)^G).$$

Démonstration. — Dans (3.38a), on considère à gauche la forme d'intersection sur l'espace vectoriel $H^1(X(\mathbf{R}); \mathbf{Z}_2)$ et à droite la forme d'intersection sur $\text{Pic}(X)$. On conclut à partir du fait que la forme d'intersection est invariante, voir la proposition 4.1.16.

Pour (3.38b) : supposons pour commencer que $H^1(X; \mathbf{Q}) = 0$. L'application première classe de Chern $c_1: \text{Pic}(X) \rightarrow H^2(X; \mathbf{Z})$ est alors injective. Si $X(\mathbf{R})$ est non vide, $\text{Div}(X)^G \rightarrow \text{Pic}(X)^G$ est surjective et $\text{Pic}(X)^G$ s'injecte donc

dans $H_2(X; \mathbf{Z})$ après composition par la dualité de Poincaré $D_X : H^2(X; \mathbf{Z}) \rightarrow H_2(X; \mathbf{Z})$. Le morphisme φ_X s'identifie alors à ψ_X :

$$\psi_X \circ D_X \circ c_1 = D_{X(\mathbf{R})} \circ \varphi_X .$$

Interprétons maintenant $\text{Pic}(X)$ comme groupe des classes d'isomorphisme de fibrés en droites. Sachant que $c_1(T_X) = -c_1(\mathcal{K}_X)$, remarquons que la restriction au lieu réel du fibré tangent à X est isomorphe au complexifié du fibré tangent à $X(\mathbf{R})$:

$$T_X|_{X(\mathbf{R})} \simeq T_{X(\mathbf{R})} \otimes \mathbf{C} .$$

Par définition de ψ_X , on en déduit que

$$w_1(X(\mathbf{R})) = D_{X(\mathbf{R})}^{-1}(\psi_X(D_X(c_1(\mathcal{K}_X)))) = \varphi_X(K_X) .$$

Dans le cas où $H^1(X; \mathbf{Q}) \neq 0$, l'image de $D_X(c_1(\mathcal{K}_X))$ par ψ_X n'est définie qu'à $\varphi_X(\text{Pic}^0(X)^G)$ près. \square

Proposition 3.7.17. — *Soit (X, σ) une \mathbf{R} -surface projective non singulière. Si le lieu réel $X(\mathbf{R})$ possède une composante connexe non orientable, alors*

$$b_{\text{alg}}^1(X(\mathbf{R})) \geq 1 .$$

Démonstration. — Ce résultat, dont la preuve initiale se trouve dans [BKS82], est la conjonction de la proposition 3.1.15 et du fait que $w_1(X(\mathbf{R})) \in H_{\text{alg}}^1(X(\mathbf{R}); \mathbf{Z}_2)$ en conséquence de la propriété (3.38b). \square

Théorème 3.7.18. — *Soit X une \mathbf{R} -surface projective non singulière de genre géométrique $p_g(X)$ nul, voir la définition 4.1.1, et telle que $H_1(X; \mathbf{Z}_2) = 0$. Alors*

$$H_{\text{alg}}^1(X(\mathbf{R}); \mathbf{Z}_2) = H^1(X(\mathbf{R}); \mathbf{Z}_2) .$$

Nous appliquons plus bas ce théorème aux surfaces rationnelles. On pourra consulter le survey [BCP11] consacré aux surfaces de type général de genre géométrique nul.

Remarque 3.7.19. — L'absence de 2-torsion dans l'homologie de la surface complexe X est essentielle. Il existe des \mathbf{R} -surfaces projectives non singulières telles que $p_g(X) = q(X) = 0$ et pour lesquelles $H_{\text{alg}}^1(X(\mathbf{R}); \mathbf{Z}_2) \subsetneq H^1(X(\mathbf{R}); \mathbf{Z}_2)$, voir le théorème 4.5.17.

Démonstration. — D'après la dernière hypothèse, $H_1(X; \mathbf{Z})_f = 0$ de sorte que $H^1(X; \mathbf{Q}) = 0$ (voir le théorème des coefficients universels B.4.3). On a donc

$p_g(X) = q(X) = 0$ et en conséquence du théorème de Lefschetz [D.9.3](#), on a $\text{Pic}(X) \simeq \text{NS}(X) \simeq H^{1,1}(X) \cap H^2(X; \mathbf{Z}) = H^2(X; \mathbf{Z})$. De plus, on a

$$\dim_{\mathbf{Z}_2} H^2(G, \text{Pic}(X)) = \dim_{\mathbf{Z}_2} H^1(G, H_2(X; \mathbf{Z}))$$

d'après la proposition [D.6.5](#). Par ailleurs, l'homologie de X est sans 2-torsion, toujours d'après le théorème des coefficients universels [B.4.3](#), et d'après le corollaire [3.6.12](#), on a $\dim_{\mathbf{Z}_2} H_1(X(\mathbf{R}); \mathbf{Z}_2) = \dim_{\mathbf{Z}_2} H^1(G, H_2(X; \mathbf{Z}))$. Il nous reste à prouver que

$$\dim_{\mathbf{Z}_2} H_{\text{alg}}^1(X(\mathbf{R}); \mathbf{Z}_2) = \dim_{\mathbf{Z}_2} H^2(G, \text{Pic}(X)).$$

On rappelle que $H^2(G, \text{Pic}(X)) = \text{Pic}(X)^G / (1 + \sigma^*) \text{Pic}(X)$ d'après la proposition [3.1.4](#). Posons $r := \text{rg Pic}(X)^G$ et $\lambda := \dim_{\mathbf{Z}_2} (1 + \sigma^*) \text{Pic}(X) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Z}_2$. D'après le lemme [3.1.1](#), on peut trouver une base $(d_1, \dots, d_{\rho(X)})$ du \mathbf{Z} -module libre $\text{Pic}(X)$ dont les r premiers éléments forment une base de $\text{Pic}(X)^G$ et tels que

$$(3.39) \quad \begin{aligned} d_j &\in (1 + \sigma^*) \text{Pic}(X) && \text{pour } j = 1, \dots, \lambda; \\ d_j &\notin (1 + \sigma^*) \text{Pic}(X) && \text{pour } j = \lambda + 1, \dots, r. \end{aligned}$$

Pour a et b dans $\text{Pic}(X)$, on a

$$(a \cdot b) = (\sigma^* a \cdot \sigma^* b)$$

d'après la proposition [4.1.16](#). On en déduit que pour tout $j = 1, \dots, \lambda$ et pour tout $d \in \text{Pic}(X)^G$, on a

$$(3.40) \quad (d_j \cdot d) = (d' \cdot d) + (\sigma^* d' \cdot d) = 2(d' \cdot d) \equiv 0 \pmod{2}.$$

Comme les modules involutifs $(\text{Pic}(X), \sigma^*)$ et $(H_2(X; \mathbf{Z}), -\sigma^*)$ sont isomorphes d'après la proposition [D.6.5](#), leurs invariants r et λ sont identiques d'après la proposition [3.1.2](#). Le déterminant de la forme d'intersection restreinte à $\text{Pic}(X)^G$ est donc égal à $\pm 2^\lambda$ d'après la proposition [3.1.7](#).

On exprime la matrice de la forme d'intersection restreinte à $\text{Pic}(X)^G$ relativement à la base (d_1, \dots, d_r) mentionnée ci-dessus, on voit que l'évaluation du déterminant et l'égalité [\(3.40\)](#) implique que pour tout $j = \lambda + 1, \dots, r$, il existe k tel que

$$(d_j \cdot d_k) \equiv 1 \pmod{2}$$

et par conséquent

$$(\varphi(d_j) \cdot \varphi(d_k)) = 1$$

où $\varphi: \text{Pic}(X)^G \rightarrow H_{\text{alg}}^1(X(\mathbf{R}); \mathbf{Z}_2)$ est le morphisme défini en [\(3.37\)](#). Ceci implique que pour tout j , $\lambda < j \leq r$, $\varphi(d_j) \neq 0$. Si on remplace d_{j_1} par $d_{j_1} + \dots + d_{j_s}$ (pour des j_i distincts et tels que $\lambda < j_i \leq r$, on obtient encore

une base de $\text{Pic}(X)^G$ satisfaisant les hypothèses (3.39). Pour les mêmes raisons que ci-dessus, $\varphi(d_{j_1} + \cdots + d_{j_s}) \neq 0$. En d'autres termes, les $\varphi(d_j)$, $j = \lambda + 1, \dots, r$ sont linéairement indépendants dans $H_{\text{alg}}^1(X(\mathbf{R}); \mathbf{Z}_2)$ et finalement puisque $\dim_{\mathbf{Z}_2} H_{\text{alg}}^1(X(\mathbf{R}); \mathbf{Z}_2) \leq \dim_{\mathbf{Z}_2} H^2(G, \text{Pic}(X)) = r - \lambda$, on obtient $\dim_{\mathbf{Z}_2} H_{\text{alg}}^1(X(\mathbf{R}); \mathbf{Z}_2) = \dim_{\mathbf{Z}_2} H^2(G, \text{Pic}(X))$. \square

Corollaire 3.7.20 (Silhol). — *Toute \mathbf{R} -surface géométriquement rationnelle est totalement algébrique.*

Remarque 3.7.21. — En fait, la preuve du théorème 3.7.18 proposée ici est une généralisation de [Sil89, III.(3.4)]. Le théorème 3.7.18 est également, dans cette généralité là (mais avec une preuve différente), dans [vH00, Chapter IV, Corollary 4.4 et Chapter III, Lemma 8.9].

Solution des exercices du chapitre 3

3.3.4 1. Le groupe fondamental de \mathbf{RP}^2 est $\pi_1(\mathbf{RP}^2) \simeq \mathbf{Z}_2$, voir la proposition 2.7.6. D'après le théorème de Hurewicz B.3.9, $H_1(\mathbf{RP}^2; \mathbf{Z}) \simeq \mathbf{Z}_2$ car c'est l'abélianisé de $\pi_1(\mathbf{RP}^2)$. Sachant qu'en degré zéro l'homologie est sans torsion, le théorème des coefficients universels B.4.3 nous donne $H_1(\mathbf{RP}^2; \mathbf{Z}_2) \simeq H_1(\mathbf{RP}^2; \mathbf{Z}) \otimes \mathbf{Z}_2 \simeq \mathbf{Z}_2$.

2. Même calcul en partant du groupe fondamental $\pi_1(\mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^1) \simeq \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}$ ou bien par un calcul direct en utilisant la formule de Künneth, voir l'exercice B.6.5.

3. On part de $\pi_1(\mathbf{K}^2) \simeq \mathbf{Z}_2 \oplus \mathbf{Z}$.

3.3.12 On calcule les nombres de Betti totaux $b^*(C; \mathbf{Z}_2) = 2 + 2g$ et $b^*(C(\mathbf{R}); \mathbf{Z}_2) = 2s$ et on en déduit que $b^*(C; \mathbf{Z}_2) - b^*(C(\mathbf{R}); \mathbf{Z}_2) = 2(g+1-s)$.

3.4.10 On applique l'équation (3.17) pour $k = 1$

$$w_1 = \text{Sq}^0(v_1) + \text{Sq}^1(v_0) = \text{Sq}^0(v_1) = v_1 .$$

En fait comme $\text{Sq}^p(v_q) = 0$ pour $p > q$, la formule (3.17) se réduit à la somme

$$w_k = \sum_{p=0, \dots, \lfloor \frac{k}{2} \rfloor} \text{Sq}^p(v_{k-p}) .$$

On calcule pour $k = 2$, $w_2 = \text{Sq}^0(v_2) + \text{Sq}^1(v_1) = v_2 + v_1 \smile v_1$, d'où puisque $v_1 = w_1$, en notant $w_k w_l := w_k \smile w_l$

$$v_2 = w_2 + w_1^2 .$$

Pour calculer v_3 , on utilise la formule de Wu, [MS74, Problem 8-A]

$$\text{Sq}^p(w_k) = \sum_{l=0}^p \binom{k-p+l-1}{l} w_{p-l} \smile w_{k+l} .$$

qui donne

$$(3.41) \quad \text{Sq}^1(w_2) = w_1 \smile w_2 + w_3$$

et la formule de Cartan, [MS74, (4) page 91] qui donne $\text{Sq}^1(w_1 \smile w_1) = \text{Sq}^0(w_1) \smile \text{Sq}^1(w_1) + \text{Sq}^1(w_1) \smile \text{Sq}^0(w_1) = 2 w_1 \smile w_1 \smile w_1 = 0$. De là $w_3 = \text{Sq}^0(v_3) + \text{Sq}^1(v_2) = v_3 + \text{Sq}^1(w_2 + w_1 \smile w_1) = v_3 + \text{Sq}^1(w_2) + \text{Sq}^1(w_1 \smile w_1)$ d'où l'on tire

$$v_3 = w_1 w_2 .$$

Pour v_4 , on va utiliser $v_2 \smile v_2 = (w_2 + w_1 \smile w_1) \smile (w_2 + w_1 \smile w_1) = w_2 \smile w_2 + w_1 \smile w_1 \smile w_1 \smile w_1 \smile w_1$ et encore une fois la formule de Cartan et l'égalité (3.41) : $\text{Sq}^1(w_1 \smile w_2) = \text{Sq}^0(w_1) \smile \text{Sq}^1(w_2) + \text{Sq}^1(w_1) \smile \text{Sq}^0(w_2) =$

$w_1 \smile (w_1 \smile w_2 + w_3) + w_1 \smile w_1 \smile w_2 = w_1 \smile w_3$. On a alors $w_4 = \text{Sq}^0(v_4) + \text{Sq}^1(v_3) + \text{Sq}^2(v_2) = v_4 + \text{Sq}^1(w_1 \smile w_2) + v_2 \smile v_2$ et finalement

$$v_4 = w_4 + w_1 w_3 + w_2^2 + w_1^4 .$$

3.4.18 Notons $X \subset \mathbf{P}^2(\mathbf{C})_{x:y:z}$ la \mathbf{R} -courbe d'équation $x^2 + y^2 + z^2 = 0$. Son lieu réel $X(\mathbf{R}) = X \cap \mathbf{P}^2(\mathbf{R})$ est vide. La surface topologique sous-jacente à X est connexe de genre nul et de ce fait, on a $H_0(X; \mathbf{Z}_2) = H_1(X; \mathbf{Z}_2) = H_2(X; \mathbf{Z}_2) = \mathbf{Z}_2$. En particulier l'application \mathbf{Z}_2 -linéaire $\sigma_i: H_i(X; \mathbf{Z}_2) \rightarrow H_i(X; \mathbf{Z}_2)$, $i = 0, 1, 2$ est l'identité. Pourtant $b_*(X; \mathbf{Z}_2) = 3$ alors que $b_*(X(\mathbf{R}); \mathbf{Z}_2) = 0$.

3.4.21 D'après nos hypothèses, la $2m^{\text{e}}$ classe de Wu est un polynôme en les m variables $w_{2k} := w_{2k}(X)$, $k = 1, \dots, m$ dont chaque monôme appartient à $H^{2m}(X; \mathbf{Z}_2)$. On a donc

$$P(w) = \sum_{i=(i_1, \dots, i_m) | \sum 2i_l \alpha_{i_l} = 2m} a_i \prod_{l=1}^m w_{2i_l}^{\alpha_{i_l}}$$

d'où, en posant $c_k := c_k(X)$, $k = 1, \dots, m$

$$P(c) = \sum_{i=(i_1, \dots, i_m) | \sum 2i_l \alpha_{i_l} = 2m} a_i \prod_{l=1}^m c_{i_l}^{\alpha_{i_l}} .$$

Sachant que $\sigma^* c_k = (-1)^k c_k$, on obtient

$$\sigma^* P(c) = \sum_{i=(i_1, \dots, i_m) | \sum 2i_l \alpha_{i_l} = 2m} a_i \prod_{l=1}^m (-1)^{i_l \alpha_{i_l}} c_{i_l}^{\alpha_{i_l}}$$

d'où le résultat puisque pour chaque $i = (i_1, \dots, i_m)$, $\sum i_l \alpha_{i_l} = m$.

CHAPITRE 4

SURFACES

On trouvera dans ce chapitre des éléments de classification des surfaces algébriques réelles. Certains résultats classiques, d'autres plus récents. On a tenté de dresser un panorama mais sans viser l'exhaustivité, la sélection s'étant faite en fonction des goûts de l'auteur. On y trouvera ainsi des rappels de géométrie des surfaces complexes et des surfaces réelles, le fil directeur étant de décrire, lorsqu'ils sont connus, les types topologiques, les classes de déformations, et l'existence ou non de surfaces totalement algébriques dans chaque famille.

Une classification fine des variétés algébriques réelles procède idéalement, comme dans le cas algébriquement clos, d'un invariant discret : un multi entier, qui classe grosso modo le type topologique de la variété, et pour chaque valeur de cet invariant, d'un invariant continu : un espace de modules ⁽¹⁾. Une classification achevée équivaudrait à une correspondance biunivoque entre les espaces de modules irréductibles et les valeurs de l'invariant multi entier.

Le premier invariant entier naturel est la dimension. En dimension 1, la classification topologique, connue depuis Klein, a été décrite en section 3.5, nous la rappelons ici à titre de motivation. À toute \mathbf{R} -courbe projective non singulière (X, σ) correspond un triplet d'entiers (g, s, a) où $g := g(X)$ est le genre de la surface compacte orientable X , $s := s(X, \sigma)$ est le nombre de composantes connexes de $X(\mathbf{R})$ et $a := a(X, \sigma)$ est l'invariant binaire déterminé par $a := 2 - \#\pi_0(X \setminus X(\mathbf{R}))$. Ces invariants sont soumis aux relations :

1. Si $a = 0$, c'est-à-dire si la courbe est *séparante*, voir la définition 3.5.1, alors $1 \leq s \leq g + 1$ et $g - s \equiv 1 \pmod{2}$.

1. D'un point de vue ensembliste, un « espace de modules » est un ensemble d'objets à isomorphisme près. Nous contenterons de ce point de vue ici. Munir un tel ensemble d'une structure intéressante d'« espace » est rarement trivial.

2. Si $a = 1$, alors $0 \leq s \leq g$.

La classification topologique discrète des \mathbf{R} -courbes s'énonce alors comme suit. Pour tout triplet d'entiers ⁽²⁾ (g, s, a) , $a \in \{0, 1\}$, satisfaisant les contraintes ci-dessus, il existe une \mathbf{R} -courbe projective non singulière (X, σ) qui le réalise, c'est-à-dire telle que $g(X) = g$, $s(X, \sigma) = s$ et $a(X, \sigma) = a$. La classification topologique fine des \mathbf{R} -courbes s'en déduit car deux \mathbf{R} -courbes (X, σ) et (Y, τ) sont déformation l'une de l'autre si et seulement si leurs triplets coïncident : $(g(X), s(X), a(X)) = (g(Y), s(Y), a(Y))$, voir [Gab00].

À partir de la dimension 2, même pour des classes particulières de surfaces, il est souvent très difficile de parvenir à une classification aussi précise, et on commence généralement par classifier les lieux réels à homéomorphisme près, voir la section 4.2. Même lorsque l'on a identifié un multi entier convenable pour classifier un type donné de surfaces, et même si l'on est parvenu à définir une structure convenable sur l'espace de modules correspondant à un multi entier donné, il n'est pas clair que le nombre de composantes irréductibles de cet espace de modules soit fini. Lorsque c'est le cas, il est souvent difficile de connaître le nombre de composantes irréductibles, et même le nombre de composantes connexes.

Nous énumérons dans ce chapitre :

1. Les classifications connues des lieux réels des \mathbf{R} -surfaces.
2. Les classifications connues à isomorphismes de \mathbf{R} -surfaces près.
3. Les cas où on connaît la solution au problème de « quasi-simplicité » (version réelle du problème Def=Diff, voir la question 4.3.29).

Exemple 4.0.1. — Nous étudions dans ce chapitre diverses « classes » de \mathbf{R} -surfaces. Le terme « classe » étant volontairement vague, on classifie par exemple les types topologiques possibles d'une

- \mathbf{R} -surface géométriquement rationnelle, définition 4.4.1, la « classe » est alors une classe \mathbf{C} -birationnelle ;
- \mathbf{R} -surface rationnelle, définition 4.4.1, la « classe » est alors une classe \mathbf{R} -birationnelle ;
- \mathbf{R} -surface d'Enriques, définition 4.5.13 (resp. K3, définition 4.5.3) : les \mathbf{R} -surfaces (X, σ) et (Y, τ) appartiennent à la même « classe » si les surfaces complexes X et Y appartiennent à l'unique famille irréductible de déformations complexes (définition 4.3.25) de surfaces d'Enriques (resp. de surfaces K3) ;

2. Entiers qui sont naturels d'après les contraintes en question.

- **R**-surface elliptique, définition 4.6.1 : les **R**-surfaces (X, σ) et (Y, τ) appartiennent à la même « classe » si les surfaces complexes X et Y appartiennent à l'une des familles irréductibles (qui sont en nombre infini) de déformations complexes ;
- **R**-surface elliptique jacobienne d'irrégularité nulle et de caractéristique d'Euler holomorphe donnée, la « classe » est alors de nouveau une unique famille irréductible de déformations complexes.

4.1. Courbes et diviseurs sur les surfaces complexes

La section 2.6 du chapitre 2 est consacrée aux diviseurs sur les variétés de dimension quelconque. On rappelle en particulier que sur une variété complexe irréductible non singulière X , on a une correspondance biunivoque entre diviseurs de Cartier et diviseurs de Weil et que les groupes modulo équivalence linéaire $\text{Cl}(X)$ et $\text{CaCl}(X)$ sont isomorphes. À tout diviseur D sur X représenté par $(U_i, f_i)_i$, on associe un fibré en droites $\mathcal{O}_X(D)$ défini par $\mathcal{O}_X(D)|_{U_i} = f_i^{-1}\mathcal{O}_X|_{U_i}$, voir la définition 2.6.11. Si la variété X est quasi-projective et non singulière, $D \mapsto \mathcal{O}_X(D)$ induit un isomorphisme

$$\text{Cl}(X) \simeq \text{Pic}(X) ,$$

voir le corollaire 2.6.17.

Sur une surface, les diviseurs premiers sont les courbes irréductibles et les diviseurs sont les combinaisons linéaires à coefficients entiers de courbes irréductibles. Lorsque cette combinaison linéaire est à coefficients positifs, le diviseur est *effectif*. De nombreux auteurs conviennent qu'une *courbe sur une surface* est un diviseur effectif sur cette surface, on retrouve les courbes planes de la section 1.6 qui pouvaient être réductibles et non réduites. Rappelons, définition 2.6.26, que le *diviseur canonique* K_X d'une surface complexe X est un ⁽³⁾ diviseur associé au *fibré canonique* $\mathcal{K}_X = \det \Omega_X$. On a en particulier $\mathcal{O}_X(K_X) = \bigwedge^2 \Omega_X = \Omega_X^{\otimes 2}$. Sur une **R**-surface (X, σ) , le fibré canonique est un **R**-fibré, ${}^\sigma \mathcal{K}_X = \mathcal{K}_X$. Rappelons que d'après le théorème de Cartan-Serre D.1.3, les **C**-espaces vectoriels $H^i(X, \mathcal{F})$ de cohomologie d'un faisceau cohérent \mathcal{F} sont de dimension finie.

Définition 4.1.1. — Soit X une surface projective complexe non singulière (ou plus généralement une surface kählérienne compacte).

3. Rappelons qu'il est d'usage de dire « le » diviseur canonique alors qu'il n'est défini qu'à équivalence linéaire près.

1. Le genre géométrique de X est $p_g(X) := \dim H^2(X, \mathcal{O}_X)$.
2. L'irrégularité de X est $q(X) := \dim H^1(X, \mathcal{O}_X)$.
3. La caractéristique d'Euler holomorphe de X est

$$\chi(\mathcal{O}_X) = 1 - q(X) + p_g(X).$$

4. Les nombres de Hodge de X sont $h^{a,b}(X) := \dim H^b(X, \Omega_X^a)$.

Proposition 4.1.2. — Soit X une surface kählérienne compacte. On a les identités :

1. $p_g(X) = \dim H^0(X, \mathcal{K}_X) = h^{2,0}(X) = h^{0,2}(X)$;
2. $q(X) = h^{1,0}(X) = h^{0,1}(X) = h^{3,0}(X) = h^{0,3}(X)$.

Démonstration. — On pourra se reporter à l'appendice D. Par symétrie de Hodge, on a $h^{p,q} = h^{q,p}$. Comme $H^0(X, \mathcal{K}_X) = H^0(X, \Omega_X^2)$, on a $h^{2,0}(X) = \dim H^0(X, \mathcal{K}_X)$. On aurait pu aussi utiliser la dualité de Serre : $H^2(X, \mathcal{O}_X) = H^0(X, \mathcal{K}_X)$. Pour terminer, on a recours à la dualité de Poincaré à coefficients dans \mathbf{C} qui donne $b_k = b_{4-k}$. Comme cette dualité est compatible avec la décomposition de Hodge, on obtient $h^{p,q} = h^{2-p,2-q}$. \square

Définition 4.1.3. — Soit X une surface projective complexe irréductible et non singulière. Soit $m \geq 1$, le nombre $P_m(X) := \dim H^0(X, \mathcal{K}_X^{\otimes m})$ est le m^e plurigenre de X . En particulier, $P_1(X) = p_g(X)$. La dimension canonique $\kappa(X)$ ou dimension de Kodaira est la dimension d'Itaka du diviseur canonique :

$$\kappa(X) := \begin{cases} -\infty & \text{si } P_m(X) = 0 \text{ pour tout } m \geq 1 ; \\ k \geq 0 & \text{le plus petit entier tel que la suite } \left\{ \frac{P_m(X)}{m^k} \right\}_m \text{ soit bornée.} \end{cases}$$

Si φ_{mK} désigne l'application rationnelle de X dans un espace projectif associée au système linéaire $|mK|$, alors $\kappa(X)$ est la dimension maximum des images $\varphi_{mK}(X)$ pour $m \geq 1$.

La dimension de Kodaira est définie plus généralement pour les variétés analytiques complexes compactes et pour une surface X , $\kappa(X)$ peut prendre les valeurs $-\infty, 0, 1, 2$, voir la définition D.4.8, la proposition D.4.9 et la remarque D.4.10. Nous nous concentrerons tour à tour sur les types de surfaces de dimension de Kodaira donnée.

Rappelons qu'une variété projective est de *type général* si son fibré canonique est gros, ce qui équivaut à $\kappa(X) = \dim X$, voir les définitions 2.6.22 et 2.6.29.

Définition 4.1.4. — Une surface projective complexe X (resp. une \mathbf{R} -surface projective (X, σ)) est de *type général* si $\kappa(X) = 2$, de *type spécial* si $\kappa(X) < 2$.

Remarque 4.1.5. — Dans le cadre des schémas, la dimension de Kodaira est invariante par changement de base, ainsi pour un \mathbf{R} -schéma projectif X , on a $\kappa(X) = \kappa(X \times_{\text{Spec } \mathbf{R}} \text{Spec } \mathbf{C})$.

Forme d'intersection. — Le \mathbf{Z} -module libre $\text{Div}(X)$ engendré par les courbes d'une surface projective non singulière X possède une forme bilinéaire symétrique qui fait de $\text{Cl}(X)$ un module quadratique.

On commence par généraliser la définition 1.6.11 de multiplicité d'intersection des courbes du plan $\mathbf{P}^2(\mathbf{C})$ aux courbes sur une surface non singulière quelconque.

Définition 4.1.6. — Soient X une surface quasi-projective complexe non singulière, C_1, C_2 deux courbes irréductibles distinctes sur X et P un point de X . Si $P \in C_1 \cap C_2$ et si f_i est une équation de C_i ($i = 1, 2$) dans l'anneau local $\mathcal{O}_{X,P}$ de X en P , on pose :

$$(C_1 \cdot C_2)_P := \dim_{\mathbf{C}} \mathcal{O}_{X,P}/(f_1, f_2).$$

Si $P \notin C_1 \cap C_2$, on pose $(C_1 \cdot C_2)_P := 0$. Le nombre ainsi défini est la *multiplicité d'intersection* des courbes C_1 et C_2 au point P .

Si $(C_1 \cdot C_2)_P = 1$, on dit que les courbes C_1 et C_2 sont *transverses* (ou *se rencontrent transversalement* en P).

Exercice 4.1.7. — 1. Montrer que si $P \in C_1 \cap C_2$, l'anneau $\mathcal{O}_{X,P}/(f_1, f_2)$ est un \mathbf{C} -espace vectoriel de dimension finie (Utiliser le théorème des zéros de Hilbert).

2. Montrer que $(C_1 \cdot C_2)_P = 1$ si et seulement si f_1 et f_2 engendrent l'idéal maximal \mathfrak{m}_P (c'est-à-dire si et seulement si f_1 et f_2 forment un système local de paramètres de X au voisinage de P , voir la définition 1.5.47).

Définition 4.1.8. — Soient X une surface projective complexe non singulière, C_1, C_2 deux courbes irréductibles distinctes sur X . On note

$$(C_1 \cdot C_2) := \sum_{P \in X} (C_1 \cdot C_2)_P = \sum_{P \in C_1 \cap C_2} (C_1 \cdot C_2)_P.$$

C'est le *nombre d'intersection* des courbes C_1 et C_2 .

Théorème 4.1.9. — Soit X une surface projective complexe non singulière. Il existe une unique forme bilinéaire symétrique

$$\mathrm{Div}(X) \times \mathrm{Div}(X) \longrightarrow \mathbf{Z}, \quad (A, B) \longmapsto (A \cdot B)$$

ayant les propriétés suivantes :

- Si A et B sont des courbes non singulières dont l'intersection est transverse, alors $(A \cdot B) = \#(A \cap B)$;
- si A et A' sont linéairement équivalents, alors $(A \cdot B) = (A' \cdot B)$ pour tout diviseur B sur X .

Démonstration. — Voir [Bea78, I.4]. □

Définition 4.1.10. — Soient X une surface projective complexe non singulière. Du théorème 4.1.9, on déduit une forme bilinéaire symétrique sur le \mathbf{Z} -module $\mathrm{Cl}(X)$, la *forme d'intersection*

$$\mathrm{Cl}(X) \times \mathrm{Cl}(X) \longrightarrow \mathbf{Z}, \quad (A, B) \longmapsto (A \cdot B).$$

Soient A et B des diviseurs sur X , $(A \cdot B)$ est le *nombre d'intersection* de A et B et on note $(A)^2 = (A \cdot A)$ le *nombre d'auto-intersection* de A .

Pour simplifier, on notera parfois abusivement $A \cdot B$ le nombre d'intersection $(A \cdot B)$ lorsque le contexte le permettra.

Proposition 4.1.11. — Soient X une surface projective complexe non singulière, \mathcal{L}_1 et \mathcal{L}_2 des fibrés en droites sur X . On pose

$$(\mathcal{L}_1 \cdot \mathcal{L}_2) = \chi(\mathcal{O}_X) - \chi(\mathcal{L}_1^{-1}) - \chi(\mathcal{L}_2^{-1}) + \chi(\mathcal{L}_1^{-1} \otimes \mathcal{L}_2^{-1}).$$

Alors

$$\mathrm{Pic}(X) \times \mathrm{Pic}(X) \longrightarrow \mathbf{Z}, \quad (\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2) \longmapsto (\mathcal{L}_1 \cdot \mathcal{L}_2)$$

est une forme bilinéaire symétrique sur le \mathbf{Z} -module $\mathrm{Pic}(X)$ et l'isomorphisme de \mathbf{Z} -modules $\mathrm{Cl}(X) \simeq \mathrm{Pic}(X)$ induit par $D \mapsto \mathcal{O}_X(D)$ est une isométrie pour les formes bilinéaires symétriques sur $\mathrm{Cl}(X)$ et $\mathrm{Pic}(X)$: si A et B sont deux diviseurs sur X , on a

$$(\mathcal{O}_X(A) \cdot \mathcal{O}_X(B)) = (A \cdot B).$$

Démonstration. — Voir [Bea78, Théorème I.4]. □

La restriction d'un fibré en droites sur une courbe projective possède un degré.

Proposition 4.1.12. — Soit C une courbe projective irréductible non singulière sur X et \mathcal{L} un fibré en droites sur X . Alors

$$(\mathcal{O}_X(C) \cdot \mathcal{L}) = \deg(\mathcal{L}|_C).$$

Démonstration. — Voir [Bea78, Lemme I.6]. \square

Exemple 4.1.13. — 1. Si $X = \mathbf{P}^2(\mathbf{C})$, alors $\text{Pic}(X) = \mathbf{Z}$ est engendré par la classe d'une droite (voir l'exercice 2.6.5). Toute courbe de degré d sur X est linéairement équivalente au diviseur dH où H est une droite. Soient C, C' deux courbes de degrés respectifs d, d' et L, L' deux droites distinctes ; du fait que $C \sim dL$ et $C' \sim d'L'$, on retrouve le théorème de Bézout :

$$(C \cdot C') = (dL \cdot d'L') = dd'(L \cdot L') = dd'.$$

2. Si $X = \mathbf{P}^1(\mathbf{C}) \times \mathbf{P}^1(\mathbf{C})$, alors $\text{Pic}(X) = \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$ est engendré par les classes de $F_1 = \{0\} \times \mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ et $F_2 = \mathbf{P}^1(\mathbf{C}) \times \{0\}$. La table de multiplication est donnée par $(F_1^2) = (F_2^2) = 0$ et $(F_1 \cdot F_2) = 1$. Une courbe sur X est déterminée par un polynôme bihomogène en quatre variables. Soient C, C' deux courbes de bidegrés $(d_1, d_2), (d'_1, d'_2)$, on a

$$(C \cdot C') = (d_1F_1 + d_2F_2) \cdot (d'_1F_1 + d'_2F_2) = d_1d'_2 + d'_1d_2.$$

Par l'intermédiaire de l'application première classe de Chern $c_1 : \text{Pic}(X) \rightarrow H^2(X; \mathbf{Z})$, voir l'appendice D, on peut lier la forme d'intersection avec le cup-produit, voir la section B.7 :

Proposition 4.1.14. — Soient X une variété complexe non singulière de dimension n et Y une sous-variété complexe non singulière de codimension 1 compacte, alors la classe fondamentale de Y dans $H_{2n-2}(X; \mathbf{Z})$ est duale de Poincaré de $c_1(\mathcal{O}_X(Y)) \in H_c^2(X; \mathbf{Z})$.

Démonstration. — Voir [Hir66, Theorem 4.9.1]. \square

Proposition 4.1.15. — Soient X une surface projective complexe non singulière et D, D' des diviseurs de X , alors $c_1(\mathcal{O}_X(D)) \in H^2(X; \mathbf{Z})$, $c_1(\mathcal{O}_X(D')) \in H^2(X; \mathbf{Z})$ et

$$(D \cdot D') = c_1(\mathcal{O}_X(D)) \smile c_1(\mathcal{O}_X(D')).$$

Démonstration. — Voir [Ibid.]. \square

Proposition 4.1.16. — *La forme d'intersection sur une \mathbf{R} -surface projective non singulière (X, σ) est compatible avec la structure réelle :*

$$\forall \mathcal{L}, \mathcal{L}' \in \text{Pic}(X), (\mathcal{L} \cdot \mathcal{L}') = (\sigma \mathcal{L} \cdot \sigma \mathcal{L}')$$

et

$$\forall A, B \in \text{Cl}(X), (A \cdot B) = (\sigma A \cdot \sigma B).$$

Démonstration. — Afin d'utiliser la proposition 4.1.11, on rappelle que

$$\chi(\mathcal{L}) = \sum (-1)^k \dim_{\mathbf{C}} H^k(X, \mathcal{L}).$$

Il suffit alors d'appliquer la proposition 2.2.2 pour trouver la première égalité. Pour passer aux classes linéaires de diviseurs, on utilise la proposition 2.6.30.

On peut remarquer qu'au vu de la section 3.7, ce résultat est aussi une conséquence du corollaire 3.1.9 en cohomologie singulière. On pourra se reporter si besoin à [Sil89, II.1]. \square

Dans la suite du chapitre, on identifiera librement $\text{Pic}(X)$ et $\text{Cl}(X)$ lorsque X est une surface projective non singulière.

Théorème 4.1.17 (Dualité de Serre). — *Soient X une surface projective non singulière et \mathcal{L} un fibré en droites sur X , alors*

$$H^k(X, \mathcal{L}) \simeq H^{2-k}(X, \mathcal{K}_X \otimes \mathcal{L}^{-1}).$$

En particulier

$$\chi(\mathcal{L}) = \chi(\mathcal{K}_X \otimes \mathcal{L}^{-1}).$$

Démonstration. — Voir [Bea78, Théorème I.11]. \square

Théorème 4.1.18 (Formule de Riemann-Roch pour les surfaces)

Soit X une surface projective non singulière et D un diviseur sur X , alors

$$\chi(\mathcal{O}_X(D)) = \frac{1}{2} D \cdot (D - K_X) + \chi(\mathcal{O}_X).$$

Démonstration. — Pour tout diviseur A sur X , on a $(\mathcal{O}_X(-A))^{-1} = \mathcal{O}_X(A)$. On a donc d'après la proposition 4.1.11 :

$$\begin{aligned} (-D) \cdot (D - K_X) &= \\ \chi(\mathcal{O}_X) - \chi(\mathcal{O}_X(D)) - \chi(\mathcal{O}_X(K_X - D)) + \chi(\mathcal{O}_X(D) \otimes \mathcal{O}_X(K_X - D)). \end{aligned}$$

En utilisant la dualité de Serre appliquée à $\mathcal{O}_X(K_X - D)$, on trouve

$$(-D) \cdot (D - K_X) = \chi(\mathcal{O}_X) - \chi(\mathcal{O}_X(D)) - \chi(\mathcal{O}_X(D)) + \chi(\mathcal{O}_X(K_X))$$

d'où l'on déduit la formule cherchée en appliquant la dualité de Serre au fibré canonique : $\chi(\mathcal{O}_X(K_X)) = \chi(\mathcal{O}_X)$. \square

La caractéristique d'Euler holomorphe d'une surface complexe X est reliée à sa caractéristique d'Euler topologique $\chi_{\text{top}}(X) = \sum_{k=0}^4 (-1)^k \dim_{\mathbf{Q}} H_k(X; \mathbf{Q})$ par la formule suivante :

Théorème 4.1.19 (Formule de Noether). — *Soit X une surface projective complexe non singulière. Alors*

$$\chi(\mathcal{O}_X) = \frac{1}{12}(K_X^2 + \chi_{\text{top}}(X)) .$$

Cette formule est souvent exprimée avec les nombres de Chern $c_1^2(X) = (K_X^2)$ et $c_2(X) = \chi_{\text{top}}(X)$. Ce qui donne

$$\chi(\mathcal{O}_X) = \frac{1}{12}(c_1^2(X) + c_2(X)) .$$

Démonstration. — Voir [GH78, III.5]. \square

Définition 4.1.20. — Soit (X, σ) une \mathbf{R} -surface projective non singulière. On rappelle, voir la définition 2.6.34, le théorème 2.6.35 et la définition 2.6.36, que $\text{NS}(X) = \text{Pic}(X)/\text{Pic}^0(X)$ est le *groupe de Néron-Severi* de la surface complexe X , que $\rho(X) = \text{rg}(\text{Pic}(X)/\text{Pic}^0(X))$ est le *nombre de Picard* de X et que, si $X(\mathbf{R})$ est non vide, $\rho_{\mathbf{R}}(X) = \text{rg}(\text{Pic}(X)^G/\text{Pic}^0(X)^G)$ est le *nombre de Picard réel* de la \mathbf{R} -surface (X, σ) .

Remarque 4.1.21. — Par définition, on a $\rho_{\mathbf{R}}(X) \leq \rho(X)$. D'après la proposition 2.6.37, si $q(X) = 0$, alors $\rho(X) = \text{rg Pic}(X)$ et si de plus $X(\mathbf{R})$ est non vide, alors $\rho_{\mathbf{R}}(X) = \text{rg Pic}(X)^G$ d'après le théorème 2.6.32.

Définition 4.1.22. — Soient X une surface projective complexe non singulière et A, B des diviseurs sur X . On désigne par $A \equiv B$ la relation d'*équivalence numérique* : $A \equiv B$ si et seulement si $(A \cdot C) = (B \cdot C)$ pour tout diviseur effectif C sur X . On note

$$\text{Num}(X) := \text{Div}(X)/\equiv$$

le groupe quotient.

Proposition 4.1.23. — *Soit X une surface algébrique complexe projective non singulière, alors*

$$\text{Num}(X) \simeq \text{NS}(X)/\text{Tor}(\text{NS}(X)) .$$

Démonstration. — Voir [GH78, Chapter V]. \square

Théorème 4.1.24 (Indice de Hodge). — Soient X une surface projective non singulière et H un diviseur ample sur X . Si D est un diviseur sur X tel que $D \cdot H = 0$, alors $(D^2) \leq 0$ avec égalité si et seulement si $D \equiv 0$.

Démonstration. — On rappelle que pour un diviseur D sur X , on note $h^k(D) = \dim H^k(X, \mathcal{O}_X(D))$.

Affirmation : si D est un diviseur sur X tel que $(D^2) > 0$, alors ou bien $h^0(mD) \neq 0$, ou bien $h^0(-mD) \neq 0$ pour m suffisamment grand.

On en déduit alors qu'ou bien mD , ou bien $-mD$ est équivalent à un diviseur effectif non nul pour m suffisamment grand et donc que $H \cdot D > 0$ ou $H \cdot D < 0$ et la première partie du théorème est démontrée.

Montrons l'affirmation. Soit D un diviseur sur X tel que $(D^2) > 0$. Alors d'après Riemann-Roch $\chi(\mathcal{O}_X(mD))$ est équivalent à $\frac{m^2}{2}(D^2)$ lorsque m tend vers l'infini. Comme $h^0(mD) + h^2(mD) \geq \chi(\mathcal{O}_X(mD))$, ou bien $h^0(mD)$, ou bien $h^2(mD)$ tend vers l'infini avec m . Par dualité de Serre $h^2(mD) = h^0(K_X - mD)$. Maintenant en utilisant le même argument en remplaçant D par $-D$, on conclut que $h^0(-mD)$ ou $h^0(K_X + mD)$ tend vers l'infini avec m . Mais $h^0(K_X - mD)$ et $h^0(K_X + mD)$ ne peuvent pas tendre tous les deux vers l'infini avec m . En effet, si $s \in H^0(X, \mathcal{O}_X(K_X - mD))$, alors la multiplication par s induit une inclusion $H^0(X, \mathcal{O}_X(K_X + mD)) \hookrightarrow H^0(X, \mathcal{O}_X(2K_X))$. En particulier, ou bien $h^0(mD) \neq 0$, ou bien $h^0(-mD) \neq 0$ pour m suffisamment grand.

Pour la deuxième partie du théorème, supposons que $D \cdot H = 0$, que $(D^2) = 0$ et par contradiction que $D \cdot C > 0$ pour un diviseur effectif C . Posons $\lambda = \frac{p}{q} \in \mathbf{Q}$ défini par $(C - \lambda H) \cdot H = 0$. Alors $mD + q(C - \lambda H)$ ne satisfait pas $(mD + q(C - \lambda H))^2 \leq 0$ si m est suffisamment grand et pourtant $(mD + q(C - \lambda H)) \cdot H = 0$. \square

Corollaire 4.1.25. — Soit X une surface projective complexe non singulière. Alors on a pour l'indice de la forme d'intersection, voir la définition 3.4.1 :

$$\tau(X) = 2 + 2h^{0,2}(X) - h^{1,1}(X) = 2 + 4p_g(X) - b_2(X).$$

Démonstration. — En effet, d'après le théorème de l'indice de Hodge, la restriction de la forme d'intersection Q à $H^{1,1}(X)$ a pour signature $(1, h^{1,1}(X) - 1)$. Comme la restriction de Q à $H^{2,0}(X) \oplus H^{0,2}(X)$ est définie positive, la signature de Q est donc $(h^{2,0}(X) + h^{0,2}(X) + 1, h^{1,1}(X) - 1)$. Il ne reste qu'à rappeler les relations $h^{2,0}(X) = h^{0,2}(X) = p_g(X)$ et $b_2(X) = h^{2,0}(X) + h^{1,1}(X) + h^{0,2}(X)$. \square

Éclatement. — Voir l'appendice **F** ou [Bea78, II.1].

Soit X une surface projective complexe et $P \in X$ un point non singulier. Il existe une surface \tilde{X} et un morphisme birationnel $\pi: \tilde{X} \rightarrow X$, uniques à isomorphisme près, tels que :

1. La restriction de π à $\tilde{X} \setminus \pi^{-1}(P) \rightarrow X \setminus \{P\}$ est un isomorphisme.
2. $E_P := \pi^{-1}(P)$ est isomorphe à $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$.
3. La variété \tilde{X} est non singulière le long du diviseur E_P .

Définition 4.1.26. — Le morphisme π est l'*éclatement de X en P* (ou *centré en P*), la surface $B_P X := \tilde{X}$ est la *surface éclatée* de X en P et la courbe $E_P := \pi^{-1}(P)$ est la *courbe exceptionnelle* de l'éclatement.

Exemple 4.1.27 (Éclatement d'un point du plan affine)

En appliquant la définition **F.2.1**, et en se restreignant à un voisinage affine de $(0, 0)$, on obtient que la surface éclatée $B_{(0,0)}\mathbf{A}^2$ de \mathbf{A}^2 en $(0, 0)$ est l'hypersurface quadrique définie dans $\mathbf{A}^2 \times \mathbf{P}^1$ par

$$B_{(0,0)}\mathbf{A}^2 = \{((x, y), [u : v]) \in \mathbf{A}_{x,y}^2 \times \mathbf{P}_{u,v}^1 \mid uy = vx\}.$$

Voir la figure **4.1** ⁽⁴⁾.

Exemple 4.1.28 (Éclatement d'un point du plan projectif)

La surface éclatée $B_{(0:0:1)}\mathbf{P}^2$ de \mathbf{P}^2 en $P = (0 : 0 : 1)$ est la surface algébrique $\tilde{\mathbf{P}}^2$ définie localement au-dessus du voisinage $U = (z \neq 0)$ de P par

$$B_P U := \{((x, y), [u : v]) \in U_{x,y} \times \mathbf{P}_{u,v}^1 \mid uy = vx\}.$$

Plus généralement, l'éclatée du plan projectif $\mathbf{P}_{x:y:z}^2$ en un point $P = (a : b : 1)$ de l'ouvert affine $(z \neq 0)$ est donné par

$$B_{(a:b:1)}\mathbf{P}^2 := \{([x : y : z], [u : v]) \in \mathbf{P}_{x:y:z}^2 \times \mathbf{P}_{u:v}^1 \mid u(y - bz) - v(x - az) = 0\},$$

et en particulier

$$B_{(0:0:1)}\mathbf{P}^2 := \{([x : y : z], [u : v]) \in \mathbf{P}_{x:y:z}^2 \times \mathbf{P}_{u:v}^1 \mid uy - vx = 0\}.$$

Remarque 4.1.29. — Si X est un espace analytique complexe, on déduit des exemples ci-dessus une description de l'éclatement de X en un point non singulier P . Il suffit de réaliser l'éclatement dans une carte qui envoie un voisinage ouvert de P sur un ouvert de \mathbf{C}^2 . On prendra garde qu'en général

4. Figure réalisée par Daniel Naie.

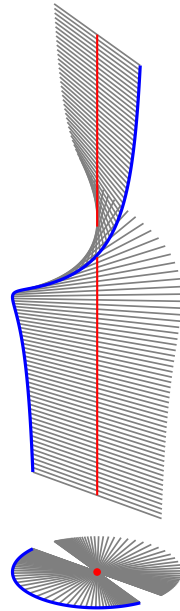


FIGURE 4.1. Éclatement : la courbe exceptionnelle est représentée par la droite verticale.

pour la topologie de Zariski, on ne peut pas se contenter de cette description « locale » de l'éclatement. En effet, si une surface contient un ouvert dense isomorphe à un ouvert non vide de \mathbf{A}^2 , c'est qu'elle est rationnelle, voir la définition 4.4.1.

Proposition 4.1.30. — Soient X une surface projective complexe non singulière, $\pi: \tilde{X} \rightarrow X$ l'éclatement de X en un point P et E la courbe exceptionnelle de π .

1. L'application $\text{Pic}(X) \oplus \mathbf{Z} \rightarrow \text{Pic}(\tilde{X})$ définie par $(A, n) \mapsto \pi^*A + nE$ est un isomorphisme.
2. Soient A et B des diviseurs sur X , on a

$$(\pi^*A \cdot \pi^*B) = (A \cdot B), \quad (E \cdot \pi^*A) = 0, \quad (E)^2 = -1.$$
3. On a $\text{NS}(\tilde{X}) \simeq \text{NS}(X) \oplus \mathbf{Z}[E]$.
4. On a $K_{\tilde{X}} = \pi^*K_X + E$.

Démonstration. — Voir [Bea78, II.3]. □

Remarque 4.1.31. — On peut aussi éclater en un point singulier. Dans l'exemple 4.7.6, on calcule l'éclatement d'un point double.

Formules d'adjonction. — Soit $f: C \rightarrow X$ le plongement d'un diviseur effectif dans une surface X et soit D un diviseur de X , on pose :

$$\mathcal{O}_C(D) := f^*(\mathcal{O}_X(D))$$

en particulier, $\mathcal{O}_C(C) = \mathcal{O}_X(C)|_C$. Si C est non singulière, $\mathcal{O}_C(C)$ est le fibré normal à C dans X .

Théorème 4.1.32 (Variété non singulière). — Soient X une variété complexe non singulière et Y une sous-variété complexe non singulière de codimension 1, alors

$$\mathcal{K}_Y = \mathcal{K}_X \otimes \mathcal{O}_X(Y)|_Y .$$

Démonstration. — Voir [BHPVdV04, Theorem I.6.3]. □

Remarque 4.1.33. — Les fibrés canoniques \mathcal{K}_X et \mathcal{K}_Y (voir l'appendice D) sont définis pour des variétés et sous-variétés non singulières.

Corollaire 4.1.34 (Courbes non singulières sur les surfaces)

Soient X une surface complexe (non singulière mais pas forcément connexe ni compacte) et C une courbe non singulière de X , alors le faisceau canonique de C satisfait la relation :

$$\mathcal{K}_C = \mathcal{K}_X \otimes \mathcal{O}_C(C) .$$

Remarque 4.1.35. — Lorsque C est singulière, le second membre de la formule précédente est encore défini et détermine un faisceau :

$$\omega_C := \mathcal{K}_X \otimes \mathcal{O}_C(C) .$$

A priori, le faisceau ainsi défini dépend du plongement de C dans X , mais on peut montrer qu'il n'en est rien et qu'en fait ω_C est le *faisceau dualisant* de C . Voir [BHPVdV04, II.1] et [Har77, III.7].

Genre d'une courbe plongée. — Cette sous-section est inspirée de [BHPVdV04, II.11]. Soit C une courbe complexe non singulière connexe, le *genre géométrique* de C est le genre de la surface topologique sous-jacente (voir la définition E.1.2). Soit C est une courbe complexe irréductible réduite et $\nu: \tilde{C} \rightarrow C$ sa normalisation (voir l'exemple 1.5.38); la normalisée \tilde{C} est une courbe non singulière connexe.

Définition 4.1.36. — Le genre géométrique $g(C)$ d'une courbe algébrique complexe irréductible réduite C est un invariant birationnel égal au genre topologique de sa normalisée :

$$g(C) := g(\tilde{C}) .$$

Définition 4.1.37. — Le genre arithmétique $p_a(C)$ d'une courbe algébrique complexe C (ni supposée réduite, ni supposée irréductible) est donné par :

$$p_a(C) := 1 - \chi(\mathcal{O}_C) .$$

Remarque 4.1.38. — Si C est irréductible réduite non singulière, alors $p_a(C) = g(C)$.

Remarque 4.1.39. — Supposons C irréductible, réduite et plongée dans une surface non singulière X , alors

1. Le genre arithmétique de C est égal au genre géométrique $g(C')$ d'une courbe non singulière C' obtenue en perturbant C dans la surface X lorsque c'est possible (la courbe $C' \subset X$ est linéairement équivalente à C).
2. D'après la remarque 4.1.35, on a

$$p_a(C) = 1 - \chi(\mathcal{O}_C) = 1 + \chi(\omega_C) .$$

Définition 4.1.40. — Soient C une courbe sur une surface complexe non singulière et P un point de multiplicité r_P de C . Le point P est un point multiple ordinaire de C s'il est localement analytiquement isomorphe à $\prod_{k=1, \dots, r_P} (x - \varepsilon^k y) = 0$ où ε est une racine primitive r_P^{e} de 1.

Lemme 4.1.41. — Soient P est un point multiple ordinaire de multiplicité r_P sur une courbe irréductible C et \tilde{C} la transformée stricte de C par l'éclatement de X centré en P . Alors

$$\tilde{C}^2 = C^2 - r_P^2 .$$

Démonstration. — D'après [Bea78, Lemme II.2], on a $\pi^*C = \tilde{C} + rE_P$, la formule découle alors de la proposition 4.1.30. \square

Définition 4.1.42. — Soient X une surface, $P \in X$ un point non singulier et $X' \rightarrow X$ l'éclatement de X centré en P de courbe exceptionnelle $E_P \subset X'$. Soit $Q \in E_P$, on dit que Q est un point *infinitement proche* de P . Plus généralement, si $\pi: X'' \rightarrow X$ est une succession d'éclatements, tout point $Q \in X''$ tel que $\pi(Q) = P$ est un point *infinitement proche au-dessus* de P .

Soit $C \subset X$ une courbe réduite sur une surface non singulière. On pose $\delta_P(C) = \sum \frac{1}{2} r_Q (r_Q - 1)$ où la somme est prise sur les points Q infiniment proches au-dessus de P y compris P . En particulier, si P est un point multiple ordinaire de multiplicité r sur C , on a $\delta_P(C) = \frac{1}{2} r_P (r_P - 1)$; un point double ordinaire compte pour 1, un triple pour 3 et un quadruple pour 6 [Har77, Chapitre V, exercice 3.7].

Proposition 4.1.43. — Soient $C \subset X$ une courbe irréductible réduite sur une surface non singulière et $\nu: \tilde{C} \rightarrow C$ la normalisation de C , on a

$$p_a(C) = g(\tilde{C}) + \delta(C)$$

où $\delta(C) = \sum_{P \in C} \delta_P(C)$. Si C est non singulière, $\delta(C) = 0$.

Démonstration. — Voir [Har77, Chapitre V, exemple 3.9.2]. \square

Théorème 4.1.44 (Adjonction pour les courbes singulières)

Soient X une surface analytique complexe (non singulière mais pas forcément connexe ni compacte) et C une courbe compacte (ni supposée réduite, ni supposée irréductible) de X , alors

$$2p_a(C) - 2 = \deg(\mathcal{K}_X \otimes \mathcal{O}_C(C)) .$$

Si X est de surcroît compacte, la forme d'intersection est bien définie et l'égalité précédente devient :

$$(4.1) \quad 2p_a(C) - 2 = C \cdot (K_X + C) .$$

Exercice 4.1.45. — Soit $(C, \sigma_{\mathbf{P}}|_C)$ une \mathbf{R} -courbe projective plane irréductible réduite de degré 4. Montrer que si C est rationnelle, c'est-à-dire si $g(C) = 0$, alors au moins l'un de ses points singuliers est réel, c'est-à-dire $\text{Sing}(C) \cap C(\mathbf{R}) \neq \emptyset$.

Voici un autre exemple d'application de la formule d'adjonction aux \mathbf{R} -courbes, cet exemple est issu de [KM16, Proposition 23].

Proposition 4.1.46. — Soit $C \subset \mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$ une \mathbf{R} -courbe rationnelle dont le lieu réel $C(\mathbf{R})$ est non singulier, $C(\mathbf{R}) \cap \text{Sing}(C) = \emptyset$. Alors la classe fondamentale $[C(\mathbf{R})] \in H_1(\mathbf{T}^2, \mathbf{Z}_2)$ est non nulle.

Démonstration. — Soit $\{E_1, E_2\}$ une base de $H_2(\mathbf{P}^1(\mathbf{C}) \times \mathbf{P}^1(\mathbf{C}); \mathbf{Z})$ telle que $(E_k)^2 = 0$ et $E_1 \cdot E_2 = 1$. La classe fondamentale de la courbe complexe C vaut donc $a_1 E_1 + a_2 E_2$ où a_1 et a_2 sont des entiers naturels. La classe fondamentale

du diviseur canonique est quant à elle donnée par $K_X = -2E_1 - 2E_2$. La formule d'adjonction donne donc

$$2p_a(C) - 2 = (a_1E_1 + a_2E_2) \cdot ((a_1 - 2)E_1 + (a_2 - 2)E_2) = a_1(a_2 - 2) + a_2(a_1 - 2),$$

de sorte que

$$(4.2) \quad p_a(C) = (a_1 - 1)(a_2 - 1) .$$

Comme C est stable par σ , on a de plus

$$a_k = (C \cdot E_{3-k}) \equiv (C(\mathbf{R}) \cdot E_{3-k}(\mathbf{R})) \pmod{2}$$

pour $k \in \{1, 2\}$. C'est pourquoi si la classe $[C(\mathbf{R})] \in H_1(\mathbf{T}^2, \mathbf{Z}_2)$ était nulle, a_1, a_2 seraient tous deux pairs. Si bien que $p_a(C)$ serait impair. Mais C étant rationnelle $g(\tilde{C}) = 0$. En conséquence C posséderait un nombre impair de points singuliers dont l'un serait nécessairement réel. \square

En utilisant la formule d'adjonction (4.1), on définit plus généralement le *genre virtuel* d'un diviseur D sur une surface compacte :

$$(4.3) \quad p_v(D) := \frac{1}{2}(D \cdot (K_X + D)) + 1 .$$

Si $D = A + B$ avec A et B des diviseurs effectifs, on a alors

$$(4.4) \quad p_v(D) := p_a(A) + p_a(B) + A \cdot B - 1$$

et

$$(4.5) \quad p_v(-D) = D^2 - p_a(D) + 2 .$$

Voir par exemple [Har77, Chapitre V, exercice 1.3].

Proposition 4.1.47. — [BHPVdV04, II.11.c] *Soit C une courbe réduite et connexe sur une surface X , alors $p_v(C) = p_a(C) \geq 0$.*

Exercice 4.1.48. — Soit $C = C_1 + C_2$ la réunion de deux courbes rationnelles non singulières disjointes, on a $\chi_{top}(C) = 4$ et $p_v(C) = -1$.

4.2. Exemples de \mathbf{R} -surfaces

Commençons par rappeler la définitions de quelques surfaces remarquables de dimension de Kodaira négative, $\kappa = -\infty$.

Définition 4.2.1 (Surfaces de Hirzebruch, [Hir51])

Une surface complexe X est une *surface de Hirzebruch d'indice n* , notée \mathbf{F}_n , si c'est l'espace total d'un fibré localement trivial en $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ au-dessus de

$\mathbf{P}^1(\mathbf{C}) : \mathbf{F}_n = \mathbf{P}_{\mathbf{P}^1}(\mathcal{O}_{\mathbf{P}^1} \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(n))$, c'est-à-dire que \mathbf{F}_n est le fibré projectif associé au fibré en plans $\mathcal{O}_{\mathbf{P}^1} \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(n)$ au-dessus de \mathbf{P}^1 .

Par convention la \mathbf{R} -surface de Hirzebruch d'indice n est obtenue en munissant \mathbf{F}_n de la structure réelle canonique induite par $\sigma_{\mathbf{P}}$.

Proposition 4.2.2. — Si $n > 0$, la courbe $E_\infty = \mathbf{P}_{\mathbf{P}^1}(\mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(n))$ est une section exceptionnelle du fibré $\mathbf{F}_n \rightarrow \mathbf{P}^1$ d'auto-intersection $E_\infty \cdot E_\infty = -n$.

Démonstration. — Voir [BHPVdV04, Propositions 4.1 et 4.2, page 141] et aussi [Bea78, Chapitre III]. \square

Remarque 4.2.3. — La surface \mathbf{F}_n est obtenue en recollant deux cartes $\mathbf{P}_{u:v}^1 \times \mathbf{A}_t^1$ et $\mathbf{P}_{u_1:v_1}^1 \times \mathbf{A}_{t_1}^1$ le long des ouverts $\{t \neq 0\}$ et $\{t_1 \neq 0\}$ via l'application

$$((u : v), t) \mapsto ((u_1 : v_1), t_1)$$

où $t_1 = \frac{1}{t}$ et $uv_1 = t^n u_1 v$.

Remarque 4.2.4. — Les surfaces de Hirzebruch sont de dimension κ négative car la fibre générale de $\mathbf{F}_n \rightarrow \mathbf{P}^1$ est de dimension κ négative.

Exercice 4.2.5. — 1. Montrer que la surface de Hirzebruch \mathbf{F}_1 est isomorphe à l'éclaté de $\mathbf{P}^2(\mathbf{C})$ en un point.

2. Montrer que si n est impair, \mathbf{F}_n ne possède qu'une structure réelle à équivalence près.

3. Montrer que si $n = 2k$, \mathbf{F}_{2k} possède une seconde classe de structures réelles dont le lieu réel est vide.

Exemple 4.2.6 (Fibrés en coniques sur \mathbf{P}^1). — Historiquement un fibré en coniques sur un corps K est une surface donnée par une équation de la forme

$$x^2 + axy + by^2 = f(t)$$

où $a, b \in K$ et $f \in K[t]$. Lorsque $K = \mathbf{R}$, par réduction de la forme quadratique du membre de gauche, on peut toujours se ramener à une équation de la forme

$$x^2 - ay^2 = f(t)$$

où $a = -1, 0, 1$. On complète la surface affine définie par l'équation ci-dessus en une surface X_0 d'équation

$$x^2 - ay^2 - f(t)z^2 = 0$$

dans $\mathbf{P}_{x:y:z}^2 \times \mathbf{A}_t^1$.

On rappelle que l'on peut définir la partie entière supérieure $\lceil x \rceil$ d'un nombre réel x à partir de la partie entière (inférieure) : $\lceil x \rceil = -\lfloor -x \rfloor$. Notons maintenant $m := \lceil \frac{\deg f}{2} \rceil$ c'est-à-dire que le degré de f est égal à $2m$ ou $2m - 1$. Posons $f_1 := t^{2m} f(\frac{1}{t})$ (classiquement, on dit que f_1 est le *polynôme réciproque* de f) et recollons la surface X_1 d'équation $x_1^2 - ay_1^2 - f_1(t_1)z_1^2 = 0$ dans $\mathbf{P}_{x_1:y_1:z_1}^2 \times \mathbf{A}_{t_1}^1$ à la surface X_0 le long des ouverts $\{t \neq 0\}$ et $\{t_1 \neq 0\}$ au travers de l'isomorphisme

$$((x : y : z), t) \mapsto ((x_1 : y_1 : z_1), t_1) = ((x : y : zt^m), \frac{1}{t}).$$

Si $a \neq 0$ et si f est un polynôme à racines simples, la surface X obtenue est une surface projective non singulière et l'application $\pi : X \rightarrow \mathbf{P}^1$ définie par $\pi : ((x : y : z), t) \mapsto t$ sur X_0 et par $\pi : ((x_1 : y_1 : z_1), t_1) \mapsto t_1$ sur X_1 munit X d'une structure de fibré en coniques au-dessus de \mathbf{P}^1 .

Si l'on suppose de plus que le degré de f est pair, on évite d'avoir une racine à l'infini et on peut choisir le signe de son coefficient dominant pour que le lieu réel de la surface complétée soit difféomorphe à celui de la surface affine X_0 dont on est parti.

Remarque 4.2.7. — Si le degré de f est impair, alors il existe au moins une fibre réelle du type $x^2 - y^2 = 0$, à savoir formée de deux droites réelles se coupant en un point.

Exemple 4.2.8 (Topologie des fibrés en coniques)

Soit X le complété projectif du fibré en coniques donné par l'équation

$$x^2 + y^2 = f(t)$$

où $f \in \mathbf{R}[t]$ est un polynôme de degré pair $2s$, négatif à l'infini qui possède exactement $2s$ zéros réels distincts tous simples, par exemple : $f(t) = -\prod_{i=1, \dots, 2s} (t - i)$ pour $s \geq 2$. Il est immédiat que $X(\mathbf{R})$ est compact et possède s composantes connexes. C'est une réunion disjointe de s sphères.

Les exemples ci-dessus se généralisent en considérant les fibrés en coniques au-dessus d'une courbe de genre quelconque.

Définition 4.2.9 (Surfaces fibrées en coniques)

Un *fibré en coniques* est une paire (X, π) où X est une surface complexe et $\pi : X \rightarrow B$ est un morphisme vers une courbe complexe non singulière dont chaque fibre est isomorphe à une conique plane, singulière ou non, réduite ou non (voir l'exercice 1.2.68). Un *\mathbf{R} -fibré en coniques* est une paire $((X, \sigma), \pi)$ où

(X, σ) est une \mathbf{R} -surface et $\pi: X \rightarrow B$ est un morphisme de \mathbf{R} -variétés vers une \mathbf{R} -courbe (B, σ_B) dont chaque fibre est isomorphe en tant que courbe complexe à une conique plane.

Remarque 4.2.10. — Une surface de Hirzebruch est un fibré en coniques dont toutes les fibres sont non singulières.

Exercice 4.2.11 (Fibrés en coniques). — 1. Montrer qu’une surface munie d’une fibration en coniques est de dimension κ négative.

2. Montrer que l’espace total X d’un fibré en coniques $\pi: X \rightarrow B$ avec au moins une fibre irréductible est non singulier si toutes les fibres de π sont des coniques réduites.

3. Montrer que tout fibré en coniques complexes réduites au-dessus de \mathbf{P}^1 est l’éclaté d’une surface de Hirzebruch en un nombre fini de points.

4. Donner un exemple de \mathbf{R} -fibré en coniques dont le lieu réel est non connexe pour la topologie euclidienne.

Définition 4.2.12 (Surfaces de del Pezzo). — Une surface complexe X est une *surface de del Pezzo* si son diviseur anti-canonique $-K_X$ est ample. L’entier $(K_X)^2$ est alors appelé le *degré* de la surface de del Pezzo X .

On pourra consulter les exposés de Demazure [DPT80, pages 21–69] pour une étude des morphismes multicanoniques sur ces surfaces et sur leurs généralisations, les surfaces de del Pezzo *affaiblies*⁽⁵⁾ dont le diviseur anti-canonique $-K_X$ est seulement *nef* et *big*.

Exercice 4.2.13. — 1. Montrer que les surfaces de del Pezzo sont de dimension κ négative.

2. Donner un exemple de surface de del Pezzo munie d’une structure de fibré en coniques, voir [BM11] pour une caractérisation de telles surfaces.

3. Montrer que $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$ est une surface de del Pezzo de degré 8.

4. Montrer qu’un revêtement double du plan projectif ramifié le long d’une courbe quartique non singulière est une surface de del Pezzo de degré 2.

5. En anglais : *weak del Pezzo surfaces*.

Surfaces topologiques : conventions et notations. — Une surface topologique est une variété topologique de dimension 2. Rappelons qu'en dimension réelle 2, toute variété topologique est munie d'une unique structure de variété différentielle de classe C^∞ , voir par exemple [Hir76, Chapter 9], et tout homéomorphisme entre variétés topologiques admet une approximation par des difféomorphismes de classe C^∞ . Nous supposons donc toujours qu'une surface topologique est munie de cette structure unique et nous utiliserons donc l'expression *surface topologique* pour désigner une variété différentielle de dimension réelle 2. De sorte qu'il est correct de considérer, par exemple, des *difféomorphismes* entre surfaces topologiques.

Dans ce qui suit, on se restreint aux surfaces topologiques *compactes* :

Convention 4.2.14. — Une surface topologique est une variété topologique de dimension 2 compacte (sans bord).

Notation 4.2.15. — Si A et B sont des surfaces topologiques, on note $A \approx B$ si A et B sont C^∞ -difféomorphes, $A \sqcup B$ la réunion disjointe de A et B , $A \# B$ leur somme connexe (voir la définition B.5.12 et la remarque B.5.13), $\sqcup^s A$ la réunion disjointe de s copies de A et $\#^k A$ la somme connexe de k copies de A . Par convention, $\sqcup^0 A = \emptyset$ et $\#^0 A = \mathbf{S}^2$. On note :

1. \mathbf{S}^2 la sphère de dimension 2 ;
2. $\mathbf{T}^2 \approx \mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^1$ le tore de dimension 2 ;
3. $\mathbf{S}_g = \#^g \mathbf{T}^2$ la surface topologique orientable de genre $g \geq 0$, en particulier $\mathbf{S}_0 = \mathbf{S}^2$ et $\mathbf{S}_1 = \mathbf{T}^2$;
4. $\mathbf{RP}^2 \approx \mathbf{S}^2 / \mathbf{Z}_2$ le plan projectif réel ;
5. \mathbf{K}^2 la bouteille de Klein ;
6. $\mathbf{V}_g = \#^g \mathbf{RP}^2$ la surface non orientable de genre ⁽⁶⁾ $g > 0$. En particulier $\mathbf{V}_1 = \mathbf{RP}^2$ et $\mathbf{V}_2 = \mathbf{K}^2$.

Remarque 4.2.16. — Pour $g > 0$, \mathbf{V}_g est la surface non orientable de caractéristique d'Euler topologique $2 - g$ puisque \mathbf{V}_g est la somme connexe de g copies de $\mathbf{RP}^2 = \mathbf{V}_1$. Par commodité on étend la notation \mathbf{V}_g à $g = 0$: $\mathbf{V}_0 = \mathbf{S}_0 = \mathbf{S}^2$.

6. Comme il existe au moins deux définitions irréconciliables pour le genre d'une surface non orientable dans la littérature, il est utile de préciser que nous suivons la définition originale de Riemann (voir la définition E.1.2) : en particulier le genre $g := g(S)$ d'une surface compacte S de caractéristique d'Euler $e := e(S)$ est donné par $g := 2 - e$ si S est non orientable et par $g = \frac{2-e}{2}$ si S est orientable.

Exercice 4.2.17. — Montrer que le lieu réel d'une surface de Hirzebruch \mathbf{F}_n munie de sa structure réelle canonique est difféomorphe au tore \mathbf{T}^2 si n est pair et à la bouteille de Klein \mathbf{K}^2 si n est impair.

Exemple 4.2.18. — Se reporter à l'appendice **F** pour les détails. Si (X, σ) est une \mathbf{R} -surface et $P \in X(\mathbf{R})$ est réel, alors par propriété universelle de l'éclatement (corollaire **F.2.6**), σ admet un relèvement sur l'éclaté $B_P X$ qui est une structure réelle et E_P est une \mathbf{R} -courbe pour cette structure. Le lieu réel satisfait donc $(B_P X)(\mathbf{R}) = B_P(X(\mathbf{R}))$ qu'on peut donc noter sans ambiguïté $B_P X(\mathbf{R})$. La transformation topologique du lieu réel correspond à la chirurgie suivante : on retire à $X(\mathbf{R})$ un disque centré en P (dont le bord est un cercle) et à l'aide d'un difféomorphisme du cercle, on recolle un ruban de Möbius (dont le bord est aussi un cercle) pour obtenir $B_P X(\mathbf{R})$. Ce qui donne :

$$B_P X(\mathbf{R}) \approx X(\mathbf{R}) \# \mathbf{RP}^2 .$$

Exemple 4.2.19 (Modèles algébriques réels des surfaces compactes)

Nous énumérons ici des modèles algébriques réels (voir en page 4 de l'introduction générale) pour les surfaces topologiques compactes, c'est-à-dire que pour toute famille finie d'entiers $g_i \geq 0$, $g'_j \geq 0$, nous exhibons une \mathbf{R} -surface dont le lieu réel est difféomorphe à la réunion disjointe des \mathbf{S}_{g_i} et des $\mathbf{V}_{g'_j}$. Le choix de ces modèles algébriques particuliers sera justifié dans les sections suivantes. Remarquons que ces modèles algébriques ne sont pas tous de dimension de Kodaira négative car le théorème **4.4.14** impose des contraintes sur le lieu réel d'un tel modèle. En revanche, pour chacun de ces modèles algébriques réels (X, σ) , la surface complexe X est simplement connexe pour la topologie euclidienne.

1. Le lieu réel de (X, σ) est connexe et non vide.

(a) Le plan projectif réel $\mathbf{RP}^2 \approx \mathbf{P}^2(\mathbf{R})$, $X = \mathbf{P}^2(\mathbf{C})$.

(b) La sphère quadrique de $\mathbf{R}_{x,y,z}^3$

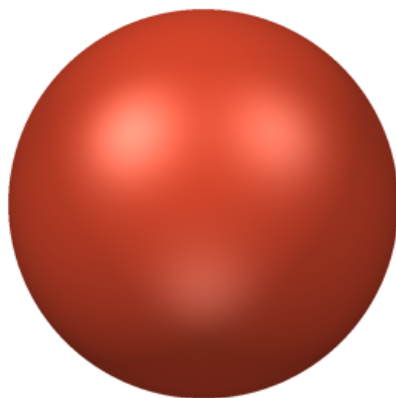
$$\mathbf{S}^2 \approx \mathcal{Z}(x^2 + y^2 + z^2 - 1)$$

dont la complétée projective est la sphère quadrique de $\mathbf{P}^3(\mathbf{R})$

$$\mathbf{S}^2 \approx Q_{3,1}(\mathbf{R})$$

où

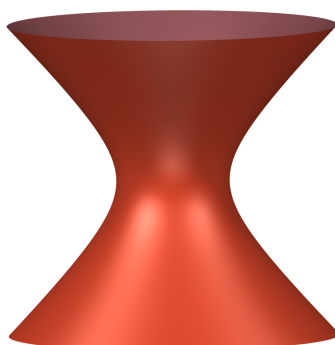
$$X = Q_{3,1} := \mathcal{Z}(x^2 + y^2 + z^2 - w^2) \subset \mathbf{P}_{w:x:y:z}^3(\mathbf{C}) .$$

FIGURE 4.2. Sphère quadrique \mathbf{S}^2 .

(c) Le tore quadrique

$$\mathbf{T}^2 \approx Q_{2,2}(\mathbf{R}) \subset \mathbf{P}^3(\mathbf{R}),$$

où $X = Q_{2,2} := \mathcal{Z}(x^2 + y^2 - z^2 - w^2) \subset \mathbf{P}^3(\mathbf{C})$. C'est le complété projectif de l'hyperboloïde de révolution $\mathcal{Z}(x^2 + y^2 - z^2 - 1) \subset \mathbf{R}^3$.

FIGURE 4.3. Hyperboloïde de \mathbf{R}^3 dont le complété projectif est le tore quadrique $Q_{2,2}(\mathbf{R}) \subset \mathbf{P}^3(\mathbf{R})$.

(d) La bouteille de Klein comme éclatée du plan projectif en un point $\mathbf{K}^2 \approx B_P \mathbf{P}^2(\mathbf{R})$ pour $P \in \mathbf{P}^2(\mathbf{R})$, voir l'exemple 4.2.18; l'éclaté du

plan projectif en un point est aussi la surface de Hirzebruch d'indice 1 et $\mathbf{K}^2 \approx \mathbf{F}_1(\mathbf{R})$, voir l'exercice 4.2.11.

- (e) La surface non orientable de genre g comme éclatée du plan projectif en $g - 1$ points

$$\mathbf{V}_g \approx B_{P_1, \dots, P_{g-1}} \mathbf{P}^2(\mathbf{R})$$

pour $P_1, \dots, P_{g-1} \in \mathbf{P}^2(\mathbf{R})$, voir l'exemple 4.2.18.

- (f) La surface orientable \mathbf{S}_g de genre $g \leq 10$ comme lieu réel d'une surface K3, voir la section 4.5.
- (g) La surface orientable \mathbf{S}_g de genre g quelconque comme lieu réel d'une surface elliptique au-dessus de \mathbf{P}^1 , voir la section 4.6.

2. Le lieu réel de (X, σ) est vide ou non connexe.

- (a) L'ensemble vide comme lieu réel d'une quadrique

$$\emptyset = Q_{4,0}(\mathbf{R}) \subset \mathbf{P}^3(\mathbf{R})$$

où

$$X = Q_{4,0} := \mathcal{Z}(x^2 + y^2 + z^2 + w^2) \subset \mathbf{P}^3(\mathbf{C}) .$$

- (b) Pour $s \geq 2$, la réunion disjointe de s sphères comme lieu réel du complété projectif du fibré en coniques

$$\mathcal{Z}(x^2 + y^2 - f(t)) \subset \mathbf{R}^3$$

où $f(t) = -\prod_{i=1, \dots, 2s}(t - i)$. Voir l'exemple 4.2.8.

- (c) La réunion disjointe d'un nombre fini $s \geq 2$ de sphères et de surfaces non orientables comme lieu réel de la surface obtenue à partir de l'exemple (2b) en éclatant des points réels.

- (d) La réunion disjointe de quatre sphères comme lieu réel d'une surface de del Pezzo $(X, \sigma_{\mathbf{P}}|_X)$ de degré 2 (les valeurs spécifiques des coefficients correspondent au tracé de la figure 4.4), X est le complété projectif dans l'espace projectif à poids $\mathbf{P}(1, 1, 1, 2)$, c'est-à-dire le quotient de $\mathbf{C}_{z_0, \dots, z_3}^4$ par l'action de \mathbf{C}^* donnée par $(z_0, \dots, z_3) \mapsto (\lambda z_0, \lambda z_1, \lambda z_2, \lambda^2 z_3)$, de la surface affine d'équation

$$(4.6) \quad z^2 + 8x^4 + 20x^2y^2 - 24x^2 + 8y^4 - 24y^2 + 16, 25 = 0 .$$

Remarquons que d'après la proposition 2.3.22, cette surface est une \mathbf{R} -surface géométriquement rationnelle non rationnelle, voir la définition 2.3.18. C'est aussi une \mathbf{R} -surface minimale, voir la définition 4.3.10.

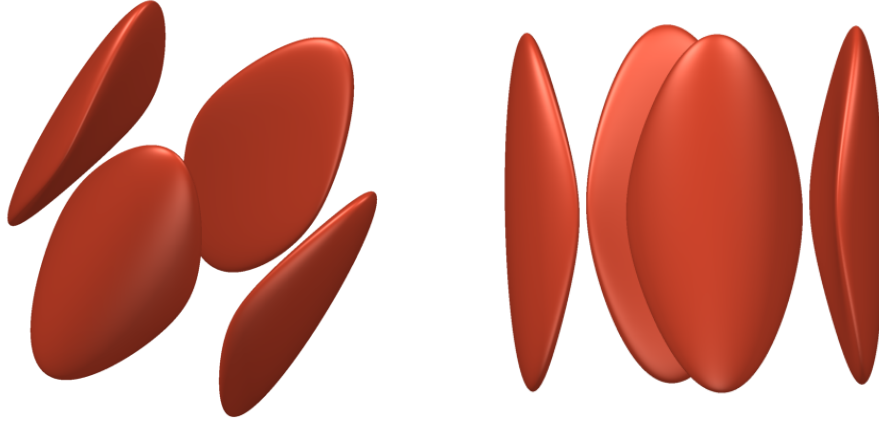


FIGURE 4.4. Une surface de del Pezzo de degré 2 avec quatre composantes connexes.

- (e) La réunion disjointe d'un nombre fini de surfaces orientables et de surfaces non orientables comme lieu réel d'une surface obtenue à partir d'une surface elliptique au-dessus de \mathbf{P}^1 , voir la section 4.6, en éclatant des points réels.

Remarque 4.2.20. — Toutes les surfaces topologiques compactes possèdent donc un modèle algébrique réel (X, σ) pour lequel la surface complexe X est simplement connexe pour la topologie euclidienne. La liste ci-dessous énumère des modèles pour lesquels la surface complexe X n'est pas simplement connexe.

1. Les \mathbf{R} -fibrés en coniques au-dessus d'une courbe B de genre $g(B)$ non nul réalisent tous les types topologiques ne contenant pas de composante connexe orientable de genre $g > 1$, voir le théorème 4.4.14.
2. Les \mathbf{R} -surfaces d'Enriques réalisent un nombre fini de types topologiques, voir le théorème 4.5.16.
3. Les \mathbf{R} -surfaces elliptiques au-dessus d'une courbe B de genre $g(B)$ non nul réalisent tous les types topologiques, voir la section 4.6.

4.3. \mathbf{R} -surfaces minimales

On renvoie à [Kol01a, Section 2], qui reprend l'essentiel de la prépublication [Kol97], pour une présentation des surfaces minimales via la théorie de Mori.

Définition 4.3.1. — On appelle *contraction* l'opération réciproque de l'éclatement, voir l'appendice **F**. Une contraction $\pi: X \rightarrow Y$ est une \mathbf{R} -contraction si le morphisme birationnel π est un \mathbf{R} -morphisme.

Bien entendu, on ne peut pas contracter n'importe quelle courbe vers un point non singulier alors qu'il est possible de centrer un éclatement en n'importe quel point non singulier.

Définition 4.3.2. — ($(-n)$ -courbes)

1. Une (-1) -courbe L sur une surface projective complexe non singulière X est une courbe isomorphe à $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ dont l'auto-intersection $L \cdot L$ vaut -1 . En particulier, L est rationnelle, irréductible et non singulière.
2. Une (-1) -courbe réelle L sur une \mathbf{R} -surface projective non singulière (X, σ) est une (-1) -courbe complexe stable par σ munie de la restriction de σ .
3. Plus généralement, pour tout entier naturel n , une $(-n)$ -courbe L sur X est une courbe isomorphe à \mathbf{P}^1 telle que $L \cdot L = -n$.

Soient $P \in X$ et $\pi_P: B_P X \rightarrow X$ l'éclatement de X centré en P . Il résulte de la proposition 4.1.30 que la droite exceptionnelle $E_P := \pi^{-1}(P)$ est une (-1) -courbe.

Exercice 4.3.3. — Montrer qu'une (-1) -courbe C sur une surface X satisfait $(K_X \cdot C) = -1$.

Nous disposons du critère suivant pour les contractions de courbes sur une surface complexe :

Théorème 4.3.4 (Critère de Castelnuovo). — Soit Y une surface projective complexe non singulière et $E \subset Y$ une (-1) -courbe, alors il existe une surface projective X et un morphisme $\pi: Y \rightarrow X$ tel que $P = \pi(E)$ est un point non singulier de X et π est l'éclatement de X centré en P .

Pour une preuve, voir par exemple [Bea78, II.17]. Plus généralement, grâce au critère de Grauert, on peut contracter des courbes vers des points qui ne sont pas forcément non singuliers.

Théorème 4.3.5 (Grauert). — Soit $E \subset Y$ une courbe projective, connexe et réduite sur une surface projective complexe non singulière Y et $E = \sqcup E_i$ sa décomposition en composantes irréductibles.

Il existe une surface algébrique normale X (pas toujours projective) et un morphisme birationnel $\pi: Y \rightarrow X$ tel que $P = \pi(E)$ est un point de X et la

restriction de π à $Y \setminus E \rightarrow X \setminus P$ est un isomorphisme si et seulement si la matrice $(E_i \cdot E_j)_{i,j}$ est définie négative.

Voir par exemple [BHPVdV04, Theorem III.2.1].

Corollaire 4.3.6. — Pour une \mathbf{R} -surface (non singulière) (Y, τ) , on déduit du critère de Castelnuovo que toute (-1) -courbe réelle et toute paire de (-1) -courbes conjuguées disjointes admettent une contraction vers une \mathbf{R} -surface non singulière (X, σ) .

Démonstration. — Voir [Sil89, II.6.2]. □

Exemple 4.3.7 (Se reporter à l'exemple 4.2.18)

Dans le premier cas du corollaire 4.3.6, on a donc $Y(\mathbf{R}) \approx X(\mathbf{R}) \# \mathbf{RP}^2$ et dans le second cas, $Y(\mathbf{R}) \approx X(\mathbf{R})$.

Proposition 4.3.8 (Factorisation forte). — Toute application birationnelle entre surfaces algébriques complexes projectives non singulières se factorise en une succession d'éclatements de points et de contractions de (-1) -courbes. Plus précisément, si $f: X \dashrightarrow Y$ est une application birationnelle, il existe une surface algébrique complexe non singulière Z et des morphismes birationnels $\pi_1: Z \rightarrow X$ et $\pi_2: Z \rightarrow Y$ tels que le diagramme ci-dessous est commutatif

$$\begin{array}{ccc} & Z & \\ \pi_1 \swarrow & & \searrow \pi_2 \\ X & \overset{f}{\dashrightarrow} & Y \end{array}$$

Démonstration. — Voir [Bea78, II.12]. □

Corollaire 4.3.9 (Factorisation forte entre \mathbf{R} -surfaces)

Toute application birationnelle de \mathbf{R} -surfaces projectives non singulières se factorise en une succession d'éclatements de points réels, d'éclatements de paires de points conjugués, de contractions de (-1) -courbes réelles et de paires de (-1) -courbes conjuguées disjointes. Plus précisément, si $f: (X, \sigma) \dashrightarrow (Y, \tau)$ est une application birationnelle, il existe une \mathbf{R} -surface algébrique complexe projective non singulière (Z, σ_Z) et des morphismes birationnels de \mathbf{R} -surfaces $\pi_1: Z \rightarrow X$ et $\pi_2: Z \rightarrow Y$ tels que le diagramme ci-dessous est commutatif

$$\begin{array}{ccc}
& (Z, \sigma_Z) & \\
\pi_1 \swarrow & & \searrow \pi_2 \\
(X, \sigma) & \overset{f}{\dashrightarrow} & (Y, \tau)
\end{array}$$

Démonstration. — Voir [Sil89, II.6.4]. □

Définition 4.3.10 (Surfaces minimales). — 1. Une surface complexe non singulière X est *minimale* si elle n'admet aucune contraction vers une surface non singulière.

2. Une \mathbf{R} -surface non singulière (X, σ) est *minimale* si elle n'admet aucune \mathbf{R} -contraction vers une \mathbf{R} -surface non singulière.

Remarque 4.3.11. — Il existe une notion de *surface minimale* en géométrie riemannienne. Ce sont les surfaces (compactes) à bord dont l'aire est minimale parmi les surfaces (compactes) de même bord dans une variété riemannienne fixée. L'exemple le plus connu étant donné par les bulles de savon. Il va sans dire que cette notion ne possède rien en commun avec la définition 4.3.10.

Remarque 4.3.12. — D'après le théorème 4.3.4, une surface complexe non singulière X est minimale si et seulement si elle ne contient aucune (-1) -courbe. D'après le corollaire 4.3.6, une \mathbf{R} -surface non singulière est minimale si et seulement si elle ne contient ni (-1) -courbe réelle ni paire de (-1) -courbes conjuguées disjointes.

Remarque 4.3.13. — Si la surface complexe X est minimale, alors (X, σ) est une \mathbf{R} -surface minimale. Mais la réciproque est fautive. Il suffit de considérer une surface avec une paire de (-1) -courbes conjuguées se rencontrant en un point réel. Par exemple les composantes irréductibles d'une fibre singulière du type $x^2 + y^2 = 0$ dans un fibré en coniques sont des (-1) -courbes non réelles conjuguées qui se rencontrent au point $(0, 0)$. La surface complexe n'est pas minimale puisque l'on peut contracter l'une des (-1) -courbes. En revanche, on ne peut pas contracter vers une surface non singulière tout en respectant la structure réelle.

Exercice 4.3.14. — Reprenons les notations de l'exemple 4.2.6. Si le polynôme f est de degré impair, alors la remarque 4.2.7 impose l'existence d'une fibre formée d'une paire de (-1) -courbes réelles. En particulier, la \mathbf{R} -surface n'est pas minimale.

Exercice 4.3.15 (Suite de l'exercice 4.2.11). — Si l'espace total X d'un fibré en coniques au-dessus de \mathbf{P}^1 est une surface projective non singulière, montrer que le nombre de fibres singulières d'un fibré en coniques est $8 - K_X^2$.

Définition 4.3.16. — Soient (X, σ) une \mathbf{R} -surface projective non singulière, (B, σ_B) une \mathbf{R} -courbe non singulière et g un entier naturel.

1. On dit qu'un morphisme de variétés complexes $\pi: X \rightarrow B$ est une *fibration en genre g* si sa fibre générale est une courbe projective complexe non singulière de genre g , c'est-à-dire qu'il existe un ouvert de Zariski non vide U de B tel que $\forall x \in U, \pi^{-1}(x)$ est isomorphe à une courbe projective non singulière de genre g .
2. Un \mathbf{R} -morphisme $\pi: (X, \sigma) \rightarrow (B, \sigma_B)$ est une *\mathbf{R} -fibration en genre g* si le morphisme de variétés complexes $\pi: X \rightarrow B$ est une fibration en genre g .
3. On dit que la surface complexe fibrée (X, π) (resp. la fibration π) est *minimale* si aucune fibre de π ne contient de (-1) -courbe. On dit aussi parfois que (X, π) est *relativement minimale* pour insister sur le fait que cette minimalité est relative au morphisme.
4. On dit que la \mathbf{R} -surface fibrée $((X, \sigma), \pi)$ est *minimale* (ou *relativement minimale*) si aucune fibre de π ne contient de (-1) -courbe réelle ni de paire de (-1) -courbes conjuguées disjointes.

Exercice 4.3.17. — Soit $\pi: X \rightarrow B$ une surface complexe fibrée en genre g . Supposons que (X, π) soit relativement minimale et que la surface X ne soit pas minimale. Comme aucune fibre de π ne contient de (-1) -courbe, il existe une (-1) -courbe E *horizontale*, c'est-à-dire dont l'image $\pi(E)$ n'est pas réduite à un point. Dans ce cas, B est une courbe rationnelle et $g = 0$. En particulier, X est une surface complexe rationnelle.

Exercice 4.3.18. — Soit $\pi: X \rightarrow B$ une surface complexe fibrée en genre g . Supposons qu'une fibre de π contienne une paire de (-1) -courbes non disjointes. Montrer qu'alors $g = 0$.

Exercice 4.3.19. — 1. Montrer qu'un fibré en coniques est une surface fibrée en genre 0.

2. Montrer qu'une \mathbf{R} -surface projective non singulière fibrée en genre 0 est birationnellement équivalente à un \mathbf{R} -fibré en coniques. Voir [Sil89, Corollary V.2.7].

Proposition 4.3.20. — Soit (X, σ) une \mathbf{R} -surface projective non singulière munie d'une \mathbf{R} -fibration $\pi: X \rightarrow B$ en genre g . On suppose de plus que toutes les fibres de π sont géométriquement connexes.

1. Si $g \geq 1$, alors la \mathbf{R} -surface (X, σ) est relativement minimale si et seulement si la surface complexe X est relativement minimale.
2. Si $g = 0$ et si (X, σ) est relativement minimale, alors une fibre F de π qui contient une (-1) -courbe E est nécessairement de la forme $F = E + \sigma E$ avec $E \cdot \sigma E = 1$.

Démonstration. — Voir [Man67, Man86] ou [Sil89, V.1.6]. \square

Corollaire 4.3.21. — 1. Un fibré en coniques complexe (X, π) est minimal si π ne possède aucune fibre singulière.

2. Un \mathbf{R} -fibré en coniques $((X, \sigma), \pi)$ est minimal si ses seules fibres singulières sont réelles (c'est-à-dire au-dessus de $B(\mathbf{R})$) et si aucune composante irréductible d'une fibre singulière de π n'est une (-1) -courbe réelle.

Démonstration. — En effet, une fibre est géométriquement connexe et une conique possède au plus deux composantes irréductibles. \square

Rappelons qu'on désigne par G le groupe de Galois $\text{Gal}(\mathbf{C}|\mathbf{R})$ agissant non trivialement sur X par la structure réelle. Si X admet une \mathbf{R} -fibration $\pi: X \rightarrow B$ au-dessus d'une \mathbf{R} -courbe projective, on note $\text{Pic}(X/B)$, ou $\text{Pic}(X/\pi)$, le groupe de Picard relatif⁽⁷⁾

$$\text{Pic}(X/B) = \text{Pic}(X)/\pi^*(\text{Pic}(B)).$$

Proposition 4.3.22. — Une \mathbf{R} -surface de del Pezzo (X, σ) est minimale si et seulement si $\text{Pic}(X)^G = \mathbf{Z}$. Un \mathbf{R} -fibré en coniques $(X, \sigma) \rightarrow (B, \sigma_B)$ est minimal si et seulement si $\text{Pic}(X/B)^G = \mathbf{Z}$.

Démonstration. — Exercice. \square

Théorème 4.3.23 (R-surfaces minimales). — Soit (X, σ) une \mathbf{R} -surface projective non singulière minimale, alors (X, σ) est isomorphe à une et une seule des \mathbf{R} -surfaces de la liste suivante :

- $\kappa(X) = -\infty$ (section 4.4)
- 1. $(\mathbf{P}^2(\mathbf{C}), \sigma_{\mathbf{P}})$;
- 2. $(Q_{3,1}, \sigma_{\mathbf{P}|Q_{3,1}})$;

7. Dans le langage des schémas, l'objet correspondant est $\text{Pic}_{X/B}(B)$.

3. $(\mathbf{F}_n, \sigma_{\mathbf{F}_n})$ où \mathbf{F}_n est une \mathbf{R} -surface de Hirzebruch telle que $n \neq 1$;
(dans les cas 1, 2 et 3, (X, σ) est rationnelle, voir la section 4.4)
4. (X, σ) telle que X est une surface complexe rationnelle et $X(\mathbf{R}) = \emptyset$, à savoir $Q_{4,0}$, $Q_{3,0} \times \mathbf{P}^1$, ou bien une surface munie d'un \mathbf{R} -fibré en coniques au-dessus de la conique de lieu réel vide $\pi: X \rightarrow (\mathbf{P}^1(\mathbf{C}), \sigma_{\mathbf{P}^1})$ où $\sigma_{\mathbf{P}^1}$ est l'involution de $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ définie par $(x_0 : x_1) \mapsto (-\bar{x}_1 : \bar{x}_0)$, voir la remarque 2.1.41 ;
5. une surface de del Pezzo de degré 1 ou 2 telle que $\rho_{\mathbf{R}}(X) = 1$;
6. une surface munie d'un \mathbf{R} -fibré en coniques $\pi: X \rightarrow (\mathbf{P}^1, \sigma_{\mathbf{P}^1})$ possédant un nombre pair de fibres singulières $2r \geq 4$ telle que $\rho_{\mathbf{R}}(X/\pi) = 1$, c'est-à-dire $\rho_{\mathbf{R}}(X) = 2$;
(dans les cas 4, 5 et 6, (X, σ) est géométriquement rationnelle non rationnelle, voir la section 4.4)
7. une surface munie d'un \mathbf{R} -fibré en coniques $\pi: X \rightarrow B$ avec $g(B) > 0$ et telle que $\rho_{\mathbf{R}}(X/\pi) = 1$, c'est-à-dire $\rho_{\mathbf{R}}(X) = 2$;
(dans le cas 7, (X, σ) est une surface uniréglée non géométriquement rationnelle, voir la section 4.4)
 - $\kappa(X) = 0$ (section 4.5)
8. X est une surface K3, voir la définition 4.5.3 ;
9. X est une surface d'Enriques, voir la définition 4.5.13 ;
10. X est une surface abélienne, voir la définition 4.5.22 ;
11. X est une surface bielliptique, voir la définition 4.5.28.
 - $\kappa(X) = 1$ (section 4.6)
12. X est une surface elliptique propre, voir la définition 4.6.10.
 - $\kappa(X) = 2$ (section 4.7)
13. X est une surface de type général, voir la définition 4.1.4.

Démonstration. — Voir [Kol01a, Theorem 30]. □

Le théorème précédent est à la base de la classification des surfaces algébriques projectives réelles et complexes. Pour la classification des surfaces analytiques complexes compactes, voir [BHPVdV04, Chapter VI]. La classification des surfaces projectives en caractéristique non nulle est établie dans la série d'articles [Mum69, BM77, BM76, BH75]. Voir [Băd01] pour une présentation synthétique.

Exercice 4.3.24 (R-transformations élémentaires)

Soient (X, σ) une surface de Hirzebruch d'indice n et $P \in X$ un point réel. Alors l'éclatement de X centré en P transforme la fibre passant par P en une (-1) -courbe réelle que l'on peut contracter à son tour vers une \mathbf{R} -surface non singulière X' . Montrer que si $n > 0$, X' est une surface de Hirzebruch d'indice $n + 1$ (resp. $n - 1$) si P est sur la section exceptionnelle E_∞ (resp. si P n'est pas sur cette section). Si $n = 0$, il n'y a pas de section exceptionnelle et on obtient \mathbf{F}_1 quel que soit P . Les \mathbf{R} -surfaces X et X' sont birationnellement équivalentes et toutes les deux minimales.

De façon analogue, soient P et $\sigma(P)$ deux points non réels conjugués sur X et soit X'' la surface obtenue par la \mathbf{R} -transformation élémentaire consistant à éclater la paire de points puis à contracter la paire de (-1) -courbes non réelles conjuguées obtenue. Calculer l'indice de la surface de Hirzebruch obtenue selon que les points sont ou ne sont pas sur la section exceptionnelle.

Familles de déformations. — Dans les sections suivantes, nous étudions la topologie des surfaces algébriques réelles, mais aussi leurs familles de déformations. Nous énoncerons aussi des théorèmes sur le groupe des cycles algébriques H_{alg}^1 , vu en section 3.7, qui permettent une comparaison facile des comportements selon les familles de surfaces, voir par exemple [Man97, MvH98, Man00, Man03].

Définition 4.3.25 (Déformations). — 1. — Une variété analytique complexe Y est *déformation* d'une variété complexe X s'il existe une variété analytique complexe \mathcal{M} , une submersion holomorphe propre

$$\pi: \mathcal{M} \rightarrow D = \{z \in \mathbf{C} \mid |z| < 1\}$$

et un point $z_0 \in D$ tels que $X = \pi^{-1}(0)$ et $Y = \pi^{-1}(z_0)$.

— Une \mathbf{R} -variété analytique (Y, τ) est *déformation* d'une \mathbf{R} -variété analytique (X, σ) s'il existe une \mathbf{R} -variété analytique $(\mathcal{M}, \sigma_{\mathcal{M}})$, une submersion holomorphe propre $\pi: \mathcal{M} \rightarrow D$ et un point $z_0 \in [-1, 1] = D(\mathbf{R})$ tels que $\sigma_D \circ \varphi = \varphi \circ \sigma_{\mathcal{M}}$, $X = \pi^{-1}(0)$ et $Y = \pi^{-1}(z_0)$. Dans ce cas, on a en particulier $\sigma = \sigma_{\mathcal{M}}|_X$ et $\tau = \sigma_{\mathcal{M}}|_Y$.

2. Deux variétés X et Y sont *équivalentes par déformation* s'il existe un nombre fini de variétés Z_i $i = 1 \dots l$ avec $Z_1 = X$, $Z_l = Y$ et pour tout i , Z_{i+1} est déformation de Z_i ou bien isomorphe à Z_i .

Remarque 4.3.26. — La définition d'équivalence par déformation donnée ci-dessus est justifiée par le fait que deux variétés équivalentes par déformation n'appartiennent pas forcément à une même famille non singulière de déformations. Par exemple, dans [Hor75], Horikawa a montré que l'espace des quintiques numériques est formé de deux composantes irréductibles de dimension 40 se rencontrant le long d'un sous-espace de dimension 39.

Définition 4.3.27. — Deux surfaces complexes X et Y appartiennent à la même *famille complexe* si X et Y sont les fibres d'une submersion holomorphe propre (on dit parfois *grande déformation*)

$$\pi: \mathcal{M} \rightarrow B$$

au-dessus d'une variété analytique complexe B irréductible.

Deux \mathbf{R} -surfaces (X, σ) et (Y, τ) appartiennent à la même *famille réelle* si elles sont fibres réelles d'une grande déformation équivariante dont la base possède un lieu réel *connexe*.

Théorème 4.3.28 (Théorème de fibration d'Ehresmann)

Soit $f: \mathcal{M} \rightarrow B$ une application différentiable entre variétés différentielles (f , \mathcal{M} et B sont de classe au moins \mathcal{C}^2 et au plus \mathcal{C}^∞). Si f est une submersion surjective propre, alors f est une fibration localement triviale, voir la définition C.3.5.

Démonstration. — Voir [Ehr51, Ehr95]. □

Le groupe de Galois $G = \text{Gal}(\mathbf{C}|\mathbf{R})$ agit sur X (resp. Y , resp. \mathcal{M}) par l'involution σ (resp. τ , resp. $\sigma_{\mathcal{M}}$). En adaptant la preuve du théorème de fibration d'Ehresmann, on peut en déduire que si deux \mathbf{R} -variétés (X, σ) et (Y, τ) sont équivalentes par déformation, alors X est difféomorphe à Y par un difféomorphisme G -équivariant, voir [Dim85, Lemma 4], et qu'en particulier $X(\mathbf{R})$ est difféomorphe à $Y(\mathbf{R})$. La réciproque est fautive en général et on en connaît de nombreux exemples.

En général, il existe plusieurs familles réelles pour une même famille complexe. Par exemple les surfaces d'Enriques forment une unique famille complexe mais les \mathbf{R} -surfaces d'Enriques forment plus de 200 familles réelles, voir [DIK00].

Question 4.3.29 (Def=Diff). — Le problème *Def=Diff* est le suivant : étant donné des surfaces complexes X et Y difféomorphes, sont-elles équivalentes par déformation ?

On sait depuis [Man01] qu'il n'en est pas toujours ainsi. Voir aussi [KK02], [Cat03], [Cat08]. La version réelle de ce problème a été précisée par Kharlamov :

Définition 4.3.30 (Quasi-simplicité des \mathbf{R} -surfaces)

Une \mathbf{R} -surface (X, σ) est *quasi-simple* si toute \mathbf{R} -surface (Y, τ) admettant un difféomorphisme G -équivariant $(X, \sigma) \rightarrow (Y, \tau)$ est déformation équivalente à (X, σ) sous la condition que la surface complexe Y soit équivalente par déformation à X .

La définition suivante est commode pour décrire la classification des types topologiques réalisés dans une classe donnée de surfaces complexes.

Définition 4.3.31 (Simplification de Morse). — Une surface topologique compacte sans bord S (ni connexe, ni orientable *a priori*) étant donnée, une *simplification de Morse topologique* est une transformation de Morse qui fait décroître de 2 le nombre de Betti total de S . Il y a deux sortes de simplifications de Morse.

- supprimer une composante sphérique, $\mathbf{S}^2 \rightarrow \emptyset$,
- contracter une anse $\mathbf{S}_{g+1} \rightarrow \mathbf{S}_g$ ou $\mathbf{V}_{q+2} \rightarrow \mathbf{V}_q$.

Définition 4.3.32 (Type topologique, type topologique extrémal)

Un *type topologique* est une classe de \mathbf{R} -surfaces de lieux réels difféomorphes. Une classe (voir l'exemple 4.0.1) de surfaces complexes étant fixée, un type topologique est dit *extrémal* s'il ne peut pas être obtenu par simplification de Morse topologique à partir d'un type topologique de la même classe de surfaces complexes.

Exemple 4.3.33. — Sur les diagrammes des figures 4.11 et 4.12, les types topologiques correspondant aux points desquels ne part aucune arrête montante sont extrémaux.

Remarque 4.3.34. — Il existe dans la littérature une version plus forte pour laquelle deux \mathbf{R} -surfaces (X, σ) et (Y, τ) sont de même type topologique s'il existe un difféomorphisme équivariant $(X, \sigma) \rightarrow (Y, \tau)$. Dans ce cas, il est immédiat que $X(\mathbf{R})$ est difféomorphe à $Y(\mathbf{R})$, mais la réciproque est fautive, voir [DIK00] par exemple.

Remarque 4.3.35. — Dans le cas où les surfaces considérées appartiennent à une même classe de déformation complexe, il faut prendre garde au fait qu'une simplification de Morse est abstraite en ce sens qu'il n'existe pas forcément de

déformation continue réalisant la transformation topologique. Il s'agit seulement d'une définition pratique pour décrire les listes de types topologiques. Dans certains cas néanmoins, on peut réaliser les transformations de Morse par une déformation explicite, voir 4.6.13.

4.4. Surfaces rationnelles, uniréglées ($\kappa = -\infty$)

L'objectif de cette section est la classification des types topologiques des \mathbf{R} -surfaces rationnelles et plus généralement des \mathbf{R} -surfaces de dimension de Kodaira négative à travers le type topologique de leur lieu réel. L'énoncé complet pour les surfaces projectives non singulières de dimension de Kodaira négative est le théorème 4.4.14. Le résultat intermédiaire principal étant le théorème 4.4.15 que l'on cite parfois comme une version généralisée du théorème de Comessatti 4.4.16 qui contraint le genre d'une surface orientable contenue dans le lieu réel d'une surface rationnelle. Il y a essentiellement deux preuves de cette classification. La première est classique et commence par une réduction aux surfaces minimales que l'on analyse ensuite au cas par cas, voir le théorème 4.3.23. La seconde est basée sur l'action du groupe de Galois sur l'anneau de cohomologie de X , nous la développons plus loin. Chaque approche possède un intérêt propre.

\mathbf{R} -surfaces rationnelles. — Signalons deux articles d'exposition à propos des \mathbf{R} -surfaces rationnelles ⁽⁸⁾ : [Man17a] (qui prolonge [Hui11]) concernant leur classification topologique et [BM14] concernant leur géométrie birationnelle. On particularise la définition 2.3.18 au cas des surfaces.

Définition 4.4.1 (\mathbf{R} -surfaces rationnelles, uniréglées)

Soit (X, σ) une \mathbf{R} -surface algébrique.

1. La \mathbf{R} -surface (X, σ) est *rationnelle* ou *\mathbf{R} -rationnelle* si elle est birationnellement équivalente au \mathbf{R} -plan projectif $(\mathbf{P}^2(\mathbf{C}), \sigma_{\mathbf{P}})$, c'est-à-dire s'il existe une application birationnelle de \mathbf{R} -surfaces

$$(X, \sigma) \dashrightarrow (\mathbf{P}^2(\mathbf{C}), \sigma_{\mathbf{P}}) .$$

La surface algébrique réelle $X(\mathbf{R})$ est alors rationnelle, voir la définition 1.3.37.

8. Plusieurs auteurs, voir par exemple [Sil89] ou [DK02], appellent (X, σ) une surface rationnelle si la surface complexe X est rationnelle ce qui peut prêter à confusion. Nous préférons dire dans ce cas que (X, σ) est géométriquement rationnelle ou \mathbf{C} -rationnelle, voir la définition 4.4.1.

2. La \mathbf{R} -surface (X, σ) est *géométriquement rationnelle* ou *\mathbf{C} -rationnelle* si elle est \mathbf{C} -birationnellement équivalente au plan projectif $\mathbf{P}^2(\mathbf{C})$, c'est-à-dire s'il existe une application birationnelle de surfaces complexes

$$X \dashrightarrow \mathbf{P}^2(\mathbf{C}).$$

Si elle est Zariski-dense dans X , la surface algébrique réelle $X(\mathbf{R})$ est alors géométriquement rationnelle, *i. e.* la surface algébrique complexe X , qui est la complexifiée de $X(\mathbf{R})$, est rationnelle, voir la définition 1.3.37.

3. La \mathbf{R} -surface (X, σ) est *uniréglée* si elle est dominée par un cylindre de dimension 2, c'est-à-dire s'il existe une \mathbf{R} -courbe (Y, τ) et une application rationnelle de \mathbf{R} -variétés

$$(Y \times \mathbf{P}^1, \tau \times \sigma_{\mathbf{P}}) \dashrightarrow (X, \sigma)$$

d'image dense pour la topologie de Zariski.

Remarque 4.4.2. — Remarquons que contrairement à la rationalité, la propriété « uniréglée » est invariante par extension du corps de base : une \mathbf{R} -surface (X, σ) est uniréglée si et seulement si la surface complexe X est uniréglée, voir [Deb01, §4.1, Remark 4.2(5)].

Remarque 4.4.3. — Si X est une variété uniréglée, alors $\kappa(X) = -\infty$ puisque X est dominée par une variété réglée. En dimension 2, la réciproque est vérifiée et on a même plus fort : une variété complexe X telle que $\kappa(X) = -\infty$ est birationnellement réglée, c'est-à-dire birationnellement équivalente à un cylindre $Y \times \mathbf{P}^1$ de dimension 2, voir [Bea78, Exemple VII.3 et Chapitre III]. C'est ainsi qu'une surface complexe est uniréglée si et seulement si elle est birationnellement réglée. Pour cette raison, ces surfaces sont souvent appelées *réglées* dans la littérature. Lorsque l'on passe aux réels, la notion de surface réglée devient problématique. Un fibré en coniques peut ne pas être \mathbf{R} -birationnellement équivalent à une surface réglée tout en lui étant \mathbf{C} -birationnellement équivalent. On prouve dans la proposition 4.4.10 que c'est le cas de l'exemple 4.2.8 pour $s \geq 2$. En revanche cet exemple est uniréglé aussi bien sur \mathbf{R} que sur \mathbf{C} .

Remarque 4.4.4. — De la définition 1.3.37 et de la proposition 4.3.8, on déduit qu'une surface complexe est rationnelle si elle est obtenue à partir du plan projectif complexe par des éclatements de points et des contractions de (-1) -courbes. Une \mathbf{R} -surface (X, σ) est donc géométriquement rationnelle si elle est obtenue à partir du plan projectif par des éclatements et des contractions

qui ne sont pas forcément réels. Dans ce cas, le corps des fonctions $K(X)$ de la surface complexe X est isomorphe au corps des fractions rationnelles $\mathbf{C}(X_1, X_2)$. Si l'on impose que les éclatements et les contractions sont réels ⁽⁹⁾, la \mathbf{R} -surface (X, σ) est alors rationnelle. Dans ce cas, la \mathbf{R} -algèbre des restrictions à $X(\mathbf{R})$ des éléments de $K(X)$ est isomorphe en tant que \mathbf{R} -algèbre au corps des fractions rationnelles $\mathbf{R}(X_1, X_2)$.

Remarque 4.4.5. — Dans la définition 4.4.1, la surface complexe X n'est supposée ni complète ou projective, ni non singulière. Nous énonçons plus loin un théorème de classification pour X projective non singulière (théorème 4.4.14). Nous revenons au cas singulier à la fin de cette section et nous traitons le cas affine au chapitre 5, voir la définition 5.5.2.

Remarque 4.4.6. — Soient F une surface algébrique réelle et (X, σ) une complexification de F . Alors F est rationnelle si et seulement si (X, σ) est \mathbf{R} -rationnelle.

Remarque 4.4.7. — Par définition d'application de \mathbf{R} -surfaces, toute \mathbf{R} -surface rationnelle est géométriquement rationnelle. De même, la \mathbf{R} -surface produit $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$ étant birationnellement équivalente à la \mathbf{R} -surface \mathbf{P}^2 , il est immédiat qu'une \mathbf{R} -surface géométriquement rationnelle est uniréglée.

Théorème 4.4.8. — Soit (X, σ) une \mathbf{R} -surface projective non singulière avec $\kappa(X) = -\infty$. Alors :

1. X est uniréglée et (X, σ) est birationnellement équivalente à un \mathbf{R} -fibré en coniques $\pi: X \rightarrow B$ avec $g(B) = q(X)$;
2. (X, σ) est géométriquement rationnelle si et seulement si $q(X) = 0$;
3. (X, σ) est rationnelle si et seulement si $q(X) = 0$ et $X(\mathbf{R})$ est connexe non vide.

Démonstration. — 1. D'après la remarque 4.4.3, une surface complexe telle que $\kappa(X) = -\infty$ est uniréglée et même birationnellement réglée. Comessatti a montré dans [Com12] qu'une \mathbf{R} -surface (X, σ) telle que X est réglée est \mathbf{R} -birationnellement équivalente à un \mathbf{R} -fibré en coniques $\pi: X \rightarrow B$ avec $g(B) = q(X)$, voir par exemple [Sil89, Chapter V].

2. Provient de la classification des surface complexes, voir [Bea78, Chapitre IV].

9. Ici « réel » = « globalement réel », c'est-à-dire que si P est le centre d'un éclatement, \overline{P} aussi et si E est contractée, \overline{E} aussi.

3. Il reste à montrer que si la surface complexe X est rationnelle, alors (X, σ) est rationnelle si et seulement si $X(\mathbf{R})$ est connexe non vide. Le nombre de composantes connexes du lieu réel étant invariant par application birationnelle définie sur \mathbf{R} la condition de connexité est donc nécessaire. Elle est aussi suffisante d'après [Sil89, Corollary IV.6.5]. \square

Corollaire 4.4.9. — *Soit (X, σ) une \mathbf{R} -surface uniréglée non géométriquement rationnelle, alors (X, σ) est birationnellement équivalente à un fibré en coniques $\pi: X \rightarrow B$ avec $g(B) = q(X) > 0$.*

Pour des développements classiques et récents sur la classification des fibrés en coniques, on pourra consulter [Com12, Com14, Isk65, Isk67, Man67, Man86, Sil89, Kol97, Kol01a, DK02, Wel03, BM11].

Rappelons que $\mathbf{V}_g = \#^g \mathbf{RP}^2$ désigne la surface non orientable de genre g , c'est-à-dire de caractéristique d'Euler $2 - g$; par exemple $g(\mathbf{RP}^2) = 1$ et $g(\mathbf{K}^2) = 2$. Nous reprenons ci-dessous ceux des modèles algébriques réels énumérés en 4.2.19 qui sont uniréglés.

Proposition 4.4.10 (Exemples de surfaces uniréglées)

Pour chaque surface topologique et pour \emptyset , on classifie les modèles algébriques réels (X, σ) décrits dans l'exemple 4.2.19.

1. (X, σ) est une surface \mathbf{R} -rationnelle.
 - (a) Le plan projectif réel : $X = \mathbf{P}^2(\mathbf{C})$, $\sigma = \sigma_{\mathbf{P}}$, $X(\mathbf{R}) = \mathbf{P}^2(\mathbf{R})$.
 - (b) La sphère quadrique : $X = Q_{3,1} \subset \mathbf{P}^3(\mathbf{C})$, $\sigma = \sigma_{\mathbf{P}}|_{Q_{3,1}}$, $X(\mathbf{R}) = \mathbf{S}^2$.
 - (c) Le tore quadrique : $X = Q_{2,2}$, $\sigma = \sigma_{\mathbf{P}}|_{Q_{2,2}}$, $((X, \sigma)$ est isomorphe à la \mathbf{R} -surface $(\mathbf{P}^1(\mathbf{C}) \times \mathbf{P}^1(\mathbf{C}), \sigma_{\mathbf{P}} \times \sigma_{\mathbf{P}})$ et $Q_{2,2}(\mathbf{R}) = \mathbf{T}^2$.
 - (d) Le tore comme lieu réel des surfaces de Hirzebruch d'indice pair munies de la structure réelle canonique $\mathbf{F}_{2k}(\mathbf{R}) \approx \mathbf{T}^2$.
 - (e) La bouteille de Klein comme lieu réel de l'éclatée de $\mathbf{P}^2(\mathbf{R})$ en un point : $B_{\mathbf{P}}\mathbf{P}^2(\mathbf{R}) = \mathbf{K}^2$.
 - (f) La bouteille de Klein comme lieu réel des surfaces de Hirzebruch d'indice impair $\mathbf{F}_{2k+1}(\mathbf{R}) = \mathbf{K}^2$.
 - (g) La surface non orientable de genre $g > 0$ obtenue comme éclatée de $\mathbf{P}^2(\mathbf{R})$: $B_{P_1, \dots, P_{g-1}}\mathbf{P}^2(\mathbf{R}) = \mathbf{V}_g$ pour $P_1, \dots, P_{g-1} \in \mathbf{P}^2(\mathbf{R})$.
 - (h) La surface non orientable de genre $g > 0$ obtenue comme éclatée de la sphère quadrique : $B_{P_1, \dots, P_g}Q_{3,1}(\mathbf{R}) = \mathbf{V}_g$ pour $P_1, \dots, P_g \in Q_{3,1}(\mathbf{R})$.

2. (X, σ) est géométriquement rationnelle non rationnelle.

- (a) L'ensemble vide comme lieu réel de la quadrique : $X = Q_{4,0}$, $\sigma = \sigma_{\mathbf{P}}|_{Q_{4,0}}$, $X(\mathbf{R}) = \emptyset$.
- (b) La réunion disjointe de $s > 1$ sphères comme lieu réel du complété projectif du fibré en coniques

$$\mathcal{Z} \left(x^2 + y^2 + \prod_{i=1, \dots, 2s} (t - i) \right) \subset \mathbf{R}^3.$$

- (c) La réunion disjointe d'un nombre fini $s > 1$ de sphères et de surfaces non orientables comme lieu réel de la surface obtenue à partir de l'exemple précédent en éclatant des points réels.
- (d) La réunion disjointe de quatre sphères comme lieu réel de la surface de del Pezzo de degré 2 d'équation (4.6), page 233.

3. (X, σ) est uniréglée non géométriquement rationnelle.

- (a) La réunion disjointe d'un nombre fini $s \geq 0$ de sphères, de tores et de bouteilles de Klein comme lieu réel d'une fibration en coniques au-dessus d'une courbe de genre géométrique non nul.
- (b) La réunion disjointe d'un nombre fini $s \geq 0$ de sphères, de tores et de surfaces non orientables de genre quelconque comme lieu réel de la surface obtenue à partir de l'exemple précédent en éclatant des points réels.

Preuve de la proposition 4.4.10. —

1. D'après le corollaire 4.3.9, une \mathbf{R} -surface (X, σ) est \mathbf{R} -rationnelle s'il existe une succession d'éclatements de points réels, d'éclatements de paires de points conjugués, de contractions de (-1) -courbes réelles et de paires de (-1) -courbes conjuguées disjointes.

- (a) La \mathbf{R} -surface $(\mathbf{P}^2(\mathbf{C}), \sigma_{\mathbf{P}})$ est rationnelle par définition.
- (b) La surface quadrique $Q_{3,1}$ de l'espace projectif \mathbf{P}^3 est rationnelle. En effet, pour un point réel P de $Q_{3,1}$, notons $T_P Q_{3,1} \subset \mathbf{P}^3(\mathbf{R})$ le plan projectif réel tangent à $Q_{3,1}$ en P . Alors la projection stéréographique $Q_{3,1} \setminus T_P Q_{3,1} \rightarrow \mathbf{A}^2$ est un isomorphisme de \mathbf{R} -surfaces. Par exemple si P est le Pôle Nord $N = [1 : 0 : 0 : 1]$, soit $\pi_N : Q_{3,1} \rightarrow \mathbf{P}_{U:V:W}^2$ l'application rationnelle donnée par

$$\pi_N : [w : x : y : z] \mapsto [x : y : w - z].$$

Alors la restriction de π_N est la projection stéréographique du complémentaire $Q_{3,1} \setminus T_N Q_{3,1}$ sur son image $\pi_N(Q_{3,1} \setminus T_N Q_{3,1}) = \{w \neq 0\} \simeq \mathbf{A}^2$.

(L'application rationnelle réciproque $\pi_N^{-1}: \mathbf{P}^2 \dashrightarrow Q_{3,1}$ est donnée par $[U : V : W] \mapsto [U^2 + V^2 + W^2 : 2UW : 2VW : U^2 + V^2 - W^2]$).

L'application rationnelle π_N se décompose en l'éclatement de $Q_{3,1}$ en N , suivi de la contraction de la transformée birationnelle de la courbe $z = w$ (intersection de $Q_{3,1}$ avec la plan tangent $T_N Q_{3,1}$), qui est la réunion de deux droites non réelles conjuguées. L'application rationnelle π_N^{-1} se décompose en l'éclatement de deux points non réels conjugués $[1 : \pm i : 0]$, suivi de la contraction de la transformée birationnelle de la droite $z = 0$.

La surface $Q_{3,1}$ est donc birationnelle à la surface Y obtenue de la manière suivante. Soient P, \bar{P} une paire de points non réels conjugués de $\mathbf{P}^2(\mathbf{C})$ et $L := L_{P, \bar{P}}$ la droite passant par ces deux points. Remarquons que $(L, \sigma_{\mathbf{P}}|_L)$ est une \mathbf{R} -droite. Le nombre d'auto-intersection de la transformée birationnelle \tilde{L} de L dans l'éclaté $\tilde{X} = B_{P, \bar{P}}\mathbf{P}^2(\mathbf{C})$ est

$$(\tilde{L})^2 = (L)^2 - 2 = -1$$

et par conséquent, il existe une contraction $c: \tilde{X} \rightarrow Y$ vers une \mathbf{R} -surface non singulière dont le lieu réel est une sphère. En effet, par construction $\tilde{X}(\mathbf{R}) \approx X(\mathbf{R}) = \mathbf{RP}^2$ et la contraction c remplace un ruban de Möbius par un disque, donc $Y(\mathbf{R}) \approx \mathbf{S}^2$.

- (c) Même construction en prenant cette fois-ci deux points réels distincts P, Q de $\mathbf{P}^2(\mathbf{C})$. On obtient $B_{P, Q}\mathbf{P}^2(\mathbf{R}) \approx \mathbf{V}_2$ et en contractant la \mathbf{R} -droite $L_{P, Q}$ qui est une (-1) -courbe réelle, on obtient un lieu réel $Y(\mathbf{R})$ difféomorphe au tore \mathbf{T}^2 . En effet, par construction $Y(\mathbf{R})$ est difféomorphe à \mathbf{T}^2 ou \mathbf{K}^2 . Par ailleurs la surface complexe obtenue est isomorphe à $\mathbf{P}^1(\mathbf{C}) \times \mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ et on sait (voir l'exercice 2.1.42) que le lieu réel d'une structure réelle sur $\mathbf{P}^1(\mathbf{C}) \times \mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ est l'un des trois suivants : $\emptyset, \mathbf{S}^2, \mathbf{T}^2$.
- (d) Il suffit de remarquer que la surface complexe \mathbf{F}_{2k} est obtenue à partir de $\mathbf{F}_0 = \mathbf{P}^1(\mathbf{C}) \times \mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ par une succession de $2k$ transformations élémentaires. En choisissant k \mathbf{R} -transformations élémentaires basées sur des paires de points non réels conjugués, voir l'exercice 4.3.24, on obtient $\mathbf{F}_{2k}(\mathbf{R}) \approx \mathbf{F}_0(\mathbf{R}) \approx \mathbf{T}^2$.

(e) Soit P un point réel de $\mathbf{P}^2(\mathbf{C})$. D'après l'exemple 4.2.18, on a $B_P \mathbf{P}^2(\mathbf{R}) \approx \mathbf{F}_1(\mathbf{R}) \approx \mathbf{K}^2$.

(f) Même construction que (1d) à partir de $\mathbf{F}_{2k+1}(\mathbf{R}) \approx \mathbf{F}_1(\mathbf{R}) \approx \mathbf{K}^2$.

(g) Soient $P_1, \dots, P_{g-1} \in \mathbf{P}^2(\mathbf{R})$. D'après l'exemple 4.2.18, on a

$$B_{P_1, \dots, P_{g-1}} \mathbf{P}^2(\mathbf{R}) \approx \mathbf{V}_g .$$

(h) Soient $P_1, \dots, P_g \in Q_{3,1}(\mathbf{R})$. D'après l'exemple 4.2.18, on a

$$B_{P_1, \dots, P_g} Q_{3,1}(\mathbf{R}) = B_{P_1, \dots, P_g} \mathbf{S}^2 \approx \mathbf{V}_g .$$

2. Soit (X, σ) une \mathbf{R} -surface géométriquement rationnelle. D'après la proposition 2.3.22, si la \mathbf{R} -surface (X, σ) est \mathbf{R} -rationnelle, alors $X(\mathbf{R})$ est connexe non vide.

(a) Une surface quadrique complexe est birationnelle à $\mathbf{P}^2(\mathbf{C})$. La \mathbf{R} -surface $(Q_{4,0}, \sigma_{\mathbf{P}}|_{Q_{4,0}})$ est donc \mathbf{C} -rationnelle. Son lieu réel étant vide, elle n'est pas rationnelle.

(b) Comme X est munie d'un fibré en coniques au-dessus de \mathbf{P}^1 , c'est une surface complexe rationnelle et (X, σ) est donc une \mathbf{R} -surface géométriquement rationnelle. Le nombre de composantes connexes est au moins égal à la moitié du nombre de fibres singulières simples du fibré en coniques, c'est-à-dire à la moitié du nombre de racines simples de f . Par hypothèse, on a donc $\#\pi_0(X(\mathbf{R})) > 1$ et d'après la proposition 2.3.22, la \mathbf{R} -surface (X, σ) n'est pas rationnelle.

(c) L'éclatement d'un point réel ne change pas le nombre de composantes connexes.

(d) Une surface de del Pezzo complexe est rationnelle, (X, σ) est donc géométriquement rationnelle. Par construction, $\#\pi_0(X(\mathbf{R})) > 1$, la \mathbf{R} -surface (X, σ) n'est donc pas rationnelle.

3. (a) Soit $X \rightarrow B$ un tel fibré. Alors d'après [Deb01, Remarks 4.2(5), page 87], la surface complexe X est uniréglée mais non rationnelle car $q(X) = g(B) > 0$.

(b) Idem.

□

Théorème 4.4.11 (Lieu réel d'une surface \mathbf{C} -rationnelle)

Soit (X, σ) une \mathbf{R} -surface projective non singulière géométriquement rationnelle.

1. La \mathbf{R} -surface (X, σ) est rationnelle si et seulement si $X(\mathbf{R})$ est connexe non vide. Lorsque (X, σ) est de plus minimale, alors $X(\mathbf{R})$ est difféomorphe à l'une des surfaces suivantes : le plan projectif réel \mathbf{RP}^2 , la sphère \mathbf{S}^2 , le tore \mathbf{T}^2 , ou la bouteille de Klein \mathbf{K}^2 (dans ce dernier cas, X est une surface de Hirzebruch \mathbf{F}_n d'indice impair $n = 2k + 1 > 1$).
2. Lorsque (X, σ) est une \mathbf{R} -surface de del Pezzo minimale de degré 1, $X(\mathbf{R})$ est difféomorphe à la réunion disjointe d'un plan projectif réel et de 4 sphères. Si (X, σ) est une \mathbf{R} -surface de del Pezzo minimale de degré 2, alors $X(\mathbf{R})$ est difféomorphe à la réunion disjointe de 4 sphères.
3. Si (X, σ) est non rationnelle et possède une structure de \mathbf{R} -fibré en coniques minimal avec $2s$ fibres singulières, alors $X(\mathbf{R})$ est difféomorphe à la réunion disjointe de s sphères, $s \geq 2$.

Démonstration. — L'essentiel des affirmations ont été prouvées précédemment, on pourra se reporter à [Man14] ou [Man17a] pour des compléments. Signalons aussi l'article [Rus02] où les surfaces de del Pezzo minimales de degré 1 et 2 ont été entièrement classifiées (à partir de la construction formulée par Silhol dans [Sil89, § VI.4]). \square

Exercice 4.4.12. — Si (X, σ) possède une structure de \mathbf{R} -fibré en coniques minimal, montrer que $\#\pi_0(X(\mathbf{R})) = 4 - \frac{1}{2}K_X^2$ (voir l'exercice 4.3.15).

Remarque 4.4.13. — Si (X, σ) est une \mathbf{R} -surface géométriquement rationnelle et minimale telle que $X^\sigma = \emptyset$, alors X est une surface de Hirzebruch d'indice pair.

Le résultat principal de cette section est la classification ci-dessous qui reprend et complète les énoncés précédents.

Théorème 4.4.14 (Topologie du lieu réel pour $\kappa(X) = -\infty$)

Soit (X, σ) une \mathbf{R} -surface projective non singulière de dimension de Kodaira négative. On munit le lieu réel $X(\mathbf{R})$ de sa topologie euclidienne, on considère les surfaces topologiques à homéomorphisme près et on note $s := \#\pi_0(X(\mathbf{R}))$ le nombre de composantes connexes du lieu réel.

1. Si (X, σ) est rationnelle, alors $s = 1$ et $X(\mathbf{R})$ est homéomorphe à l'une des surfaces compactes connexes suivantes :
 - (a) Le tore \mathbf{T}^2 ;
 - (b) La sphère \mathbf{S}^2 ;
 - (c) Une surface non orientable \mathbf{V}_g pour $g \in \mathbf{N}$.

2. Si (X, σ) est géométriquement rationnelle, c'est-à-dire si la surface complexe X est rationnelle, alors $s \in \mathbf{N}$ peut prendre une valeur quelconque et $X(\mathbf{R})$ est homéomorphe à l'un des espaces topologiques compacts suivants (à l'exception de \emptyset , ce sont des surfaces) :

(a) L'ensemble vide \emptyset ;

(b) Le tore \mathbf{T}^2 ;

(c) Une réunion disjointe de sphères et de surfaces non orientables :

$$\sqcup^l \mathbf{S}^2 \sqcup \mathbf{V}_{g_1} \sqcup \cdots \sqcup \mathbf{V}_{g_{s-l}}$$

où $l, g_1, \dots, g_{s-l} \in \mathbf{N}^*$.

3. Si (X, σ) est uniréglée, c'est-à-dire si la surface complexe X est géométriquement réglée, d'irrégularité $q := q(X)$, alors $s \in \mathbf{N}$ peut prendre une valeur quelconque et $X(\mathbf{R})$ est homéomorphe à l'un des espaces topologiques compacts suivants (à l'exception de \emptyset , ce sont des surfaces) :

(a) L'ensemble vide \emptyset ;

(b) Une réunion disjointe de $q + 1$ tores

$$X(\mathbf{R}) \approx \sqcup^{q+1} \mathbf{T}^2 ;$$

(c) Une réunion disjointe de tores, de sphères et de surfaces non orientables

$$\sqcup^t \mathbf{T}^2 \sqcup^l \mathbf{S}^2 \sqcup \mathbf{V}_{g_1} \sqcup \cdots \sqcup \mathbf{V}_{g_{s-t-l}}$$

où $t < q + 1$ et $l, g_1, \dots, g_{s-t-l} \in \mathbf{N}$.

4. Réciproquement, toute surface topologique appartenant à la liste 1 admet un modèle algébrique rationnel, toute surface topologique appartenant à la liste 2 admet un modèle algébrique géométriquement rationnel et toute surface topologique appartenant à la liste 3 admet un modèle algébrique uniréglé.

Avant de prouver ce théorème, nous démontrons une série de résultats intermédiaires.

Certains auteurs appellent *surface à g trous* une surface topologique orientable de genre g . Le résultat clef de la classification des \mathbf{R} -surfaces uniréglées est que les surfaces orientables autorisées n'ont pas plus d'un trou. Le théorème ci-dessous est même plus général car il existe aussi des surfaces de type général de genre géométrique nul. On pourra consulter l'article d'exposition [BCP11], déjà mentionné, consacré aux surfaces de type général de genre géométrique nul.

Théorème 4.4.15. — Soit (X, σ) une \mathbf{R} -surface projective non singulière telle que $p_g(X) = 0$. Alors toute composante connexe orientable du lieu réel $X(\mathbf{R})$ est difféomorphe à la sphère \mathbf{S}^2 ou au tore \mathbf{T}^2 .

L'énoncé suivant est dû à Comessatti [Com14].

Corollaire 4.4.16 (Théorème de Comessatti). — Soit (X, σ) une \mathbf{R} -surface projective non singulière rationnelle sur \mathbf{R} . Alors le lieu réel est connexe et non vide. De plus si $X(\mathbf{R})$ est orientable, alors il est difféomorphe à la sphère \mathbf{S}^2 ou au tore \mathbf{T}^2 .

Démonstration. — D'après le théorème 1.5.55, le nombre de composantes connexes du lieu réel est invariant par application birationnelle de \mathbf{R} -surfaces. Par hypothèse, la \mathbf{R} -surface (X, σ) est birationnelle à la \mathbf{R} -surface $(\mathbf{P}^2(\mathbf{C}), \sigma_{\mathbf{P}})$, d'où

$$\#\pi_0(X(\mathbf{R})) = \#\pi_0(\mathbf{P}^2(\mathbf{R})) = 1.$$

Comme par ailleurs, le genre géométrique est un invariant birationnel et que $p_g(\mathbf{P}^2(\mathbf{C})) = 0$, le théorème 4.4.15 permet de conclure. \square

La preuve du théorème 4.4.15 que nous proposons ici est une preuve « moderne ». La preuve originale de Comessatti [Com14] du corollaire 4.4.16 consiste à se ramener au cas des surfaces minimales, puis à énumérer les types topologiques réalisables par les lieux réels des surfaces géométriquement rationnelles minimales.

Lemme 4.4.17. — Soit (X, σ) une \mathbf{R} -surface projective non singulière et soit $V \subset X(\mathbf{R})$ une composante connexe orientable de son lieu réel. Alors la classe fondamentale (définition 3.7.1) $\alpha \in H^2(X; \mathbf{Z})$ de V est σ^* -invariante et le carré $(\alpha \cdot \alpha)$ est égal à l'opposé de la caractéristique d'Euler topologique de V :

$$(4.7) \quad (\alpha \cdot \alpha) = -\chi_{top}(V).$$

Démonstration. — Le fait que α soit σ^* -invariante est immédiat. Pour prouver (4.7), nous suivons la preuve donnée dans [Sil89, page 71].

On se réfère aux propositions 2.2.27 et 2.2.28 pour les structures de variétés différentielles sur X et $X(\mathbf{R})$. Du fait que V est orientable, le produit $(\alpha \cdot \alpha)$ est égal à l'auto-intersection de la sous-variété V dans X , c'est-à-dire d'après [Hir76, page 132], à l'auto-intersection de V dans son fibré normal $N_{X|V}$ (voir aussi [MS74, page 119]). Au dessus d'un point réel, la multiplication par i dans le fibré tangent T_X induit un isomorphisme qui renverse l'orientation entre le

fibré tangent $T_X(\mathbf{R})$ et le fibré normal $N_{X|X(\mathbf{R})}$. En effet, soit $x \in X(\mathbf{R})$, et soit (u_1, u_2) une base de l'espace vectoriel $T_{X(\mathbf{R}),x}$. Du fait que x est un point du lieu réel, on a $T_{X,x} = T_{X(\mathbf{R}),x} \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C}$. Le quadruplet (u_1, iu_1, u_2, iu_2) est donc une base de l'espace vectoriel tangent $T_{X,x}$ et le couple (iu_1, iu_2) est une base de l'espace vectoriel normal $N_{X|X(\mathbf{R}),x}$. En fait, comme l'orientation naturelle de la variété différentielle X de dimension réelle 4 est donnée par (u_1, iu_1, u_2, iu_2) , l'orientation induite sur $N_{X|X(\mathbf{R}),x}$ est donnée par (iu_2, iu_1) . Comme la caractéristique d'Euler $\chi_{\text{top}}(V)$ est égale à l'auto-intersection de V dans son fibré tangent T_V , voir [Hir76, page 13], on obtient le résultat. \square

Remarque 4.4.18. — Le même énoncé et la même preuve restent valides en remplaçant « projective » par « kählérienne compacte », voir l'appendice D.

Lemme 4.4.19. — *Soit (X, σ) une \mathbf{R} -surface projective non singulière. Alors la forme d'intersection restreinte à la partie σ^* -invariante de l'espace vectoriel réel $H^{1,1}(X) \cap H^2(X; \mathbf{R})$ est définie négative.*

Démonstration. — Le théorème de l'indice de Hodge 4.1.24 implique que la forme d'intersection restreinte au sous-espace vectoriel $H^{1,1}(X) \cap H^2(X; \mathbf{R})$ est lorentzienne, c'est-à-dire de signature $(1, h^{1,1}(X) - 1)$. La surface étant projective, la proposition 2.6.43 nous affirme qu'il existe un plongement réel dans un espace projectif $\varphi: X \hookrightarrow \mathbf{P}^N(\mathbf{C})$. La surface étant non singulière, le théorème de Bertini D.9.1 nous affirme l'existence d'une section hyperplane non singulière H' , on note h la classe fondamentale de la \mathbf{R} -courbe $(H, \sigma|_H)$ où $H = \varphi^*(H')$. Alors h est σ^* -anti-invariante. En effet, d'après la proposition 2.2.28, l'involution anti-holomorphe σ préserve l'orientation sur la variété différentielle X de dimension réelle 4, mais renverse l'orientation sur la sous-variété H de dimension réelle 2. Les sous-espaces propres de l'involution σ^* sont orthogonaux. Le sous-espace propre associé à la valeur propre 1 est donc orthogonal à la droite engendrée par la classe de H . \square

Corollaire 4.4.20. — *Soit (X, σ) une \mathbf{R} -surface projective non singulière. Si le genre géométrique $p_g(X)$ est nul, alors la forme d'intersection restreinte à la partie σ^* -invariante de l'espace vectoriel réel $H^2(X; \mathbf{R})$ est définie négative.*

Démonstration. — Il suffit de rappeler la décomposition de Hodge (voir l'appendice D) $H^2(X; \mathbf{C}) = H^{2,0}(X) \oplus H^{1,1}(X) \oplus H^{0,2}(X)$ et $p_g(X) = h^{0,2}(X) = h^{2,0}(X)$, on obtient ici $H^{1,1}(X) = H^2(X; \mathbf{C})$. \square

Remarque 4.4.21. — Cette fois encore, le même énoncé et quasiment la même preuve (remplacer « section hyperplane » par « classe de Kähler ») restent valides en remplaçant « projective » par « kählérienne compacte ». Mais ici la généralisation est illusoire car les surfaces kählériennes compactes telles que $p_g = 0$ sont projectives, voir [BHPVdV04, Chapter VI].

Preuve du théorème 4.4.15. — Soit $V \subset X(\mathbf{R})$ une composante connexe orientable du lieu réel. La conjonction du lemme 4.4.17 et du corollaire 4.4.20 implique que $\chi_{\text{top}}(V) \geq 0$. En conséquence, V est difféomorphe à la sphère ou au tore. \square

Pour compléter la preuve du théorème 4.4.14, nous utilisons le raffinement suivant du théorème 4.4.15.

Proposition 4.4.22. — Soit (X, σ) une \mathbf{R} -surface projective non singulière telle que $p_g(X) = 0$. On note $q := q(X)$ son irrégularité, $s = \#\pi_0(X(\mathbf{R}))$ le nombre de composantes connexes de son lieu réel et $t \leq s$ le nombre de composantes connexes de $X(\mathbf{R})$ difféomorphes au tore \mathbf{T}^2 .

1. Si $q = 0$ et si l'homologie de X est sans 2-torsion, alors :

$$t \leq 1$$

et si $t = 1$, alors $s = t$ et

$$X(\mathbf{R}) \approx \mathbf{T}^2 .$$

2. Si $\kappa(X) = -\infty$, alors :

$$t \leq q + 1$$

et si $t = q + 1$, alors $s = t$ et

$$X(\mathbf{R}) \approx \sqcup^{q+1} \mathbf{T}^2 .$$

Remarque 4.4.23. — Il est intéressant de remarquer qu'on ne peut pas affaiblir les hypothèses de 4.4.22(1).

1. Si X est une surface K3, voir la section 4.5, alors $q(X) = \pi_1(X) = 0$ et $p_g(X) = 1$. Par simple inspection de la figure 4.11 de cette même section, on peut vérifier que pour tout $g \leq 10$, il existe une \mathbf{R} -surface K3 dont le lieu réel est difféomorphe à une surface orientable de genre g , qu'il existe une \mathbf{R} -surface K3 dont le lieu réel est difféomorphe à la réunion d'un tore et de plusieurs sphères, et qu'il existe une \mathbf{R} -surface K3 dont le lieu réel est difféomorphe à la réunion de deux tores.

2. Si X est une surface d'Enriques, voir la section 4.5, alors $p_g(X) = q(X) = 0$ et $\pi_1(X) = \mathbf{Z}_2$. Par simple inspection de la liste énoncée dans le théorème 4.5.16, on vérifie qu'il existe une \mathbf{R} -surface d'Enriques dont le lieu réel est difféomorphe à la réunion d'un tore et de deux bouteilles de Klein, et qu'il existe une \mathbf{R} -surface d'Enriques dont le lieu réel est difféomorphe à la réunion de deux tores.

En revanche on peut affaiblir l'hypothèse « $\kappa(X) = -\infty$ » de 4.4.22(2) en la remplaçant par « $\kappa(X) \neq 1$ et l'homologie de X est sans 2-torsion », voir le complément 4.4.24.

Preuve de la proposition 4.4.22. — Cette preuve est élaborée à partir d'un argument de Risler [Ris85, page 161] repris par Silhol [Sil89, page 72]. Comme en section 3.2, $Y = X/G$ est le quotient topologique de X par l'involution et $p: X \rightarrow Y$ la surjection canonique. Remarquons que les espaces Y et $Y \setminus X(\mathbf{R})$ sont des variétés topologiques et même des variétés différentielles de classe \mathcal{C}^∞ . En effet, on peut déduire de la remarque 1.5.28 que Y est une variété différentielle de dimension réelle 4 et de la proposition 2.2.27 que $X(\mathbf{R})$ est une variété différentielle de dimension réelle 2. La sous-variété $X(\mathbf{R})$ de Y est donc de codimension réelle 2 dans Y .

Rappelons que dans la suite exacte (3.6) du théorème 3.2.6,

$$(4.8) \quad \cdots \rightarrow H_r(Y, X(\mathbf{R}); \mathbf{Z}_2) \oplus H_r(X(\mathbf{R}); \mathbf{Z}_2) \rightarrow H_r(X; \mathbf{Z}_2) \rightarrow \\ H_r(Y, X(\mathbf{R}); \mathbf{Z}_2) \xrightarrow{\Delta_r} H_{r-1}(Y, X(\mathbf{R}); \mathbf{Z}_2) \oplus H_{r-1}(X(\mathbf{R}); \mathbf{Z}_2) \rightarrow \cdots$$

la seconde composante de Δ_r est l'application bord δ_r de la suite d'homologie associée à la paire $(Y, X(\mathbf{R}))$:

$$(4.9) \quad H_r(Y, X(\mathbf{R}); \mathbf{Z}_2) \xrightarrow{\delta_r} H_{r-1}(X(\mathbf{R}); \mathbf{Z}_2) \rightarrow H_{r-1}(Y; \mathbf{Z}_2) .$$

Du fait que l'homologie est sans 2-torsion, on a $b_1(X; \mathbf{Z}_2) = b_3(X; \mathbf{Z}_2) = b^1(X) = 2q(X)$. Sachant que $H_4(X(\mathbf{R}); \mathbf{Z}_2) = H_3(X(\mathbf{R}); \mathbf{Z}_2) = \{0\}$, on extrait de la suite exacte (4.8) :

$$(4.10) \quad 0 \rightarrow H_4(Y, X(\mathbf{R}); \mathbf{Z}_2) \rightarrow H_4(X; \mathbf{Z}_2) \rightarrow H_4(Y, X(\mathbf{R}); \mathbf{Z}_2) \rightarrow \\ \rightarrow H_3(Y, X(\mathbf{R}); \mathbf{Z}_2) \rightarrow H_3(X; \mathbf{Z}_2) .$$

De la première ligne et sachant que $H_4(X; \mathbf{Z}_2) \simeq \mathbf{Z}_2$, on déduit que $H_4(Y, X(\mathbf{R}); \mathbf{Z}_2) \simeq \mathbf{Z}_2$ puis $1 \leq \dim_{\mathbf{Z}_2} H_3(Y, X(\mathbf{R}); \mathbf{Z}_2) \leq 2q + 1$. La partie de la suite exacte (4.9) qui nous intéresse est :

$$H_3(Y, X(\mathbf{R}); \mathbf{Z}_2) \xrightarrow{\delta_2} H_2(X(\mathbf{R}); \mathbf{Z}_2) \xrightarrow{i_2} H_2(Y; \mathbf{Z}_2) .$$

En utilisant le calcul précédent, nous en déduisons que

$$(4.11) \quad \dim_{\mathbf{Z}_2} \ker i_2 \leq \dim_{\mathbf{Z}_2} H_3(Y, X(\mathbf{R}); \mathbf{Z}_2) \leq 2q + 1 .$$

Maintenant, notons $\{V_r\}_{r=1, \dots, s}$ les composantes connexes de $X(\mathbf{R})$. Le morphisme de groupes $H_2(X(\mathbf{R}); \mathbf{Z}_2) \xrightarrow{i_2} H_2(Y; \mathbf{Z}_2)$ envoie donc la classe d'homologie fondamentale de V_r dans $H_2(X(\mathbf{R}); \mathbf{Z}_2)$ sur sa classe d'homologie fondamentale dans $H_2(Y; \mathbf{Z}_2)$.

Nous savons d'après le lemme 4.4.17, que la classe fondamentale dans $H_2(X; \mathbf{Z})$ d'une composante connexe diffeomorphe à \mathbf{T}^2 est isotrope pour la forme d'intersection et donc nulle d'après le corollaire 4.4.20 ce qui implique que sa classe fondamentale dans $H_2(Y; \mathbf{Z})$ et donc dans $H_2(Y; \mathbf{Z}_2)$ est nulle.

Les classes fondamentales dans $H_2(X(\mathbf{R}); \mathbf{Z}_2)$ des composantes connexes de $X(\mathbf{R})$ diffeomorphes à \mathbf{T}^2 sont linéairement indépendantes et leurs images par i_2 sont toutes nulles, nous déduisons de (4.11) que $t \leq 2q + 1$.

Pour terminer, remarquons que $p: X \rightarrow Y$ étant un revêtement double ramifié le long de $X(\mathbf{R})$, la classe fondamentale de $X(\mathbf{R})$ dans $H_2(Y; \mathbf{Z}_2)$ est nulle. Par exemple dans le cas où $X(\mathbf{R})$ est orientable, sa classe fondamentale dans $H_2(Y; \mathbf{Z})$ est 2-divisible, voir le lemme 3.6.21 qui s'applique ici puisque X est non singulière.

En renumérotant au besoin, on peut supposer que V_1, \dots, V_t sont les composantes connexes de $X(\mathbf{R})$ diffeomorphes à \mathbf{T}^2 . Si $V_1 \sqcup \dots \sqcup V_t \subsetneq X(\mathbf{R})$, les classes fondamentales de V_1, \dots, V_t et de $X(\mathbf{R})$ dans $H_2(X(\mathbf{R}); \mathbf{Z}_2)$ sont linéairement indépendantes et d'après (4.11), on obtient $t < 2q + 1$ car la classe fondamentale de $X(\mathbf{R})$ appartient à $\ker i_2$. Appliqué à $q = 0$, ceci suffit à prouver la première partie de la proposition.

Pour la seconde, on commence par rappeler qu'une surface projective complexe non singulière telle que $\kappa(X) = -\infty$ est uniréglée et possède une homologie sans 2-torsion. En effet, une surface de ce type est birationnellement équivalente à une surface fibrée en genre 0 dont toutes les fibres sont non singulières et dont la fibration possède une section voir [Bea78, Exemple VII.3 et Chapitre III]. L'existence d'une section exclut toute torsion dans l'homologie et cette propriété est invariante par application birationnelle. On peut donc appliquer la première partie de la proposition et on obtient le résultat pour $q = 0$.

Maintenant, d'après le théorème 4.4.8, si X est uniréglée et si $q > 0$, alors X admet une fibration en coniques $\pi: X \rightarrow C$ définie sur \mathbf{R} au-dessus d'une courbe C de genre $g(C) = q(X) \geq 1$. L'analyse des fibres singulières de π

montre qu'un tore ne rencontre pas de fibre singulière ; on applique ensuite l'inégalité de Harnack (3.3.7) : $t \leq \#\pi_0(C(\mathbf{R})) \leq g(C) + 1 = q + 1$. \square

Preuve du théorème 4.4.14. — Une surface X de dimension de Kodaira négative possède un genre géométrique $p_g = 0$. En effet, $\kappa(X) = -\infty$ signifie que les espaces vectoriels des sections globales des multiples positifs du fibré canonique sont triviaux. Et donc en particulier $p_g(X) = \dim H^2(X, \mathcal{O}_X) = \dim H^0(X, \Omega_X) = 0$. Le théorème 4.4.15 s'applique donc et justifie que les seules surfaces orientables apparaissant dans l'énoncé soient \mathbf{S}^2 et \mathbf{T}^2 . Le point (1) provient du théorème de Comessatti 4.4.16. La majoration du nombre de tores pour les points (2) et (3) provient de la proposition 4.4.22 sachant que les nombres p_g et q sont invariants par application birationnelle de surfaces complexes. Si (X, σ) est géométriquement rationnelle, alors $p_g(X) = p_g(\mathbf{P}^2(\mathbf{C})) = 0$ et $q(X) = q(\mathbf{P}^2(\mathbf{C})) = 0$ (une surface uniréglée possède un genre géométrique nul mais une irrégularité non nulle en général). Enfin, le point (4) découle de la proposition 4.4.10. \square

Complément 4.4.24. — Soit (X, σ) une \mathbf{R} -surface projective non singulière \mathbf{R} -minimale.

1. Si $p_g(X) = 0$, $q(X) > 0$ et X n'est pas uniréglée, alors $q(X) = 1$, $K_X^2 = 0$, $b_2(X) = 2$ et $\kappa(X) \in \{0, 1\}$.
2. Si X est bielliptique et si l'homologie de X est sans 2-torsion, alors $t < 3$, et si $t = 2$, alors $t = s$, voir [CF03, Remark 7.3], [Suw69].
3. Si l'homologie de X est sans 2-torsion et $t \geq 3$, alors $\kappa(X) = 1$ (i. e. X est une surface elliptique propre).

Démonstration. — 1. Remarquons que sous ces hypothèses, X est nécessairement de type spécial. En effet, si X est minimale et de type général, alors $c_1^2(X) > 0$, d'où $\chi(\mathcal{O}_X) \geq 1$ d'après la formule de Noether 4.1.19 et donc $q(X) = 0$. Si X n'est pas uniréglée, alors $\chi_{\text{top}}(X) = c_2(X) \geq 0$ [Bea78, Theorem X.4] donc $\chi(\mathcal{O}_X) \geq 0$ d'après Noether ; de là, si $p_g(X) = 0$, alors $q(X) \leq 1$. Par minimalité, $c_1^2(X) = 0$ et d'après la formule de Noether, $c_2(X) = 0$. Comme $b_1(X) = b_3(X) = 2q(X)$, on trouve $b_2(X) = 2$. Voir aussi [Bea78, VI.1 et VI.2] pour une preuve alternative.

2. Il existe des surfaces bielliptiques dont le lieu réel est constitué de trois ou quatre tores, voir le théorème 4.5.30 mais dans ce cas, l'homologie de X contient de la 2-torsion [CF03, Remark 7.3], [Suw69].

3. D'après la classification de surfaces complexes compactes [BHPVdV04, Chapter VI, Table 10], seules les surfaces bielliptiques satisfont $\kappa(X) = 0$,

$p_g(X) = 0$ et $q(X) = 1$. Ces surfaces étant écartées par la question précédente, on a $\kappa(X) = 1$ c'est-à-dire que X est une surface elliptique propre.

Par manque de temps, nous n'avons pas tenté de construire un exemple explicite contredisant la conclusion de la proposition 4.4.22 mais nous proposons deux pistes pour une telle construction :

1. D'après [BHPVdV04, Théorème III.18.2], la fibration $\pi: X \rightarrow C$ est ou bien à fibres non singulières ou bien ses seules fibres singulières sont de la forme mE où E est une courbe elliptique non singulière. Supposons que $t > \#\pi_0(C(\mathbf{R}))$, alors on déduit de la classification des fibres singulières réelles due à Silhol [Sil84], [Sil89, Chapitre VII], que π possède un nombre pair de fibres de multiplicité m paire.
2. On peut aussi essayer d'utiliser [Bea78, Théorème VI.13, cas II non bielliptique] : sous les hypothèses considérées, la surface complexe X est nécessairement un quotient de la forme $(B \times F)/H$ où F est une courbe elliptique non singulière, B est une courbe non singulière de genre au moins 2, H est un groupe fini opérant fidèlement sur B et sur F , B/H est elliptique, F/H est rationnelle et H opère librement sur $B \times F$.

□

Surfaces singulières et paraboles. — Dans cette sous-section, basée sur [Kol99b, CM08, CM09], nous donnons une classification des types topologiques possibles pour les \mathbf{R} -surfaces singulières de Du Val (4.4.30) géométriquement rationnelles (voir la définition 1.3.37). Pour ce faire, il est commode de considérer une structure d'orbifold à points coniques (4.4.31) sur les composantes connexes de la normalisée topologique (4.4.35). Comme conséquence, nous obtenons une généralisation du théorème de Comessatti (4.4.36). Une autre conséquence, qui fut la motivation initiale de cette partie, est la preuve de trois conjectures de Kollár sur les variétés rationnellement connexes. Voir le théorème 6.2.11 au chapitre 6.

Surfaces de Du Val. — On commence par rappeler une définition due à Artin, [Art66], voir aussi [Har77, page 250].

Définition 4.4.25. — Soit X une surface complexe normale définie sur \mathbf{C} et P un point singulier de X . On dit que P est une *singularité rationnelle* si pour une résolution $\pi: \tilde{X} \rightarrow X$ de P , on a $R^q\pi_*(\mathcal{O}_{\tilde{X}}) = 0$ pour $q \geq 0$ ($R^q\pi_*(\mathcal{O}_{\tilde{X}})$ désigne la q -ième image directe du faisceau $\mathcal{O}_{\tilde{X}}$).

Théorème 4.4.26. — Soit X une surface complexe normale définie sur \mathbf{C} et P un point singulier de X , les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. P est rationnel de dimension de plongement 3.
2. P est rationnel de multiplicité 2, c'est un point double rationnel.
3. P est de multiplicité 2 et peut être résolu par une succession d'éclatements de points.
4. La résolution minimale de P a une configuration des courbes exceptionnelles du type A_n , D_n , E_6 , E_7 ou E_8 , voir ci-dessous.

Démonstration. — Voir [Slo80, page 71]. □

Remarque 4.4.27. — Il existe des points doubles de surfaces qui sont non rationnels (par exemple $z^6 + y^2 + x^3 = 0$ est un point double elliptique) mais tout point double de surface est de dimension de plongement 3, voir [Lau71, page 7].

Définition 4.4.28. — Si l'une des quatre propriétés ci-dessus est vérifiée, P est un *point double rationnel de type* A_n , $n \geq 1$, D_n , $n \geq 4$ ou E_n , $n = 6, 7, 8$. Sur \mathbf{C} , on a les équations caractéristiques suivantes [BHPVdV04, page 87] :

$$\begin{aligned} A_n(n \geq 1) : & \quad z^2 + x^2 + y^{n+1} = 0 \\ D_n(n \geq 4) : & \quad z^2 + y(x^2 + y^{n-2}) = 0 \\ E_6 : & \quad z^2 + x^3 + y^4 = 0 \\ E_7 : & \quad z^2 + x(x^2 + y^3) = 0 \\ E_8 : & \quad z^2 + x^3 + y^5 = 0 . \end{aligned}$$

Remarque 4.4.29. — Les points doubles rationnels sont les singularités canoniques des surfaces. Ces singularités sont les quotients de \mathbf{C}^2 par les sous-groupes finis de $\mathbf{SL}_2(\mathbf{C})$. On les appelle aussi les singularités de Du Val.

Définition 4.4.30. — Une surface projective est une surface *de Du Val* si ses seules singularités sont des points doubles rationnels.

Sur \mathbf{C} , les singularités de Du Val sont classifiées dans la définition 4.4.28 ci-dessus : il y a les *cycliques* A_n , $n \geq 1$, les *diédrales* D_n , $n \geq 4$, la *tétraédrale* E_6 , l'*octaédrale* E_7 et l'*icosaédrale* E_8 . Sur \mathbf{R} , il y a beaucoup plus de possibilités et nous nous limiterons ici à deux séries de singularités cycliques et on renvoie à [CM08, section 1 et exemple 1.3] pour plus de détails.

Une surface réelle X admet une singularité A_n^\pm en un point $P \in X(\mathbf{R})$ si au voisinage de P , X est \mathbf{R} -analytiquement isomorphe à

$$x^2 \pm y^2 - z^{n+1} = 0, \quad n \geq 1.$$

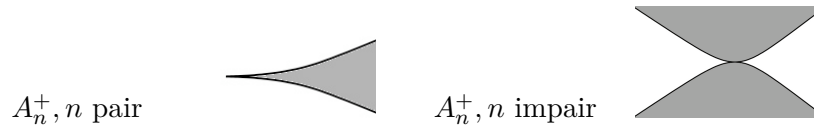


FIGURE 4.5. A_n^+ , $x^2 + y^2 - z^{n+1} = 0$, $n \geq 1$.



FIGURE 4.6. A_n^- , $x^2 - y^2 - z^{n+1} = 0$, $n \geq 1$.

La partie grisée de la figure 4.5 représente la zone du plan $\mathbf{R}_{z,x}^2$ où $z^{n+1} - x^2$ est positif. La surface X qui est localement revêtement double du plan ramifié en la courbe $z^{n+1} - x^2 = 0$ possède des points réels exclusivement au-dessus de cette zone.

Signalons que deux singularités de noms différents ne sont pas isomorphes à l'exception de A_1^+ et A_1^- .

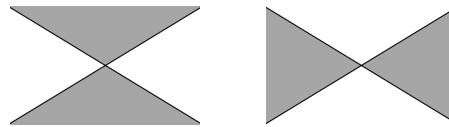


FIGURE 4.7. $A_1^+ \simeq A_1^-$.

Généralisation du théorème de Comessatti. —

Orbifolds de dimension 2. — Il est commode de justifier le terme *orbifold* par le fait qu'en anglais, une variété topologique M de dimension n est appelée *n-manifold*. Dans ce dernier cas, M est munie d'une famille de cartes (\tilde{U}, ϕ) où \tilde{U} est un ouvert et ϕ un homéomorphisme sur un ouvert $U \subset \mathbf{R}^n$.

Un n -orbifold est muni d'un atlas où cette fois une carte $\phi: \tilde{U} \rightarrow U \subset \mathbf{R}^n$ est un revêtement ramifié fini. On retrouve les variétés si tous les ϕ sont de degré 1.

Plus précisément, chaque ouvert de carte est munie de l'action d'un groupe fini G et ϕ se factorise par un homéomorphisme $G \backslash \tilde{U} \rightarrow U$, voir [BMP03, Chapter 2].

Définition 4.4.31. — Si G est cyclique et agit par rotation d'angle $2\pi/m$, le point fixe est appelé un *point conique* d'indice m .

En général, un orbifold n'est pas homéomorphe à une variété. Mais en dimension 2, tout orbifold M est homéomorphe à une variété topologique notée $|M|$, voir par exemple [Sco83, §2].

Définition 4.4.32. — Soient p et q des entiers premiers entre eux, $(p, q) = 1$. On note $\mathbf{S}(p, q)$ l'orbifold de surface lisse sous-jacente $|\mathbf{S}(p, q)| = \mathbf{S}^2$ avec deux points coniques d'indices p et q respectivement.

Soit M un orbifold compact de dimension 2 muni d'un revêtement fini global $\tilde{M} \rightarrow M$ d'ordre d par une surface lisse. Dans ce cas, la caractéristique d'Euler d'orbifold est définie par

$$\chi(M) := \frac{1}{d} \chi(\tilde{M}) \in \mathbf{Q}.$$

Soit M un 2-orbifold avec k points coniques, dont les angles des cônes sont $2\pi/m_j$, $j = 1, \dots, k$ et $|M|$ la surface lisse sous-jacente à M , on a

$$\chi(M) = \chi(|M|) - \sum_{j=1}^k \left(1 - \frac{1}{m_j}\right).$$

Définition 4.4.33. — On dit que l'orbifold M est *sphérique* (resp. *euclidien*) si $\chi(M) > 0$ (resp. $\chi(M) = 0$).

Proposition 4.4.34. — L'orbifold M est sphérique ou euclidien si et seulement si $|M|$ est sphérique et $\sum_{j=1}^k (1 - \frac{1}{m_j}) \leq 2$ ou $|M|$ est euclidien et $k = 0$.

Normalisation topologique. — Pour traiter de la situation où le lieu réel d'une \mathbf{R} -variété est singulier, Kollár [Kol99a] a introduit une notion imitant la « séparation des branches » en géométrie algébrique vue avec la définition 1.5.37.

Définition 4.4.35. — Soit V un complexe simplicial dont le lieu singulier $\text{Sing}(V)$, c'est-à-dire l'ensemble des points $x \in V$ dont l'étoile (l'ensemble des simplexes de V dont l'un des sommets est x) n'est pas homéomorphe à un disque, est fini. La normalisation topologique $\bar{\nu}: \bar{V} \rightarrow V$ est l'unique application propre et continue qui vérifie :

1. $\bar{\nu}$ est un homéomorphisme au-dessus de $V \setminus \text{Sing}(V)$,

2. si $P \in \text{Sing}(V)$, la fibre $\bar{\nu}^{-1}(P)$ est en bijection avec l'ensemble des composantes connexes locales de V au voisinage de P .

Soient X une \mathbf{R} -surface algébrique géométriquement rationnelle et $M \subset \overline{X(\mathbf{R})}$ une composante connexe de la normalisée topologique du lieu réel. Si X est non singulière et si la surface lisse M est orientable, alors le théorème de Comessatti 4.4.16 impose que M est une sphère ou un tore. La généralisation ci-dessous a été démontrée dans [CM09].

Si X est de Du Val, on munit M d'une structure d'orbifold à points coniques voir la définition 4.4.38.

Théorème 4.4.36. — *Soient X une \mathbf{R} -surface algébrique géométriquement rationnelle et $M \subset \overline{X(\mathbf{R})}$ une composante connexe de la normalisée topologique du lieu réel. Si X est de Du Val et si l'orbifold M est orientable, alors M est sphérique ou euclidien.*

Ce résultat est obtenu comme corollaire du théorème 4.4.39 ci-après. Avant de l'énoncer, nous avons besoin d'une définition technique supplémentaire. Lorsque $X(\mathbf{R})$ est de dimension 2, la normalisée $\overline{X(\mathbf{R})}$ est une variété topologique et si $P \in X(\mathbf{R})$ est un point singulier de type A_n^\pm avec n impair, alors $X(\mathbf{R})$ possède deux composantes connexes locales au voisinage de P .

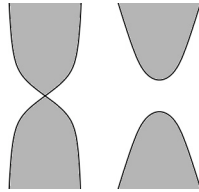


FIGURE 4.8. M et \bar{M} au voisinage d'un point singulier A_n^\pm avec n impair.

Définition 4.4.37. — Le point P est *globalement non séparant* si les deux composantes connexes locales au voisinage de P sont sur la même composante connexe de $\overline{X(\mathbf{R})}$ et *globalement séparant* sinon.

Soient X une \mathbf{R} -surface de Du Val et $\bar{\nu}: \overline{X(\mathbf{R})} \rightarrow X(\mathbf{R})$ la normalisation topologique du lieu réel. On note Σ_X l'ensemble des points singuliers réels de type A_n^- , n pair ou de type A_n^- , n impair et globalement non séparant. On note $\mathcal{P}_X := \text{Sing}(X) \setminus \Sigma_X$ l'ensemble des autres points singuliers.

Définition 4.4.38. — Soit $M \subset \overline{X(\mathbf{R})}$ une composante connexe de la normalisée topologique du lieu réel d'une \mathbf{R} -surface de Du Val. On munit M d'une structure d'orbifold dont les points coniques d'indice m correspondent aux points singuliers de type A_m^\pm contenus dans $\mathcal{P}_X \cap \bar{\nu}(M)$.

On note $k(M)$ le cardinal $\#\{\bar{\nu}^{-1}(\mathcal{P}_X) \cap M\}$ et $m_i(M)$ pour $i = 1 \dots k(M)$ l'indice d'un point de $\mathcal{P}_X \cap \bar{\nu}(M)$.

Théorème 4.4.39. — Soit X une \mathbf{R} -surface de Du Val et $M \subset \overline{X(\mathbf{R})}$ une composante connexe (orientable ou non) de la normalisée topologique du lieu réel. Si X est géométriquement rationnelle, alors

- $k(M) \leq 4$,
- $\sum_{i=1}^k (1 - \frac{1}{m_i+1}) \leq 2$,
- $|M| = \mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^1 \implies k(M) = 0$.

Démonstration. — Voir [CM08, Corollary 0.2, Theorem 0.3] et [CM09, Theorem 0.2] pour la démonstration complète. Nous discuterons uniquement ici de l'inégalité $k(M) \leq 4$. La partie principale de la preuve consiste à réduire les cas à certains revêtements doubles du cône quadratique ramifiés le long de courbes singulières de degré 6. Une énumération astucieuse des cas permet alors de conclure.

À l'aide du programme de modèle minimal, on réduit le problème au cas où X est une surface de del Pezzo Du Val (définition 4.2.12) de degré 1, voir [CM08, Lemma 1.8].

Le modèle anticanonique de X est un revêtement double ramifié $q: X \rightarrow Q$ d'un cône quadrique $Q \subset \mathbf{P}^3(\mathbf{C})$ dont le lieu de branchement est l'union du sommet du cône et d'une section cubique B ne passant pas par le sommet, voir par exemple [DPT80, Exposé V]. Remarquons que le tiré en arrière par q du sommet du cône est un point non singulier et soit X' la surface elliptique singulière obtenue à partir de X en éclatant ce point non singulier⁽¹⁰⁾.

Rappelons que $\bar{\nu}: \overline{X'(\mathbf{R})} \rightarrow X'(\mathbf{R})$ est la normalisation topologique du lieu réel. On veut donc prouver que pour toute composante connexe $M \subset \overline{X'(\mathbf{R})}$, on a

$$\#(\bar{\nu}^{-1}(\mathcal{P}_{X'}) \cap M) \leq 4.$$

La surface X' est un revêtement double ramifié d'une surface de Hirzebruch surface \mathbf{F}_2 dont la courbe de branchement est l'union de l'unique section d'auto-intersection négative, notée Σ_∞ , de la fibration $\mathbf{F}_2 \rightarrow \mathbf{P}^1(\mathbf{C})$, et d'une trisection B disjointe de Σ_∞ . Le cône Q est isomorphe à l'espace projectif

10. Exercice : montrer que X' est une surface elliptique.

à poids $\mathbf{P}(1, 1, 2)$ que l'on munit des coordonnées (x_0, x_1, y_2) et X est alors l'hypersurface de $\mathbf{P}(1, 1, 2, 3)$ muni des coordonnées (x_0, x_1, y_2, z) définie par

$$z^2 = y_2^3 + p_4(x_0, x_1)y_2 + q_6(x_0, x_1) .$$

Décrivons maintenant un modèle plan de Q dans lequel les sections hyperplanes de Q plongées dans \mathbf{P}^3 par $H^0(Q, \mathcal{O}_Q(2))$ correspondent aux paraboles tangentes à la droite à l'infini $L_\infty = \{w = 0\}$ au point $O := \{w = x = 0\}$ du plan projectif muni des coordonnées (x, y, w) . En d'autres termes, éclatons au point O et ensuite au point infiniment proche O' de O correspondant à la tangence en la droite à l'infini L_∞ , et notons \tilde{Q} la surface obtenue. Notons E, E' les transformées totales respectives de O, O' , et remarquons que $E = E' + E''$, E'' étant une (-2) -curve. Le système linéaire $H^0(\tilde{Q}, \mathcal{O}_{\tilde{Q}}(2H - E - E'))$ envoie \tilde{Q} birationnellement sur le cône quadrique $Q \subset \mathbf{P}^3(\mathbf{C})$, en contractant la transformée stricte \widetilde{L}_∞ de L_∞ et la courbe $\widetilde{E''}$ sur des points. Du fait que \widetilde{L}_∞ et $\widetilde{E''}$ sont disjointes, la contraction de \widetilde{L}_∞ donne une surface de Hirzebruch \mathbf{F}_2 , dont la (-2) -section Σ_∞ est l'image de la courbe $\widetilde{E''}$. Écrivons tout cela avec les coordonnées (x, y, w) de \mathbf{P}^2 : $H^0(Q, \mathcal{O}_Q(1))$ correspond alors à $H^0(\tilde{Q}, \mathcal{O}_{\tilde{Q}}(H - E))$ engendré par w, x , et $y_2 := yw$ complète w^2, wx, x^2 en une base de $H^0(\tilde{Q}, \mathcal{O}_{\tilde{Q}}(2H - E - E')) \simeq H^0(Q, \mathcal{O}_Q(2))$. Le morphisme $\tilde{Q} \rightarrow \mathbf{P}(1, 1, 2)$ est donc donné par $x_0 := w, x_1 := x, y_2 := yw$.

La surface elliptique X' est le revêtement double de \mathbf{F}_2 ramifié au-dessus de Σ_∞ et de la courbe B correspondant à la courbe de Q d'équation $y^3 + p_4(x_0, x_1)y + q_6(x_0, x_1) = 0$. Ainsi la courbe B correspond à la courbe plane $w^3y^3 + p_4(w, x)yw + q_6(w, x) = 0$ dont la partie affine a pour équation

$$(4.12) \quad y^3 + p_4(1, x)y + q_6(1, x) = 0 .$$

Remarquons qu'une parabole comme ci-dessus, c'est-à-dire une courbe $C \in (2H - E - E')$, est disjointe de $\widetilde{E''}$ (qui se contracte sur le sommet du cône) sauf si elle dégénère en deux droites passant par le point O . En particulier, on peut toujours modifier les coordonnées dans le plan affine de manière à ce que C soit transformée en la droite $y = 0$.

Afin de décrire en coordonnées la géométrie à l'infini des paraboles comme ci-dessus, rappelons que la surface \mathbf{F}_2 est recouverte par deux ouverts isomorphes à $\mathbf{C} \times \mathbf{P}^1(\mathbf{C})$. Sur l'un de ces ouverts de carte on a des coordonnées $\frac{x}{w} \in \mathbf{C}$, et pour coordonnées homogènes $(w : y) \in \mathbf{P}^1(\mathbf{C})$, alors que sur l'autre carte on a les coordonnées $\frac{w}{x} \in \mathbf{C}$, et $(\frac{x^2}{w} : y) \in \mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ (en fait $\frac{x^2}{w}/w = (\frac{x}{w})^2$). La section Σ_∞ à l'infini correspond à la courbe $\widetilde{E''} \subset \tilde{X}$ et est définie par $w = 0$ et $\frac{x^2}{w} = 0$ selon les cartes. Une parabole $yw = a_0w^2 + a_1xw + a_2x^2$ est

donc donnée par l'équation

$$\frac{1}{\eta} = a_0 + a_1 \frac{x}{w} + a_2 \left(\frac{x}{w}\right)^2$$

sur la carte affine de coordonnées $(\frac{x}{w} : \eta := \frac{w}{y})$. En utilisant ces coordonnées à l'infini, il devient aisé de voir quand une région « rencontre » \mathbf{F}_2 à l'infini.

Nous allons maintenant rechercher les formes normales de l'équation (4.12). Les points singuliers de $X'(\mathbf{R})$ sont en correspondance biunivoque avec les points singuliers de $B(\mathbf{R})$. Les différents cas à considérer sont distingués par le nombre de composantes irréductibles de la trisection B .

On se contente ici de résoudre le cas à trois composantes irréductibles et on renvoie à [CM08] pour les autres cas. On veut voir que chaque composante connexe de la normalisée topologique de chacun des deux revêtements doubles ramifiés le long de B possède au plus 4 points singuliers. Commençons par remarquer que B étant réelle, au moins l'une de ses composantes irréductibles est réelle. L'équation (4.12) devient

$$(y - \alpha(x))(y - \beta(x))(y - \gamma(x)) = 0$$

et, en changeant les coordonnées réelles de $Q = \mathbf{P}(1, 1, 2)$ au besoin, on peut supposer que $\gamma = 0$. Le cas $\beta = \bar{\alpha}$ où deux composantes irréductibles sont complexes conjuguées ne donne que 2 points singuliers : $\operatorname{Re} \alpha(x) = 0, y = \operatorname{Im} \alpha(x)$. Nous pouvons donc supposer que les trois composantes irréductibles sont réelles. L'équation (4.12) devient alors $(y - \alpha)(y - \beta)y = 0$ où $\alpha(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2$ et $\beta(x) = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2$ sont des polynômes de degré 2.

Cas sans tangence. — Supposons qu'aucune parabole n'est tangente à une autre. Alors, du fait que l'on peut permuter les trois courbes, on peut fixer la plus petite à l'infini (*i. e.*, si l'on écrit les courbes sous la forme $y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$, celle pour laquelle la valeur de a_2 est la plus petite). Changeant les coordonnées, on obtient la courbe $y = 0$ et deux paraboles convexes, *i. e.* avec $\alpha_2 > 0$ et $\beta_2 > 0$.

Les 6 points d'intersection sont distincts et donnés par

$$y = \alpha(x)\beta(x) = 0, \quad \alpha(x) = \beta(x) = y.$$

La courbe B est réelle, donc si l'un de ces points singuliers n'est pas réel, alors le nombre de points singuliers réels est majoré par 4. On suppose donc que les 6 points singuliers sont réels. Posons

$$(4.13) \quad \begin{cases} \alpha(x) = \alpha_2(x - a_1)(x - a_2), & a_1 < a_2; \\ \beta(x) = \beta_2(x - b_1)(x - b_2). \end{cases}$$

En multipliant y par β_2 si besoin, on peut supposer que $\beta_2 = 1$. On peut aussi réduire au cas $0 < \alpha_2 < 1$ en échangeant les rôles de α et β si besoin. À l'aide d'une translation supplémentaire sur l'axe des x on peut de plus supposer que $b_1 = -b_2$. L'équation (4.13) devient alors :

$$\begin{cases} \alpha(x) = \alpha_2(x - a_1)(x - a_2), & a_1 < a_2, 0 < \alpha_2 < 1 ; \\ \beta(x) = (x^2 - b^2), & 0 < b . \end{cases}$$

À la réflexion $x \leftrightarrow -x$ près, il reste alors 4 possibilités, à savoir

$$b < a_1, \quad -b < a_1 < b < a_2, \quad a_1 < -b < b < a_2, \quad -b < a_1 < a_2 < b .$$

La situation est représentée en figure 4.9. Pour fixer les idées, le lecteur est invité à compter les points doubles de chaque composante connexe du complémentaire de la courbe B . Pour cela, remarquons que deux composantes connexes sont connectées à l'infini si leur bord possède deux arcs non bornés appartenant à la même paire de paraboles.

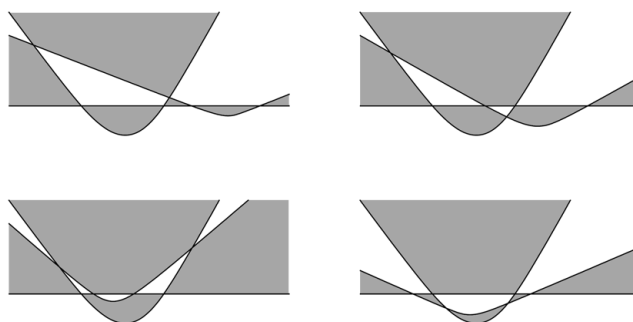


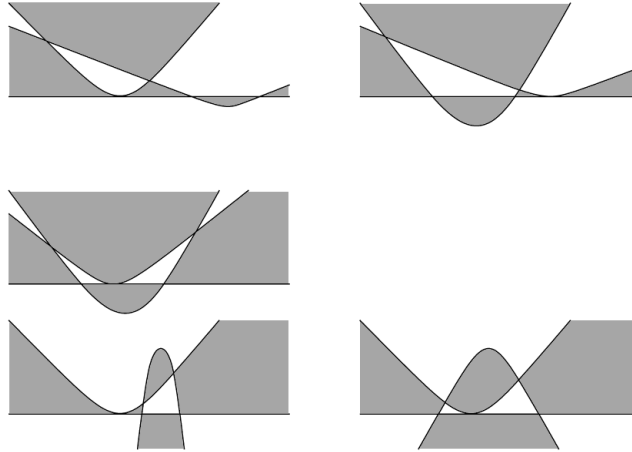
FIGURE 4.9. 6 points A_1 .

Cas avec tangence. — Après une étude du même type que ci-dessus, on est ramené aux cinq cas représentés en figure 4.10.

□

Composantes non orientables. — Par éclatement de points réels non singuliers du plan projectif réel, on réalise toutes les surfaces non orientables comme composantes de surfaces rationnelles réelles non singulières. De la même manière, on réalise aisément des orbifolds hyperboliques non orientables.

Lorsque X est géométriquement rationnelle, minimale et non singulière, le théorème de Comessatti implique encore que M est sphérique ou euclidien (en fait, par minimalité, M est difféomorphe à \mathbf{S}^2 ou \mathbf{RP}^2 (tous deux sphériques),

FIGURE 4.10. 4 points A_1 , 1 point A_2 .

$\mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^1$ ou \mathbf{K}^2 (tous deux euclidiens). Dans le cas singulier, les choses se passent différemment :

Théorème 4.4.40. — *Il existe une \mathbf{R} -surface de Du Val géométriquement rationnelle minimale X dont une composante $M \subset \overline{X(\mathbf{R})}$ est un orbifold de type hyperbolique.*

Démonstration. — Voir [CM09, Theorem 0.4]. □

4.5. Surfaces K3, d'Enriques, abéliennes, bielliptiques ($\kappa = 0$)

Les quatre classes de surfaces projectives complexes non singulières minimales de dimension de Kodaira $\kappa = 0$ se distinguent par les valeurs du genre géométrique p_g et de l'irrégularité q . On peut montrer que si la dimension de Kodaira d'une surface X est nulle, alors il existe un entier m strictement positif tel que $mK_X \sim 0$.

On note m_0 l'entier strictement positif minimum tel que $m_0K_X \sim 0$.

Théorème 4.5.1. — *Soit X une surface projective complexe non singulière minimale avec $\kappa(X) = 0$. Alors le couple $(p_g(X), q(X))$ peut prendre quatre valeurs :*

1. $p_g(X) = 1, q(X) = 0$; alors $m_0 = 1$ et X est une surface K3 projective, voir la définition 4.5.3.

2. $p_g(X) = 0, q(X) = 0$; alors $m_0 = 2$ et X est une surface d'Enriques, voir la définition 4.5.13.
3. $p_g(X) = 1, q(X) = 2$; alors $m_0 = 1$ et X est une surface abélienne, voir la définition 4.5.22.
4. $p_g(X) = 0, q(X) = 1$; alors $m_0 \in \{2, 3, 4, 6\}$ et X est une surface bielliptique, voir la définition 4.5.28.

Démonstration. — Voir [Bea78, liste VI.20 et théorème VIII.2]. □

Corollaire 4.5.2. — Une surface projective complexe non singulière minimale X avec $\kappa(X) = 0$ satisfait $4K_X \sim 0$ ou $6K_X \sim 0$.

Surfaces K3. — Une référence classique pour l'étude des surfaces K3 complexe est [X85] ; pour les \mathbf{R} -surfaces K3, on renvoie à [Sil89, Chapter VIII]. Les surfaces K3 du théorème 4.5.1 sont *projectives*. Plus généralement, une surface K3 est une surface analytique complexe non singulière compacte de diviseur canonique trivial et de premier nombre de Betti nul.

Définition 4.5.3. — Soit X une surface analytique complexe compacte non singulière. Alors X est une *surface K3* si $K_X \sim 0$ et $b_1(X) = 0$. Une \mathbf{R} -*surface K3* est une \mathbf{R} -surface (X, σ) telle que X est une surface K3.

Proposition 4.5.4. — Soit X une surface K3. Alors X est une surface minimale, $\kappa(X) = 0, p_g(X) = 1, q(X) = 0$ et X est simplement connexe.

Démonstration. — Voir [X85], [BHPVdV04, Chapitre VIII]. □

Les surfaces K3 ne sont pas toutes projectives mais d'après un résultat fondamental de Siu, elles sont toutes kählériennes [X85, Exposé XII].

Théorème 4.5.5 (Kharlamov 1975). — Il y a 66 types topologiques de \mathbf{R} -surfaces K3. Chacun d'entre eux peut être obtenu par simplification de Morse topologique (définition 4.3.31) à partir de l'un des 6 types extrémaux énumérés ci-dessous. Réciproquement, n'importe quel type obtenu de cette façon est réalisé par une \mathbf{R} -surface K3.

Les 6 types extrémaux sont :

1. M -surfaces, $b^*(X(\mathbf{R}); \mathbf{Z}_2) = 24, \chi(X(\mathbf{R})) = -16, 0, 16,$
 $\mathbf{S}_{10} \sqcup \mathbf{S}^2, \quad \mathbf{S}_6 \sqcup 5\mathbf{S}^2, \quad \mathbf{S}_2 \sqcup 9\mathbf{S}^2 ;$
2. $(M - 2)$ -surfaces, $b^*(X(\mathbf{R}); \mathbf{Z}_2) = 20, \chi(X(\mathbf{R})) = \pm 8,$
 $\mathbf{S}_7 \sqcup 2\mathbf{S}^2, \quad \mathbf{S}_3 \sqcup 6\mathbf{S}^2 ;$

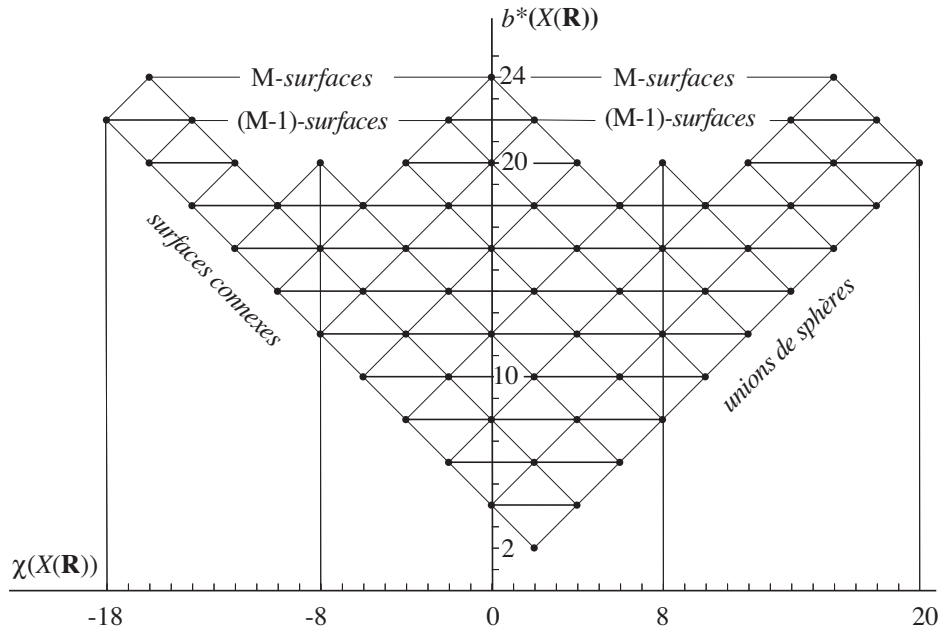


FIGURE 4.11. Types topologiques des surfaces K3 dont le lieu réel est non vide.

3. *Paire de tores,*

$$\mathbf{T}^2 \sqcup \mathbf{T}^2 .$$

Démonstration. — Voir [Har76], [Sil89, Chapter VIII]. \square

La figure 4.11 représente les valeurs du couple $(\chi(X(\mathbf{R})), b^*(X(\mathbf{R})); \mathbf{Z}_2)$ réalisées par des \mathbf{R} -surfaces K3. De ce diagramme, nous déduisons les types topologiques possibles des \mathbf{R} -surfaces K3 grâce à la proposition suivante :

Proposition 4.5.6. — *Soit (X, σ) une \mathbf{R} -surface K3. Si $X(\mathbf{R})$ est non vide, c'est une surface topologique orientable. De plus, $X(\mathbf{R})$ possède au plus une composante connexe de caractéristique d'Euler ≤ 0 (les autres composantes éventuelles sont donc difféomorphes à la sphère) sauf si $X(\mathbf{R})$ est l'union disjointe de deux tores.*

Démonstration. — Soit (X, σ) une \mathbf{R} -surface K3 de lieu réel non vide. Remarquons tout d'abord que $X(\mathbf{R})$ est orientable. En effet, par définition,

$c_1(X) = b_1(X) = 0$. D'après la proposition 3.1.16, on a donc $w_2(X) = 0$. Par ailleurs, on sait, voir la proposition 4.5.4, que $\pi_1(X) = 0$ ce qui implique en particulier $b_1(X; \mathbf{Z}_2) = 0$. Le théorème 3.1.18 s'applique donc.

Comme dans la preuve du théorème 3.2.6, notons $Y = X/G$ et $p: X \rightarrow Y$ le revêtement double ramifié associé. Sachant que l'homologie de X est sans 2-torsion et que $q(X) = 0$, on a $H_3(Y, X(\mathbf{R}); \mathbf{Z}_2) \simeq \mathbf{Z}_2$ d'après le lemme 3.6.22 et on en déduit comme dans la première partie de la preuve de la proposition 4.4.22 une suite exacte (déduite de (4.9))

$$(4.14) \quad 0 \rightarrow \mathbf{Z}_2 \xrightarrow{\delta_2} H_2(X(\mathbf{R}); \mathbf{Z}_2) \xrightarrow{i_2} H_2(Y; \mathbf{Z}_2) .$$

Notons $\{V_r\}_{r=1, \dots, s}$ les composantes connexes de $X(\mathbf{R})$ qui sont donc des surfaces topologiques compactes orientables comme nous l'avons vu précédemment. Pour $r = 1, \dots, s$, notons α_r la classe fondamentale de V_r dans $H_2(X; \mathbf{Z})$ et β_r l'image de α_r dans $H_2(Y; \mathbf{Z}_2)$ par l'application p_* induite par p . On a évidemment $\alpha_r \cdot \alpha_{r'} = 0$ si $r \neq r'$ et α_r appartient à la partie invariante de $H_2(X; \mathbf{Z})$.

Par construction le morphisme de groupes $H_2(X(\mathbf{R}); \mathbf{Z}_2) \xrightarrow{i_2} H_2(Y; \mathbf{Z}_2)$ envoie la classe d'homologie fondamentale de V_r dans $H_2(X(\mathbf{R}); \mathbf{Z}_2)$ sur $\beta_r \in H_2(Y; \mathbf{Z}_2)$. Par ailleurs, rappelons que $p: X \rightarrow Y$ étant un revêtement double ramifié le long de $X(\mathbf{R})$, la classe fondamentale de $X(\mathbf{R})$ dans $H_2(Y; \mathbf{Z}_2)$ est nulle d'après le lemme 3.6.21. Cette classe est égale à la somme $\beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_s$ qui est donc nulle. De surcroît, la relation $\beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_s = 0$ est la seule relation entre les classes β_r compte-tenu de la suite exacte (4.14). On en déduit qu'il y a deux possibilités pour les classes α_r :

1. les classes α_r sont linéairement indépendantes ;
2. il y a une seule relation entre les classes α_r , de la forme $\sum_{r=1}^s d_r \alpha_r$ avec $\prod_{r=1}^s d_r \neq 0$.

À l'aide du lemme 4.4.19 et des égalités $h^{2,0} = 1$ et $\sigma^* H^{2,0} = H^{0,2}$, on montre que l'indice positif de la forme d'intersection restreinte à la partie invariante de $H_2(X; \mathbf{Z})$ est égal à 1. D'autre part $\alpha_r \cdot \alpha_r = -\chi_{\text{top}}(V_r)$ d'après le lemme 4.4.17.

Dans le premier cas, on en déduit qu'il y a au plus une composante de caractéristique d'Euler négative ou nulle.

Dans le second cas, on déduit de la relation $\sum_{r=1}^s d_r \alpha_r$ que $\alpha_r \cdot \alpha_r = 0$ pour tout r car $\alpha_r \cdot \alpha_{r'} = 0$ pour $r \neq r'$. Le fait que l'indice positif de la forme d'intersection restreinte à $H_2(X; \mathbf{Z})^G$ soit égal à 1 implique que $X(\mathbf{R})$ contient au plus deux composantes connexes diffeomorphes à \mathbf{T}^2 et que si α_1 et α_2 sont deux telles composantes, alors elles sont liées. □

Remarque 4.5.7. — Une preuve plus savante, voir par exemple [Sil89, Corollary VIII.4.2], de l'orientabilité du lieu réel d'une \mathbf{R} -surface K3 est la suivante : on commence par remarquer que d'après la proposition 3.1.10, le lieu réel d'une \mathbf{R} -surface de degré 4 dans $\mathbf{P}^3(\mathbf{C})$ est orientable puis on applique le théorème suivant ([Har76], [Sil89, Chapter VIII]) :

Théorème 4.5.8. — *Toute \mathbf{R} -surface K3 est déformation (définition 4.3.25) d'une \mathbf{R} -surface quartique de \mathbf{P}^3 .*

Soit (X, σ) une \mathbf{R} -surface K3 de lieu réel non vide. Notons s le nombre de composantes connexes de $X(\mathbf{R})$ et g la somme des genres des composantes connexes de $X(\mathbf{R})$. Si $g > 0$ et si $X(\mathbf{R})$ n'est pas union de deux tores, g est donc le genre de l'unique composante non difféomorphe à la sphère. On a alors

$$s = \frac{b^*(X(\mathbf{R}); \mathbf{Z}_2) + \chi(X(\mathbf{R}))}{4}, \quad g = \frac{b^*(X(\mathbf{R}); \mathbf{Z}_2) - \chi(X(\mathbf{R}))}{4}.$$

Le type topologique de $X(\mathbf{R}) \neq \emptyset$ est donc déterminé par la valeur du couple $(\chi(X(\mathbf{R})), b^*(X(\mathbf{R})); \mathbf{Z}_2)$ à l'exception du couple $(0, 8)$ pour lequel on a deux types topologiques réalisés par des \mathbf{R} -surfaces K3 :

$$\mathbf{T}^2 \sqcup \mathbf{T}^2 \quad \text{et} \quad \mathbf{S}_2 \sqcup \mathbf{S}^2.$$

Cycles algébriques sur les surfaces K3. — Dans l'espace des modules des surfaces K3 complexes, les classes d'isomorphismes complexes de surfaces ayant un nombre de Picard ρ donné forment une réunion dénombrable de sous-espaces de dimension $20 - \rho$ (voir par exemple [GH78, page 594]). On se propose de démontrer une propriété similaire pour les \mathbf{R} -surfaces K3 : dans l'espace des modules des \mathbf{R} -surfaces K3 vérifiant certaines conditions qui seront explicitées plus loin, les classes d'isomorphismes réels de surfaces K3 telles que $b_{\text{alg}}^1 \geq k$ forment une réunion dénombrable de sous-espaces de dimension $20 - k$.

Exemple 4.5.9 (Surface quartique de \mathbf{P}^3 telle que $b_{\text{alg}}^1 = 0$)

Soit la surface $\mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^1$ réalisée comme quartique de $\mathbf{P}^3(\mathbf{R})$, par exemple comme lieu réel de la surface $X \subset \mathbf{P}^3(\mathbf{C})$ d'équation (à coefficients réels) $16(x_1^2 + x_2^2) - (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 3x_0^2)^2 = 0$ de l'exemple 2.6.38. La surface en question possède des singularités non réelles. En perturbant les paramètres de façon que le lieu réel reste difféomorphe au tore, on peut obtenir une \mathbf{R} -surface générale non singulière X' . On a alors $\rho(X) = 1$ d'après le théorème de Noether, [Del73, 1.2.1], et comme X' est une quartique non singulière, c'est une surface K3. La section hyperplane engendre un cycle algébrique non trivial dans $H^2(G, \text{Pic}(X))$ mais aucun cycle algébrique dans la partie réelle : si

l'intersection du plan et du tore n'est pas vide, elle est constituée d'une réunion de deux cercles homologues ou d'un cercle homologue à 0. Voir [BKS82].

Les surfaces K3 complexes forment une unique famille complexe, voir [X85], mais les surfaces K3 réelles forment 75 familles réelles [DIK00].

Soit (X, σ) une \mathbf{R} -surface, le nombre b_{alg}^1 n'est pas en général invariant par déformation réelle. Si X est une surface K3, on a

$$b_{\text{alg}}^1(X(\mathbf{R}); \mathbf{Z}_2) \leq b^1(X(\mathbf{R}); \mathbf{Z}_2) \leq h^{1,1}(X) = 20 .$$

Théorème 4.5.10. — *Soit (X, σ) une \mathbf{R} -surface K3, qui n'est pas une M -surface. Alors pour tout sous-groupe K de $H^1(X(\mathbf{R}); \mathbf{Z}_2)$, il existe une déformation réelle Y de X et une isométrie*

$$u: H^1(X(\mathbf{R}); \mathbf{Z}_2) \rightarrow H^1(Y(\mathbf{R}); \mathbf{Z}_2)$$

telle que

$$u(K) = H_{\text{alg}}^1(Y(\mathbf{R}); \mathbf{Z}_2) .$$

Lorsque X est une surface K3 générale, on a

$$b_{\text{alg}}^1(X(\mathbf{R}); \mathbf{Z}_2) \leq 1 ,$$

mais grâce au théorème 4.5.10, on peut spécialiser pour imposer n'importe quelle valeur de b_{alg}^1 autorisée par les conditions topologiques :

Corollaire 4.5.11. — *Soit (X, σ) une \mathbf{R} -surface K3, alors :*

1. *Pour tout entier $1 \leq k < b^1(X(\mathbf{R}); \mathbf{Z}_2)$, il existe une déformation réelle Y de X telle que*

$$b_{\text{alg}}^1(Y(\mathbf{R}); \mathbf{Z}_2) = k .$$

2. *Si X n'est pas une M -surface, il existe aussi une déformation réelle Y de X telle que*

$$b_{\text{alg}}^1(Y(\mathbf{R}); \mathbf{Z}_2) = b^1(X(\mathbf{R}); \mathbf{Z}_2) .$$

Pour être complet, mentionnons que pour une M -surface K3, il ne peut exister de déformation réelle vers une surface totalement algébrique car pour une telle surface, l'inégalité $b_{\text{alg}}^1(X(\mathbf{R}); \mathbf{Z}_2) < b^1(X(\mathbf{R}); \mathbf{Z}_2)$ est toujours vraie d'après la proposition suivante :

Proposition 4.5.12. — *Soit (X, σ) une \mathbf{R} -surface kählérienne compacte telle que $H_1(X; \mathbf{Z}_2) = 0$. On a*

$$b_{\text{alg}}^1(X(\mathbf{R}); \mathbf{Z}_2) \leq b^1(X(\mathbf{R}); \mathbf{Z}_2) - (p_g(X) - a)$$

où $a = \frac{1}{2}(b^*(X; \mathbf{Z}_2) - b^*(X(\mathbf{R}); \mathbf{Z}_2))$, de sorte que (X, σ) est une $(M - a)$ -surface (définition 3.3.11).

Démonstration. — Voir [Man97, Proposition 3.2]. □

Démonstration. — On donne ici une idée de la preuve du théorème 4.5.10, pour la preuve complète, voir [Man97]. Soit X une surface K3, on sait ([X85], exposé IV), que $H^2(X; \mathbf{Z})$ muni de la forme induite par le cup-produit est isométrique à un \mathbf{Z} -module libre L muni d'une forme bilinéaire entière symétrique non dégénérée paire Q de signature $(3, 19)$. Soit $f: H^2(X; \mathbf{Z}) \rightarrow L$ une isométrie. On dit que le couple (X, f) est une *surface K3 marquée*. On considère la décomposition de Hodge (voir l'appendice D)

$$H^2(X, \mathbf{C}) = H^{2,0}(X) \oplus H^{1,1}(X) \oplus H^{0,2}(X).$$

Ici, on a $h^{2,0} = \dim H^{2,0}(X) = 1$ et $h^{1,1} = \dim H^{1,1}(X) = 20$. Soit (X, f) une surface K3 marquée. On considère $P \subset L_{\mathbf{R}} = L \otimes \mathbf{R}$ l'image par $f_{\mathbf{R}}$ du sous-espace $H^2(X; \mathbf{R}) \cap (H^{2,0}(X) \oplus H^{0,2}(X))$ de $H^2(X; \mathbf{R})$. Du fait que $H^{2,0}(X)$ est de dimension complexe 1, P est un 2-plan de $L_{\mathbf{R}}$. On choisit une orientation de P de telle sorte que pour toute 2-forme holomorphe $\omega \in H^{2,0}(X)$, la base $(\Re(\omega), \Im(\omega))$ soit directe. Ce plan orienté P est la *période* de la surface K3 marquée (X, f) .

Soit (X, σ) une \mathbf{R} -surface K3, la structure réelle induit une involution σ de (L, Q) . Pour simplifier, considérons le cas où X n'est pas une M -surface et prenons $K = H^1(X(\mathbf{R}); \mathbf{Z})$. Dans l'esprit des travaux de Nikulin [Nik83], on montre qu'il existe dans ce cas un sous-module primitif $M \subset L^{-\sigma}$ dont le quotient $M/((1 - \sigma)L \cap M)$ est de rang $b^1(X(\mathbf{R}); \mathbf{Z}_2)$ et dont l'orthogonal $M_{\mathbf{R}}^{\perp}$ rencontre le cône des périodes des surfaces K3 réelles déformations équivalentes à X . Pour une surface K3 réelle (Y, g) dont la période est orthogonale à M , on a alors $g^{-1}(M) \subset H_{\text{alg}}^2(Y; \mathbf{Z})$ d'après le théorème de Lefschetz sur les $(1, 1)$ -cycles, voir le théorème D.9.3.

Soit $\alpha \in g^{-1}(M)$. Par construction, α est anti-invariante pour la structure réelle de Y , et comme Y est simplement connexe, elle est représentable par un diviseur réel. La première classe de Chern induit alors un isomorphisme $\text{Pic}(X)^{\sigma} \rightarrow H_{\text{alg}}^2(X; \mathbf{Z})^{-\sigma}$. Finalement, on montre que $H^1(Y(\mathbf{R}); \mathbf{Z}_2)$ est égal à $\varphi \circ c_1^{-1} \circ g^{-1}(M)$. □

Surfaces d'Enriques. —

Définition 4.5.13. — Soit X une surface analytique complexe compacte non singulière. Alors X est une *surface d'Enriques* si $q(X) = 0$, $K_X \not\sim 0$ et

$2K_X \sim 0$. Une **R**-surface d'Enriques est une **R**-surface (X, σ) telle que X est une surface d'Enriques.

Remarque 4.5.14. — Contrairement aux surfaces K3, toutes les surfaces d'Enriques sont projectives.

Proposition 4.5.15. — Soit X une surface d'Enriques. Alors X est une surface projective, minimale, telle que $\kappa(X) = 0$ et $p_g(X) = 0$.

Démonstration. — Voir [BHPVdV04, Chapitre VIII]. □

Il y a 87 types topologiques de **R**-surfaces d'Enriques [DK96b]. Le théorème suivant complète la classification initiée par Nikulin dans [Nik96].

Dans l'énumération ci-dessous, $X(\mathbf{R})$ désigne le lieu réel d'une **R**-surface d'Enriques réalisant le type donné. Rappelons que par définition d'une $(M - a)$ -surface, les nombres de Betti à coefficients modulo 2 satisfont la relation $2a = \sum_{i=0}^4 b_i(X; \mathbf{Z}_2) - \sum_{i=0}^2 b_i(X(\mathbf{R}); \mathbf{Z}_2)$.

Théorème 4.5.16 (Degtyarev, Kharlamov 1996)

Il y a 87 types topologiques de **R**-surfaces d'Enriques. Chacun d'entre eux peut être obtenu par simplification de Morse topologique (définition 4.3.31) à partir de l'un des 22 types extrémaux énumérés ci-dessous. Réciproquement, à l'exception des deux types $6\mathbf{S}^2$ et $\mathbf{T}^2 \sqcup 5\mathbf{S}^2$, n'importe quel type obtenu de cette façon est réalisé par une **R**-surface d'Enriques.

Les 22 types extrémaux sont :

1. M -surfaces,

$$(a) \chi(X(\mathbf{R})) = 8, \\ 4\mathbf{RP}^2 \sqcup 2\mathbf{S}^2, \quad \mathbf{V}_3 \sqcup \mathbf{RP}^2 \sqcup 4\mathbf{S}^2, \quad \mathbf{V}_4 \sqcup 5\mathbf{S}^2, \\ \mathbf{K}^2 \sqcup 2\mathbf{RP}^2 \sqcup 3\mathbf{S}^2, \quad 2\mathbf{K}^2 \sqcup 4\mathbf{S}^2, \quad \mathbf{K}^2 \sqcup \mathbf{T}^2 \sqcup 4\mathbf{S}^2,$$

$$(b) \chi(X(\mathbf{R})) = -8, \\ \{\mathbf{V}_l \sqcup \mathbf{V}_{12-l}\}_{l=1\dots 6}, \quad \mathbf{V}_{10} \sqcup \mathbf{T}^2;$$

2. $(M - 2)$ -surfaces avec $\chi(X(\mathbf{R})) = 0$,

$$\mathbf{V}_4 \sqcup 2\mathbf{RP}^2, \quad \mathbf{V}_6 \sqcup 2\mathbf{S}^2, \quad \mathbf{V}_3 \sqcup \mathbf{K}^2 \sqcup \mathbf{RP}^2, \quad \mathbf{V}_4 \sqcup \mathbf{T}^2 \sqcup \mathbf{S}^2, \\ \mathbf{V}_5 \sqcup \mathbf{RP}^2 \sqcup \mathbf{S}^2, \quad 2\mathbf{V}_3 \sqcup \mathbf{S}^2, \quad \mathbf{V}_4 \sqcup \mathbf{K}^2 \sqcup \mathbf{S}^2, \quad 2\mathbf{K}^2 \sqcup \mathbf{T}^2;$$

3. Paire de tores, $\mathbf{T}^2 \sqcup \mathbf{T}^2$.

Démonstration. — Voir [Nik96, DK96b, DK96a]. □

Cycles algébriques sur les surfaces d'Enriques. — Les surfaces d'Enriques forment une unique famille complexe mais plusieurs centaines de familles réelles, voir [DIK00]. Soit (X, σ) une \mathbf{R} -surface d'Enriques, comme $b^2(X) = 10$ et $b^1(X; \mathbf{Z}_2) = 1$, on a $b_{\text{alg}}^1(X(\mathbf{R}); \mathbf{Z}_2) \leq b^1(X(\mathbf{R}); \mathbf{Z}_2) \leq 12$ d'après l'inégalité (3.8) du théorème 3.3.6.

Contrairement au cas des surfaces K3, le nombre b_{alg}^1 est invariant par déformation réelle. Le résultat ci-dessous caractérise topologiquement le groupe des cycles algébriques d'une \mathbf{R} -surface d'Enriques.

Théorème 4.5.17. — Soit (X, σ) une \mathbf{R} -surface d'Enriques avec $X(\mathbf{R}) \neq \emptyset$. Si toutes les composantes connexes de la partie réelle $X(\mathbf{R})$ sont orientables, on a

$$H_{\text{alg}}^1(X(\mathbf{R}); \mathbf{Z}_2) = H^1(X(\mathbf{R}); \mathbf{Z}_2).$$

Dans le cas contraire,

$$\dim H_{\text{alg}}^1(X(\mathbf{R}); \mathbf{Z}_2) = \dim H^1(X(\mathbf{R}); \mathbf{Z}_2) - 1.$$

Corollaire 4.5.18. — Une \mathbf{R} -surface d'Enriques (X, σ) est totalement algébrique si et seulement si $X(\mathbf{R})$ est vide ou orientable.

Corollaire 4.5.19. — Il existe des familles réelles de surfaces d'Enriques pour lesquelles on a $b_{\text{alg}}^1(X(\mathbf{R}); \mathbf{Z}_2) < b^1(X(\mathbf{R}); \mathbf{Z}_2)$ pour toutes les surfaces de la famille. En particulier, lorsque X est une surface d'Enriques réelle de premier nombre de Betti maximal, $b^1(X(\mathbf{R}); \mathbf{Z}_2) = 12$, il n'existe aucune déformation réelle de X qui soit totalement algébrique.

Démonstration. — On donne ici, la preuve de la première partie du théorème 4.5.17, pour la preuve complète, voir [MvH98]. Pour des raisons techniques, on effectue la preuve au niveau de l'homologie, c'est-à-dire qu'on va montrer l'équivalence :

$$H_1^{\text{alg}}(X(\mathbf{R}); \mathbf{Z}_2) = H_1(X(\mathbf{R}); \mathbf{Z}_2) \iff X(\mathbf{R}) \text{ est orientable.}$$

Le diviseur canonique d'une surface d'Enriques étant de 2-torsion, on déduit du théorème 4.5.21 ci-dessous la condition nécessaire. C'est la réciproque qui est délicate. Si Y est une surface K3, la surface complexe Y est simplement connexe et on a un morphisme surjectif

$$H_2(Y; \mathbf{Z})^{-\sigma} \longrightarrow H_1(Y(\mathbf{R}); \mathbf{Z}_2).$$

Ce morphisme n'est pas bien défini pour une surface d'Enriques X car son groupe fondamental est $\pi_1(X) = \mathbf{Z}_2$. En revanche, on peut toujours définir un

morphisme à partir de l'homologie équivariante, voir [MvH98, Sec. 4],

$$\alpha^X : H_2(X; G, \mathbf{Z}(1)) \longrightarrow H_1(X(\mathbf{R}); \mathbf{Z}_2)$$

dont l'image est précisément le groupe $H_1^{\text{alg}}(X(\mathbf{R}); \mathbf{Z}_2)$ lorsque X est une surface d'Enriques. Une surface d'Enriques est le quotient d'une surface K3 par une involution holomorphe sans point fixe, voir [Bea78, Proposition VIII.17]. Notons donc Y une surface K3 complexe dont X est le quotient par une involution holomorphe sans point fixe η . La structure réelle de X se relève naturellement en deux structures réelles σ_1 et $\sigma_2 = \eta \circ \sigma_1$ sur Y qui commutent entre elles, voir [Sil89, Theorem A_{8.6}]. La partie réelle $X(\mathbf{R})$ est revêtue par la réunion des parties réelles $Y_1(\mathbf{R}) = Y^{\sigma_1}$ et $Y_2(\mathbf{R}) = Y^{\sigma_2}$. Pour $j \in \{1, 2\}$, on note X_j la réunion disjointe des composantes de $X(\mathbf{R})$ revêtues par $Y_j(\mathbf{R})$. On obtient ainsi une décomposition naturelle de la partie réelle d'une surface d'Enriques en « moitiés »

$$X(\mathbf{R}) = X_1 \sqcup X_2 .$$

Rappelons que toutes les composantes connexes du lieu réel d'une surface K3 sont orientables. Soit M une composante connexe d'une moitié X_j . Si M est orientable, M est revêtue par deux composantes de $Y_j(\mathbf{R})$ qui sont échangées par η . Si M est non orientable, M est revêtue par une seule composante de $Y_j(\mathbf{R})$ qui est alors le revêtement d'orientation de M . On en tire un morphisme

$$H_1(Y_1(\mathbf{R}); \mathbf{Z}_2) \oplus H_1(Y_2(\mathbf{R}); \mathbf{Z}_2) \longrightarrow H_1(X(\mathbf{R}); \mathbf{Z}_2)$$

qui est surjectif lorsque $X(\mathbf{R})$ est orientable. Ce morphisme conduit à un diagramme commutatif

$$(4.15) \quad \begin{array}{ccc} H_2(Y_1; G, \mathbf{Z}(1)) \oplus H_2(Y_2; G, \mathbf{Z}(1)) & \longrightarrow & H_2(X; G, \mathbf{Z}(1)) \\ \alpha^{Y_1} \oplus \alpha^{Y_2} \downarrow & & \alpha^X \downarrow \\ H_1(Y_1(\mathbf{R}); \mathbf{Z}_2) \oplus H_1(Y_2(\mathbf{R}); \mathbf{Z}_2) & \longrightarrow & H_1(X(\mathbf{R}); \mathbf{Z}_2) \end{array}$$

Les morphismes α^{Y_1} et α^{Y_2} sont surjectifs parce que Y est simplement connexe et finalement α^X est surjective lorsque $X(\mathbf{R})$ est orientable. □

On utilise aussi la décomposition du lieu réel en moitiés pour caractériser la Galois-Maximalité, voir la définition 3.6.5, des surfaces d'Enriques.

Théorème 4.5.20. — *Soit (X, σ) une \mathbf{R} -surface d'Enriques de lieu réel $X(\mathbf{R}) = X_1 \sqcup X_2$ non vide.*

1. Supposons que les deux moitiés X_1 et X_2 soient non vides. Alors X est Galois-Maximale. De plus X est \mathbf{Z} -Galois-Maximale si et seulement si $X(\mathbf{R})$ est non orientable.
2. Supposons que l'une des moitiés X_1 ou X_2 soit vide. Alors X est Galois-Maximale si et seulement si $X(\mathbf{R})$ est non orientable. De plus X est \mathbf{Z} -Galois-Maximale si et seulement si $X(\mathbf{R})$ possède au moins une composante de caractéristique d'Euler impaire.

Démonstration. — Voir [MvH98]. □

Tous les cas de Galois-Maximalité, voir l'exemple 3.6.14, sont réalisés par des surfaces d'Enriques. En effet, par inspection de la preuve du théorème 4.5.16, voir [DK96b, §5] ou [DK96a], on constate qu'il existe des exemples de surfaces d'Enriques pour tous les cas énumérés dans le théorème précédent.

Théorème 4.5.21. — Soit $d \geq 2$ un entier. Une \mathbf{R} -surface algébrique X dont le diviseur canonique K_X est de d -torsion ne peut être totalement algébrique que si sa partie réelle $X(\mathbf{R})$ est vide ou orientable.

Preuve. — Soit X une \mathbf{R} -surface totalement algébrique, c'est-à-dire telle que

$$H_{\text{alg}}^1(X(\mathbf{R}); \mathbf{Z}_2) = H^1(X(\mathbf{R}); \mathbf{Z}_2).$$

On utilise les propriétés (3.38) de $\varphi_X: \text{Pic}(X)^\sigma \rightarrow H_{\text{alg}}^1(X(\mathbf{R}); \mathbf{Z}_2)$ vues dans la proposition 3.7.16. Soit D un diviseur dont la classe dans le groupe de Néron-Severi $\text{NS}(X)$ possède un multiple trivial, alors $(D \cdot D') = 0$ pour tout diviseur D' . Lorsque D est réel, on a $\varphi_X(D) = 0$ dans $H^1(X(\mathbf{R}); \mathbf{Z}_2)$. En effet, par hypothèse, toute classe de cohomologie $u \in H^1(X(\mathbf{R}); \mathbf{Z}_2)$ est l'image par φ_X d'un diviseur réel D' donc $\varphi_X(D) \cdot u = 0$. Comme la forme intersection est non dégénérée sur $H^1(X(\mathbf{R}); \mathbf{Z}_2)$, on a $\varphi_X(D) = 0$. Maintenant, si $X(\mathbf{R}) \neq \emptyset$, on peut supposer K_X réel d'après le théorème 2.6.32. Comme K_X est de torsion dans $\text{NS}(X)$, on a finalement $\varphi_X(K_X) = 0$ d'où $w_1(X(\mathbf{R})) = 0$ et $X(\mathbf{R})$ est orientable. □

Surfaces abéliennes. — Une étude détaillée des \mathbf{R} -variétés abéliennes se trouve dans les travaux de Comessatti [Com25, Com26]. Leurs espaces de modules et leurs compactifications sont décrits dans [Sil89, Chap IV] et [Sil92].

Définition 4.5.22. — Un tore complexe de dimension g est un quotient de \mathbf{C}^g par un sous- \mathbf{Z} -module $\Lambda \subset \mathbf{C}^g$ de rang maximum $2g$ (un réseau). Une variété abélienne est un tore complexe qui est projectif, c'est-à-dire un tore

complexe qui possède un diviseur ample. Un **R**-tore complexe est un tore complexe muni d'une structure réelle. Une **R**-surface abélienne est donc un tore complexe de dimension 2 muni d'une structure réelle et admettant un plongement holomorphe dans un espace projectif (plongement que l'on peut supposer équivariant d'après le théorème 2.6.44).

Remarque 4.5.23. — Les tores complexes sont kählériens car ils héritent de la métrique de Kähler de \mathbf{C}^g . Par contre, à l'instar des surfaces K3, les tores complexes de dimension 2 (et plus) ne sont pas tous projectifs.

Exemple 4.5.24 (Tores complexes associés à une variété)

La variété de Picard $\text{Pic}^0(X)$ d'une variété kählérienne compacte X d'irrégularité $q > 0$ est un tore complexe de dimension q , voir la définition D.6.6. C'est une variété abélienne si X est projective d'après la proposition D.6.7. Si X est un tore complexe, $\text{Pic}^0(X)$ est isomorphe à X .

La variété d'Albanese $\text{Alb}(X)$ d'une variété kählérienne compacte X d'irrégularité $q > 0$ est un tore complexe de dimension q , voir la définition D.6.10. C'est une variété abélienne si X est projective, voir [Voi02, Corollaire 12.12]. Si X est un tore complexe, $\text{Alb}(X)$ est isomorphe à X .

La jacobienne $\text{Jac}(C)$ d'une courbe complexe compacte C de genre g est une variété abélienne de dimension g , voir la définition E.4.1. Si C est une courbe de genre 1, $\text{Jac}(C)$ est une courbe isomorphe à C .

Proposition 4.5.25. — *Soit X une surface abélienne. Alors X est une surface projective, minimale, telle que $\kappa(X) = 0$, $p_g(X) = 1$, $q(X) = 2$ et $K_X \sim 0$.*

Démonstration. — Voir le théorème 4.5.1 et [Bea78, Liste VI.20 et théorème VIII.2]. □

Théorème 4.5.26. — *Il y a 4 types topologiques de **R**-surfaces abéliennes.*

$$\emptyset, \quad \mathbf{T}^2, \quad 2\mathbf{T}^2, \quad 4\mathbf{T}^2.$$

Démonstration. — Voir [Sil89, Chapter IV]. □

Cycles algébriques sur les surfaces abéliennes. — À l'instar des surfaces K3, les surfaces abéliennes complexes forment une unique famille complexe, les **R**-surfaces abéliennes se répartissent en plusieurs familles réelles et b_{alg}^1 n'est pas invariant par déformation réelle.

Soit (X, σ) une **R**-surface abélienne. D'après le théorème 4.5.26, on a $b^1(X(\mathbf{R})) \leq 8$. Par ailleurs, en utilisant notamment [Kuc96, Theorem 2.1], on a aussi $b_{\text{alg}}^1(X(\mathbf{R})) \leq 5$.

A l'aide de techniques comparables au cas des surfaces K3, on peut mettre en évidence des obstructions de nature topologique et montrer qu'en dehors de ces obstructions, on peut toujours déformer une surface abélienne pour réaliser un $b_{\text{alg}}^1(X(\mathbf{R}))$ donné.

On peut montrer en particulier que la partie réelle d'une surface abélienne totalement algébrique est nécessairement connexe ou vide, voir [Hui94], et qu'une \mathbf{R} -surface abélienne de partie réelle connexe peut être déformée vers une \mathbf{R} -surface abélienne réelle totalement algébrique.

Proposition 4.5.27. — Soit X une \mathbf{R} -surface abélienne avec un point réel. On a l'implication :

$$H_{\text{alg}}^1(X(\mathbf{R}); \mathbf{Z}_2) = H^1(X(\mathbf{R}); \mathbf{Z}_2) \implies X(\mathbf{R}) \approx \mathbf{T}^2.$$

Surfaces bielliptiques. —

Définition 4.5.28. — Soit X une surface analytique complexe compacte non singulière. Alors X est une *surface bielliptique*⁽¹¹⁾ s'il existe deux courbes elliptiques E et F et un groupe fini H agissant par translations sur F et par automorphismes sur E tels que $E/H = \mathbf{P}^1$ et tel que X est le quotient du produit $E \times F$ par l'action produit de H . Une *\mathbf{R} -surface bielliptique* est une \mathbf{R} -surface (X, σ) telle que X est une surface bielliptique.

Proposition 4.5.29. — Soit X une surface bielliptique. Alors X est une surface projective, minimale, telle que $\kappa(X) = 0$, $p_g(X) = 0$, $q(X) = 1$ et $m_0 K_X \sim 0$ pour $m_0 \in \{2, 3, 4, 6\}$.

Démonstration. — Voir le théorème 4.5.1 et [Bea78, liste VI.20 et théorème VIII.2]. \square

Pour une surface bielliptique X , l'*application d'Albanese*, voir la définition D.6.13,

$$\alpha: X = (E \times F)/H \rightarrow \text{Alb}(X) = F/H$$

est une fibration elliptique localement triviale non triviale. Les fibres de α sont toutes isomorphes à E sur \mathbf{C} . Lorsque X est une \mathbf{R} -surface, la fibration d'Albanese α est une \mathbf{R} -fibration et les courbes F/H et E sont des \mathbf{R} -courbes elliptiques. Le lieu réel d'une \mathbf{R} -courbe elliptique non singulière est soit vide, soit formé d'un ou deux ovales. Il est immédiat que le nombre de composantes

11. Les surfaces bielliptiques sont classiquement appelées surfaces *hyperelliptiques*, nous renvoyons à [Bea78, VI.19] pour une justification de la terminologie utilisée ici.

connexes du lieu réel de X vérifie $0 \leq \#\pi_0 X(\mathbf{R}) \leq 4$ et que chaque composante connexe est homéomorphe à un tore \mathbf{T}^2 ou à une bouteille de Klein \mathbf{K}^2 . On arrive ainsi à quinze types topologiques possibles *a priori* pour $X(\mathbf{R})$. Comme corollaire à leur description de l'espace des modules des \mathbf{R} -surfaces bielliptiques, F. Catanese et P. Frediani [CF03] ont déterminé les onze types topologiques effectivement réalisables. Si α admet une section réelle, alors seuls sept types topologiques sont réalisables.

Théorème 4.5.30 (Catanese, Frediani 2003). — *Il y a 11 types topologiques de \mathbf{R} -surfaces bielliptiques.*

1. \emptyset , \mathbf{T}^2 , $2\mathbf{T}^2$, $3\mathbf{T}^2$, $4\mathbf{T}^2$,
2. \mathbf{K}^2 , $2\mathbf{K}^2$, $3\mathbf{K}^2$, $4\mathbf{K}^2$,
3. $\mathbf{T}^2 \sqcup \mathbf{K}^2$, $\mathbf{T}^2 \sqcup 2\mathbf{K}^2$.

Démonstration. — Voir [CF03]. □

Théorème 4.5.31. — *Il y a 7 types topologiques de \mathbf{R} -surfaces bielliptiques dont la fibration d'Albanese admet une \mathbf{R} -section.*

1. \mathbf{T}^2 , $2\mathbf{T}^2$, $3\mathbf{T}^2$, $4\mathbf{T}^2$,
2. $2\mathbf{K}^2$, $3\mathbf{K}^2$, $4\mathbf{K}^2$.

Démonstration. — Voir [Man03, Théorème 2.3]. □

Cycles algébriques sur les surfaces bielliptiques. — Le diviseur canonique K_X d'une surface bielliptique est de torsion, on note $d_X \in \{2, 3, 4, 6\}$ cette torsion.

Il y a exactement sept familles complexes de surfaces bielliptiques et pour chacune d'entre elles, plusieurs familles réelles, voir [CF03]. Le nombre b_{alg}^1 est encore invariant par déformation et l'article [Man03] contient une caractérisation topologique des \mathbf{R} -surfaces bielliptiques totalement algébriques.

Théorème 4.5.32. — *Soit X une \mathbf{R} -surface bielliptique avec un point réel.*

1. *Si $H_{\text{alg}}^1(X(\mathbf{R}); \mathbf{Z}_2) = H^1(X(\mathbf{R}); \mathbf{Z}_2)$, alors $X(\mathbf{R})$ est homéomorphe à un tore. Si de plus d_X est pair, α admet une section réelle.*
2. *Supposons que $X(\mathbf{R})$ soit homéomorphe à un tore. Si d_X est impair ou si α admet une section réelle, alors*

$$H_{\text{alg}}^1(X(\mathbf{R}); \mathbf{Z}_2) = H^1(X(\mathbf{R}); \mathbf{Z}_2) .$$

Démonstration. — On donne ici une preuve partielle. Pour la preuve complète, voir [Man03]. Soit (X, σ) une \mathbf{R} -surface bielliptique. On note

$$\pi: X \rightarrow E/H \simeq \mathbf{P}^1$$

la deuxième fibration elliptique dont les seules fibres singulières sont des fibres multiples $m_t L_t$ où L_t est une courbe elliptique non singulière. Le groupe de Néron-Severi $\text{NS}(X)$ est engendré par une fibre X_x de α et par les courbes L_t réduites des fibres multiples de π . Soient $m_t L_t$ et $m_{t'} L_{t'}$ deux fibres multiples réelles de π , notons d le pgcd de m_t et $m_{t'}$. Supposons que $d \geq 2$, le diviseur $D = (m_t/d)L_t - (m_{t'}/d)L_{t'}$ est de d -torsion dans $\text{NS}(X)$. D'après la preuve du théorème 4.5.21, on a alors $\varphi_X(D) = 0$. Quitte à permuter t et t' , on peut supposer que m_t/d est impair et dans ce cas :

$$\varphi_X((m_t/d)L_t) = \varphi_X(L_t) .$$

Se présente donc une alternative : ou bien $\varphi_X(L_t) = \varphi_X(L_{t'})$ ou bien $\varphi_X(L_t) = 0$. En étudiant les sept configurations de fibres multiples possibles, on déduit que l'image par φ_X du sous-groupe de $\text{NS}(X)$ engendré par les courbes L_t réelles est de dimension ≤ 1 .

Supposons maintenant que (X, σ) soit totalement algébrique. Dans ce cas, on a $\varphi_X(\text{Pic}^0(X)^\sigma) = \{0\}$ dans $H_{\text{alg}}^1(X(\mathbf{R}); \mathbf{Z}_2)$ d'après [Kuc96, Th. 2.1]. On en déduit un morphisme

$$\text{NS}(X)^\sigma \rightarrow H_{\text{alg}}^1(X(\mathbf{R}); \mathbf{Z}_2)$$

bien défini sur $\text{NS}(X)^\sigma$ et surjectif sur $H_{\text{alg}}^1(X(\mathbf{R}); \mathbf{Z}_2)$. Ceci nous donne une majoration $\dim H_{\text{alg}}^1(X(\mathbf{R}); \mathbf{Z}_2) \leq 2$. Par hypothèse, la dimension de l'espace $H^1(X(\mathbf{R}); \mathbf{Z}_2)$ vérifie la même inégalité donc $X(\mathbf{R})$ est connexe. Par ailleurs, le diviseur canonique K_X d'une surface bielliptique est de d_X -torsion avec $d_X \in \{2, 3, 4, 6\}$. D'après le théorème 4.5.21, si la partie réelle $X(\mathbf{R})$ est non vide, elle est orientable, et donc finalement, homéomorphe à un tore. Pour la réciproque, voir l'article original [Man03]. \square

Récapitulatif : cycles algébriques si $\kappa \leq 0$. — En regroupant les résultats de cette section pour les surfaces de dimension de Kodaira $\kappa(X) = 0$ et en le vérifiant directement (exercice) pour les surfaces de dimension de Kodaira $\kappa(X) = -\infty$ (d'après [Kuc96, Theorem 2.1], il est alors nécessaire de choisir une involution telle que $\varphi_X(\text{Pic}^0(X)^\sigma) = \{0\}$ dans $H_{\text{alg}}^1(X(\mathbf{R}); \mathbf{Z}_2)$), on constate que lorsque X est une surface algébrique appartenant à l'une des classes suivantes : rationnelle, réglée, abélienne, K3, d'Enriques, on peut toujours trouver une surface algébrique Y dans la même famille complexe que

X et une structure réelle non vide sur Y qui soit totalement algébrique (ceci est vrai aussi pour les surfaces elliptiques régulières, voir le théorème 4.6.16). *A contrario*, il existe deux familles complexes de surfaces bielliptiques qui contiennent des \mathbf{R} -surfaces dont la partie réelle est difféomorphe à un tore mais qui ne sont jamais totalement algébriques :

Théorème 4.5.33. — Soient E, F des courbes elliptiques et H l'un des groupes $\mathbf{Z}_2 \oplus \mathbf{Z}_2$ ou $\mathbf{Z}_4 \oplus \mathbf{Z}_2$. Alors pour toute surface algébrique complexe Y déformation équivalente à la surface bielliptique $X = (E \times F)/H$ et pour toute structure réelle sur Y ayant des points réels, on a

$$H_{\text{alg}}^1(Y(\mathbf{R}); \mathbf{Z}_2) \neq H^1(Y(\mathbf{R}); \mathbf{Z}_2) .$$

Démonstration. — Voir [Man03, Corollaire 3.3]. □

Dans chacune des cinq autres familles complexes de surfaces bielliptiques, il existe une \mathbf{R} -surface X telle que $X(\mathbf{R})$ est homéomorphe à un tore et $H_{\text{alg}}^1(Y(\mathbf{R}); \mathbf{Z}_2) = H^1(Y(\mathbf{R}); \mathbf{Z}_2)$.

Corollaire 4.5.34. — A l'exception des surfaces du théorème 4.5.33, toute famille complexe de surfaces de dimension de Kodaira non positive contient une \mathbf{R} -surface Y avec un point réel telle que $H_{\text{alg}}^1(Y(\mathbf{R}); \mathbf{Z}_2) = H^1(Y(\mathbf{R}); \mathbf{Z}_2)$.

4.6. Surfaces elliptiques ($\kappa \leq 1$)

Définition 4.6.1. — Une surface analytique complexe non singulière X est dite *elliptique* s'il existe une courbe complexe non singulière Δ et une application holomorphe propre et surjective $\pi: X \rightarrow \Delta$ dont la fibre $X_u = \pi^{-1}(u)$ est une courbe non singulière de genre 1 pour presque tout point $u \in \Delta$.

Remarque 4.6.2. — Comme la variété complexe X est non singulière et de dimension 2, toutes les fibres de π sont de dimension 1 (cette équidimensionnalité des fibres n'est plus vérifiée en dimension supérieure, voir [Uen73]). De plus, la propriété de π implique que ses fibres sont compactes et que X est une surface compacte si et seulement si Δ est une courbe compacte.

Certaines surfaces elliptiques sont projectives, et donc algébriques d'après le théorème de Chow D.5.1. La définition dans le cadre algébrique est alors la suivante.

Définition 4.6.3. — Une surface algébrique complexe projective non singulière X est dite *elliptique* s'il existe une courbe algébrique complexe projective

non singulière Δ et une application régulière surjective $\pi: X \rightarrow \Delta$, dont la fibre générale est une courbe algébrique complexe projective non singulière de genre 1.

Remarque 4.6.4. — Par définition, l'image par π de l'ensemble de ses fibres singulières est un fermé de Zariski de Δ , le nombre de fibres singulières π est donc fini.

Définition 4.6.5. — Une \mathbf{R} -surface (X, σ) est *elliptique* s'il existe une \mathbf{R} -fibration elliptique $\pi: X \rightarrow \Delta$, i. e. Δ possède une structure réelle σ_Δ et $\pi \circ \sigma = \sigma_\Delta \circ \pi$.

Remarque 4.6.6 (Définition schématique). — Pour être complet nous donnons la version schématique correspondante. Une *fibration elliptique* sur une surface non singulière géométriquement intègre X est un morphisme fidèlement plat $\pi: X \rightarrow C$ au-dessus d'une courbe non singulière, dont la fibre générique $X_{K(C)}$ est isomorphe à une courbe non singulière de genre 1 au-dessus du corps $K(C)$ des fonctions rationnelles sur C . Une fibre fermée générale $X_{\kappa(c)} = \pi^{-1}(c)$ de π est isomorphe à une courbe non singulière de genre 1 au-dessus du corps résiduel $\kappa(c)$ du point $c \in C$. Une fibre schématique fermée $\pi^{-1}(c)$ non isomorphe à une courbe non singulière de genre 1 sur $\kappa(c)$ est dite *dégénérée*.

Proposition 4.6.7. — Soit X une surface elliptique, alors $\kappa(X) \leq 1$.

Démonstration. — Voir [BHPVdV04, Theorem V.12.5]. □

Proposition 4.6.8. — Soit X une surface analytique complexe compacte non singulière telle que $\kappa(X) = 1$. Alors X est canoniquement muni d'une fibration elliptique qui est l'unique fibration elliptique portée par X .

Démonstration. — Voir [BHPVdV04, § VI.3, case $a(X) = 2, \kappa(X) = 1$]. □

Remarque 4.6.9. — En fait, lorsque $\kappa(X) = 1$, la fibration elliptique est déterminée par le morphisme φ_{mK_X} associé à un multiple du diviseur canonique. En particulier, si (X, σ) est une \mathbf{R} -surface, cette fibration est une \mathbf{R} -fibration d'après la proposition 2.6.31.

Définition 4.6.10. — Une surface analytique complexe compacte non singulière X (resp. une \mathbf{R} -surface (X, σ)) est une *surface elliptique propre* (resp. une *\mathbf{R} -surface elliptique propre*) si $\kappa(X) = 1$.

Une surface algébrique est dite *régulière* ou *d'irrégularité nulle* si $H^1(X, \mathcal{O}_X) = \{0\}$. Lorsque X est une surface elliptique, ceci impose que la courbe de base est de genre 0 et que la fibration admet au moins une fibre singulière. Réciproquement, soit X une surface elliptique $\pi: X \rightarrow \mathbf{P}^1$ telle que π admet au moins une fibre singulière, alors la surface X est d'irrégularité nulle. Rappelons, définition 4.3.16, que la fibration π est *minimale* si aucune de ses fibres ne contient de (-1) -courbe (c'est-à-dire, en généralisant la définition 4.3.2 aux surfaces analytiques non singulières, une courbe rationnelle irréductible non singulière d'auto-intersection -1). Lorsqu'une fibration elliptique relativement minimale $\pi: X \rightarrow \mathbf{P}^1$ admet une section $s: \mathbf{P}^1 \rightarrow X$ on dit que X est une *surface elliptique jacobienne*⁽¹²⁾. Toutes ces définitions ont un sens sur \mathbf{R} , une \mathbf{R} -surface elliptique est une surface elliptique dont le morphisme de fibration commute avec les structures réelles de X et \mathbf{P}^1 et on parlera de \mathbf{R} -surface elliptique jacobienne si π admet une \mathbf{R} -section.

Nous rappelons deux résultats sur les surfaces elliptiques complexes très utiles pour la suite.

Lemme 4.6.11. — *Deux surfaces elliptiques complexes relativement minimales d'irrégularité nulle et sans fibre multiple sont équivalentes par déformation si et seulement si leurs caractéristiques d'Euler holomorphes sont égales.*

Démonstration. — Voir [Kas77]. □

Théorème 4.6.12. — *Deux surfaces elliptiques régulières sans fibre multiple X et Y sont équivalentes par déformation si et seulement si*

1. *les modèles minimaux X' de X et Y' de Y sont équivalents par déformation ;*
2. *$\eta_X = \eta_Y$, où η_Z , $Z = X, Y$ est le nombre minimal d'éclatements nécessaires pour obtenir la surface Z à partir de Z' .*

Démonstration. — Voir [Kod64]. □

Les fibres singulières d'une \mathbf{R} -surface elliptique ont été classifiées par Silhol, voir [Sil84], [Sil89, Chapitre VII]. Le théorème qui suit énumère tous les types topologiques des \mathbf{R} -surfaces elliptiques jacobienes dans chaque famille de déformation complexe de surfaces elliptiques jacobienes complexes.

^{12.} Cette terminologie provient du fait que dans ce cas les fibrations $X \rightarrow \mathbf{P}^1$ et $\text{Jac}(X) \rightarrow \mathbf{P}^1$ sont isomorphes, voir [BHPVdV04, V.9].

Théorème 4.6.13. — Soit $k \geq 1$ un entier naturel. Les types topologiques extrémaux des \mathbf{R} -surfaces elliptiques jacobiniennes d'irrégularité nulle et de caractéristique d'Euler holomorphe $\chi(\mathcal{O}_X) = k$ sont :

1. M -surfaces, $a = k + 4\lambda - 1$, $l = 5k - 4\lambda$, $\lambda = 0, 1, \dots, k$,
 - $\mathbf{S}_l \sqcup a\mathbf{S}^2$, k pair ou
 - $\mathbf{V}_{2l} \sqcup a\mathbf{S}^2$, k impair.
2. $(M - 2)$ -surfaces, $a = k + 4\lambda$, $l = 5k - 4\lambda - 3$, $\lambda = 0, 1, \dots, k - 1$,
 - $\mathbf{S}_l \sqcup a\mathbf{S}^2$, k pair ou
 - $\mathbf{V}_{2l} \sqcup a\mathbf{S}^2$, k impair.
3. $\chi(X(\mathbf{R})) = 0$,
 - paire de tores, $\mathbf{K}^2 \sqcup \mathbf{K}^2$, k pair ou
 - paire de bouteille de Klein, $\mathbf{T}^2 \sqcup \mathbf{T}^2$, k impair.

Soit X une \mathbf{R} -surface elliptique jacobienne de caractéristique d'Euler $\chi(\mathcal{O}_X) = k$. Alors le type topologique de $X(\mathbf{R})$ est le résultat d'une simplification de Morse à partir de l'un des types extrémaux énumérés ci-dessus.

Réciproquement, quel que soit le résultat d'une simplification de Morse à partir de l'un des types extrémaux énumérés ci-dessus, et pourvu que le nombre de Betti total soit supérieur ou égal à 2, il existe une \mathbf{R} -surface elliptique jacobienne X de caractéristique d'Euler $\chi(\mathcal{O}_X) = k$ dont c'est le type topologique de la partie réelle.

Démonstration. — Voir [BM07]. □

Remarquons que dans la définition de surface jacobienne, nous avons supposé que la fibration elliptique est relativement minimale. En fait l'analogie du théorème 4.6.13 sans cette hypothèse, c'est-à-dire la classification des types topologiques des \mathbf{R} -surfaces elliptiques d'irrégularité nulle avec \mathbf{R} -sections et contenues dans une famille de déformations complexes donnée peut être directement déduit du théorème 4.6.13. En effet, d'après le théorème 4.6.12, deux surfaces elliptiques complexes d'irrégularité nulle et sans fibre multiple sont équivalentes par déformation si et seulement si leurs caractéristiques d'Euler holomorphes sont égales et leurs fibrés canoniques ont même degré.

Pour réaliser un type topologique au sein d'une famille complexe donnée, disons pour $k = \chi(\mathcal{O}_X)$ and $K_X^2 = -m < 0$, considérons une surface elliptique jacobienne Y de caractéristique d'Euler holomorphe k . Alors par définition, $K_Y^2 = 0$. Soit X la surface obtenue en éclatant un ensemble de m

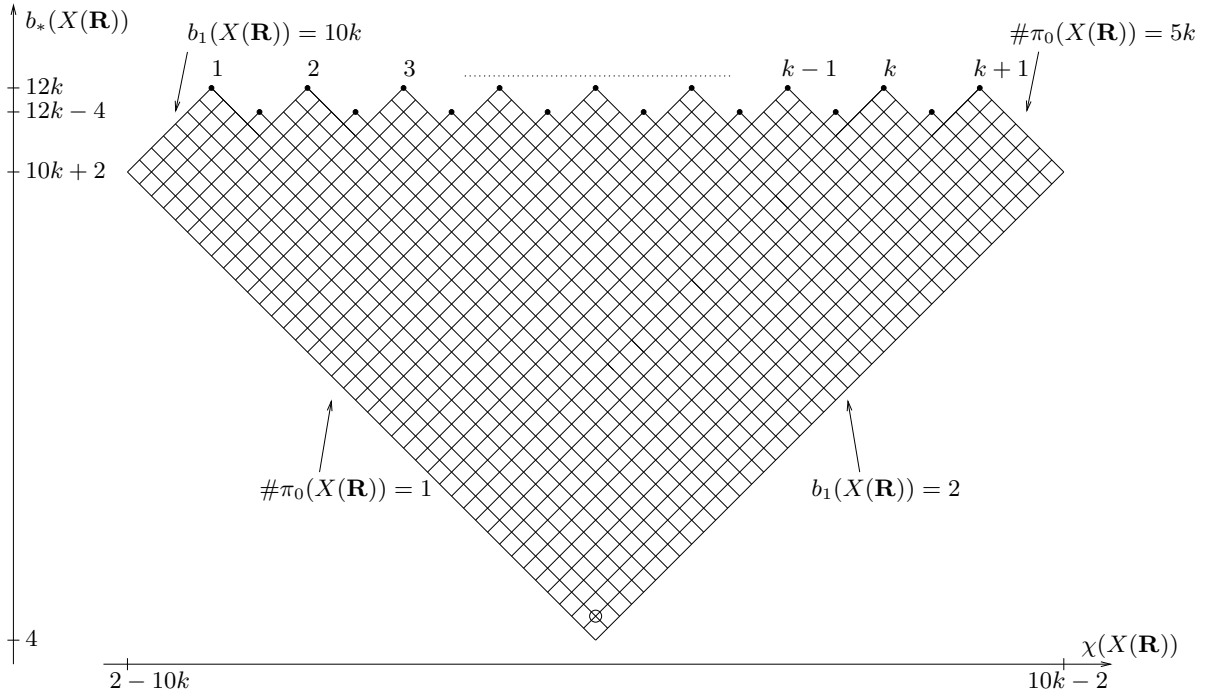


FIGURE 4.12. Types topologiques des surfaces elliptiques jacobiniennes réelles régulières de caractéristique d'Euler holomorphe k .

points globalement fixe par la structure réelle. Alors $K_X^2 = -m$. Chaque éclatement centré en un point réel produit une somme connexe avec un \mathbf{RP}^2 , voir l'exemple 4.2.18. Réciproquement, tout type topologique d'une surface elliptique réelle d'irrégularité nulle et admettant une section réelle peut être obtenue de cette façon.

Cycles algébriques sur les surfaces elliptiques telles que $q = 0$. — Contrairement aux surfaces de dimension de Kodaira nulle : K3, abéliennes, Enriques, bielliptiques, il existe une infinité de familles complexes de surfaces elliptiques régulières et pour chaque famille complexe, plusieurs familles réelles.

Il est en général assez difficile de trouver, dans une famille donnée de surfaces complexes, des surfaces algébriques réelles avec un « grand » premier nombre de Betti $b^1(X(\mathbf{R}); \mathbf{Z}_2)$. Par exemple, on ne sait toujours pas s'il existe une surface de degré 5 dans $\mathbf{P}^3(\mathbf{R})$ avec un premier nombre de Betti égal à 47 (47 est un majorant connu pour ces surfaces), voir la section 4.7.

Proposition 4.6.14 (Kharlamov). — Une \mathbf{R} -surface elliptique (X, σ) régulière et sans fibre multiple, vérifie l'inégalité de Ragsdale-Viro

$$(4.16) \quad b^1(X(\mathbf{R}); \mathbf{Z}_2) \leq h^{1,1}(X) .$$

Ce résultat et l'idée de sa preuve nous ont été communiqués par V. Kharlamov en 1997. Nous n'en connaissons pas de version publiée autre que [AM08], la voici reproduite.

Preuve de 4.6.14. — Soit $b_*(X(\mathbf{R}); \mathbf{Z}_2) = \sum_{k=0}^k b_k(X(\mathbf{R}); \mathbf{Z}_2)$ et $b_*(X; \mathbf{Z}_2) = \sum_{k=0}^{2k} b_k(X; \mathbf{Z}_2)$. Dans le cas où $\pi: X \rightarrow \mathbf{P}^1$ n'admet pas de fibres multiples on vérifie immédiatement, en utilisant par exemple la classification des fibres singulières réelles, voir [Sil89, Chapitre VII], que

$$b_1(X(\mathbf{R}); \mathbf{Z}_2) \leq b_1(\text{Jac}(X)(\mathbf{R}); \mathbf{Z}_2)$$

où $\text{Jac}(X) \rightarrow \mathbf{P}^1$ est la fibration jacobienne associée à $X \rightarrow \mathbf{P}^1$, voir [BHPVdV04, V.9]. Par construction, cette fibration est une surface elliptique réelle avec section réelle telle que

$$h^{1,1}(\text{Jac}(X)) = h^{1,1}(X) .$$

Nous supposerons donc dans la suite que π admet une section réelle sans perdre en généralité. La structure réelle σ induit une involution, que l'on note encore σ , sur $H_2(X, \mathbf{Z})$. Considérons les invariants homologiques suivants :

Le rang du sous-module invariant par σ

$$r_2 = \text{rg } H_2(X, \mathbf{Z})^\sigma = \text{rg } \ker(1 - \sigma)$$

et la caractéristique de Comessatti

$$\lambda = \text{rg } ((1 + \sigma)H_2(X, \mathbf{Z})) = \text{rg } \text{Im}(1 + \sigma) .$$

Comme la fibration $\pi: X \rightarrow \mathbf{P}^1$ admet une section, elle n'admet pas de fibres multiples et les nombres de Betti $b_1(X)$ et $b_3(X)$ sont nuls. D'après le théorème 3.6.11, la surface (X, σ) est donc *Galois-Maximale* et de ce fait (voir aussi le corollaire 3.6.12), la caractéristique de Comessatti correspond à

$$2\lambda = b_*(X; \mathbf{Z}_2) - b_*(X(\mathbf{R}); \mathbf{Z}_2)$$

et le premier nombre de Betti de $X(\mathbf{R})$ à

$$(4.17) \quad b_1(X(\mathbf{R}); \mathbf{Z}_2) = b_2(X) - r_2 - \lambda .$$

Si aucune fibre singulière de π n'est réelle, $X(\mathbf{R})$ est la réunion de deux tores ou de deux bouteilles de Klein car π est munie d'une section réelle. Dans ce cas, l'inégalité (4.16) est vérifiée. Si π admet au moins une fibre singulière réelle, $X(\mathbf{R})$ possède une seule composante connexe non simplement

connexe et un nombre fini d'autres composantes qui sont toutes homéomorphes à des sphères. Notons s le nombre de composantes sphériques. La somme des nombres de Betti de $X(\mathbf{R})$ est alors $b_*(X(\mathbf{R}); \mathbf{Z}_2) = 2 + 2s + b_1(X(\mathbf{R}); \mathbf{Z}_2)$ et la caractéristique de Comessatti devient

$$(4.18) \quad \lambda = r_2 - 2s .$$

Du lemme 4.4.17 et du lemme 4.4.19, on déduit que s minore la dimension de la partie invariante de $H^{1,1}(X)$. Comme par ailleurs, $\sigma(H^{2,0}(X)) = H^{0,2}(X)$ d'après le lemme D.3.17 et $h^{2,0}(X) = h^{0,2}(X)$, on en déduit que r_2 est soumis à la minoration

$$h^{2,0}(X) + s \leq r_2 .$$

De l'équation (4.18), nous tirons $h^{2,0}(X) - s \leq \lambda$ et l'égalité (4.17) nous permet de conclure :

$$b_1(X(\mathbf{R}); \mathbf{Z}_2) \leq b_2(X) - 2h^{2,0}(X) .$$

□

Pour chaque famille complexe de surface elliptique régulière sans fibre multiple, toute \mathbf{R} -surface (X, σ) satisfait $b^1(X(\mathbf{R}); \mathbf{Z}_2) \leq h^{1,1}(X)$, voir la proposition 4.6.14. Nous montrons dans la suite que dans chaque famille complexe de surfaces elliptiques régulières sans fibre multiple, il existe au moins une sous-famille de \mathbf{R} -surfaces telle que $b^1 = h^{1,1}$. De plus, dans chacune des familles réelles trouvées, il existe au moins une \mathbf{R} -surface telle que $b_{\text{alg}}^1(X(\mathbf{R}); \mathbf{Z}_2) = b^1(X(\mathbf{R}); \mathbf{Z}_2)$. Ces deux résultats sont obtenus à l'aide d'une même construction. On montre ainsi que l'inégalité de Ragsdale-Viro $b^1(X(\mathbf{R}); \mathbf{Z}_2) \leq h^{1,1}(X)$ est optimale pour toutes les \mathbf{R} -surfaces elliptiques régulières et sans fibre multiple.

D'après le théorème de décomposition de Hodge, pour une surface elliptique X régulière relativement minimale, on a $h^{1,1}(X) = 10\chi(\mathcal{O}_X)$ d'où lorsque X est de plus sans fibre multiple,

$$(4.19) \quad b^1(X(\mathbf{R}); \mathbf{Z}_2) \leq 10\chi(\mathcal{O}_X) .$$

Théorème 4.6.15. — *Pour tout $k > 0$, il existe une \mathbf{R} -surface elliptique régulière relativement minimale (X, σ) telle que :*

$$\chi(\mathcal{O}_X) = k, \quad b^1(X(\mathbf{R}); \mathbf{Z}_2) = 10k .$$

Démonstration. — Nous donnons ici une esquisse de preuve et nous renvoyons à [Man00] pour la preuve complète. Les surfaces qui apparaissent dans l'énoncé précédent sont dites modulaires. Une surface modulaire

est construite à partir d'un sous-groupe Γ d'indice fini du groupe modulaire $\mathbf{PSL}_2(\mathbf{Z}) = \mathbf{SL}_2(\mathbf{Z})/\{\pm 1\}$. On adapte la construction classique [Shi71, Shi72b] au cas réel puis on utilise la classification réelle des fibres singulières d'une fibration elliptique donnée par Silhol [Sil84] pour obtenir les conditions nécessaires à poser sur le groupe Γ pour que la surface réelle ait une homologie maximale en rang 1.

Considérons un sous-groupe d'indice fini $\Gamma \subset \mathbf{PSL}_2(\mathbf{Z})$. Le groupe $\mathbf{PSL}_2(\mathbf{Z})$ étant un sous-groupe de $\mathbf{PSL}_2(\mathbf{R})$, le groupe Γ est un sous-groupe discret du groupe des isométries du plan hyperbolique \mathbf{H} . C'est donc un groupe fuchsien et le quotient $\Delta'_\Gamma = \mathbf{H}/\Gamma$ est une courbe complexe dont la non compacité provient des classes paraboliques ou cusps. Une compactification naturelle est obtenue en remarquant que Γ opère sur $\mathbf{P}^1(\mathbf{Q})$ considéré comme sous-espace du bord de $\mathbf{H} = \{z \in \mathbf{C} / \Im(z) > 0\}$, on considère alors la courbe complexe compacte

$$\Delta_\Gamma = (\mathbf{H} \cup \mathbf{P}^1(\mathbf{Q}))/\Gamma .$$

On utilise alors le fait que Γ n'est pas seulement un groupe d'isométries de \mathbf{H} mais aussi un groupe d'automorphismes de courbes elliptiques, on construit alors naturellement une fibration localement triviale en courbes de genre 1 au-dessus de l'ouvert Δ'_Γ de Δ_Γ . Il y a alors en général plusieurs façons de prolonger la fibration au-dessus de chaque point cusp P . Pour déterminer le type complexe de fibre singulière au-dessus de P , il suffit de connaître un élément du stabilisateur de $P \in \Delta_\Gamma$. On obtient ainsi une représentation de monodromie

$$\rho: \pi_1(\Delta'_\Gamma) \rightarrow \mathbf{PSL}_2(\mathbf{Z}) .$$

Pour chaque relèvement $\rho': \pi_1(\Delta'_\Gamma) \rightarrow \mathbf{SL}_2(\mathbf{Z})$ de ρ , on obtient une surface elliptique avec une liste de fibres singulières de types complexes fixés.

L'action du groupe $\mathbf{PSL}_2(\mathbf{R})$ sur \mathbf{H} est notée $z \mapsto A.z$ où $A.z = \frac{az+b}{cz+d}$ si A est représenté par $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $ad - bc = 1$. L'involution $\sigma_{\mathbf{H}}: z \mapsto -\bar{z}$ de \mathbf{H}

est anti-holomorphe. On note $S: \mathbf{SL}_2(\mathbf{R}) \rightarrow \mathbf{SL}_2(\mathbf{R})$, $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a & -b \\ -c & d \end{pmatrix}$.

Alors S induit une involution sur $\mathbf{PSL}_2(\mathbf{R})$ que l'on notera encore S . Soient $z \in \mathbf{H}$ et $A \in \mathbf{PSL}_2(\mathbf{R})$, alors $\sigma_{\mathbf{H}}(A.\sigma_{\mathbf{H}}(z)) = S(A).z$.

Soit Γ un groupe fuchsien (*i. e.* un sous-groupe discret de $\mathbf{PSL}_2(\mathbf{R})$), l'involution $\sigma_{\mathbf{H}}$ induit une structure réelle sur le quotient \mathbf{H}/Γ si et seulement si $\sigma_{\mathbf{H}}\Gamma = \Gamma\sigma_{\mathbf{H}}$, *i. e.* si et seulement si Γ est stable par S .

En général, on ne peut pas contrôler complètement le type réel des fibres singulières obtenues par cette construction. Dans les cas où cela est possible, on obtient des conditions nécessaires sur Γ puis on donne une suite de groupes qui vérifient ces conditions nécessaires.

Pour $k \in \mathbf{N}^*$, soit Γ_k le groupe arithmétique dont le domaine fondamental est représenté sur la figure 4.13. Pour chaque groupe Γ_k , il existe une surface

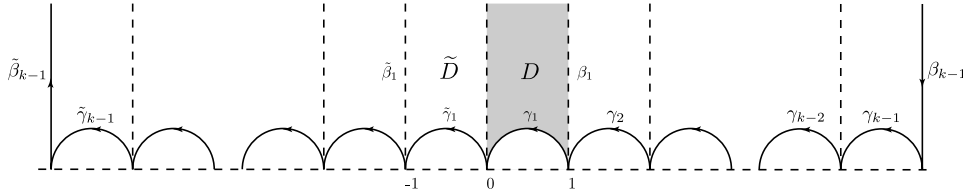


FIGURE 4.13. Domaine fondamental du groupe Γ_k .

elliptique modulaire réelle $X_k \rightarrow \Delta_{\Gamma_k} \simeq \mathbf{P}^1$ qui vérifie les conclusions du théorème 4.6.15. Pour chaque k , la partie réelle $X_k(\mathbf{R})$ est connexe. Lorsque k est pair, $X_k(\mathbf{R})$ est difféomorphe à la surface orientable de genre $\frac{5k}{2}$. Dans le cas contraire, $X_k(\mathbf{R})$ est difféomorphe à la surface non orientable de caractéristique d'Euler $2 - 10k$. \square

Théorème 4.6.16. — *Toute surface elliptique complexe régulière sans fibre multiple $Y \rightarrow \mathbf{P}^1$ peut être déformée sur \mathbf{C} en une surface elliptique X admettant une structure réelle telle que*

$$b_{\text{alg}}^1(X(\mathbf{R}); \mathbf{Z}_2) = b^1(X(\mathbf{R}); \mathbf{Z}_2) = h^{1,1}(X) .$$

Preuve. — Une surface elliptique régulière sans fibre multiple $Y \rightarrow \mathbf{P}^1$ admet un modèle relativement minimal $Y' \rightarrow \mathbf{P}^1$ qui est une surface elliptique. D'après le lemme 4.6.11, les surfaces elliptiques régulières sans fibre multiple relativement minimales sont classifiées par leur caractéristique d'Euler holomorphe. D'après le théorème 4.6.15, il existe une surface elliptique régulière sans fibre multiple relativement minimale X' telle que $\chi(\mathcal{O}_{X'}) = \chi(\mathcal{O}_{Y'})$ et $b_{\text{alg}}^1(X'(\mathbf{R}); \mathbf{Z}_2) = b^1(X'(\mathbf{R}); \mathbf{Z}_2) = h^{1,1}(X')$. Maintenant, si V est une surface réelle et $W \rightarrow V$ un éclatement centré en un point de $V(\mathbf{R})$, alors W est une surface réelle et

$$h^{1,1}(W) = h^{1,1}(V) + 1, \quad b_{\text{alg}}^1(W(\mathbf{R}); \mathbf{Z}_2) = b_{\text{alg}}^1(V(\mathbf{R}); \mathbf{Z}_2) + 1 .$$

La surface Y est obtenue à partir de Y' par un nombre fini d'éclatements centrés en des points. On conclut grâce au théorème 4.6.12. \square

Remarque 4.6.17. — Contrairement aux surfaces elliptiques, une surface munie d’une fibration en courbes de genre 2 peut être de type général. La théorie réelle de ces surfaces est nettement moins avancée que dans le cas du genre 1. La première étape vers une classification a néanmoins été franchie : une classification des fibres singulières d’un pinceau en courbes de genre 2 a été réalisée dans [AM15].

4.7. Surfaces de type général ($\kappa = 2$)

Dans cette section, nous construisons quelques exemples intéressants de \mathbf{R} -surfaces de type général. Nous nous intéressons plus particulièrement à leurs cycles algébriques.

Pour une surface algébrique complexe projective non singulière X , l’image de l’application $\text{Pic}(X) \rightarrow H^2(X; \mathbf{C}) = H^{2,0}(X) \oplus H^{1,1}(X) \oplus H^{0,2}(X)$ est contenue dans $H^{1,1}(X)$, voir l’appendice D. Ainsi le nombre de Picard $\rho(X)$ est majoré par le nombre de Hodge $h^{1,1}(X)$. Soit X_d une surface non singulière de $\mathbf{P}^3(\mathbf{C})$ de degré $d := \deg(X_d)$, on a $\rho(X_d) \leq h^{1,1}(X_d) = \frac{d}{3}(2d^2 - 6d + 7)$, voir l’exemple D.4.4.

Si $d \leq 3$, X_d est une surface rationnelle et $\rho(X_d) = h^{1,1}(X_d)$. Si $d > 3$, et si X_d est une surface générale parmi les surfaces de degré d , son nombre de Picard satisfait $\rho(X_d) = 1$ d’après le théorème de Noether [Del73, 1.2.1], et il est assez difficile de construire des exemples de surfaces ayant un nombre de Picard proche de $h^{1,1}(X_d)$.

Si $d = 4$, X_d est une surface K3, et on dispose d’une classification, voir le théorème 4.5.10. Si $d \geq 5$, X est une surface de type général, voir [Bom73], et on ne connaît que des exemples sporadiques.

Les surfaces X qui ont un « grand » nombre de Picard, c’est-à-dire telles que ρ soit proche de $h^{1,1}$, sont exceptionnelles, voir par exemple [Man94], [KI96], [Bih01a] pour les surfaces de \mathbf{P}^3 degré 5 et leurs déformations ; [Bih01b] et [Ren15] pour les surfaces de degré 6. D’autre part, les \mathbf{R} -surfaces qui ont « beaucoup » de cycles algébriques sont encore plus rares. C’est dire l’intérêt de construire des exemples de surfaces qui possèdent cette propriété.

Par éclatement de points singuliers de surfaces, on crée des cycles algébriques (les composantes irréductibles du diviseur exceptionnel). Persson utilise cette méthode pour fabriquer des exemples de surfaces ayant un nombre de Picard maximal, voir [Per82].

Dans cette partie on montre que dans certains cas, on peut obtenir de bons résultats en réel avec cette méthode essentiellement grâce au lemme 4.7.7 et à une bonne présentation du calcul des éclatements, voir l'appendice F.

Définition 4.7.1. — Une surface analytique complexe compacte X possédant les mêmes invariants numériques qu'une surface de degré 5 dans \mathbf{P}^3 est appelée *quintique numérique*.

Remarque 4.7.2. — D'après par exemple [Hor75], il suffit de vérifier que

$$(c_1^2(X), h^{0,2}(X)) = (5, 4)$$

pour conclure que X est une quintique numérique.

Après une étude des résolutions réelles de points singuliers sur une surface réelle, on présente deux exemples, 4.7.13 et 4.7.14, de surfaces quintiques numériques. Si X est une surface de degré 5 dans $\mathbf{P}^3(\mathbf{C})$, alors $h^{1,1}(X) = 45$, voir l'exemple D.4.4, et on a la majoration

$$\text{rg Pic}(X) \leq 45 .$$

Dans [Per82], Persson donne un exemple de modèle non singulier de quintique numérique avec $\rho = 43$ mais cet exemple « passe » mal en réel comme on le verra avec l'exemple 4.7.14 (l'homologie de la partie réelle contient seulement 31 classes engendrées par des cycles algébriques). Dans l'exemple 4.7.13, on se propose de reprendre un exemple dû à Hirzebruch de quintique dont un modèle non singulier a un nombre de Picard $\rho = 41$. On va montrer que la partie réelle de ce modèle non singulier a une homologie de dimension 41 qui est entièrement engendrée par des cycles algébriques.

Remarque 4.7.3. — En 2011, Mathias Schütt [Sch11] a construit une quintique telle que $\rho = 45$ qui est un quotient d'une surface de Fermat (on pourra consulter [Shi81] au sujet des surfaces de Fermat et plus généralement [Bea14]). La surface de Schütt a pour équation

$$yzw^3 + xyz^3 + wxy^3 + zwx^3 = 0$$

dans \mathbf{P}^3 . Cette surface est clairement définie sur \mathbf{R} . Il serait intéressant de calculer les nombres b^1 et b_{alg}^1 pour le lieu réel de cette surface. Voir aussi [Sch15] pour la construction de surfaces quintiques complexes de nombre de Picard compris entre 1 et 45.

Résolution de points singuliers, revêtements doubles. — Dans cette sous-section, on considère la résolution réelle des points doubles rationnels, définition 4.4.28, et on démontre le lemme 4.7.7 qui sera très utilisé dans la suite.

Les deux exemples de surfaces de type général développés à la fin de ce chapitre sont obtenus par résolution des singularités de surfaces particulières. Chaque courbe exceptionnelle obtenue par éclatement de point engendre un cycle algébrique complexe dont le lieu réel ne se comporte pas toujours de manière aussi simple.

Exemple 4.7.4. — Un phénomène typique peut s'illustrer en considérant la surface $X_1 \subset \mathbf{R}_{x,y,z}^3$ d'équation $z^2 = x^4 - x^2 - y^4 - y^2$ qui est constituée de deux sphères se rencontrant en un point double ordinaire (deux autres points singuliers situés dans la partie complexe n'interviennent pas dans ce contexte). En éclatant ce point $\widetilde{X}_1 \rightarrow X_1$, on obtient une sphère lisse $\widetilde{X}_1(\mathbf{R})$. On a donc un cycle algébrique complexe invariant par la structure réelle qui ne donne aucune classe non triviale dans $H_1(\widetilde{X}_1(\mathbf{R}); \mathbf{Z}_2)$.

Exemple 4.7.5. — Un deuxième exemple permet d'illustrer un phénomène légèrement différent. La surface $X_2 \subset \mathbf{R}_{x,y,z}^3$ d'équation $z^2 = (x^2 + (y - 1)^2 - 4)(x^2 + (y + 1)^2 - 4)$ est constituée de deux sphères se rencontrant en deux points doubles ordinaires. En éclatant ces points $\widetilde{X}_2 \rightarrow X_2$, on obtient un tore lisse $\widetilde{X}_2(\mathbf{R})$ et les deux courbes exceptionnelles (qui sont des -2 -courbes, voir 4.3.2) donnent la même classe dans $H_1(\widetilde{X}_2(\mathbf{R}); \mathbf{Z}_2)$ alors qu'elles engendrent des classes distinctes dans l'homologie du lieu complexe.

C'est ce deuxième phénomène que l'on rencontre avec l'exemple 4.7.14. Avec l'exemple 4.7.13 au contraire, tous les cycles algébriques de la partie complexe invariants engendrent des classes non triviales dans $H_1(\widetilde{\mathcal{S}}(\mathbf{R}); \mathbf{Z}_2)$ parce que la surface singulière de départ est homéomorphe à $\mathbf{P}^2(\mathbf{R})$.

On remarquera aussi que contrairement au cas complexe, la section hyperplane n'engendre pas toujours un cycle algébrique non trivial dans l'homologie du lieu réel.

Exemple 4.7.6 (Résolution de point double sur une surface)

Considérons une surface X et un point double P sur cette surface. Comme P est un point double, sa dimension minimale de plongement est 3, voir la remarque 4.4.27. Autrement dit, localement analytiquement, on peut se ramener à un ouvert V de K^3 , $K = \mathbf{R}$ ou \mathbf{C} , centré en $(0, 0, 0)$ dans lequel X

a une équation de la forme $z^2 = f(x, y)$ et $P = (0, 0, 0)$. L'éclaté \tilde{V} de V en 0 est l'ensemble des couples (a, ξ) éléments de $V \times \mathbf{P}^2(K)$ vérifiant les équations

$$x\xi_2 = y\xi_1 \quad \text{et} \quad x\xi_3 = z\xi_1$$

où (x, y, z) sont les coordonnées sur V et $[\xi_1, \xi_2, \xi_3]$ les coordonnées homogènes sur $\mathbf{P}^2(K)$.

On peut recouvrir l'éclaté \tilde{V} de V par des cartes,

$$U_i = \{(a, \xi) \in \tilde{V} : \xi_i \neq 0\}, \quad i = 1, 2, 3;$$

avec les coordonnées (u_i, v_i, w_i) définies par :

$$\begin{aligned} u_1 = x, \quad v_1 = \frac{\xi_2}{\xi_1}, \quad w_1 = \frac{\xi_3}{\xi_1} \quad & \text{sur } U_1, \\ u_2 = \frac{\xi_1}{\xi_2}, \quad v_2 = y, \quad w_2 = \frac{\xi_3}{\xi_2} \quad & \text{sur } U_2, \\ u_3 = \frac{\xi_1}{\xi_3}, \quad v_3 = \frac{\xi_2}{\xi_3}, \quad w_3 = z \quad & \text{sur } U_3. \end{aligned}$$

On peut remonter X par le morphisme d'éclatement $\pi: \tilde{X} \rightarrow X$ dans les cartes U_i définies ci-dessus. Dans U_1 l'équation de $\pi^*(X)$ est de la forme

$$u_1^2 w_1^2 = u_1^m f_1(u_1, v_1)$$

où m est la multiplicité de f en 0. La transformée stricte \tilde{X} de X a donc pour équation dans cette carte $w_1^2 = u_1^{m-2} f_1(u_1, v_1)$. Dans U_2 , c'est $w_2^2 = v_2^{m-2} f_2(u_2, v_2)$ et dans U_3 , $1 = w_3^{m-2} f_3(u_3, v_3, w_3)$.

Un cas particulier qui nous intéressera dans la suite est celui des points doubles rationnels, voir la définition 4.4.28, car leur résolution engendre des cycles algébriques dans la partie complexe sans changer les invariants numériques de la surface considérée – voir [Art62] ou [Slo80, page 70]. Les surfaces singulières dont les seules singularités sont de ce type sont les surfaces de Du Val, voir la définition 4.4.30.

On veut connaître la topologie de la partie réelle de la surface non singulière \tilde{X} obtenue et calculer le rang de $H_1^{\text{alg}}(\tilde{X}(\mathbf{R}); \mathbf{Z}_2)$.

Lemme 4.7.7. — *Soit X une \mathbf{R} -surface de lieu réel non vide sur laquelle on considère un point singulier P appartenant à $X(\mathbf{R})$. On note $\pi_P: \tilde{X} \rightarrow X$ une \mathbf{R} -résolution (c'est-à-dire que π_P commute avec les structures réelles de X et \tilde{X}). Alors si la partie réelle $L(\mathbf{R})$ du diviseur exceptionnel est non vide on a*

$$\chi_{\text{top}}(\tilde{X}(\mathbf{R})) = \chi_{\text{top}}(X(\mathbf{R})) + \chi_{\text{top}}(L(\mathbf{R})) - 1$$

où χ_{top} est la caractéristique d'Euler topologique.

Démonstration. — Afin d'alléger les notations, on va noter $V := X(\mathbf{R})$ et $W := L(\mathbf{R})$; on a alors $\tilde{V} = \tilde{X}(\mathbf{R})$.

On considère la suite exacte de cohomologie à support compact (B.5) de la proposition B.6.8 appliquée à la paire compacte (\tilde{V}, W) :

$$(4.20) \quad \cdots \rightarrow H_c^k(\tilde{V} \setminus W; \mathbf{Z}_2) \rightarrow H^k(\tilde{V}; \mathbf{Z}_2) \rightarrow H^k(W; \mathbf{Z}_2) \rightarrow H_c^{k+1}(\tilde{V} \setminus W; \mathbf{Z}_2) \rightarrow \cdots$$

On a

1. $\forall k \geq 0, \quad H_c^k(\tilde{V} \setminus W; \mathbf{Z}_2) = H_c^k(V \setminus \{P\}; \mathbf{Z}_2)$;
2. $\dim H_c^0(V \setminus \{P\}; \mathbf{Z}_2) = \dim H^0(V; \mathbf{Z}_2) - 1$;
3. $\forall k > 0, \quad H_c^k(V \setminus \{P\}; \mathbf{Z}_2) = H^k(V; \mathbf{Z}_2)$;
4. $H^2(W; \mathbf{Z}_2) = 0$.

Par définition de π , il existe un voisinage U de P dans V et un voisinage \tilde{U} de W dans \tilde{X} tels que π_P soit biholomorphe de $\tilde{U} \setminus W$ sur $U \setminus \{P\}$. Comme $\tilde{V} \setminus W$ et $V \setminus \{P\}$ sont homéomorphes, on a (1). L'assertion (2) provient de la définition de la cohomologie à support compact. En effet, si on note V_1 la composante connexe de V qui contient P , on a $H_c^0(V_1 \setminus \{P\}; \mathbf{Z}_2) = 0$. L'assertion (3) découle alors de la suite exacte (4.20) appliquée à la paire $(V, \{P\})$. Pour finir, l'assertion (4) n'est rien d'autre que la traduction du fait que W est de dimension 1.

Il suffit alors d'écrire que la somme alternée des dimensions des \mathbf{Z}_2 -espaces vectoriels de la suite exacte est nulle pour trouver

$$\chi_{top}(\tilde{V}) = \chi_{top}(V) + \chi_{top}(W) - 1.$$

□

Corollaire 4.7.8. — *Sous les hypothèses du lemme précédent et si de plus $L(\mathbf{R})$ est connexe, on a*

$$\chi_{top}(\tilde{X}(\mathbf{R})) = \chi_{top}(X(\mathbf{R})) - \dim H^1(L(\mathbf{R}); \mathbf{Z}_2).$$

Résolution de revêtements doubles réels. — Soit W une \mathbf{R} -surface non singulière dont la partie réelle est connexe et non vide, on note C une \mathbf{R} -courbe sur W sans composante multiple. On suppose qu'il existe un diviseur B sur W qui vérifie $C \in |2B|$, on dit alors que C est une *courbe paire*. On note X le revêtement double de W ramifié le long de C et \tilde{X} la résolution canonique de X (voir ci-dessous). On a le choix entre deux structures réelles pour les

surfaces X et \tilde{X} . Si W est une surface rationnelle, et si localement $P(x, y)$ est un polynôme définissant C , le choix de la structure réelle correspond au choix du signe : $z^2 = \pm P(x, y)$. Ce choix étant fixé, on s'intéresse à la partie réelle $\tilde{X}(\mathbf{R})$ de \tilde{X} .

Remarque 4.7.9. — On vérifie que :

1. La surface X est singulière si et seulement si C est singulière.
2. La surface X est projective si et seulement si W l'est, voir [BHPVdV04, page 182].
3. Si la surface complexe W est simplement connexe, alors la surface complexe X est simplement connexe si et seulement si la courbe complexe C est connexe.

Pour résoudre les singularités d'un revêtement double, on a une méthode spécifique : la *résolution canonique* qui est plus efficace, dans certains cas, que la résolution directe par éclatements. Mais elle présente l'inconvénient de ne pas toujours donner une résolution minimale comme on peut le voir avec la droite passant pas les points quadruples de l'exemple 4.7.14. Par contre, dans le cas des points doubles rationnels, cette méthode donne toujours une résolution minimale comme on le verra plus loin.

Définition 4.7.10. — Soit W une surface algébrique complexe projective non singulière et $C \subset W$ une courbe paire sans composante multiple, on appelle résolution canonique de (W, C) la paire (\tilde{W}, \tilde{C}) définie par récurrence de la manière suivante :

- $(W_0, C_0) = (W, C)$;
- À l'étape (W_k, C_k) :

si C_k est non singulière, on pose $(\tilde{W}, \tilde{C}) = (W_k, C_k)$; si C_k est singulière, on choisit un point singulier P sur C_k . On note $\pi: W_{k+1} \rightarrow W_k$ l'éclatement de W centré en P et L le diviseur exceptionnel correspondant puis on pose $C_{k+1} = \pi^*(C_k) - 2[m/2]L$, où m est la multiplicité de C_k en P (on peut remarquer que L est une composante de C_{k+1} si et seulement si m est impair).

On peut montrer que cette définition a un sens, c'est-à-dire que le processus converge, et que l'ordre des éclatements ne change pas le résultat, voir [Per81, page 10].

Considérons la résolution canonique d'un revêtement double X défini par la paire (W, C) . L'équation de C dans un ouvert affine de K^2 est $f(x, y) = 0$; on éclate $(0, 0)$ dans K^2 et on trouve (avec quelques modifications évidentes des

notations introduites dans l'exemple 4.7.6) $u_1^m f_1(u_1, v_1) = 0$ et $u_2^m f_2(u_2, v_2) = 0$. Ensuite, on pose comme nouveau lieu de branchement $C_1 = 2[m/2]L$ et on prend le revêtement double. On obtient alors :

$$\begin{aligned} z^2 &= u_i f_i(u_i, v_i) \text{ si } m \text{ est impair,} \\ z^2 &= f_i(u_i, v_i) \text{ si } m \text{ est pair.} \end{aligned}$$

De là, au vu des calculs effectués dans l'exemple 4.7.6, il est clair qu'il revient au même de résoudre une singularité avec $m = 2, 3$ par éclatement et par résolution de la courbe de branchement.

Lemme 4.7.11. — *Si (X, σ) est une \mathbf{R} -surface singulière, la résolution $\tilde{X} \rightarrow X$ d'un point double rationnel P appartenant à $X(\mathbf{R})$ ne modifie pas le nombre de composantes connexes de $X(\mathbf{R})$. Par ailleurs, si P est un point de type A_n, n impair ou D_n, n pair, on a*

$$\chi_{\text{top}}(\tilde{X}(\mathbf{R})) = \chi_{\text{top}}(X(\mathbf{R})) - n.$$

Démonstration. — 1. On note L le diviseur exceptionnel engendré par la résolution de P . Il faut regarder ce que devient la partie réelle de L , c'est-à-dire ce que devient P . En effet c'est de la connexité de $L(\mathbf{R})$ que dépend celle de $\tilde{X}(\mathbf{R})$.

2. Quand on éclate une singularité du type D_n, E_6, E_7 ou E_8 , on garde un lieu de branchement connexe. En effet la singularité correspondante du lieu de branchement est triple et dans chaque cas la configuration des branches est connexe. De plus pour D_n, n pair, il y a exactement n points doubles A_1 dans la partie réelle.
3. Une singularité du type $A_n, n \geq 2$ donne A_{n-2} par éclatement ; le lieu de branchement reste donc singulier mais connexe jusqu'à A_1 et A_2 d'équations respectives (sur \mathbf{C}) $z^2 = x^2 - y^2$ et $z^2 = y^2 - x^3$.
4. L'éclatement de A_1 donne $w_1^2 = 1 - v_1^2$ (dans U_1 par exemple) et $L(\mathbf{R})$ est alors la conique d'équation $u_1 = 0, w_1^2 + v_1^2 = 1$. La résolution transforme donc un point en une courbe connexe et la transformée stricte $\tilde{X}(\mathbf{R})$ possède ainsi le même nombre de composantes connexes que $X(\mathbf{R})$. De plus dans ce cas $\chi_{\text{top}}(L(\mathbf{R})) = 0$.
5. Pour A_2 , on a deux équations possibles sur \mathbf{R} : $z^2 = y^2 - x^3$ et $z^2 = x^3 - y^2$ qui donnent respectivement $w_1^2 = v_1^2 - u_1$ et $w_1^2 = u_1 - v_1^2$ par éclatement. La courbe $L(\mathbf{R})$ (correspondant à $u_1 = 0$) est donc formée des deux droites $w_1 = v_1$ et $w_1 = -v_1$ dans le premier cas et du seul point $w_1 = v_1 = 0$ dans le second.

Dans le cas A_n, n impair, $L(\mathbf{R})$ est connexe et possède n points doubles A_1 . Pour conclure, il reste à appliquer le lemme 4.7.7 pour chaque éclatement de point A_1 .

□

Proposition 4.7.12. — *Soit (W, C) une paire où W est une \mathbf{R} -surface compacte non singulière et $C \subset W$ une \mathbf{R} -courbe éventuellement réductible. Si la partie réelle de C est connexe, et que ses singularités éventuelles sont de type A_n, D_n, E_6, E_7 ou E_8 , alors le revêtement double $\tilde{X}(\mathbf{R})$ de la résolution canonique de (W, C) est connexe pour l'une des deux structures réelles qui relèvent celle de W .*

Démonstration. — 1. Si $W(\mathbf{R})$ et $C(\mathbf{R})$ sont connexes, il est clair que le revêtement double $X(\mathbf{R})$ défini par (W, C) est connexe indépendamment du choix d'une structure réelle.

2. Pour chaque singularité qui n'est pas dans $C(\mathbf{R})$, la résolution ne change ni la connexité de $W(\mathbf{R})$, ni celle de $C(\mathbf{R})$.

3. Les singularités de la partie réelle de C étant de type A_n, D_n, E_6, E_7 ou E_8 , les singularités correspondantes de X sont des points doubles rationnels de type A_n, D_n, E_6, E_7 ou E_8 .

D'après le théorème 4.4.26, on sait que la résolution canonique de ce type de singularité revient à une suite d'éclatements de points de X . De plus les singularités apparaissant au cours du processus sont aussi des points doubles rationnels. La proposition découle donc du lemme 4.7.11. □

Le premier exemple que l'on va présenter est un modèle non singulier d'une surface de degré 5 dans \mathbf{P}^3 .

Exemple 4.7.13 (Une quintique réelle telle que $b_1^{\text{alg}} = b_1$)

Cet exemple est basé sur une construction attribuée à Hirzebruch par Persson [Per82, Introduction]. Le lieu complexe X d'une surface non singulière de $\mathbf{P}^3(\mathbf{C})$ est connexe et simplement connexe d'après le théorème de Lefschetz sur les sections hyperplanes D.9.2 :

$$\begin{aligned} \pi_0(X) &\simeq \pi_0(\mathbf{P}^3(\mathbf{C})), \\ \pi_1(\mathbf{P}^3(\mathbf{C})) &\rightarrow \pi_1(X) \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Nous en déduisons que le groupe de Picard $\text{Pic}(X)$ est un \mathbf{Z} -module libre de type fini et de rang ρ .

On considère une courbe C formée de cinq droites en position générale dans $\mathbf{P}^2(\mathbf{C})$. On note $f: \mathcal{S} \rightarrow \mathbf{P}^2(\mathbf{C})$ le revêtement cyclique d'ordre 5 de $\mathbf{P}^2(\mathbf{C})$

ramifié en C . La surface \mathcal{S} est alors de degré 5 dans $\mathbf{P}^3(\mathbf{C})$ et possède 10 singularités – les points d’intersection des droites. Soit P l’un de ces points singuliers. Dans un voisinage affine de P , on peut écrire l’équation de \mathcal{S} sous la forme

$$x^5 = z^2 - y^2 ,$$

c’est-à-dire que P est un point double rationnel du type A_4 (voir la définition 4.4.28). On sait qu’un point double rationnel se résout par éclatements successifs de points et que le modèle non singulier obtenu possède les mêmes invariants numériques qu’une quintique. En particulier, la majoration du nombre de Picard est inchangée. D’autre part, au cours de la résolution d’un point de type A_n , le nombre de cycles algébriques augmente précisément de n (c’est-à-dire le nombre de composantes irréductibles du diviseur exceptionnel de la résolution). On obtient donc une surface non singulière $\tilde{\mathcal{S}}$ avec $\rho(\tilde{\mathcal{S}}) = 41$. En effet, le groupe de Picard de $\tilde{\mathcal{S}}$ est engendré par la section hyperplane et les 40 cycles provenant de la résolution des singularités.

En choisissant pour C des droites réelles en position générale dans $\mathbf{P}^2(\mathbf{R})$, on obtient une surface réelle. À partir de la topologie de $\mathcal{S}(\mathbf{R})$, on calcule la topologie de $\tilde{\mathcal{S}}(\mathbf{R})$. Autrement dit on étudie le comportement de la partie réelle au cours de la résolution des singularités.

Si on restreint le morphisme de revêtement f à $\mathcal{S}(\mathbf{R})$, on obtient un homéomorphisme de $\mathcal{S}(\mathbf{R})$ sur $\mathbf{P}^2(\mathbf{R})$. En effet l’équation de \mathcal{S} étant de la forme $t^5 = Q(x, y, z)$ et f étant donnée par $f(x, y, z, t) = (x, y, z)$, il est facile de voir qu’il n’y a qu’un point réel dans chaque fibre de f . La surface $\mathcal{S}(\mathbf{R})$ est donc connexe et $\dim H_1(\mathcal{S}(\mathbf{R}); \mathbf{Z}_2) = 1$. De plus la seule classe d’homologie est algébrique. En effet, on peut la voir comme relevée par l’application

$$f^* : H_1(\mathbf{P}^2(\mathbf{R}); \mathbf{Z}_2) \rightarrow H_1(\mathcal{S}(\mathbf{R}); \mathbf{Z}_2)$$

de la classe des sections hyperplanes de $\mathbf{P}^2(\mathbf{R})$.

Passons à la résolution d’un point P de type A_4 sur une surface X dont l’équation locale est $z^2 = x^5 + y^2$. On reprend les notations de l’exemple 4.7.6. Soit $P \in V \subset X$ un voisinage de P . Après un premier éclatement $\tilde{V} \rightarrow V$, on obtient

$$w_1^2 = u_1^3 + v_1^2 \quad \text{sur } U_1 \quad \text{et} \quad w_2^2 = u_2^5 v_2^3 + 1 \quad \text{sur } U_2 .$$

La partie réelle de la courbe exceptionnelle est connexe et elle est formée des deux droites (d’équations respectives $w_1 = v_1$ et $w_1 = -v_1$ dans U_1) qui se coupent en un point singulier Q de $B_P X \supset \tilde{V} = B_P V$.

On éclate alors Q et on note $\tilde{X} := B_Q(B_P(X))$ la surface obtenue. Avec un petit changement de notations pour ce deuxième éclatement, l'équation de \tilde{X} dans \tilde{U}_1 est de la forme

$$\tilde{w}_1^2 = \tilde{u}_1 + \tilde{v}_1^2 .$$

La partie réelle du diviseur exceptionnel L est donc de nouveau connexe et formée de deux composantes irréductibles. De plus, le point d'intersection \tilde{Q} n'est pas un point singulier de la surface. En résumé,

- il faut deux éclatements de points pour obtenir la résolution de P ;
- la partie réelle du diviseur exceptionnel \tilde{L} est connexe et formée de 4 composantes irréductibles.

Pour conclure que ces 4 composantes irréductibles engendrent effectivement 4 nouvelles classes d'homologie dans la partie réelle on utilise le corollaire 4.7.8 ; dans le cas qui nous occupe, $L(\mathbf{R})$ est topologiquement une chaîne de 4 cercles ce qui nous donne

$$\chi_{\text{top}}(\tilde{X}(\mathbf{R})) = \chi_{\text{top}}(X(\mathbf{R})) - 4 .$$

De plus la surface obtenue est connexe. En effet, on a remplacé un point par une courbe connexe. Comme la surface \mathcal{S} possède 10 telles singularités, on obtient donc

$$\dim H_1(\tilde{\mathcal{S}}(\mathbf{R}); \mathbf{Z}_2) = 41 .$$

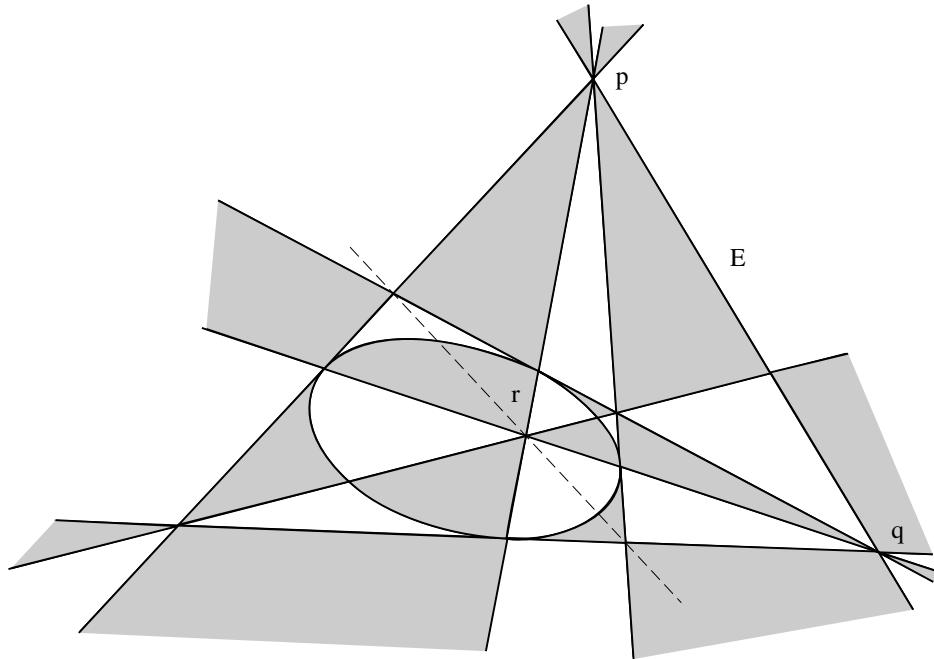
D'autre part comme chaque nouvelle classe de cohomologie a été obtenue comme partie réelle d'une courbe exceptionnelle, on a finalement

$$\dim H_1^{\text{alg}}(\tilde{\mathcal{S}}(\mathbf{R}); \mathbf{Z}_2) = \dim H_1(\tilde{\mathcal{S}}(\mathbf{R}); \mathbf{Z}_2) = 41 .$$

Exemple 4.7.14 (Une quintique numérique réelle telle que $b_1^{\text{alg}} < b_1$)

On va reprendre un exemple de quintique numérique donné par Ulf Persson [Per82, page 309] et calculer les invariants de sa partie réelle ainsi qu'une minoration de son nombre b_{alg}^1 .

On commence par construire une courbe réelle dans $W = \mathbf{P}^2$. Considérons un quadrilatère Σ défini par deux paires de droites de sources p et q . Chaque côté de Σ en rencontre deux autres aux sommets de Σ . Chaque côté de Σ possède donc trois points canoniques, les intersections avec les trois autres côtés. Les deux diagonales de Σ se rencontrent en un point r , le centre de Σ . En joignant r avec p et q respectivement, chaque côté de Σ est coupé en un quatrième point. Ces quatre points sont en rapport harmonique, c'est-à-dire que si les côtés sont normalisés par ∞ à leur source et ± 1 aux sommets de Σ , alors le quatrième point est 0.

FIGURE 4.14. Projection de $\mathcal{P}(\mathbf{R})$ sur \mathbf{P}^2 .

Il s'agit en fait de la construction standard du quatrième point d'un ensemble harmonique quand on en connaît trois. Maintenant il existe une conique unique tangente aux côtés de Σ en les « 0-points ». On note C la courbe obtenue en considérant la configuration précédente formée des six droites plus la conique et une seule diagonale (voir la figure 4.14), et en ajoutant la droite E passant par p et q . On obtient une courbe de degré 10 avec deux points quadruples ordinaires, cinq points A_1 , quatre points A_6 et trois points D_4 .

On note (\tilde{W}, \tilde{C}) la résolution canonique de la paire (W, C) , voir la définition 4.7.10. On note \mathcal{P} le revêtement double défini par la paire (W, C) , et $\tilde{\mathcal{P}}$ le revêtement double défini par la paire (\tilde{W}, \tilde{C}) .

Comme à chaque éclatement des trois points singuliers de E , l'auto-intersection E^2 diminue de 1, la droite E de \mathcal{P} devient telle que $E^2 = -2$. D'après [Per81, Proposition 1.3], la courbe \tilde{E} , obtenue comme revêtement double de E , est une (-1) -courbe dans $\tilde{\mathcal{P}}$. Toujours d'après [Per81, Proposition 1.3], on peut vérifier que \tilde{E} est la seule (-1) -courbe de $\tilde{\mathcal{P}}$.

On contracte \tilde{E} et on note \mathcal{P}' la surface minimale obtenue.

Proposition 4.7.15. — Soit \tilde{X} le revêtement double obtenu par résolution canonique d'une paire $(\mathbf{P}^2(\mathbf{C}), D)$ où D est une courbe de $\mathbf{P}^2(\mathbf{C})$ de degré $2d$, alors si chaque point singulier P_k a une multiplicité $m_k = 2d_k$ ou $m_k = 2d_k + 1$, on a

$$c_1^2(\tilde{X}) = 2(d-3)^2 - 2 \sum_{P_k} (d_k - 1)^2 ,$$

$$h^{0,2}(\tilde{X}) = 1 + \frac{1}{2}(d(d-3)) - \sum_{P_k} \frac{1}{2} d_k (d_k - 1) .$$

Démonstration. — Voir [BHPVdV04, page 183]. □

Corollaire 4.7.16. — Pour les surfaces $\tilde{\mathcal{P}}$ et \mathcal{P}' définies plus haut, on a les invariants :

$$\begin{aligned} c_1^2(\tilde{\mathcal{P}}) &= 4, & c_1^2(\mathcal{P}') &= 5 , \\ h^{0,2}(\tilde{\mathcal{P}}) &= 4, & h^{0,2}(\mathcal{P}') &= 4 , \\ \rho(\tilde{\mathcal{P}}) &\geq 44, & \rho(\mathcal{P}') &\geq 43 . \end{aligned}$$

Démonstration. — En ce qui concerne les deux premières égalités, on rappelle, voir la proposition 4.1.30, que si $\pi: \tilde{X} \rightarrow X'$ est l'éclatement d'un point P d'une surface non singulière et si on note E_P la courbe exceptionnelle, on a $K_{\tilde{X}} = \pi^* K_{X'} + E_P$ d'où $c_1^2(X') = c_1^2(\tilde{X}) + 1$. Par ailleurs, comme $h^{0,2}$ est un invariant birationnel, on obtient deux égalités supplémentaires. Pour les deux dernières égalités, il faut rappeler qu'en plus des cycles provenant de la résolution des singularités de type A_n, D_n ou E_n qui engendrent chacune n cycles algébriques indépendants, il y a un cycle provenant de la section hyperplane et deux provenant de la résolution des points quadruples. □

La surface non singulière \mathcal{P}' possède donc les mêmes invariants numériques qu'une quintique de $\mathbf{P}^3(\mathbf{C})$ (voir la remarque 4.7.2) et son nombre de Picard est minoré par 43. Passons maintenant au calcul de la partie réelle de \mathcal{P}' . Toujours en se référant à la figure 4.14, on peut calculer la caractéristique d'Euler de la surface singulière de départ $\mathcal{P}(\mathbf{R})$ qui est homéomorphe à un nombre fini de sphères recollées en les points singuliers (en particulier, $\mathcal{P}(\mathbf{R})$ est connexe) :

$$\chi_{\text{top}}(\mathcal{P}(\mathbf{R})) = 2(\#\{\text{sphères}\}) - \sum_{P_k} (m_k - 1)$$

où m_k désigne la multiplicité du point P_k . Avec 13 sphères, 5 points doubles, 7 points triples et 2 points quadruples on a donc

$$\chi_{\text{top}}(\mathcal{P}(\mathbf{R})) = 1, \quad b^1(\mathcal{P}(\mathbf{R}); \mathbf{Z}_2) = 13 .$$

Proposition 4.7.17. — *La quintique numérique \mathcal{P}' a une partie réelle connexe.*

En effet après éclatement des deux points quadruples, le lieu de branchement est connexe (voir la figure 4.15), et il ne reste que des singularités simples dans la partie réelle. D'après le lemme 4.7.11, la résolution de ces singularités donne une surface connexe et pour terminer la construction, on contracte la courbe E , ce qui préserve évidemment la connexité.

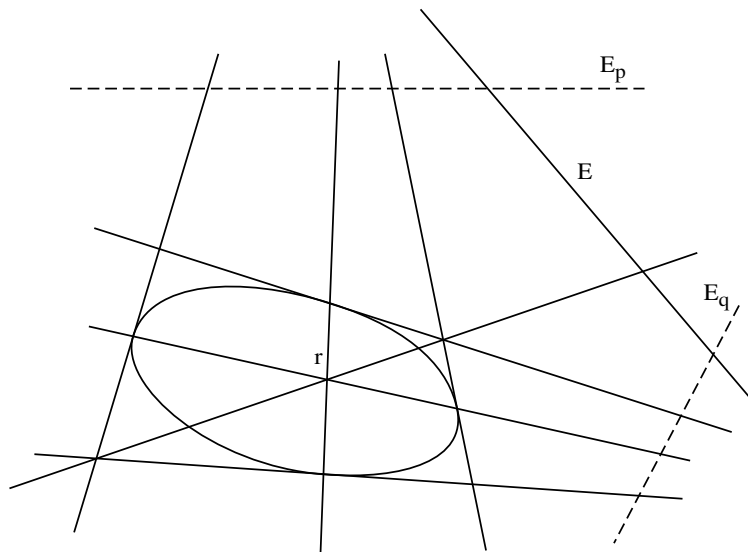


FIGURE 4.15. La courbe \tilde{C} sur \tilde{W} .

Proposition 4.7.18. — *Pour les surfaces $\tilde{\mathcal{P}}(\mathbf{R})$ et $\mathcal{P}'(\mathbf{R})$ définies plus haut, on a les relations :*

$$\chi_{top}(\tilde{\mathcal{P}}(\mathbf{R})) = \chi_{top}(\mathcal{P}(\mathbf{R})) - \sum_{P_k} n_k, \quad \chi_{top}(\mathcal{P}'(\mathbf{R})) = \chi_{top}(\tilde{\mathcal{P}}(\mathbf{R})) + 1$$

$$b^1(\tilde{\mathcal{P}}(\mathbf{R}); \mathbf{Z}_2) = \chi_{top}(\tilde{\mathcal{P}}(\mathbf{R})) + 2, \quad b^1(\mathcal{P}'(\mathbf{R}); \mathbf{Z}_2) = b^1(\tilde{\mathcal{P}}(\mathbf{R}); \mathbf{Z}_2) - 1$$

$$b_{alg}^1(\mathcal{P}'(\mathbf{R}); \mathbf{Z}_2) = b_{alg}^1(\mathcal{P}(\mathbf{R}); \mathbf{Z}_2) + (b^1(\mathcal{P}'(\mathbf{R}); \mathbf{Z}_2) - b^1(\mathcal{P}(\mathbf{R}); \mathbf{Z}_2))$$

avec $n_k = n$ si P_k est un point de type A_n , n impair ou D_n , n pair, et $n_k = 1$ si P_k est un point quadruple ordinaire.

Démonstration. — Pour les singularités simples, cela provient de la deuxième partie du lemme 4.7.11. D'autre part, soit P un point quadruple ordinaire sur

C , on peut alors trouver un voisinage de P telle que \mathcal{P} soit localement définie par l'équation :

$$z^2 = xy(x^2 - y^2) .$$

La résolution canonique transforme cette équation en

$$z^2 = v - v^3 ,$$

c'est-à-dire que du point de vue réel, $E_P(\mathbf{R})$ est la réunion de deux cercles disjoints, d'où $\chi_{\text{top}}(E_P(\mathbf{R})) = 0$, il ne reste plus qu'à appliquer le lemme 4.7.7.

□

Corollaire 4.7.19. — *Pour les surfaces $\tilde{\mathcal{P}}(\mathbf{R})$ et $\mathcal{P}'(\mathbf{R})$ définies plus haut, on a les relations :*

$$\chi_{\text{top}}(\mathcal{P}') = -41, \quad b^1(\mathcal{P}'(\mathbf{R}); \mathbf{Z}_2) = 43, \quad b_{\text{alg}}^1(\mathcal{P}'(\mathbf{R}); \mathbf{Z}_2) \geq 31 .$$

En effet, on a $\sum_{P_k} n_k = 43$ et $b_{\text{alg}}^1(\mathcal{P}(\mathbf{R}); \mathbf{Z}_2) \geq 1$ car il y a la classe représentée par la section hyperplane.

Solution des exercices du chapitre 4

4.1.45 Si C' est une courbe quartique non singulière, son genre est $g(C') = 3$ d'après la formule du genre, voir le théorème 1.6.17. Le genre de C étant nul par hypothèse, $\delta(C) = 3$. Les multiplicités possibles des points singuliers (y compris infiniment proches) sont donc *a priori* $\{2, 2, 2\}$ ou $\{3\}$. Maintenant, comme l'ensemble des points singuliers est invariant par $\sigma_{\mathbf{P}}$, les seules possibilités sont : un unique point triple, trois points doubles ordinaires, ou bien un unique point singulier dont la suite des multiplicités est $(2, 2, 2)$ (c'est-à-dire ou bien un cusp ramphoïde, ou bien un point double dont le premier éclatement contient deux points doubles ordinaires). Comme dans tous les cas, le nombre de points singuliers est impair, au moins l'un d'entre eux est réel.

4.1.48 La caractéristique d'Euler est additive, donc $\chi_{top}(C) = \chi_{top}(C_1) + \chi_{top}(C_2) = 4$. Par ailleurs, $p_a(C_i) = g(C_i) = 0$ pour $i = 1, 2$, et le résultat est donné par la formule (4.4), page 226.

4.2.11 2. Il s'agit d'un calcul local. En un point d'une fibre réduite, le calcul direct des dérivées partielles donne le résultat.

4. Considérer le fibré en conique défini par l'équation

$$x^2 + y^2 = (t-1)(t-2)(t-3)(t-4).$$

4.3.3 Par définition, une (-1) -courbe est rationnelle non singulière d'où $p_a(C) = g(C) = 0$ et $(C^2) = -1$. Il ne reste qu'à appliquer la formule d'adjonction (4.1), page 225.

4.3.14 Soient E_1 et E_2 les droites qui sont les composantes irréductibles de la fibre F considérée. Alors $0 = (F)^2 = (E_1)^2 + (E_2)^2 + 2(E_1 \cdot E_2)$ impose que $(E_1)^2 = (E_2)^2 = -1$.

4.3.15 Chaque fibre singulière complexe est formée de deux (-1) -courbes se rencontrant en un point. Soit $X \rightarrow \mathbf{F}_n$ le morphisme birationnel obtenu en contractant une (-1) -courbe dans chaque fibre singulière. Notons E_1, \dots, E_r les courbes contractées. On a alors

$$\pi^*(K_{\mathbf{F}_n}) = K_X + E_1 + \dots + E_r,$$

d'où $(K_X)^2 = (\pi^*(K_{\mathbf{F}_n}))^2 - r$. Il reste à calculer $(K_{\mathbf{F}_n})^2$ sachant que $K_{\mathbf{F}_n} = -2\Sigma_0 + (n-2)F$ pour une fibre F et une section générale Σ_0 , voir [Bea78, III.18].

4.3.18 Rappelons que d'après la formule d'adjonction, une (-1) -courbe C satisfait $(K_X \cdot C) = -1$, voir l'exercice 4.3.3. Soient C_1, C_2 des (-1) -courbes telles que $(C_1 \cdot C_2) > 0$, alors $(C_1 + C_2)^2 = -2 + 2(C_1 \cdot C_2) \geq 0$ et $(C_1 + C_2)^2 = 0$ si

et seulement si $(C_1 \cdot C_2) = 1$. D'après le lemme de Zariski, voir [BHPVdV04, Lemma III.8.2], une fibre de π contenant C_1 et C_2 est donc nécessairement de la forme $n(C_1 + C_2)$. Soit F une fibre générale (connexe et non singulière), on a

$$(K_X \cdot F) = n(K_X \cdot (C_1 + C_2)) = -2n .$$

On a de plus $(F)^2 = 0$ car c'est une fibre et $p_a(F) = g(F) \geq 0$ car F est connexe et non singulière. En appliquant la formule d'adjonction (4.1), page 225, on obtient $n = 1$ et $g(F) = 0$.

4.4.12 Si le fibré en coniques est minimal, les seules fibres singulières sont du type $x^2 + y^2 = 0$ et leur nombre est donc double du nombre de composantes connexes de $X(\mathbf{R})$. Or, d'après l'exercice 4.3.15, le nombre de fibres singulières du fibré en coniques est égal à $8 - K_X^2$.

CHAPITRE 5

APPROXIMATIONS ALGÈBRIQUES

5.1. Modèles rationnels

Dans le chapitre 4, et plus précisément en section 4.4, nous sommes partis d'une \mathbf{R} -surface donnée et avons déterminé la topologie de son lieu réel. Nous revenons ici au point de vue opposé comme en page 4 de l'introduction générale.

Définition 5.1.1 (Modèle algébrique réel, modèle rationnel réel)

Soit M une variété différentielle de classe \mathcal{C}^∞ . On dit qu'une \mathbf{R} -variété algébrique quasi-projective non singulière (X, σ) est un *modèle algébrique réel* de M si $X(\mathbf{R})$ est difféomorphe à M . De façon abusive, on dit aussi parfois que la variété algébrique réelle affine et non singulière $V := X(\mathbf{R})$, voir la définition 1.3.9 et le théorème 2.2.17, est un *modèle algébrique réel* de M . Si la \mathbf{R} -variété algébrique réelle (X, σ) est de plus \mathbf{R} -rationnelle, on dit que (X, σ) (resp. V) est un *modèle rationnel réel* de la variété différentielle M .

Bien entendu, une variété différentielle qui admet un modèle rationnel réel admet aussi un modèle algébrique réel mais la réciproque est fautive. En effet, d'après le théorème de Comessatti 4.4.16, une surface orientable de genre $g \geq 2$ n'admet pas de modèle rationnel réel. *A contrario* toute surface orientable de genre g admet un modèle algébrique réel comme le montre la construction suivante.

Exemple 5.1.2 (Modèles algébriques des surfaces orientables)

Il suffit de considérer l'une des deux surfaces algébriques réelles données par les équations affines $z^2 = \pm f(x, y)$, où f est le produit des équations de $g + 1$ cercles bien choisis. En fait, une telle surface est singulière car elle possède des points singuliers non réels ; mais il est facile d'obtenir une variété

non singulière par résolution, voir le théorème 1.5.54, de ces points singuliers ou par une petite déformation $f_\varepsilon(x, y) = 0$ de la courbe plane $f(x, y) = 0$. Dans ce dernier cas, la courbe devient irréductible pour une déformation générale et le lieu réel de $z^2 = \pm f_\varepsilon(x, y)$ est difféomorphe au lieu réel de la surface $z^2 = \pm f(x, y)$ d'après le théorème de fibration d'Ehresmann 4.3.28.

Nous ouvrons ce chapitre par une présentation des applications différentiables que l'on peut approcher par des applications régulières. Nous nous concentrons dans un premier temps sur les cas où la variété but est une sphère de petite dimension ou plus généralement une variété rationnelle. Nous poursuivons par l'étude de difféomorphismes particuliers : les *difféomorphismes birationnels* qui sont d'après l'exercice 1.2.56(2) et la proposition 2.2.27, les isomorphismes de variétés algébriques réelles non singulières. Les difféomorphismes birationnels nous permettent de classifier les *modèles algébriques réels*⁽¹⁾ d'une variété différentielle donnée. Ces « isomorphismes » de modèles algébriques réels sont au coeur d'une série de résultats qui font intervenir des sous-groupes particuliers du fameux *groupe de Cremona*. Nous concluons le chapitre par une évocation de résultats récents sur les *faux plans réels*.

Dans ce chapitre, nous énonçons en particulier trois résultats importants datant de la fin des années 2000.

- À difféomorphisme birationnel près, il existe un unique modèle rationnel réel pour chaque surface non orientable, voir le théorème 5.4.1.
- Le groupe des difféomorphismes birationnels d'une surface rationnelle réelle est infiniment transitif, voir le théorème 5.4.3.
- Le groupe des difféomorphismes birationnels d'une surface rationnelle réelle V est dense dans le groupe $\text{Diff}(V)$ des difféomorphismes \mathcal{C}^∞ , voir le théorème 5.4.16.

Parmi les objets rencontrés, le groupe de Cremona des transformations birationnelles du plan projectif joue un rôle central, voir la section 5.4.

5.2. Applications lisses et applications régulières

Le théorème d'approximation de Weierstrass, rencontré au début de leurs études par les étudiants en mathématique, assure que toute fonction continue $[a, b] \subset \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ est approchée uniformément par des fonctions polynomiales. Nous nous intéressons ici à des généralisations de ce théorème.

1. Revoir la proposition 2.2.22 si nécessaire.

Définition 5.2.1. — Soit $U \subset \mathbf{R}^n$ un sous-ensemble ouvert. Nous dirons qu'une fonction à valeurs réelles $U \rightarrow \mathbf{R}$ est *lisse* si elle est différentiable de classe \mathcal{C}^∞ . Plus généralement, étant données deux variétés différentielles V et W de classe \mathcal{C}^∞ , une application $V \rightarrow W$ est *lisse* si elle est différentiable de classe \mathcal{C}^∞ .

Étant données deux variétés différentielles V et W de classe \mathcal{C}^∞ , on note $\mathcal{C}^\infty(V, W)$ l'ensemble des applications lisses de V dans W . On renvoie en appendice pour la définition B.5.21 de *topologie faible* et la définition B.5.22 de *topologie forte* sur $\mathcal{C}^\infty(V, W)$.

Remarque 5.2.2. — Rappelons ici que si V est compacte, la topologie faible (ou \mathcal{C}^∞ -compacte-ouverte) sur $\mathcal{C}^\infty(V, W)$ est équivalente à la topologie forte, [Hir76, Chapitre 2], on l'appelle alors simplement *topologie \mathcal{C}^∞* .

Le théorème de Stone-Weierstrass généralise le théorème d'approximation de Weierstrass. L'énoncé qui nous intéresse est le suivant, voir par exemple [BCR87, Théorème 8.8.6].

Théorème 5.2.3 (Théorème de Stone-Weierstrass)

Toute fonction lisse à valeurs réelles définie sur un voisinage ouvert d'un sous-ensemble compact C de \mathbf{R}^n est approchée sur C , dans la topologie \mathcal{C}^∞ , par des fonctions polynomiales.

Étant données deux variétés algébriques réelles affines V et W , on note $\mathcal{R}(V, W)$ l'espace des applications régulières de V dans W , voir les définitions 1.2.54 et 1.3.4. Si $V \subset \mathbf{R}^n$ et $W \subset \mathbf{R}^m$, il s'agit des applications rationnelles $\mathbf{R}^n \dashrightarrow W$ sans pôle sur V d'après l'exercice 1.2.56(2). Si V et W sont non singulières, elles sont munies chacune d'une structure de variété différentielle de classe \mathcal{C}^∞ d'après la remarque 1.5.28 et l'ensemble $\mathcal{R}(V, W)$ est alors un sous-ensemble de $\mathcal{C}^\infty(V, W)$.

Définition 5.2.4. — On dit qu'une application f appartenant à $\mathcal{C}^\infty(V, W)$ admet une *approximation algébrique* ou est *approchée par des applications régulières* si f appartient à l'adhérence $\overline{\mathcal{R}(V, W)}$ pour la topologie \mathcal{C}^∞ -compacte-ouverte.

Remarque 5.2.5. — Si V est compacte, f admet une approximation algébrique si et seulement si f appartient à $\overline{\mathcal{R}(V, W)}$ pour la topologie forte.

Le théorème de Stone-Weierstrass, rappelé plus haut, implique que si $V = C$ est compacte et si $W = \mathbf{R}^m$, on a densité : $\overline{\mathcal{R}(C, \mathbf{R}^m)} = \mathcal{C}^\infty(C, \mathbf{R}^m)$. Mais en général le sous-espace $\mathcal{R}(V, W)$ n'est pas dense dans $\mathcal{C}^\infty(V, W)$. En effet, les applications régulières sont souvent rares comme l'illustre l'exemple ci-dessous (voir aussi [BKS97] pour d'autres exemples intéressants).

Exemple 5.2.6 (Rareté des applications régulières)

Soient (X, σ) et (Y, τ) des \mathbf{R} -courbes projectives irréductibles de genres respectifs $g(X)$ et $g(Y)$. Supposons que leurs lieux réels $V = X(\mathbf{R})$ et $W = Y(\mathbf{R})$ soient non vides, ce sont alors des variétés algébriques réelles affines compactes d'après le théorème 2.2.17. Toute application régulière de V dans W admet un unique prolongement par une application régulière complexe de X dans Y . En effet d'une part, d'après la proposition 2.2.22 toute application régulière admet un prolongement par une application rationnelle \mathbf{R} -régulière et d'autre part, sur une courbe non singulière toute application rationnelle se prolonge en une application régulière, voir la proposition 1.3.26. On en déduit que si $g(X) < g(Y)$, alors toute application régulière de V dans W est constante en vertu du théorème de Riemann-Hurwitz E.2.18. Par ailleurs, si $g(Y) \geq 2$, c'est-à-dire si Y est de type général, il existe seulement un nombre fini d'applications régulières non constantes de V dans W d'après un théorème de de Franchis [Maz86, page 227].

Grassmanniennes. — On rappelle qu'une variété algébrique réelle est affine si et seulement si elle est quasi-projective. En particulier, une variété algébrique réelle quasi-affine est affine et une variété algébrique réelle projective est affine, voir la proposition 1.3.11.

Exercice 5.2.7 (Modèle affine de $\mathbf{P}^n(\mathbf{R})$). — On a exhibé un modèle affine de $\mathbf{P}^n(\mathbf{R})$ dans la preuve de la proposition 1.2.63. En voici un autre, souvent utile en pratique. Soit $\mathcal{M}_{n+1}(\mathbf{R})$ l'ensemble des matrices carrées $(n+1) \times (n+1)$ à coefficients réels et soit

$$P_n := \left\{ A \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbf{R}) \mid {}^t A = A, A^2 = A, \text{trace}(A) = 1 \right\} .$$

1. Vérifier que P_n est un ensemble algébrique.
2. Montrer que l'application $\mathbf{P}^n(\mathbf{R}) \rightarrow P_n$,

$$(x_0 : x_1 : \cdots : x_n) \mapsto \left(\frac{x_{i-1}x_{j-1}}{x_0^2 + x_1^2 + \cdots + x_n^2} \right)_{\substack{1 \leq i \leq n+1 \\ 1 \leq j \leq n+1}}$$

est un isomorphisme de variétés algébriques réelles.

L'espace projectif $\mathbf{P}^n(\mathbf{R})$ est une variété grassmannienne particulière, on montre plus généralement, voir [BCR87, §3.4.2], que la variété grassmannienne $\mathbf{G}_{n,k}(\mathbf{R})$, voir la définition 3.7.8, est isomorphe à l'ensemble algébrique

$$H_{n,k} := \left\{ A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \mid {}^t A = A, A^2 = A, \text{trace}(A) = k \right\}$$

en tant que variété algébrique réelle (remarquons que $P_n = H_{n+1,1}$). De même, en considérant la variété grassmannienne $\mathbf{G}_{n,k}(\mathbf{C})$ comme une variété algébrique réelle, voir [BCR87, §3.4.2], on peut montrer qu'elle est isomorphe à la variété algébrique réelle

$$H'_{n,k} := \left\{ A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C}) \mid {}^t \bar{A} = A, A^2 = A, \text{trace}(A) = k \right\}$$

qui est un sous-ensemble algébrique réel de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C}) \simeq \mathbf{R}^{2n^2}$ (mais pas un sous-ensemble algébrique complexe de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C}) \simeq \mathbf{C}^{n^2}$!). On a alors un résultat comparable à la proposition 3.7.10.

Proposition 5.2.8. — Soient $n \geq k$ des entiers naturels. L'espace projectif $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ et la grassmannienne $\mathbf{G}_{n,k}(\mathbf{C})$ sont des variétés algébriques réelles affines non singulières compactes.

Démonstration. — Voir [BCR87, Proposition 3.4.8]. □

Remarque 5.2.9. — En notant \mathbf{H} le corps des quaternions, on peut montrer de façon analogue⁽²⁾ que $\mathbf{P}^n(\mathbf{H})$ et $\mathbf{G}_{n,k}(\mathbf{H})$ sont des variétés algébriques réelles affines non singulières compactes.

Si $K = \mathbf{R}, \mathbf{C}$ ou \mathbf{H} , toute variété algébrique sur K quasi-projective est naturellement munie d'une structure de variété algébrique réelle affine⁽³⁾ et on peut généraliser la définition 2.5.10 de fibré algébrique.

Définition 5.2.10. — Soient $K = \mathbf{R}, \mathbf{C}$ ou \mathbf{H} et V une variété algébrique réelle affine. Un fibré K -vectoriel algébrique de rang r sur V est un fibré K -vectoriel (E, π) , voir la définition C.3.5, qui vérifie :

1. L'espace total E est une variété algébrique réelle ;
2. La projection $\pi: E \rightarrow V$ est une application régulière de variétés algébriques réelles ;

2. Bien que la non-commutativité alourdisse l'écriture.

3. Il suffit de séparer chaque équation à coefficients complexes (resp. quaternioniques) en deux (resp. quatre) équations à coefficients réels.

3. Les homéomorphismes $\psi_i: \pi^{-1}(U_i) \xrightarrow{\cong} U_i \times K^r$ sont des isomorphismes biréguliers de variétés algébriques réelles ⁽⁴⁾ ;
4. Le fibré (E, π) est isomorphe à un sous-fibré vectoriel d'un fibré trivial.

Définition 5.2.11 (Fibré universel). — Soient $n \geq k$ des entiers naturels et K un corps. On note

$$E_{n,k} := \{(A, v) \in \mathbf{G}_{n,k}(K) \times K^n \mid Av = v\}$$

et $p_{n,k}: E_{n,k} \rightarrow \mathbf{G}_{n,k}(K)$ la projection canonique. Le fibré K -vectoriel

$$\gamma_{n,k} := (E_{n,k}, p_{n,k})$$

de rang k sur $\mathbf{G}_{n,k}(K)$ est appelé le *fibré universel* sur $\mathbf{G}_{n,k}(K)$.

Proposition 5.2.12. — Soient $n \geq k$ des entiers naturels et $K = \mathbf{R}, \mathbf{C}$ ou \mathbf{H} . Le fibré universel $\gamma_{n,k}$ est un fibré K -vectoriel algébrique de rang k sur $\mathbf{G}_{n,k}(K)$.

Démonstration. — Voir [BCR87, Proposition 12.1.8]. □

Homotopie, approximations et fibrés algébriques. — Si une application lisse entre des variétés algébriques réelles affines est approchée par des applications régulières, alors elle est homotope à une application régulière, voir [BCR87, Corollaire 9.3.6]. Mais la réciproque est fautive comme le prouve l'exemple ci-dessous.

Exemple 5.2.13 (Homotopes \neq approchés). — Soit F_n la courbe de Fermat de degré n ,

$$F_n := \{(x : y : z) \in \mathbf{P}^2(\mathbf{R}) \mid x^n + y^n - z^n = 0\} .$$

D'après l'exemple 5.2.6, si $k > n \geq 2$, alors toute application régulière de F_n dans F_k est constante. En effet, d'après le formule du genre, voir le théorème 1.6.17, le genre d'une complexifiée de F_n est strictement inférieur au genre d'une complexifiée de F_k . Pour les mêmes raisons, si $k \geq 4$, alors pour tout $n \geq 1$, il existe seulement un nombre fini d'applications régulières non constantes de F_n dans F_k . De là, si $n \geq 4$, alors toute application lisse $F_n \rightarrow F_n$ de degré topologique 1 est homotope à une application régulière (l'application identité), mais seulement un nombre fini d'entre elles peuvent être approchées par des applications régulières (à savoir seules celles qui sont déjà régulières).

4. Remarquons que K^r est une variété algébrique réelle de dimension $2r$ si $K = \mathbf{C}$ et $4r$ si $K = \mathbf{H}$.

Lorsque la variété au but est une grassmannienne, on peut transformer un problème d'approximation d'applications lisses en un problème sur les fibrés algébriques.

Théorème 5.2.14. — Soient $K = \mathbf{R}, \mathbf{C}$ ou \mathbf{H} , V une variété algébrique réelle affine compacte non singulière et

$$f: V \rightarrow \mathbf{G}_{n,k}(K)$$

une application lisse. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

1. L'application f est approchée dans la topologie \mathcal{C}^∞ par des applications régulières $V \rightarrow \mathbf{G}_{n,k}(K)$.
2. L'application f est homotope à une application régulière $V \rightarrow \mathbf{G}_{n,k}(K)$.
3. Le fibré K -vectoriel tiré en arrière $f^*(\gamma_{n,k})$ du fibré universel sur $\mathbf{G}_{n,k}(K)$ est topologiquement isomorphe à un fibré K -vectoriel algébrique.

Démonstration. — Voir [BCR87, Théorème 13.3.1]. □

Corollaire 5.2.15. — Soient $K = \mathbf{R}, \mathbf{C}$ ou \mathbf{H} et V une variété algébrique réelle affine compacte non singulière. Si tout fibré K -vectoriel topologique de rang k sur V est topologiquement isomorphe à un fibré K -vectoriel algébrique, alors $\mathcal{R}(V, \mathbf{G}_{n,k}(K))$ est dense dans $\mathcal{C}^\infty(V, \mathbf{G}_{n,k}(K))$

Démonstration. — Immédiat. □

Soit V une variété algébrique réelle affine compacte non singulière. On note $VB^1(V)$ le groupe des classes d'isomorphisme de fibrés vectoriels (topologiques) de rang 1 ⁽⁵⁾. Le morphisme $w_1: VB^1(V) \rightarrow H^1(V; \mathbf{Z}_2)$ qui à une classe d'isomorphisme de fibrés vectoriels de rang 1 associe sa première classe de Stiefel-Whitney ⁽⁶⁾ est un isomorphisme, voir [BCR87, Rappel 12.4.1]. Si V est de dimension n , on peut composer ce morphisme avec le morphisme de dualité de Poincaré pour obtenir un isomorphisme

$$D_V \circ w_1: VB^1(V) \xrightarrow{\cong} H_{n-1}(V; \mathbf{Z}_2) .$$

Théorème 5.2.16. — Soient V une variété algébrique réelle affine compacte non singulière de dimension n et $\alpha \in H_{n-1}(V; \mathbf{Z}_2)$. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

5. VB pour « vector bundle ».

6. $w_1(E)$ est la première classe de Stiefel-Whitney d'un fibré E , voir [MS74, §4].

1. La classe α est l'image par $D_V \circ w_1: VB^1(V) \rightarrow H_{n-1}(V; \mathbf{Z}_2)$ de la classe d'un fibré vectoriel algébrique de rang 1.
2. Il existe un sous-ensemble algébrique $W \subset V$, non singulier et de dimension $n - 1$ dont α est la classe fondamentale (définition 3.7.1).
3. La classe α appartient au sous-groupe des cycles algébriques (définition 3.7.2) $H_{n-1}^{\text{alg}}(V; \mathbf{Z}_2)$.

Démonstration. — Voir [BCR87, Théorème 12.4.8]. □

Corollaire 5.2.17. — L'isomorphisme $w_1: VB^1(V) \xrightarrow{\cong} H^1(V; \mathbf{Z}_2)$ induit un isomorphisme

$$w_1: VB_{\text{alg}}^1(V) \xrightarrow{\cong} H_{\text{alg}}^1(V; \mathbf{Z}_2);$$

et $D_V \circ w_1: VB^1(V) \xrightarrow{\cong} H_{n-1}(V; \mathbf{Z}_2)$ induit un isomorphisme

$$D_V \circ w_1: VB_{\text{alg}}^1(V) \xrightarrow{\cong} H_{n-1}^{\text{alg}}(V; \mathbf{Z}_2).$$

Le théorème suivant permet de transformer un problème d'approximation en un problème sur les cycles algébriques, voir la section 3.7.

Théorème 5.2.18. — Soient n un entier naturel non nul, u_n l'unique générateur du groupe $H^1(\mathbf{P}^n(\mathbf{R}); \mathbf{Z}_2) \simeq \mathbf{Z}_2$ et V une variété algébrique réelle affine compacte non singulière. Pour une application lisse

$$f: V \rightarrow \mathbf{P}^n(\mathbf{R}),$$

les conditions suivantes sont équivalentes :

1. L'application f est approchée dans la topologie C^∞ par des applications régulières $V \rightarrow \mathbf{P}^n(\mathbf{R})$.
2. L'application f est homotope à une application régulière $V \rightarrow \mathbf{P}^n(\mathbf{R})$.
3. Le tiré en arrière $f^*(u_n)$ par l'application induite $f^*: H^1(\mathbf{P}^n(\mathbf{R}); \mathbf{Z}_2) \rightarrow H^1(V; \mathbf{Z}_2)$ appartient au sous-groupe des cycles algébriques $H_{\text{alg}}^1(V; \mathbf{Z}_2)$.

Démonstration. — Grâce au corollaire 5.2.17, l'équivalence entre les deux premières assertions est due au théorème 5.2.14 appliqué à $\mathbf{P}^n(\mathbf{R}) = \mathbf{G}_{n+1,1}(\mathbf{R})$. Pour l'équivalence avec la troisième assertion, il suffit de remarquer que $f^*(u_n) = w_1(f^*(\gamma_{n+1,1}))$ et d'appliquer le théorème 5.2.16. □

5.3. Applications à valeurs dans les sphères

Soit P un point d'une sphère $\mathbf{S}^n \subset \mathbf{R}^{n+1}$. La *projection stéréographique de pôle P* est l'application $\mathbf{S}^n \setminus \{P\} \rightarrow \mathbf{R}^n$ obtenue en associant à tout point Q de \mathbf{S}^n distinct de P le point d'intersection de l'unique droite de \mathbf{R}^{n+1} passant par P et Q avec le sous-espace affine (de dimension n) tangent à \mathbf{S}^n au point antipodal à P .

Proposition 5.3.1. — Soit n un entier naturel,

$$\mathbf{S}^n := \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbf{R}^{n+1} \mid x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2 = 1\}$$

la sphère quadrique de dimension n et P un point de \mathbf{S}^n . La projection stéréographique $\mathbf{S}^n \setminus \{P\} \rightarrow \mathbf{R}^n$ est un isomorphisme de variétés algébriques réelles.

Remarque 5.3.2. — Comparer avec la preuve de la proposition 4.4.10(1b) pour le cas de la sphère de dimension 2.

Démonstration. — Nous fixons deux points sur la sphère : le pôle nord $P_N := (0, \dots, 0, 1) \in \mathbf{S}^n$ et le pôle sud $P_S := (0, \dots, 0, -1) \in \mathbf{S}^n$. Les projections stéréographiques de pôles nord et sud sont données en coordonnées par :

$$\begin{aligned} \varphi_N: \quad \mathbf{S}^n \setminus \{P_N\} &\longrightarrow \mathbf{R}^n \\ (x_1, \dots, x_{n+1}) &\longmapsto \left(\frac{x_1}{1-x_{n+1}}, \dots, \frac{x_n}{1-x_{n+1}} \right) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \varphi_S: \quad \mathbf{S}^n \setminus \{P_S\} &\longrightarrow \mathbf{R}^n \\ (x_1, \dots, x_{n+1}) &\longmapsto \left(\frac{x_1}{1+x_{n+1}}, \dots, \frac{x_n}{1+x_{n+1}} \right) \end{aligned}$$

et leurs réciproques par :

$$\begin{aligned} \mathbf{R}^n &\longrightarrow \mathbf{S}^n \setminus \{P_N\} \\ (y_1, \dots, y_n) &\longmapsto \left(\frac{2y_1}{y_1^2 + \dots + y_n^2 + 1}, \dots, \frac{2y_n}{y_1^2 + \dots + y_n^2 + 1}, \frac{y_1^2 + \dots + y_n^2 - 1}{y_1^2 + \dots + y_n^2 + 1} \right) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \mathbf{R}^n &\longrightarrow \mathbf{S}^n \setminus \{P_S\} \\ (y_1, \dots, y_n) &\longmapsto \left(\frac{2y_1}{y_1^2 + \dots + y_n^2 + 1}, \dots, \frac{2y_n}{y_1^2 + \dots + y_n^2 + 1}, \frac{-y_1^2 - \dots - y_n^2 + 1}{y_1^2 + \dots + y_n^2 + 1} \right). \end{aligned}$$

□

Corollaire 5.3.3. — En tant que variétés algébriques réelles,

1. \mathbf{S}^1 est isomorphe à $\mathbf{P}^1(\mathbf{R})$.
2. \mathbf{S}^2 est isomorphe à $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$.
3. \mathbf{S}^4 est isomorphe à $\mathbf{P}^1(\mathbf{H})$.

Démonstration. — On considère la projection stéréographique de \mathbf{S}^n sur \mathbf{R}^n . Si $n = 1$, remarquons que pour $x \neq 0$, on a $\varphi_N \circ \varphi_S^{-1}(x) = \frac{1}{x}$, et si $n = 2$, pour $(x, y) \neq (0, 0)$, on a $\varphi_N \circ \varphi_S^{-1}(x, y) = (\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2})$ et donc en coordonnées complexes, $z = x + iy$, $\varphi_N \circ \varphi_S^{-1}(z) = \frac{1}{\bar{z}}$. On peut montrer de façon analogue que \mathbf{S}^4 est isomorphe à $\mathbf{P}^1(\mathbf{H})$ à travers l'application

$$(u : v) \mapsto \left(\frac{2u\bar{v}}{|u|^2 + |v|^2}, \frac{|u|^2 - |v|^2}{|u|^2 + |v|^2} \right).$$

□

Proposition 5.3.4. — Soient V une variété algébrique réelle affine compacte non singulière, $n = 1, 2$, ou 4 et

$$f : V \rightarrow \mathbf{S}^n$$

une application lisse. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

1. L'application f est approchée dans la topologie C^∞ par des applications régulières $V \rightarrow \mathbf{S}^n$.
2. L'application f est homotope à une application régulière $V \rightarrow \mathbf{S}^n$.

Démonstration. — L'équivalence est une conséquence immédiate du théorème 5.2.14 grâce au corollaire 5.3.3 qui affirme que pour $n = 1, 2$, ou 4 la sphère \mathbf{S}^n est isomorphe à $\mathbf{P}^1(K) = \mathbf{G}_{2,1}(K)$ avec $K = \mathbf{R}, \mathbf{C}, \mathbf{H}$. □

Applications à valeurs dans \mathbf{S}^1 . — Grâce à l'isomorphisme de variétés algébriques réelles entre \mathbf{S}^1 et $\mathbf{P}^1(\mathbf{R})$, on a une caractérisation homologique de la densité des applications régulières à valeurs dans \mathbf{S}^1 .

Théorème 5.3.5. — Soit V une variété algébrique réelle affine compacte non singulière, de dimension n . Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

1. Le sous-espace $\mathcal{R}(V, \mathbf{S}^1)$ est dense dans $C^\infty(V, \mathbf{S}^1)$.
2. Toute application C^∞ de V dans \mathbf{S}^1 est homotope à une application régulière.
3. $H_{n-1}^{nt}(V; \mathbf{Z}_2) \subset H_{n-1}^{\text{alg}}(V; \mathbf{Z}_2)$ (où $H_{n-1}^{nt}(V; \mathbf{Z}_2)$ est le sous-ensemble de $H_{n-1}(V; \mathbf{Z}_2)$ des classes d'homologie représentées par une hypersurface C^∞ compacte de V dont le fibré normal dans V est trivial).

Démonstration. — Voir [BCR98, Thm.13.3.5]. □

Exemple 5.3.6. — Deux exemples où des considérations purement topologiques permettent de raffiner le critère ci-dessus.

1. Si V est difféomorphe à la bouteille de Klein \mathbf{K}^2 , alors $\mathcal{R}(V, \mathbf{S}^1)$ est dense dans $\mathcal{C}^\infty(V, \mathbf{S}^1)$. En effet, $H_1^{\text{nt}}(V; \mathbf{Z}_2)$ est engendré par la classe duale de Poincaré de la classe du fibré algébrique $\wedge^2 T_V$, voir le théorème 5.2.16.
2. Si V est une surface orientable, alors $\overline{\mathcal{R}(V, \mathbf{S}^1)} = \mathcal{C}^\infty(V, \mathbf{S}^1)$ si et seulement si $H_1(V; \mathbf{Z}_2) = H_1^{\text{alg}}(V; \mathbf{Z}_2)$. En effet, toute courbe \mathcal{C}^∞ de V possède un fibré normal dans V trivial, c'est-à-dire que $H_1^{\text{nt}}(V; \mathbf{Z}_2) = H_1(V; \mathbf{Z}_2)$.

Corollaire 5.3.7. — *Soit V une variété algébrique réelle affine compacte non singulière, de dimension n . Si $H_{n-1}(V; \mathbf{Z}_2) = H_{n-1}^{\text{alg}}(V; \mathbf{Z}_2)$, alors $\mathcal{R}(V, \mathbf{S}^1)$ est dense dans $\mathcal{C}^\infty(V, \mathbf{S}^1)$.*

La réciproque est fautive dès la dimension 2 comme le montre l'exemple ci-dessous.

Exemple 5.3.8 (Bouteille de Klein non totalement algébrique)

Soit Y la variété complexe quotient de l'hypersurface quartique ⁽⁷⁾ non singulière $X := \mathcal{Z}(x^4 + y^4 + z^4 - t^4)$ de $\mathbf{P}^3(\mathbf{C})_{t:x:y:z}$ par l'involution sans point fixe $(t : x : y : z) \mapsto (-x : t : -z : y)$. Soit τ la structure réelle induite sur Y par la restriction de $\sigma_{\mathbf{P}}$ à la surface X . Par construction, $(X, \sigma_{\mathbf{P}}|_X)$ est une \mathbf{R} -surface K3, voir la section 4.5, dont le lieu réel est difféomorphe à \mathbf{S}^2 et (Y, τ) est une \mathbf{R} -surface d'Enriques dont le lieu réel est difféomorphe à la bouteille de Klein \mathbf{K}^2 . Par ailleurs, d'après le théorème 4.5.17, on a $H_1(Y(\mathbf{R}); \mathbf{Z}_2) \neq H_1^{\text{alg}}(Y(\mathbf{R}); \mathbf{Z}_2)$. Pourtant, d'après l'exemple 5.3.6(1), on a $\overline{\mathcal{R}(Y(\mathbf{R}), \mathbf{S}^1)} = \mathcal{C}^\infty(Y(\mathbf{R}), \mathbf{S}^1)$.

Les exemples ci-dessus montrent que différents modèles algébriques réels (définition 5.1.1) d'une même variété différentielle possèdent en général des groupes de cycles algébriques non isomorphes. C'est le cas par exemple pour la bouteille de Klein pour laquelle néanmoins, on a densité du sous-espace $\mathcal{R}(V, \mathbf{S}^1)$ dans $\mathcal{C}^\infty(V, \mathbf{S}^1)$ quel que soit le modèle algébrique. En fait, la bouteille de Klein partage cette dernière propriété avec un tout petit nombre de surfaces.

Théorème 5.3.9. — *Pour une surface \mathcal{C}^∞ connexe compacte M , les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. *Le sous-espace $\mathcal{R}(V, \mathbf{S}^1)$ est dense dans $\mathcal{C}^\infty(V, \mathbf{S}^1)$ pour tout modèle algébrique réel V de M .*

7. Souvent appelée quartique de Fermat dans la littérature.

2. La variété topologique M est difféomorphe à la sphère \mathbf{S}^2 , au plan projectif réel \mathbf{RP}^2 , ou à la bouteille de Klein \mathbf{K}^2 .

Démonstration. — Voir [BK10, Thm.3.4]. □

Applications à valeurs dans \mathbf{S}^2 . — Dans cette sous-section, on considère une variété algébrique réelle non singulière V , ainsi qu'une complexification (définition 2.3.2) non singulière $V_{\mathbf{C}}$ de V . Les résultats considérés ne dépendent pas du choix de la complexification $V_{\mathbf{C}}$ grâce à la proposition 2.3.3. Nous nous concentrons sur l'approximation des applications lisses sur une surface compacte V de dimension de Kodaira négative à valeurs dans la sphère. Ici, dire que $\kappa(V) = -\infty$ c'est dire que $\kappa(V_{\mathbf{C}}) = -\infty$ pour une complexification projective non singulière $V_{\mathbf{C}}$. En effet κ est un invariant birationnel pour les variétés complètes et on peut donc poser $\kappa(V) := \kappa(V_{\mathbf{C}})$ dès que V est compacte et $V_{\mathbf{C}}$ projective.

Dans un premier temps, nous présentons un historique des résultats. Puis dans un second temps, nous donnons des éléments de preuve de ces théorèmes. D'après le théorème 4.4.8, les surfaces algébriques réelles de dimension de Kodaira négative peuvent être regroupées en trois classes, chacune englobant la précédente : les surfaces rationnelles, les surfaces géométriquement rationnelles, les surfaces birationnellement équivalentes à l'espace total d'un fibré en coniques.

Surfaces rationnelles. — Dans le cas où V est une surface rationnelle, voir la définition 1.3.37, compacte et non singulière, J. Bochnak et W. Kucharz ont montré dans les années 1990 que $\overline{\mathcal{R}(V, \mathbf{S}^2)} = \mathcal{C}^\infty(V, \mathbf{S}^2)$ si et seulement si V n'est pas difféomorphe à un tore. Dans le cas du tore, les seules applications qui admettent une approximation algébrique sont homotopiquement triviales. On a même mieux, voir [Kuc99, Th. 1.2] :

Théorème 5.3.10. — *Soient V et W des surfaces algébriques réelles rationnelles compactes non singulières. Alors l'espace $\mathcal{R}(V, W)$ est dense dans l'espace $\mathcal{C}^\infty(V, W)$, à l'exception du cas où V est difféomorphe au tore \mathbf{T}^2 et W est difféomorphe à la sphère \mathbf{S}^2 . Dans ce dernier cas, l'adhérence de $\mathcal{R}(V, W)$ dans $\mathcal{C}^\infty(V, W)$ est formée des applications homotopiquement nulles.*

Démonstration. — Sachant que V est connexe d'après le théorème 4.4.8, il suffit d'appliquer les théorèmes 5.3.18 et 5.3.34 ci-dessous pour prouver le théorème dans le cas où $W = \mathbf{S}^2$. On renvoie à [Kuc99, Th. 1.2] pour une preuve dans le cas où W est une autre surface rationnelle. □

Surfaces géométriquement rationnelles, surfaces de del Pezzo. — Les surfaces rationnelles sont des cas particuliers des surfaces géométriquement rationnelles, voir la définition 1.3.37. D’après le théorème 4.4.8, les surfaces algébriques réelles rationnelles sont en fait exactement les surfaces algébriques réelles géométriquement rationnelles *connexes*. En 2004, on a découvert des surfaces à quatre composantes connexes pour lesquelles les seules applications qui admettent une approximation algébrique sont celles de degré pair, [JPM04, Theorem 0.3]. Ce sont les surfaces algébriques réelles formées de quatre sphères dont une complexification est une surface de del Pezzo de degré 2, voir la définition 4.2.12. Rappelons qu’une surface de del Pezzo est une surface algébrique complexe X de diviseur anti-canonique $-K_X$ ample. Le degré d d’une surface de del Pezzo est son premier nombre de Chern K_X^2 . À l’exception de $\mathbf{P}^1(\mathbf{C}) \times \mathbf{P}^1(\mathbf{C})$, les surfaces de del Pezzo sont des éclatées du plan projectif $\mathbf{P}^2(\mathbf{C})$ en $9 - d$ points. Si l’ensemble Σ des 7 centres d’éclatements est stable par $\sigma_{\mathbf{P}}$, la surface de del Pezzo de degré 2 déterminée par Σ admet deux structures réelles dont l’une a une partie réelle connexe : celle qui provient de la conjugaison complexe de $\mathbf{P}^2(\mathbf{C})$ via les éclatements.

Théorème 5.3.11. — *Soient V une surface algébrique réelle affine non singulière diffeomorphe à la réunion disjointe de 4 sphères dont une complexification $V_{\mathbf{C}}$ est une surface de del Pezzo de degré 2 et*

$$f: V \rightarrow \mathbf{S}^2$$

une application lisse. Alors f est approchée par des applications régulières si et seulement si elle est de degré topologique pair.

En particulier, $\overline{\mathcal{R}(V, \mathbf{S}^2)} \neq \mathcal{C}^\infty(V, \mathbf{S}^2)$.

Démonstration. — Ce résultat est la conjonction des théorèmes 5.3.18 et 5.3.35 ci-dessous. \square

Remarque 5.3.12. — Il existe des surfaces algébriques réelles géométriquement rationnelles formées de quatre sphères pour lesquelles toutes les applications lisses sont approchées par des applications régulières. Ces surfaces admettent une fibration en coniques, voir l’exemple 4.2.8 et le théorème 5.3.13 ci-dessous.

En fait, le tore et les surfaces de del Pezzo du théorème 5.3.11 sont les seules surfaces géométriquement rationnelles pour lesquelles on n’a pas densité : $\overline{\mathcal{R}(V, \mathbf{S}^2)} \neq \mathcal{C}^\infty(V, \mathbf{S}^2)$.

Théorème 5.3.13. — Soit V une surface algébrique réelle géométriquement rationnelle compacte non singulière. L'espace des applications régulières $\mathcal{R}(V, \mathbf{S}^2)$ est dense dans l'espace $C^\infty(V, \mathbf{S}^2)$ des applications C^∞ sauf si V est difféomorphe au tore \mathbf{T}^2 ou si V est difféomorphe à la réunion disjointe de 4 sphères et dont une complexification $V_{\mathbf{C}}$ est une surface de del Pezzo réelle de degré 2 comme dans le théorème 5.3.11.

Démonstration. — Se déduit du corollaire 5.3.17 et des théorèmes 5.3.18 et 5.3.34 ci-dessous. Voir [JPM04, Theorem 0.4] pour plus de détails. \square

Surfaces réglées, fibrations en coniques. — Pour achever la classification des surfaces de dimension de Kodaira négative, il reste à traiter les fibrations en coniques dont la base est de genre non nul et leurs éclatées. En particulier, si $V_{\mathbf{C}}$ possède une fibration en conique de base non rationnelle, $V_{\mathbf{C}}$ n'est pas simplement connexe et V peut contenir plusieurs composantes orientables non sphériques.

Soit V une surface algébrique réelle affine compacte non singulière de dimension de Kodaira négative qui n'est pas géométriquement rationnelle. D'après le théorème 4.3.23(7), V admet alors un réglage réel $\rho: V \rightarrow B$. En effet, l'éclaté d'un fibré en coniques est un réglage, c'est-à-dire une fibration en genre nul. Rappelons qu'une composante connexe de V peut être difféomorphe à une sphère, un tore ou n'importe quelle surface non-orientable, voir le théorème 4.4.14. On note K' l'ensemble des composantes de V qui sont difféomorphes à la bouteille de Klein et dont l'image par ρ est une composante connexe de B .

Théorème 5.3.14. — Soit V une surface algébrique réelle affine compacte non singulière de dimension de Kodaira négative mais non géométriquement rationnelle. Étant donnée une application lisse $f: V \rightarrow \mathbf{S}^2$, les conditions suivantes sont équivalentes :

1. L'application f admet une approximation par des applications régulières.
2. L'application f est homotope à une application régulière.
3. Pour toute composante connexe M de V difféomorphe à un tore, on a $\deg(f|_M) = 0$ et pour toute paire de composantes N, L appartenant à K' , on a $\deg_{\mathbf{Z}_2}(f|_N) = \deg_{\mathbf{Z}_2}(f|_L)$.

Démonstration. — Voir [Man06, Theorem 1.1]. \square

Applications à valeurs dans les surfaces rationnelles. — Nous concluons cette énumération par une généralisation du théorème 5.3.10.

Théorème 5.3.15. — *Soient V et W des surfaces algébriques réelles affines compactes connexes non singulières telles que $\kappa(V) = -\infty$ et W est rationnelle. Alors l'espace $\mathcal{R}(V, W)$ est dense dans l'espace $\mathcal{C}^\infty(V, W)$, à l'exception du cas où V est difféomorphe au tore \mathbf{T}^2 et W est difféomorphe à la sphère \mathbf{S}^2 . Dans ce dernier cas, l'adhérence de $\mathcal{R}(V, W)$ dans $\mathcal{C}^\infty(V, W)$ est formée des applications homotopiquement nulles.*

Démonstration. — Voir [Man06, Theorem 1.2]. □

Fibrés \mathbf{C} -vectoriels algébriques. — Nous passons maintenant à la preuve des résultats énumérés ci-dessus. Soit V une variété algébrique réelle affine, $V_{\mathbf{C}}$ une complexification non singulière de V et $i: V \hookrightarrow V_{\mathbf{C}}$ l'inclusion. D'après le corollaire 2.5.16, un fibré \mathbf{R} -vectoriel topologique \mathcal{L} sur V (définition C.3.5) est algébrique (définition 5.2.10) si son tensorisé par \mathbf{C} est la restriction à V d'un fibré \mathbf{C} -vectoriel algébrique \mathcal{E} sur $V_{\mathbf{C}}$ muni d'une structure réelle : $\mathcal{L} \otimes \mathbf{C} \simeq \mathcal{E}|_V$.

On note $VB_{\mathbf{C}}^1(V_{\mathbf{C}})$ le groupe des classes d'isomorphisme de \mathbf{C} -fibrés vectoriels (topologiques) de rang 1 sur $V_{\mathbf{C}}$. On note $H_{\mathbf{C}\text{-alg}}^2(V; \mathbf{Z})$ le sous-groupe de $H^2(V; \mathbf{Z})$ formé des classes des restrictions à V des fibrés \mathbf{C} -vectoriels algébriques de rang 1 sur $V_{\mathbf{C}}$. Autrement dit, $H_{\mathbf{C}\text{-alg}}^2(V; \mathbf{Z})$ est formé par les images des classes de fibrés algébriques par l'application de restriction $VB_{\mathbf{C}}^1(V_{\mathbf{C}}) \xrightarrow{c_1} H^2(V_{\mathbf{C}}; \mathbf{Z}) \xrightarrow{i^*} H^2(V; \mathbf{Z})$. Remarquons que si un fibré est muni d'une structure réelle comme \mathcal{E} ci-dessus, la classe de sa restriction à V est de 2-torsion, voir la proposition 5.3.23, et que le groupe $H_{\mathbf{C}\text{-alg}}^2(V; \mathbf{Z})$ contient aussi les classes de restrictions de fibrés \mathbf{C} -vectoriels algébriques de rang 1 sur V qui ne possèdent pas de structure réelle. On note

$$\Gamma(V) = H^2(V; \mathbf{Z}) / H_{\mathbf{C}\text{-alg}}^2(V; \mathbf{Z})$$

le groupe quotient. Le groupe $H_{\mathbf{C}\text{-alg}}^2(V; \mathbf{Z})$ ne dépend pas du choix d'une complexification non singulière $V_{\mathbf{C}}$ comme on peut le déduire de la proposition 2.3.3 (ou se reporter à [BBK89]). Le groupe $\Gamma(V)$ n'en dépend donc pas non plus. L'introduction du groupe $H_{\mathbf{C}\text{-alg}}^2(V; \mathbf{Z})$ est motivé par le résultat ci-dessus, que l'on peut comparer avec le théorème 5.2.18.

Théorème 5.3.16. — *Soient V une variété algébrique réelle affine compacte non singulière et s_2 un générateur du groupe $H^2(\mathbf{S}^2; \mathbf{Z}) \simeq \mathbf{Z}$. Pour une application lisse*

$$f: V \rightarrow \mathbf{S}^2,$$

les conditions suivantes sont équivalentes :

1. L'application f est approchée dans la topologie \mathcal{C}^∞ par des applications régulières $V \rightarrow \mathbf{S}^2$.
2. L'application f est homotope à une application régulière $V \rightarrow \mathbf{S}^2$.
3. Le tiré en arrière $f^*(s_2)$ par l'application induite $f^*: H^2(\mathbf{S}^2; \mathbf{Z}) \rightarrow H^2(V; \mathbf{Z})$ appartient au sous-groupe $H_{\mathbf{C}\text{-alg}}^2(V; \mathbf{Z})$.

Démonstration. — Se déduit directement du théorème 5.2.14 et du corollaire 5.3.3. \square

Corollaire 5.3.17. — Soit V une variété algébrique réelle affine compacte non singulière telle que tout fibré \mathbf{C} -vectoriel topologique de rang 1 sur V est topologiquement isomorphe à un fibré \mathbf{C} -vectoriel algébrique. Alors $\mathcal{R}(V, \mathbf{S}^2)$ est dense dans $\mathcal{C}^\infty(V, \mathbf{S}^2)$ pour la topologie \mathcal{C}^∞ . Autrement dit si $\Gamma(V) = 0$, alors $\overline{\mathcal{R}(V, \mathbf{S}^2)} = \mathcal{C}^\infty(V, \mathbf{S}^2)$.

Si V est connexe, nous disposons d'une réciproque.

Théorème 5.3.18. — Soit V une variété algébrique réelle affine compacte connexe non singulière. Alors $\mathcal{R}(V, \mathbf{S}^2)$ est dense dans $\mathcal{C}^\infty(V, \mathbf{S}^2)$ pour la topologie \mathcal{C}^∞ si et seulement si tout fibré \mathbf{C} -vectoriel topologique de rang 1 sur V est topologiquement isomorphe à un fibré \mathbf{C} -vectoriel algébrique.

Autrement dit $\overline{\mathcal{R}(V, \mathbf{S}^2)} = \mathcal{C}^\infty(V, \mathbf{S}^2)$ si et seulement si $\Gamma(V) = 0$.

Remarque 5.3.19. — Remarquons que $\Gamma(V) = 0$, c'est-à-dire $H_{\mathbf{C}}^2(V; \mathbf{Z}) = H_{\mathbf{C}\text{-alg}}^2(V; \mathbf{Z})$ se traduit par $VB_{\mathbf{C}}^1(V) = VB_{\mathbf{C}\text{-alg}}^1(V)$ à travers l'application première classe de Chern.

Démonstration. — Voir [BCR87, 13.3.11]. \square

Éclatements et applications régulières. — Pour calculer le groupe $\Gamma(V)$ d'une surface algébrique réelle géométriquement rationnelle V on procède en deux temps. Tout d'abord on montre la proposition 5.3.20 ci-dessous qui permet de contrôler le comportement du groupe quotient $\Gamma(V)$ lors d'un éclatement $\pi: B_P V \rightarrow V$ centré en un point $P \in V$. On calcule ensuite $\Gamma(V_0)$ pour les différents modèles minimaux V_0 possibles d'une surface algébrique réelle géométriquement rationnelle donnée V . On montre finalement que si la variété V est de plus minimale et non connexe, alors $\Gamma(V) = 0$ ou $\Gamma(V) = \mathbf{Z}_2$.

Proposition 5.3.20. — Soit V une surface algébrique réelle géométriquement rationnelle compacte non singulière telle que $\Gamma(V) = 0$ ou $\Gamma(V) = \mathbf{Z}_2$, alors $\Gamma(B_P V) = 0$ pour tout éclatement $B_P V$ centré en un point P de V .

Avant de donner la preuve de la proposition 5.3.20, nous avons besoin de résultats auxiliaires. Soit $i: V \hookrightarrow V_{\mathbf{C}}$ l'injection canonique d'une surface algébrique réelle affine compacte non singulière dans une complexification projective non singulière.

Lemme 5.3.21. — *Si le genre géométrique de $V_{\mathbf{C}}$ est nul, on a alors $H_{\mathbf{C}\text{-alg}}^2(V; \mathbf{Z}) = \text{Im } i^*$. Si de plus $V_{\mathbf{C}}$ a une irrégularité nulle, alors $H^2(V_{\mathbf{C}}; \mathbf{Z}) \simeq \text{Pic}(V_{\mathbf{C}})$.*

Démonstration. — Par définition, nous avons $H_{\mathbf{C}\text{-alg}}^2(V; \mathbf{Z}) \subseteq \text{Im } i^*$. En insérant l'isomorphisme $\text{Pic}(V_{\mathbf{C}}) \simeq H^1(V_{\mathbf{C}}, \mathcal{O}_{V_{\mathbf{C}}}^*)$ dans la suite exacte longue associée à la suite exacte de l'exponentielle, voir la proposition D.6.3, nous obtenons la suite exacte

$$\cdots \rightarrow H^1(V_{\mathbf{C}}, \mathcal{O}_{V_{\mathbf{C}}}) \rightarrow \text{Pic}(V_{\mathbf{C}}) \xrightarrow{c_1} H^2(V_{\mathbf{C}}; \mathbf{Z}) \rightarrow H^2(V_{\mathbf{C}}, \mathcal{O}_{V_{\mathbf{C}}}) \rightarrow \cdots$$

Nous en tirons immédiatement la conclusion en rappelant la définition de $p_g(V_{\mathbf{C}}) = \dim H^2(V_{\mathbf{C}}, \mathcal{O}_{V_{\mathbf{C}}})$ et $q(V_{\mathbf{C}}) = \dim H^1(V_{\mathbf{C}}, \mathcal{O}_{V_{\mathbf{C}}})$. \square

Corollaire 5.3.22. — *Si V est une surface algébrique réelle géométriquement rationnelle compacte non singulière, alors $H_{\mathbf{C}\text{-alg}}^2(V; \mathbf{Z}) = \text{Im } i^*$.*

En d'autres termes, pour une surface algébrique réelle géométriquement rationnelle compacte non singulière V , le groupe quotient $\Gamma(V)$ est trivial si et seulement si $i^*: H^2(V_{\mathbf{C}}; \mathbf{Z}) \rightarrow H^2(V; \mathbf{Z})$ est surjectif.

Du fait que $B_P V$ est l'éclaté réel d'une surface algébrique réelle géométriquement rationnelle, c'est aussi une surface algébrique réelle géométriquement rationnelle et $\Gamma(B_P V) = 0$ si et seulement si le morphisme $i^*: H^2(B_P V_{\mathbf{C}}; \mathbf{Z}) \rightarrow H^2(B_P V; \mathbf{Z})$ est surjectif d'après le corollaire 5.3.22.

On note $\beta: H^1(V; \mathbf{Z}_2) \rightarrow H^2(V; \mathbf{Z})$ le morphisme de *Bockstein* induit en cohomologie par la suite exacte

$$(5.1) \quad 0 \rightarrow \mathbf{Z} \xrightarrow{\times 2} \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z}_2 \rightarrow 0.$$

Proposition 5.3.23. — *Soit V une surface algébrique réelle géométriquement rationnelle compacte non singulière. Alors*

$$\beta(H^1(V; \mathbf{Z}_2)) \subseteq H_{\mathbf{C}\text{-alg}}^2(V; \mathbf{Z}).$$

Démonstration. — Rappelons que le groupe des classes d'isomorphisme de fibrés \mathbf{C} -vectoriels topologiques de rang 1 sur V est noté $VB_{\mathbf{C}}^1(V)$. On a un

diagramme commutatif, voir par exemple [JP00] :

$$\begin{array}{ccccc} \text{Pic}(V_{\mathbf{C}}) & \xrightarrow{\mathcal{L} \mapsto \mathcal{L}|_V} & VB_{\mathbf{C}}^1(V) & \xleftarrow{\mathcal{L} \mapsto \mathcal{L} \otimes \mathbf{C}} & VB_{\text{alg}}^1(V) \\ c_1 \downarrow & & c_1 \downarrow & & w_1 \downarrow \\ H^2(V_{\mathbf{C}}; \mathbf{Z}) & \xrightarrow{i^*} & H^2(V; \mathbf{Z}) & \xleftarrow{\beta} & H^1(V; \mathbf{Z}_2) . \end{array}$$

Ici w_1 est le morphisme induit par la première *classe de Stiefel-Whitney*, et c_1 est le morphisme induit par la première *classe de Chern*.

Nous observons que le morphisme de restriction $\mathcal{L} \mapsto \mathcal{L}|_V$ de la première ligne est surjectif et que les morphismes c_1 et w_1 sont également surjectifs dans ce cas [JP00, Proof of Claim 2]. Rappelons aussi que d'après le corollaire 5.3.22, on a $H_{\mathbf{C}\text{-alg}}^2(V; \mathbf{Z}) = i^*(H^2(V_{\mathbf{C}}; \mathbf{Z}))$. \square

Remarque 5.3.24. — Dans la preuve précédente, nous avons utilisé le fait que les morphismes $w_1: VB_{\text{alg}}^1(V) \rightarrow H^1(V; \mathbf{Z}_2)$ et $c_1: \text{Pic}(V_{\mathbf{C}}) \rightarrow H^2(V_{\mathbf{C}}; \mathbf{Z})$ sont surjectifs. Ceci n'est pas vrai pour une surface projective non singulière générale car la surjectivité de c_1 est perdue dès que $p_g(V_{\mathbf{C}}) > 0$. En effet, $\dim H^{2,0}(V_{\mathbf{C}}) = p_g(V_{\mathbf{C}})$ or l'image de c_1 est contenue dans $H^{1,1}(V_{\mathbf{C}})$, voir le théorème D.9.3. Les surfaces K3, les surfaces abéliennes, les surfaces bielliptiques, la plupart des surfaces elliptiques et la plupart des surfaces de type général satisfont $p_g > 0$.

Notons V_1, V_2, \dots, V_s les composantes connexes de V . Et supposons par commodité que le centre P de l'éclatement appartient à V_1 . La surface éclatée $B_P V$ est diffeomorphe à la réunion disjointe $B_P V_1 = V_1 \# \mathbf{RP}^2$ et des autres composantes connexes de V .

Proposition 5.3.25. — *À travers l'identification*

$$H^2(B_P V; \mathbf{Z}) \simeq H^2(B_P V_1; \mathbf{Z}) \oplus H^2(V_2; \mathbf{Z}) \oplus \dots \oplus H^2(V_s; \mathbf{Z}),$$

on obtient l'inclusion $H^2(B_P V_1; \mathbf{Z}) \subseteq H_{\mathbf{C}\text{-alg}}^2(B_P V; \mathbf{Z})$.

Démonstration. — Considérons la suite exacte en cohomologie induite par la multiplication par 2 (voir la suite exacte (5.1) précédant la preuve de la proposition 5.3.23)

$$\dots \rightarrow H^1(B_P V; \mathbf{Z}_2) \xrightarrow{\beta} H^2(B_P V; \mathbf{Z}) \xrightarrow{\times 2} H^2(B_P V; \mathbf{Z}) \rightarrow \dots$$

Comme $B_P V_1$ est connexe et non orientable, le groupe $H^2(B_P V_1; \mathbf{Z})$ est isomorphe à \mathbf{Z}_2 d'après le théorème B.5.7 et le corollaire B.4.2. Il est donc contenu dans le noyau du morphisme $\times 2$. De là, le sous-groupe $H^2(B_P V_1; \mathbf{Z})$ de $H^2(B_P V; \mathbf{Z})$ est contenu dans l'image du morphisme de

Bockstein $\beta: H^1(B_P V; \mathbf{Z}_2) \rightarrow H^2(B_P V; \mathbf{Z})$. On conclut grâce à la proposition 5.3.23. \square

Remarque 5.3.26. — Soit V une surface algébrique réelle affine compacte non singulière. Si l'homologie d'une complexification non singulière $V_{\mathbf{C}}$ est sans 2-torsion, alors $H_*(V_{\mathbf{C}}; \mathbf{Z}) \otimes \mathbf{Z}_2 \simeq H_*(V_{\mathbf{C}}; \mathbf{Z}_2)$, voir Section B.4, d'où $H^*(V_{\mathbf{C}}; \mathbf{Z}) \otimes \mathbf{Z}_2 \simeq H^*(V_{\mathbf{C}}; \mathbf{Z}_2)$. Par ailleurs, on a $H^2(V; \mathbf{Z}) \otimes \mathbf{Z}_2 \simeq H^2(V; \mathbf{Z}_2) \simeq (\mathbf{Z}_2)^s$ où s est le nombre de composantes connexes de la surface topologique compacte V .

Comme plus haut, nous notons i l'inclusion de V dans sa complexification $V_{\mathbf{C}}$ (resp. $B_P V$ dans $B_P V_{\mathbf{C}}$) et posons $H_{\mathbf{C}\text{-alg}}^2(V; \mathbf{Z}_2) = i^*(H_{\text{alg}}^2(V_{\mathbf{C}}; \mathbf{Z}_2))$. Observons que $H_{\mathbf{C}\text{-alg}}^2(V; \mathbf{Z}_2) = i^*(H^2(V_{\mathbf{C}}; \mathbf{Z}_2)) \simeq H_{\mathbf{C}\text{-alg}}^2(V; \mathbf{Z}) \otimes \mathbf{Z}_2$. Au vu des remarques qui précèdent, la proposition 5.3.25 implique le résultat suivant :

Corollaire 5.3.27. — Soient V_1 une composante connexe de V et Q un point de $B_P V_1$. Alors la classe duale de Poincaré $D_{B_P V}^{-1}([Q])$ appartient à $H_{\mathbf{C}\text{-alg}}^2(B_P V; \mathbf{Z}_2)$.

Remarque 5.3.28. — Le corollaire 5.3.27 est en fait valable pour toute surface algébrique réelle projective non singulière V . Soient P un point réel de V , $E = \pi^{-1}(P)$ la courbe exceptionnelle et \mathcal{E} le fibré en droites complexes associé à $E_{\mathbf{C}}$, alors $i^*(c_1(\mathcal{E})) = c_1(\mathcal{L} \otimes \mathbf{C})$, où \mathcal{L} est le fibré en droites réelles associé à E .

D'après la théorie des classes caractéristiques, voir [MS74, Exercice 15-D], on a $c_1(\mathcal{L} \otimes \mathbf{C}) = \beta(w_1(\mathcal{L}))$. La réduction modulo 2 de $\beta(w_1(\mathcal{L}))$ est égale à $D_{B_P V}^{-1}([Q])$, l'élément de $H^2(B_P V; \mathbf{Z}_2)$ engendrant le sous-espace $H^2(B_P V_1; \mathbf{Z}_2)$. De là $i^*([c_1(\mathcal{E})]_2) = [\beta(w_1(\mathcal{L}))]_2 = D_{B_P V}^{-1}([Q])$.

Le corollaire suivant est aussi valable, avec la même preuve, pour une surface algébrique réelle projective non singulière quelconque.

Corollaire 5.3.29. — Si $D_V^{-1}([P])$ appartient à $H_{\mathbf{C}\text{-alg}}^2(V; \mathbf{Z}_2)$, alors $H_{\mathbf{C}\text{-alg}}^2(B_P V; \mathbf{Z}_2) = \pi^*(H_{\mathbf{C}\text{-alg}}^2(V; \mathbf{Z}_2))$. Dans le cas contraire, on a une décomposition canonique

$$H_{\mathbf{C}\text{-alg}}^2(B_P V; \mathbf{Z}_2) = \pi^*(H_{\mathbf{C}\text{-alg}}^2(V; \mathbf{Z}_2)) \oplus D_{B_P V}^{-1}([Q]).$$

Démonstration. — Du fait que $\pi: B_P V \rightarrow V$ est l'éclatement centré en P , π est un morphisme qui induit un isomorphisme de $B_P V \setminus E$ sur $V \setminus \{P\}$. Comme

V et $B_P V$ sont des surfaces, π induit un isomorphisme $\pi^*: H^2(V; \mathbf{Z}_2) \rightarrow H^2(B_P V; \mathbf{Z}_2)$. Comme π est un morphisme, l'isomorphisme π^* satisfait

$$\pi^*(H_{\mathbf{C}\text{-alg}}^2(V; \mathbf{Z}_2)) \subseteq H_{\mathbf{C}\text{-alg}}^2(B_P V; \mathbf{Z}_2) .$$

Pour conclure, rappelons qu'on peut identifier

$$\pi^*(H_{\mathbf{C}\text{-alg}}^2(V; \mathbf{Z}_2) \cap (H^2(V_2; \mathbf{Z}_2) \oplus \cdots \oplus H^2(V_s; \mathbf{Z}_2)))$$

avec

$$H_{\mathbf{C}\text{-alg}}^2(B_P V; \mathbf{Z}_2) \cap (H^2(V_2; \mathbf{Z}_2) \oplus \cdots \oplus H^2(V_s; \mathbf{Z}_2))$$

et que $\pi^*(D_V^{-1}([P])) = D_{B_P V}^{-1}([Q])$. □

Proposition 5.3.30. — *Soit V une surface algébrique réelle affine compacte non singulière. Soit $i: V \hookrightarrow V_{\mathbf{C}}$ l'inclusion dans une complexification projective non singulière. Alors le morphisme $i^*: H^2(V_{\mathbf{C}}; \mathbf{Z}) \rightarrow H^2(V; \mathbf{Z})$ est surjectif si et seulement si $i^*: H^2(V_{\mathbf{C}}; \mathbf{Z}_2) \rightarrow H^2(V; \mathbf{Z}_2)$ est surjectif.*

Démonstration. — Une surface algébrique réelle affine non singulière compacte V satisfait $2H^2(V; \mathbf{Z}) \subseteq \text{Im}(i^*)$ d'après [JP00, Claim 1, proof of Theorem 1.1]. Pour conclure, il suffit de considérer la remarque 5.3.26 et le lemme d'algèbre linéaire ci-dessous.

Lemme 5.3.31. — *Soient A et B des groupes abéliens et soit $h: A \rightarrow B$ un morphisme de groupes. Notons $h_2: A_2 \rightarrow B_2$ le morphisme obtenu par réduction modulo 2. Supposons que $2B \subseteq \text{Im}(h)$. Alors si le morphisme h_2 est surjectif, h l'est aussi.*

□

Proposition 5.3.32. — *Soit V une surface algébrique réelle affine compacte non singulière et $V_{\mathbf{C}}$ une complexification projective non singulière. L'éclaté $B_P V_{\mathbf{C}}$ de $V_{\mathbf{C}}$ en un point P de $V \subset V_{\mathbf{C}}$ est alors une complexification projective non singulière de $B_P V$. On suppose que le morphisme de restriction*

$$i^*: H^2(V_{\mathbf{C}}; \mathbf{Z}_2) \rightarrow H^2(V; \mathbf{Z}_2)$$

est surjectif. Alors le morphisme correspondant

$$i^*: H^2(B_P V_{\mathbf{C}}; \mathbf{Z}_2) \rightarrow H^2(B_P V; \mathbf{Z}_2)$$

est surjectif aussi.

Démonstration. — Soient $P_j \in V_j$, $j = 1, \dots, s$ des points tels que

$$D_V^{-1}([P_1]), D_V^{-1}([P_2]), \dots, D_V^{-1}([P_s])$$

engendrent $H^2(V; \mathbf{Z}_2)$. Du fait que P appartient à V_1 et que $B_P V$ est l'éclaté de V centré en P , $D_{B_P V}^{-1}([P_2]), \dots, D_{B_P V}^{-1}([P_s])$ appartiennent à $H^2(B_P V; \mathbf{Z}_2)$. De plus, du fait que le morphisme de restriction i^* est surjectif par hypothèse, les classes $D_{B_P V}^{-1}([P_2]), \dots, D_{B_P V}^{-1}([P_s])$ appartiennent aussi à l'image $i^*(H^2(B_P V_{\mathbf{C}}; \mathbf{Z}_2))$. On conclut grâce au corollaire 5.3.29. \square

Preuve de la proposition 5.3.20. — Cas 1. Si $\Gamma(V) = 0$, alors $i^*: H^2(V_{\mathbf{C}}; \mathbf{Z}) \rightarrow H^2(V; \mathbf{Z})$ est surjective. D'après la proposition 5.3.30, $i^*: H^2(V_{\mathbf{C}}; \mathbf{Z}_2) \rightarrow H^2(V; \mathbf{Z}_2)$ est aussi surjective ainsi que $i^*: H^2(B_P V_{\mathbf{C}}; \mathbf{Z}_2) \rightarrow H^2(B_P V; \mathbf{Z}_2)$, voir la proposition 5.3.32. De là $i^*: H^2(B_P V_{\mathbf{C}}; \mathbf{Z}) \rightarrow H^2(B_P V; \mathbf{Z})$ est surjective d'après la proposition 5.3.30 et finalement $\Gamma(B_P V) = 0$.

Cas 2. Si $\Gamma(V) = \mathbf{Z}_2$, on peut facilement vérifier que $\Gamma_2(V) = \mathbf{Z}_2$ (on a noté $\Gamma_2(V) = H^2(V; \mathbf{Z}_2)/H_{\mathbf{C}\text{-alg}}^2(V; \mathbf{Z}_2)$). Si l'on considère les deux cas possibles du corollaire 5.3.29, il est aisé de voir que $\Gamma_2(B_P V) = 0$, donc $i^*: H^2(B_P V_{\mathbf{C}}; \mathbf{Z}_2) \rightarrow H^2(B_P V; \mathbf{Z}_2)$ est surjective. La fin de la preuve est identique au cas précédent. \square

Corollaire 5.3.33. — *Soit V une surface algébrique réelle géométriquement rationnelle compacte non singulière. Si V est non connexe, alors l'espace $\mathcal{R}(B_P V, \mathbf{S}^2)$ est dense dans l'espace $\mathcal{C}^\infty(B_P V, \mathbf{S}^2)$ pour tout éclatement $B_P V$ centré en un point P de V .*

Calcul de $\Gamma(V)$. — Le théorème 5.3.18 réduit le théorème 5.3.13 à une conséquence du théorème suivant.

Théorème 5.3.34. — *Soit V une surface algébrique réelle géométriquement rationnelle compacte non singulière. Alors*

$$\Gamma(V) = \begin{cases} \mathbf{Z} & \text{si } V \approx \mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^1 \\ \mathbf{Z}_2 & \text{si } V \text{ est comme dans le théorème 5.3.35} \\ 0 & \text{dans tous les autres cas.} \end{cases}$$

Résumé de preuve. — Comme on l'a vu avec la proposition 5.3.20, le quotient $\Gamma(V)$ n'est pas un invariant birationnel.

Pour prouver le théorème, on utilise la classification des modèles relativement minimaux sur \mathbf{R} , voir le théorème 4.3.23. En plus du cas connu où V est connexe, voir les théorèmes 5.3.10 et 5.3.18, ces modèles sont : les fibrés en coniques et certaines surfaces de del Pezzo réelles de degré 2 et 1. Le groupe $\Gamma(V)$

pour chaque cas est déterminé par le théorème 5.3.35, la proposition 5.3.42 et la proposition 5.3.43. \square

Le théorème 5.3.11 est une conséquence du théorème suivant.

Théorème 5.3.35. — *Soit V une surface algébrique réelle affine non singulière. Si V est difféomorphe à la réunion disjointe de 4 sphères et admet une complexification $V_{\mathbf{C}}$ qui est une surface de del Pezzo de degré 2, alors $\Gamma(V) = \mathbf{Z}_2$.*

Remarque 5.3.36. — Un énoncé équivalent au théorème 5.3.35 est le suivant. Soit (X, σ) une \mathbf{R} -surface projective non singulière telle que $X(\mathbf{R}) \approx \sqcup^4 \mathbf{S}^2$ et dont un modèle \mathbf{R} -minimal (X^0, σ^0) est une surface de del Pezzo réelle de degré 2, alors $\Gamma(X(\mathbf{R})) = \mathbf{Z}_2$.

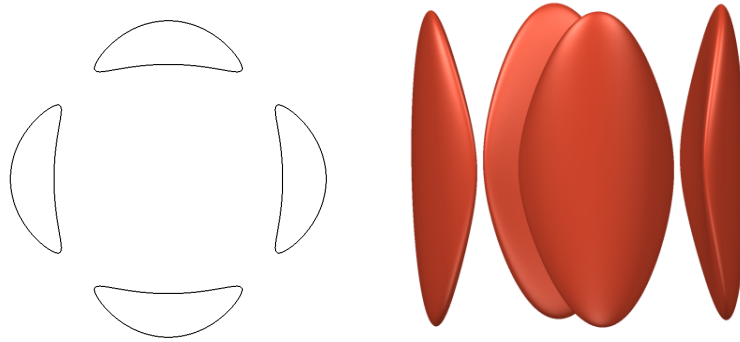


FIGURE 5.1. Surface de del Pezzo de degré 2 définie par l'équation (4.6), page 233. Voir aussi la figure 4.4.

Avant de donner la preuve du théorème, nous avons besoin de résultats intermédiaires. Soit $i: V \hookrightarrow V_{\mathbf{C}}$ l'injection canonique d'une surface algébrique réelle affine compacte non singulière dans une complexification projective non singulière. Les variétés différentielles $V_{\mathbf{C}}$ et V sont compactes et $V_{\mathbf{C}}$ est orientable. Si V est orientable aussi, nous pouvons définir le morphisme de Gysin $i_!$ via le diagramme commutatif :

$$(5.2) \quad \begin{array}{ccc} H^2(V_{\mathbf{C}}; \mathbf{Z}) & \xrightarrow{i^*} & H^2(V; \mathbf{Z}) \\ D_{V_{\mathbf{C}}}^{-1} \uparrow \simeq & & D_V^{-1} \uparrow \simeq \\ H_2(V_{\mathbf{C}}; \mathbf{Z}) & \xrightarrow{i_!} & H_0(V; \mathbf{Z}) \end{array}$$

où $D_{V_{\mathbf{C}}}$ (resp. D_V) est l'isomorphisme de dualité de Poincaré, voir la proposition 3.1.8, pour la variété topologique compacte orientée $V_{\mathbf{C}}$ (resp. V).

Remarque 5.3.37. — Si V est non orientable, on peut raisonner de façon similaire à condition d'utiliser \mathbf{Z}_2 comme groupe des coefficients.

Lemme 5.3.38. — Soit S une sous-variété différentielle fermée de dimension 2 de $V_{\mathbf{C}}$ transverse à V , alors

$$i_!([S]) = [S \pitchfork V] .$$

Démonstration. — Voir la section B.7. □

On peut donc décrire l'image de la classe fondamentale de certaines courbes complexes par le morphisme de Gysin $i_! : H_2(V_{\mathbf{C}}; \mathbf{Z}) \rightarrow H_0(V; \mathbf{Z})$ de la façon suivante : pour la structure de variété différentielle sous-jacente, $V_{\mathbf{C}}$ est une variété de dimension 4 et V est une sous-variété de dimension 2. Soit $L \subset V_{\mathbf{C}}$ une courbe algébrique complexe. En dehors d'un nombre fini de points, L est aussi une sous-variété topologique de dimension 2 de $V_{\mathbf{C}}$. Si L est transverse à V dans $V_{\mathbf{C}}$, on a

$$i_!([L]) = [L \pitchfork V] .$$

Proposition 5.3.39. — Soit V une surface algébrique réelle géométriquement rationnelle compacte non singulière. Si V est orientable, alors

$$\Gamma(V) \simeq H_0(V; \mathbf{Z}) / \text{Im } i_! .$$

Démonstration. — D'après le diagramme (5.2), page 330, on a $\text{Im } i^* \simeq \text{Im } i_!$ et l'isomorphisme se déduit du corollaire 5.3.22. □

Résumé de preuve du théorème 5.3.35. — On veut calculer l'image de $i_!$. Si (X, σ) est une \mathbf{R} -surface de del Pezzo de degré 2, le groupe d'homologie $H_2(X; \mathbf{Z})$ est engendré par les classes des courbes exceptionnelles et par la section hyperplane. Le morphisme anti-canonique $\varphi_{-K_X} : X \rightarrow \mathbf{P}^2(\mathbf{C})$ est un revêtement double du plan ramifié le long d'une \mathbf{R} -courbe quartique Δ . Les (-1) -courbes de X sont envoyées par φ_{-K_X} sur les bitangentes de Δ . Lorsque $X(\mathbf{R}) \approx \sqcup 4\mathbf{S}^2$, la \mathbf{R} -courbe $(\Delta, \sigma_{\mathbf{P}}|_{\Delta})$ est maximale, c'est-à-dire que $\Delta(\mathbf{R}) \approx \sqcup 4\mathbf{S}^1$, et toutes les bitangentes sont réelles.

Finalement, on montre que les (-1) -courbes de X sont non réelles et transverses à $X(\mathbf{R})$ dans X . On obtient la conclusion par la connaissance, [Zeu74], des configurations de bitangentes à une quartique plane. On trouvera les détails de cette preuve dans [JPM04, §5]. □

Exemple 5.3.40. — Soit $(\Delta, \sigma_{\mathbf{P}}|_{\Delta}) \subset (\mathbf{P}^2(\mathbf{C}), \sigma_{\mathbf{P}})$ une \mathbf{R} -courbe plane non singulière de degré pair et soit $\varphi: (X, \sigma) \rightarrow (\mathbf{P}^2(\mathbf{C}), \sigma_{\mathbf{P}})$ l'un des deux revêtements doubles réels ramifié le long de Δ (voir la preuve du théorème 3.3.14). Soit L une \mathbf{R} -droite tangente à Δ et $P \in \Delta \cap L$ un point de tangence simple. Dans un voisinage analytique de P , la surface X est définie par l'une des deux équations $z^2 = \pm(y - x^2)$ et dans le plan $z = 0$, les courbes Δ et L sont déterminées par les équations $y = x^2$ et $y = 0$.

Posons $C := \varphi^{-1}(L)$ l'image réciproque de L dans X . Localement analytiquement au voisinage de P dans X , la courbe complexe C a pour équation $\{y = 0, (z - x)(z + x) = 0\}$ ou $\{y = 0, (z - ix)(z + ix) = 0\}$. Globalement, C peut être réductible ou irréductible. Supposons que la courbe soit réductible. Elle se décompose alors sous la forme $C = E + \tau E$ où τ est l'involution du revêtement double. Pour l'un des revêtements doubles réels, les courbes E et τE sont définies sur \mathbf{R} . Pour l'autre revêtement double réel, E et τE sont des courbes complexes conjuguées. Dans ce dernier cas, du fait que la surface complexe X est non singulière, l'anneau local des fonctions régulières est factoriel et E (resp. τE) possède une équation locale $\{y = 0, z - ix = 0\}$ (resp. $\{y = 0, z + ix = 0\}$). Le plan tangent en P à la surface topologique $X(\mathbf{R})$ dans la variété X de dimension réelle 4 est engendré par $\frac{\partial}{\partial x_1}$ et $\frac{\partial}{\partial z_1}$, où $x = x_1 + ix_2$, $y = y_1 + iy_2$ et $z = z_1 + iz_2$. Il est facile de vérifier que le plan tangent en P à la surface topologique E dans X est engendré par $\frac{\partial}{\partial x_1} + i\frac{\partial}{\partial x_2}$ et $i\frac{\partial}{\partial z_1} - \frac{\partial}{\partial z_2}$. Finalement, E est transverse à $X(\mathbf{R})$ en P dans X .

Remarque 5.3.41. — Le point crucial ici est la réductibilité de $\varphi^{-1}(L)$ qui est une information de nature globale.

Proposition 5.3.42. — Soit V une surface algébrique réelle affine non singulière difféomorphe à la réunion disjointe de quatre sphères et d'un plan projectif réel et dont une complexification $V_{\mathbf{C}}$ est une surface de del Pezzo de degré 1. Alors le groupe quotient $\Gamma(V)$ est trivial.

Démonstration. — Voir [JPM04, Theorem 6.1]. □

Proposition 5.3.43. — Soit V une surface algébrique réelle géométriquement rationnelle compacte non singulière. Supposons que $V_{\mathbf{C}}$ admette une fibration en coniques. Si V est non connexe, c'est-à-dire si V n'est pas rationnelle sur \mathbf{R} , alors $\Gamma(V) = 0$.

Démonstration. — Voir [JPM04, Proposition 4.2]. □

Éléments de preuve du théorème 5.3.14. — On renvoie à [Man06, Theorem 1.1] pour une preuve complète. Soit V une surface algébrique réelle non singulière dont une complexification est munie d'une fibration en conique de base non rationnelle. On généralise la proposition 5.3.39 au cas non géométriquement rationnel et non orientable. On ramène ainsi l'étude aux relations d'incidence entre V et les courbes réelles ou complexes de $V_{\mathbb{C}}$. Le groupe de Néron-Severi $\text{NS}(V_{\mathbb{C}})$ est engendré par la classe d'une fibre, par celle d'une section (qui n'est pas toujours réelle) et par les classes des (-1) -courbes complexes qui rencontrent leurs conjuguées. La classe d'une fibre est réelle et se traite facilement. On règle le cas des (-1) -courbes grâce à un argument de transversalité semblable au cas des surfaces de del Pezzo. La partie difficile est l'analyse de la section selon les cas. \square

Applications régulières. — Pour cette sous-section, nous nous sommes inspiré de la section 5 de l'article d'exposition [Man17a].

En toute généralité, le problème d'approximation des applications lisses par des applications régulières est toujours ouvert. Par exemple, l'existence de représentants algébriques des classes d'homotopie d'applications continues entre sphères ne possède pas de solution complète aujourd'hui, voir [BCR98, Chapter 13]. Un exemple de résultat dans cette veine est le suivant : si n est une puissance de 2, et si $p < n$, alors toute application polynomiale de \mathbf{S}^n dans \mathbf{S}^p est constante, voir [BCR98, Theorem 13.1.9].

Dans [Kuc09], Kucharz a introduit la notion d'*application rationnelle continue* qui généralise les applications régulières entre variétés algébriques réelles. Le cas particulier des fonctions rationnelles continues a aussi été étudié par Kollár-Nowak, voir [KN15]. Les applications rationnelles continues entre variétés algébriques réelles non singulières sont maintenant souvent appelées *applications régulières*, suivant en cela [FHMM16]. Dans le cas singulier, les deux notions peuvent différer, voir [KN15] ou [Mon18].

Définition 5.3.44. — Soient V et W des variétés algébriques réelles affines non singulières géométriquement irréductibles. Une *application régulière* de V dans W est une application rationnelle $f: V \rightarrow W$ qui vérifie la propriété suivante. Soit $U \subset V$ le domaine de f . La restriction de f à U se prolonge en une application de V dans W qui est continue pour la topologie euclidienne.

Kucharz a montré que toutes les classes d'homotopie d'applications continues entre sphères contiennent des applications régulières.

Théorème 5.3.45. — Soient n et p deux entiers naturels non nuls. Toute application continue de \mathbf{S}^n dans \mathbf{S}^p est homotope à une application régulue.

Démonstration. — Voir [Kuc09, Theorem 1.1]. □

L'article [FHMM16] a posé les fondations de la *géométrie régulue* : définitions et propriétés de l'algèbre des fonctions régulières et de la topologie régulue. Nous en donnons ici un bref aperçu. Rappelons qu'une fonction rationnelle f sur \mathbf{R}^n est *régulière* sur \mathbf{R}^n si f ne possède aucun pôle dans \mathbf{R}^n , voir la définition 1.2.35. Par exemple, la fonction rationnelle définie par $f(x) = 1/(x^2 + 1)$ est régulière sur \mathbf{R} . L'ensemble des fonctions régulières sur \mathbf{R}^n est un sous-anneau du corps $\mathbf{R}(x_1, \dots, x_n)$ des fonctions rationnelles sur \mathbf{R}^n . Une *fonction régulue* sur \mathbf{R}^n est une fonction à valeurs réelles définie en tout point de \mathbf{R}^n , qui est continue pour la topologie euclidienne et dont la restriction à un ouvert de Zariski non vide est régulière. Un exemple typique est la fonction définie par

$$f(x, y) = \frac{x^3}{x^2 + y^2}, \quad f(0, 0) = 0$$

qui est régulière sur $\mathbf{R}^2 \setminus \{0\}$ et régulue sur \mathbf{R}^2 tout entier. Son graphe est la toile du fameux *parapluie de Cartan* déjà vu au chapitre 1, figure 1.5. L'ensemble des fonctions régulières sur \mathbf{R}^n est un sous-anneau $\mathcal{R}^0(\mathbf{R}^n)$ du corps $\mathbf{R}(x_1, \dots, x_n)$. Plus généralement une fonction à valeurs réelles définie en tout point de \mathbf{R}^n est *k -régulue* si elle est régulière sur un ouvert de Zariski non vide, et de classe \mathcal{C}^k sur \mathbf{R}^n . Ici, $k \in \mathbf{N} \cup \{\infty\}$. Par exemple, la fonction définie par

$$f(x, y) = \frac{x^{3+k}}{x^2 + y^2}$$

est k -régulue sur \mathbf{R}^2 pour tout entier naturel $k' \leq k$. D'après [FHMM16, Théorème 3.3], une fonction ∞ -régulue sur \mathbf{R}^n est en fait régulière (la réciproque est immédiate) et on obtient ainsi une chaîne infinie de sous-anneaux :

$$\mathcal{R}^\infty(\mathbf{R}^n) \subseteq \dots \subseteq \mathcal{R}^2(\mathbf{R}^n) \subseteq \mathcal{R}^1(\mathbf{R}^n) \subseteq \mathcal{R}^0(\mathbf{R}^n) \subseteq \mathbf{R}(x_1, \dots, x_n).$$

où $\mathcal{R}^k(\mathbf{R}^n)$ est le sous-anneau de $\mathbf{R}(x_1, \dots, x_n)$ formé des fonctions k -régulues.

La *topologie k -régulue* est la topologie dont les fermés sont les lieux d'annulation de fonctions k -régulues. La figure 5.2 ci-dessous, reproduction de la figure 1.8 du chapitre 1, est le sous-ensemble algébrique de \mathbf{R}^3 défini par l'équation $x^2 + y^2((y - z^2)^2 + yz^3) = 0$.

Cet ensemble est irréductible dans la topologie ∞ -régulue, mais réductible dans la topologie k -régulue pour tout entier naturel k . En fait la « corne » du

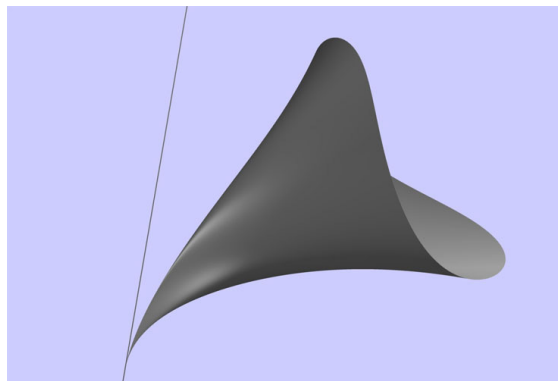


FIGURE 5.2. Parapluie cornu.

parapluie est fermée pour la topologie 0-régulue car c'est le lieu d'annulation de la fonction régulue définie par

$$(x, y, z) \mapsto z^2 \frac{x^2 + y^2((y - z^2)^2 + yz^3)}{x^2 + y^4 + y^2z^4}.$$

Le « manche » du parapluie est fermé aussi : c'est l'ensemble des zéros de $(x, y, z) \mapsto x^2 + y^2$. Le parapluie cornu est donc réductible dans la topologie régulue, voir [FHMM16, Exemple 6.12] pour plus de détails.

Dans l'article [FHMM16], plusieurs propriétés de l'anneau des fonctions régulières sont établies. En particulier, un Nullstellensatz fort est prouvé. Leurs propriétés schématiques sont analysées et des versions régulières des théorèmes A et B de Cartan sont établies. On y trouve aussi une caractérisation géométrique des idéaux premiers de $\mathcal{R}^k(\mathbf{R}^n)$ par les lieux d'annulation de fonctions régulières et une relation entre la topologie k -régulue et la topologie engendrée par les ensembles Zariski-constructibles fermés pour la topologie euclidienne. De nombreux articles sont liés à cette nouvelle direction de recherche et parmi eux, nous recommandons : [Kuc13, BKVV13, Kuc14a, Kuc14b, KK16, Kuc16a, Kuc16b, FMQ17, Now17, PP17, KK18, KKK18, Mon18].

5.4. Difféomorphismes et applications birégulières

Modèles rationnels. — Soit M une variété différentielle de classe \mathcal{C}^∞ . Rappelons qu'un modèle algébrique réel, voir la définition 5.1.1, de M est une variété algébrique réelle affine non singulière V qui est difféomorphe à M .

D'après le théorème de Comessatti 4.4.16, si une surface topologique M admet un modèle algébrique réel *rationnel*, alors M est difféomorphe à \mathbf{S}^2 , \mathbf{T}^2 ou une surface connexe non orientable. Il est connu depuis longtemps que tout modèle algébrique réel rationnel de \mathbf{S}^2 , \mathbf{T}^2 ou \mathbf{RP}^2 est birationnellement difféomorphe à $Q_{3,1}(\mathbf{R})$, $Q_{2,2}(\mathbf{R})$ ou $\mathbf{P}^2(\mathbf{R})$ respectivement. Voir l'exemple 4.2.19 pour les notations. En réponse à une question de J. Bochnak, il a été prouvé dans [Man06, Theorem 1.3] que la bouteille de Klein elle aussi admet un unique modèle algébrique rationnel à difféomorphisme birationnel près. En fait, et c'est assez surprenant, tous les modèles rationnels d'une surface topologique donnée s'avèrent être birationnellement difféomorphes. Ceci a été prouvé par Biswas et Huisman [BH07, Theorem 1.2].

Théorème 5.4.1. — *Deux surfaces rationnelles réelles non singulières sont birationnellement difféomorphes si et seulement si elles sont difféomorphes.*

Une preuve différente de la preuve originale de [BH07] a été établie dans [HM09]. Cette preuve alternative est basée sur le fait, conjecturé dans [BH07], que le groupe des difféomorphismes birationnels de la sphère dans elle-même est *infinitement transitif*, voir la définition ci-dessous.

Automorphismes du lieu réel. — Le groupe des automorphismes d'une variété algébrique complexe projective est « petit » : en effet il est de dimension finie et même fini dans la plupart des cas. En revanche, le groupe $\text{Aut}(V)$ des difféomorphismes birationnels d'une surface algébrique réelle rationnelle V (que l'on appelle aussi automorphismes de V) est plutôt « gros » comme le résultat ci-dessous le montre.

Définition 5.4.2. — Soient G un groupe agissant sur un ensemble M et $n > 0$ un entier. On dit que G agit *n-transitivement* sur M si pour toute paire de n -uplets (P_1, \dots, P_n) et (Q_1, \dots, Q_n) d'éléments distincts de M , il existe un élément g de G tel que $g \cdot P_j = Q_j$ pour tout j . Le groupe G agit *infinitement transitivement*⁽⁸⁾ sur M si pour tout entier positif non nul n , son action est n -transitive sur M .

Théorème 5.4.3. — *Soit V une surface algébrique réelle non singulière rationnelle compacte et connexe, alors pour tout entier non nul n , le groupe $\text{Aut}(V)$ agit n -transitivement sur V .*

8. Dans la littérature, une action de groupe *infinitement* transitive est parfois appelée *très* transitive.

Démonstration. — La preuve complète est donnée dans [HM09]. Afin d'en donner une idée, montrons comment l'on peut construire de nombreux difféomorphismes birationnels dans le cas où V est la sphère $Q_{3,1}(\mathbf{R}) \simeq \mathbf{S}^2$. Soient I l'intervalle $[-1, 1]$ dans \mathbf{R} et $\mathbf{S}^1 \subset \mathbf{R}^2$ le cercle unité. Considérons une application régulière $f: I \rightarrow \mathbf{S}^1$, c'est-à-dire que les deux composantes de f sont des fonctions rationnelles en une variable sans pôles dans I . Définissons une application $\phi_f: \mathbf{S}^2 \rightarrow \mathbf{S}^2$ (ϕ_f est l'application tordante associée à f) par

$$\phi_f(x, y, z) = (f(z) \cdot (x, y), z)$$

où \cdot est la multiplication complexe dans $\mathbf{R}^2 = \mathbf{C}$. En d'autres termes, $(x, y) \mapsto f(z) \cdot (x, y)$ est une rotation dans le plan $\mathbf{R}_{x,y}$ qui dépend algébriquement de z . L'application ϕ_f est un difféomorphisme birationnel de \mathbf{S}^2 dans elle-même. En effet, sa réciproque est ϕ_g où $g: I \rightarrow \mathbf{S}^1$ envoie z sur l'inverse multiplicatif $(f(z))^{-1}$ de $f(z)$. Maintenant, soient n points distincts z_1, \dots, z_n de I et ρ_1, \dots, ρ_n des éléments de \mathbf{S}^1 . Alors d'après le théorème d'interpolation de Lagrange, il existe une application régulière $f: I \rightarrow \mathbf{S}^1$ telle que $f(z_j) = \rho_j$ pour $j = 1, \dots, n$. La multiplication par ρ_j est une rotation dans le plan $z = z_j$, il existe donc une application tordante ϕ_f qui déplace n points distincts P_1, \dots, P_n donnés de la sphère vers n points R_1, \dots, R_n donnés à condition que toute paire de points P_j, R_j (même j) appartienne à un plan horizontal ($z = \text{const}$). Soient (P_1, \dots, P_n) et (Q_1, \dots, Q_n) des n -uplets d'éléments distincts de \mathbf{S}^2 . Pour obtenir un difféomorphisme birationnel de \mathbf{S}^2 dans elle-même qui envoie chaque P_j sur Q_j , il suffit de considérer deux familles transverses de plans parallèles de façon à obtenir n points d'intersections R_j , voir la figure 5.3. L'existence de deux telles familles de plans parallèles est prouvée dans [HM09, Theorem 2.3].

Alors, à changements linéaires de coordonnées près, en appliquant la construction précédente, on obtient deux applications tordantes, la première envoie P_j sur R_j pour $j = 1, \dots, n$ et la seconde envoie R_j sur Q_j pour $j = 1, \dots, n$. Pour finir, la composition de ces deux applications tordantes donne l'automorphisme cherché. \square

Remarque 5.4.4. — Par récurrence sur la dimension, on peut prouver avec la même construction que le groupe $\text{Aut}(\mathbf{S}^d)$, où \mathbf{S}^d est l'hypersurface quadrique $Q_{d+1,1}(\mathbf{R}) := \mathcal{Z}(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{d+1}^2 - x_0^2) \subset \mathbf{P}_{x_0:x_1:\dots:x_{d+1}}^{d+1}(\mathbf{R})$, agit infiniment transitivement sur \mathbf{S}^d pour tout $d > 1$.

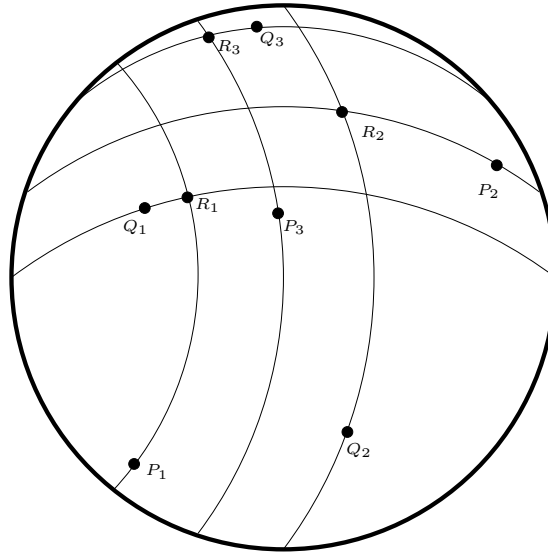


FIGURE 5.3. La sphere \mathbf{S}^2 munie de deux ensembles de parallèles.

Le résultat précédent se généralise aux surfaces algébriques réelles sous la forme ci-dessous. L'action du groupe $\text{Aut}(V)$ sur V est dite *infiniment transitive sur chaque composante connexe* si pour tout $n \geq 1$ et toute paire de n -uplets (P_1, \dots, P_n) et (Q_1, \dots, Q_n) d'éléments distincts de V tels que pour chaque j , P_j et Q_j appartiennent à la même composante connexe de V , il existe un difféomorphisme birationnel $f: V \rightarrow V$ tel que $f(P_j) = Q_j$.

Théorème 5.4.5. — *Soit V une surface algébrique réelle affine non singulière compacte. Le groupe $\text{Aut}(V)$ des difféomorphismes birationnels de V dans V est infiniment transitif sur chaque composante connexe de V si et seulement si $\#\pi_0(V) \leq 3$ et V est géométriquement rationnelle.*

Démonstration. — Voir [BM11, Proposition 41]. □

Remarque 5.4.6. — Signalons deux autres résultats de transitivité. D'après [HM10], si V est une surface algébrique réelle rationnelle compacte connexe avec certaines singularités ⁽⁹⁾, $\text{Aut}(V)$ agit n -transitivement sur V , pour tout

9. Plus précisément V est supposée *dantesque*, c'est-à-dire que V est une surface singulière obtenue à partir d'une surface non singulière par des éclatements à poids, voir [HM10].

n . D'après [KM12], si V est une suspension affine, alors le groupe spécial linéaire $\text{SAut}(V)$ agit n -transitivement sur V , pour tout n .

Groupes de Cremona des surfaces réelles. — Des progrès ont aussi été effectués dans l'étude des ensembles de générateurs du groupe $\text{Aut}(V)$ pour plusieurs surfaces rationnelles particulières. Ces groupes sont conjugués à des sous-groupes du groupe de Cremona réel $\text{Bir}_{\mathbf{R}}(\mathbf{P}^2)$ des transformations birationnelles à coefficients réels.

Le théorème de Noether-Castelnuovo [Cas01] (voir aussi [AC02, Chapter 8] pour une exposition moderne de la preuve) détermine des générateurs du groupe $\text{Bir}_{\mathbf{C}}(\mathbf{P}^2)$ des transformations birationnelles du plan projectif complexe. Ce groupe est engendré par les automorphismes biréguliers, qui forment le groupe $\text{Aut}_{\mathbf{C}}(\mathbf{P}^2) = \mathbf{PGL}(3, \mathbf{C})$ des projectivités, et par la transformation quadratique standard :

$$\sigma_0: (x : y : z) \dashrightarrow (yz : xz : xy).$$

Ce résultat ne s'applique pas aux nombres réels. En effet, rappelons qu'un *point-base* d'une transformation birationnelle est un point (éventuellement infiniment proche) d'indétermination ; et remarquons que deux des points-base de l'involution quadratique

$$\sigma_1: (x : y : z) \dashrightarrow (y^2 + z^2 : xy : xz)$$

ne sont pas réels. Cette involution σ_1 ne peut donc pas être obtenue à partir des projectivités et de σ_0 . Plus généralement, on ne peut obtenir de cette façon les applications possédant des points-base non réels. De là le groupe $\text{Bir}_{\mathbf{R}}(\mathbf{P}^2)$ des transformations birationnelles du plan projectif réel n'est pas engendré par $\text{Aut}_{\mathbf{R}}(\mathbf{P}^2) = \mathbf{PGL}(3, \mathbf{R})$ et σ_0 .

Le résultat principal de [BM14] est que $\text{Bir}_{\mathbf{R}}(\mathbf{P}^2)$ est engendré par $\text{Aut}_{\mathbf{R}}(\mathbf{P}^2)$, σ_0 , σ_1 et une famille de transformations birationnelles de degré 5 n'ayant que des points-base non réels :

Exemple 5.4.7 (Transformations quintiques standards)

Soient $p_1, \bar{p}_1, p_2, \bar{p}_2, p_3, \bar{p}_3 \in \mathbf{P}^2(\mathbf{C})$ trois paires de points non réels de $\mathbf{P}^2(\mathbf{C})$, n'appartenant pas à une même conique. Notons $\pi: X \rightarrow \mathbf{P}^2(\mathbf{C})$ l'éclatement de ces six points ; π induit un difféomorphisme birationnel $X(\mathbf{R}) \rightarrow \mathbf{P}^2(\mathbf{R})$. On peut remarquer que la surface complexe X est isomorphe à une surface cubique non singulière de $\mathbf{P}^3(\mathbf{C})$. L'ensemble des transformées strictes des coniques passant par cinq des six points est formé de trois paires de (-1) -courbes non réelles (qui sont des droites de la cubique), et ces six courbes

sont deux à deux disjointes. La contraction de ces six courbes donne un morphisme birationnel $\eta: X \rightarrow \mathbf{P}^2(\mathbf{C})$, induisant un difféomorphisme birationnel $X(\mathbf{R}) \rightarrow \mathbf{P}^2(\mathbf{R})$ qui contracte les (-1) -courbes sur trois paires de points non réels $q_1, \bar{q}_1, q_2, \bar{q}_2, q_3, \bar{q}_3 \in \mathbf{P}^2(\mathbf{C})$. En ré-ordonnant si besoin, on peut supposer que q_i n'appartient pas à l'image de la conique qui évite p_i . L'application birationnelle $\psi = \eta\pi^{-1}: \mathbf{P}^2(\mathbf{C}) \dashrightarrow \mathbf{P}^2(\mathbf{C})$ induit un difféomorphisme birationnel $\mathbf{P}^2(\mathbf{R}) \rightarrow \mathbf{P}^2(\mathbf{R})$.

Soit $L \subset \mathbf{P}^2(\mathbf{C})$ une droite générale de $\mathbf{P}^2(\mathbf{C})$. La transformée stricte de L sur X par π^{-1} possède un nombre d'auto-intersection égal à 1 et rencontre chacune des six courbes contractées par η en deux points (puisqu'elles proviennent de coniques). L'image $\psi(L)$ possède donc six points singuliers de multiplicité 2 et un nombre d'auto-intersection égal à 25 ; il s'agit donc d'une quintique ayant un point double ordinaire en chacun des points q_i . La construction de ψ^{-1} étant symétrique à celle de ψ , le système linéaire de ψ est constitué des quintiques de $\mathbf{P}^2(\mathbf{C})$ ayant un point double ordinaire en chacun des points $p_1, \bar{p}_1, p_2, \bar{p}_2, p_3, \bar{p}_3$.

On peut de plus vérifier que ψ envoie le pinceau de coniques passant par $p_1, \bar{p}_1, p_2, \bar{p}_2$ sur le pinceau de coniques passant par $q_1, \bar{q}_1, q_2, \bar{q}_2$ (et de même pour les deux autres pinceaux de coniques réels, ceux passant par $p_1, \bar{p}_1, p_3, \bar{p}_3$ et ceux passant par $p_2, \bar{p}_2, p_3, \bar{p}_3$).

Définition 5.4.8. — Les applications birationnelles de \mathbf{P}^2 de degré 5 obtenues dans l'exemple 5.4.7 sont appelées *transformations quintiques standards* de \mathbf{P}^2 .

Théorème 5.4.9. — Le groupe $\text{Bir}_{\mathbf{R}}(\mathbf{P}^2)$ est engendré par $\text{Aut}_{\mathbf{R}}(\mathbf{P}^2)$, σ_0 , σ_1 , et par les transformations quintiques standards de \mathbf{P}^2 .

Démonstration. — Voir [BM14, Theorem 1.1]. □

Remarque 5.4.10. — Il a été prouvé depuis que l'ensemble de générateurs donné ci-dessus est essentiellement minimal et en particulier que le groupe $\text{Bir}_{\mathbf{R}}(\mathbf{P}^2)$ n'est pas engendré par $\text{Aut}_{\mathbf{R}}(\mathbf{P}^2)$ et un ensemble dénombrables d'éléments, voir [Zim18, Theorem 1.1].

La stratégie utilisée pour prouver le théorème 5.4.9 est basée sur une étude détaillée des *liens de Sarkisov*. En conséquence, [BM14] permet de traiter de façon similaire le cas de plusieurs sous-groupes naturels de $\text{Bir}_{\mathbf{R}}(\mathbf{P}^2)$, et ainsi de retrouver le système de générateurs de $\text{Aut}(\mathbf{P}^2(\mathbf{R}))$ donné dans [RV05,

Teorema II], et le système de générateurs de $\text{Aut}(Q_{3,1}(\mathbf{R}))$ donné dans [KM09, Thm. 1].

Théorème 5.4.11. — *Pour une \mathbf{R} -variété (X, σ) donnée, $\text{Aut}(X(\mathbf{R}))$ est le groupe des difféomorphismes birationnels du lieu réel dans lui-même.*

1. *Le groupe $\text{Aut}(\mathbf{P}^2(\mathbf{R}))$ est engendré par $\text{Aut}_{\mathbf{R}}(\mathbf{P}^2) = \mathbf{PGL}(3, \mathbf{R})$ et par les transformations quintiques standards (voir l'exemple 5.4.7 ci-dessus).*
2. *Le groupe $\text{Aut}(Q_{3,1}(\mathbf{R}))$ est engendré par $\text{Aut}_{\mathbf{R}}(Q_{3,1}) = \mathbf{PO}(3, 1)$ et par les transformations cubiques standards (voir l'exemple 5.4.12 ci-dessous).*
3. *Le groupe $\text{Aut}(\mathbf{F}_0(\mathbf{R}))$ est engendré par $\text{Aut}_{\mathbf{R}}(\mathbf{F}_0) \simeq \mathbf{PGL}(2, \mathbf{R})^2 \rtimes \mathbf{Z}_2$ et par l'involution*

$$\tau_0 : ((x_0 : x_1), (y_0 : y_1)) \dashrightarrow ((x_0 : x_1), (x_0 y_0 + x_1 y_1 : x_1 y_0 - x_0 y_1)) .$$

Remarquons que $\text{Aut}(Q_{3,1}(\mathbf{R}))$ et $\text{Aut}(\mathbf{F}_0(\mathbf{R}))$ ne sont pas vraiment des sous-groupes de $\text{Bir}_{\mathbf{R}}(\mathbf{P}^2)$, mais chacun d'eux est isomorphe à un sous-groupe qui est déterminé à conjugaison près. En effet, pour un choix quelconque d'application birationnelle $\psi : \mathbf{P}^2 \dashrightarrow X$ ($X = Q_{3,1}$ ou \mathbf{F}_0), on a

$$\psi^{-1} \text{Aut}(X(\mathbf{R})) \psi \subset \text{Bir}_{\mathbf{R}}(\mathbf{P}^2) .$$

Exemple 5.4.12 (Transformations cubiques standards)

Soient $p_1, \bar{p}_1, p_2, \bar{p}_2 \in Q_{3,1} \subset \mathbf{P}^3$ deux paires de points non réels conjugués, non coplanaires. Soit $\pi : X \rightarrow Q_{3,1}$ l'éclatement de ces quatre points. Le plan non réel de \mathbf{P}^3 passant par $p_1, \bar{p}_1, p_2, \bar{p}_2$ rencontre $Q_{3,1}$ en une conique C de nombre d'auto-intersection 2 : en effet deux coniques générales de $Q_{3,1}$ sont des traces d'hyperplans et se rencontrent donc en deux points appartenant à la droite d'intersection des deux plans. La transformée stricte de cette conique C sur X est donc une (-1) -courbe. En procédant de la même façon pour les autres coniques passant par trois des points $p_1, \bar{p}_1, p_2, \bar{p}_2$, on obtient quatre (-1) -courbes disjointes sur X , que l'on peut contracter de façon à obtenir un morphisme birationnel $\eta : X \rightarrow Q_{3,1}$. La surface obtenue par contraction est bien $Q_{3,1}$ car c'est une surface projective rationnelle non singulière de nombre de Picard réel 1. On obtient donc une application birationnelle $\psi = \eta\pi^{-1} : Q_{3,1} \dashrightarrow Q_{3,1}$ qui induit un difféomorphisme birationnel $Q_{3,1}(\mathbf{R}) \rightarrow Q_{3,1}(\mathbf{R})$.

Si on note par $H \subset Q_{3,1}$ une section hyperplane générale, la transformée stricte de H sur X par π^{-1} possède un nombre d'intersection 2 avec chacune des quatre (-1) -courbes. L'image $\psi(H)$ est donc de multiplicité 2 et de

nombre d'auto-intersection 18 ; c'est donc la trace d'une section cubique. Les constructions de ψ et ψ^{-1} étant similaires, le système linéaire de ψ est formé de sections cubiques de multiplicité 2 en $p_1, \overline{p_1}, p_2, \overline{p_2}$.

Définition 5.4.13. — Les applications birationnelles de \mathbf{P}^2 de degré 3 obtenues dans l'exemple 5.4.12 sont appelées *transformations cubiques standards* de \mathbf{P}^2 .

On renvoie à [Rob16], [Yas16] et [Zim18] pour des résultats récents à propos du groupe de Cremona $\text{Bir}_{\mathbf{R}}(\mathbf{P}^2)$. Citons notamment le calcul du groupe abélianisé de $\text{Bir}_{\mathbf{R}}(\mathbf{P}^2)$ dont le résultat est d'autant plus surprenant que le groupe de Cremona complexe $\text{Bir}_{\mathbf{C}}(\mathbf{P}^2)$ est un groupe parfait, voir [CD13] (c'est-à-dire que $\text{Bir}_{\mathbf{C}}(\mathbf{P}^2)$ est égal à son sous-groupe dérivé). Son abélianisé, voir la définition B.3.8, est donc trivial :

$$\text{Bir}_{\mathbf{C}}(\mathbf{P}^2)/[\text{Bir}_{\mathbf{C}}(\mathbf{P}^2), \text{Bir}_{\mathbf{C}}(\mathbf{P}^2)] \simeq \{\text{id}\}.$$

Théorème 5.4.14. — Le groupe abélianisé de $\text{Bir}_{\mathbf{R}}(\mathbf{P}^2)$ est isomorphe à

$$\text{Bir}_{\mathbf{R}}(\mathbf{P}^2)/[\text{Bir}_{\mathbf{R}}(\mathbf{P}^2), \text{Bir}_{\mathbf{R}}(\mathbf{P}^2)] \simeq \bigoplus_{\mathbf{R}} \mathbf{Z}_2.$$

Démonstration. — Voir [Zim18, Theorem 1.2]. □

Densité des difféomorphismes birationnels. — L'une des applications les plus célèbres du théorème de Nash, voir l'introduction, page 6, est le théorème d'Artin-Mazur ci-dessous. Pour tout endomorphisme $f: M \rightarrow M$ d'une variété différentielle M de classe \mathcal{C}^∞ compacte sans bord, on note $N_\nu(f)$ le nombre de points périodiques *isolés* de f de période ν (c'est-à-dire le nombre de points fixes isolés de f^ν).

Théorème 5.4.15. — Soit M une variété \mathcal{C}^∞ compacte sans bord⁽¹⁰⁾, $\mathcal{C}^\infty(M) := \mathcal{C}^\infty(M, M)$ l'espace des endomorphismes de classe \mathcal{C}^∞ muni de la topologie \mathcal{C}^∞ . Il existe un sous-espace dense $A \subset \mathcal{C}^\infty(M)$ tel que si $f \in A$, alors $N_\nu(f)$ croît de façon au plus exponentielle en fonction de ν , c'est-à-dire qu'il existe une constante $c := c(f) < +\infty$ telle que

$$N_\nu(f) \leq c^\nu \quad \text{pour tout } \nu \geq 1.$$

Démonstration. — Voir [AM65]. □

10. En fait, le résultat est valable pour toute classe \mathcal{C}^k , $k = 1, \dots, \infty$.

La preuve du théorème d'Artin-Mazur utilise le fait que tout endomorphisme C^∞ de M est approché par des *difféomorphismes de Nash*, voir la définition B.2.4. Insistons ici sur une différence essentielle entre les difféomorphismes de Nash et les difféomorphismes birationnels. Un difféomorphisme qui est aussi une application rationnelle sans pôles réels est un difféomorphisme de Nash, mais pas nécessairement un difféomorphisme birationnel. En effet, le difféomorphisme réciproque n'est pas forcément rationnel. Par exemple l'application $x \mapsto x + x^3$ est un difféomorphisme de Nash de \mathbf{R} dans lui-même qui n'est pas birationnel, car l'application réciproque s'écrit avec des radicaux. Ceci est une conséquence du fait que le théorème des fonctions implicites est valable en contexte analytique, mais pas en contexte algébrique. La question s'est posée de savoir si pour une variété algébrique réelle non singulière V donnée, le groupe $\text{Aut}(V)$ des difféomorphismes birationnels était dense dans le groupe $\text{Diff}(V)$ des difféomorphismes de V dans elle-même. La réponse s'avère positive pour les surfaces rationnelles.

Théorème 5.4.16. — *Soit S une surface topologique connexe compacte sans bord, $\text{Diff}(S)$ son groupe des difféomorphismes muni de la topologie C^∞ .*

Si S est non orientable ou de genre $g(S) \leq 1$, alors il existe un modèle algébrique réel rationnel V de S tel que

$$\overline{\text{Aut}(V)} = \text{Diff}(V) \simeq \text{Diff}(S)$$

c'est-à-dire que $\text{Aut}(V)$ est un sous-groupe dense de $\text{Diff}(V)$ pour la topologie C^∞ .

Démonstration. — Voir [KM09, Theorem 4]. □

Remarque 5.4.17. — Si S est orientable de genre $g(S) \geq 2$, alors quel que soit le modèle algébrique réel V de S , on a $\overline{\text{Aut}(V)} \neq \text{Diff}(V)$. En effet, soit V une surface algébrique réelle affine non singulière compacte connexe orientable et $V_{\mathbf{C}}$ une complexification projective non singulière *minimale* de V . Une telle complexification existe car V est orientable. D'après la classification des \mathbf{R} -surfaces (voir le chapitre 4), on est dans l'une des situations énumérées ci-dessous :

1. Si $\kappa(V) = -\infty$, alors $V \approx \mathbf{S}^2$ or $V \approx \mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^1$;
2. Si $V_{\mathbf{C}}$ est une surface K3 ou une surface abélienne, $\kappa(V) = 0$, alors $\text{Aut}(V)$ préserve une forme volume;
3. Si $V_{\mathbf{C}}$ est une surface d'Enriques ou une surface bielliptique, $\kappa(V) = 0$, elle admet un recouvrement fini par une surface K3 ou abélienne;

4. Si $V_{\mathbf{C}}$ est une surface elliptique propre, $\kappa(V) = 1$, alors $\text{Aut}(V)$ préserve la fibration elliptique canonique ;
5. Si V est de type général, $\kappa(V) = 2$, alors $\text{Aut}(V)$ est fini. Voir [Uen75] par exemple.

En résumé, si $g(S) > 1$, alors quel que soit le modèle algébrique réel V de S , on n'a pas densité.

Le théorème ci-dessus a été généralisé aux surfaces géométriquement rationnelles.

Théorème 5.4.18. — *Soit V une surface géométriquement rationnelle compacte, alors :*

1. Si $\#\pi_0(V) > 4$, $\text{Aut}(V)$ n'est pas dense dans $\text{Diff}(V)$.
2. Si $\#\pi_0(V) = 3$ ou 4 , $\text{Aut}(V)$ n'est pas dense dans $\text{Diff}(V)$ en général.

Démonstration. — Voir [BM11, Proposition 41]. □

Au moment de l'écriture de ces lignes, il reste des cas où $\#\pi_0(V) = 3$ ou $\#\pi_0(V) = 4$ pour lesquels on ne sait pas si $\text{Aut}(V)$ est dense dans $\text{Diff}(V)$. De même, le cas à deux composantes connexes est toujours ouvert.

Approximation par des courbes rationnelles. — Nous concluons cette section par une application importante du théorème de densité 5.4.16. Commençons par un exemple.

Exemple 5.4.19. — Soit la courbe rationnelle paramétrée

$$\begin{aligned} f: \mathbf{R} &\longrightarrow \mathbf{R}^2 \\ t &\longmapsto (t^2 + 1, t(t^2 + 1)) \end{aligned}$$

dont l'ensemble image est représenté en figure 5.4.

En prolongeant f à la compactification $\mathbf{P}^1(\mathbf{R})$ de \mathbf{R} et en composant avec une application birationnelle $\mathbf{R}^2 \dashrightarrow V$ vers une surface rationnelle V , on obtient une application régulière $\mathbf{P}^1(\mathbf{R}) \rightarrow V$, c'est-à-dire une courbe rationnelle de V .

J. Bochnak et W. Kucharz ont montré que les applications différentiables $\mathbf{S}^1 \rightarrow V$ du cercle $\mathbf{S}^1 \approx \mathbf{P}^1(\mathbf{R})$ vers une variété rationnelle admettent une approximation par des courbes rationnelles.

Définition 5.4.20. — Soit $f: \mathbf{S}^1 \rightarrow V$ une application de classe C^∞ . On dit que f admet une *approximation par des courbes rationnelles* si tout voisinage de f dans $C^\infty(\mathbf{S}^1, V)$ contient une application régulière $\mathbf{P}^1(\mathbf{R}) \rightarrow V$.

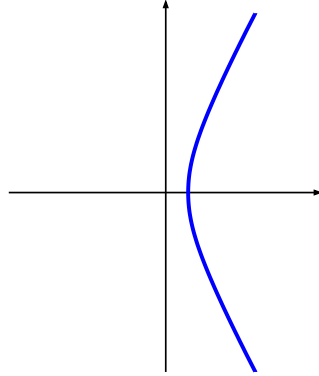


FIGURE 5.4. Image de \mathbf{R} par $f: t \mapsto (t^2 + 1, t(t^2 + 1))$.

Théorème 5.4.21. — Soit V une variété algébrique réelle rationnelle non singulière, alors toute application $f: \mathbf{S}^1 \rightarrow V$ de classe C^∞ est approchée par des courbes rationnelles.

Démonstration. — Voir [BK99, Theorem 1.1]. □

Remarquons que ce résultat concerne les courbes rationnelles paramétrées, l'adhérence de Zariski de la courbe image possède donc éventuellement des points isolés supplémentaires.

Exemple 5.4.22 (Suite de 5.4.19). — L'application f se prolonge naturellement aux complexifications \mathbf{C} de \mathbf{R} et \mathbf{C}^2 de \mathbf{R}^2 .

$$\begin{aligned} f: \mathbf{C} &\longrightarrow \mathbf{C}^2 \\ t &\longmapsto (t^2 + 1, t(t^2 + 1)) . \end{aligned}$$

Mais l'ensemble image contient alors un point réel supplémentaire, voir la figure 5.5, on a en particulier

$$f(\mathbf{R}) \subsetneq f(\mathbf{C}) \cap \mathbf{R}^2 .$$

En prolongeant à \mathbf{P}^1 l'application f de l'exemple ci-dessus, on obtient $f: \mathbf{P}^1 \rightarrow \mathbf{P}^2$, $(u, v) \rightarrow (v(u^2 + v^2), u(u^2 + v^2), v^3)$. L'image $f(\mathbf{P}^1(\mathbf{R}))$ est une courbe simple fermée dans $\mathbf{P}^2(\mathbf{R})$ mais son adhérence de Zariski, la courbe cubique nodale $\mathcal{Z}((x^2 + y^2)z - x^3) \subset \mathbf{P}^2(\mathbf{R})$, possède un point réel isolé supplémentaire en $(0, 0, 1)$. On pourrait supprimer ce point en perturbant l'équation en $\mathcal{Z}(z(x^2 + y^2 + \varepsilon^2 z^2) - x^3)$ ou bien en éclatant le point $(0, 0, 1)$. Mais dans le premier cas, la courbe devient elliptique, et dans le second la topologie de

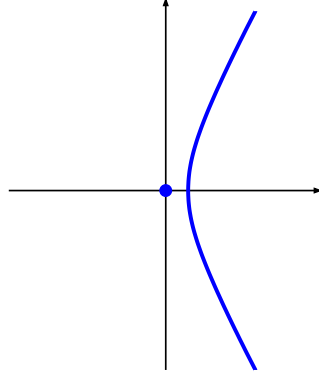


FIGURE 5.5. Lieu réel de l'image de \mathbf{C} par $f: t \mapsto (t^2 + 1, t(t^2 + 1))$.

la surface change. On va voir comment, à l'aide du théorème 5.4.16, on peut se débarrasser de ces points isolés.

Soient (X, σ) une \mathbf{R} -variété algébrique projective non singulière et $(C, \sigma|_C) \subset (X, \sigma)$ une \mathbf{R} -courbe rationnelle. En choisissant un isomorphisme de la normalisation \tilde{C} de C avec la conique plane $\mathcal{Z}(x^2 + y^2 - z^2) \subset \mathbf{P}^2$, on obtient une application $\mathbf{S}^1 \rightarrow X(\mathbf{R})$ de classe C^∞ dont l'image coïncide avec $C(\mathbf{R})$ en dehors de ses points singuliers réels isolés.

Définition 5.4.23. — Soit $f: L \hookrightarrow X(\mathbf{R})$ un cercle plongé. On dit que L admet une *approximation C^∞ par des courbes rationnelles non singulières en leurs points réels* si tout voisinage de f dans $C^\infty(\mathbf{S}^1, X(\mathbf{R}))$ contient une application $\mathbf{S}^1 \rightarrow X(\mathbf{R})$ définie comme ci-dessus à partir d'une courbe rationnelle C sans point singulier réel isolé.

Il n'est pas toujours possible d'approcher un cercle plongé par des courbes rationnelles non singulières en leurs points réels. C'est par exemple impossible pour un cercle homotopiquement ⁽¹¹⁾ trivial sur le tore $\mathbf{T}^2 = \mathbf{P}^1(\mathbf{R}) \times \mathbf{P}^1(\mathbf{R})$.

Proposition 5.4.24. — Soit $C \subset \mathbf{P}^1(\mathbf{C}) \times \mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ une \mathbf{R} -courbe algébrique non singulière en ses points réels. Alors la classe fondamentale de son lieu réel

$$[C(\mathbf{R})] \in H_1(\mathbf{T}^2; \mathbf{Z}_2)$$

est non nulle.

11. Rappelons que $\pi_1(\mathbf{T}^2) \simeq \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z} \simeq H_1(\mathbf{T}^2; \mathbf{Z})$ et que $H_1(\mathbf{T}^2; \mathbf{Z}_2) = H_1(\mathbf{T}^2; \mathbf{Z}) \otimes \mathbf{Z}_2$.

Démonstration. — Soient E_1 (resp. E_2) une droite complexe verticale (resp. horizontale) de $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$. Le groupe de Picard de $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$ est engendré par les classes de E_1 et E_2 . Toute courbe algébrique complexe $D \subset \mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$ est donc linéairement équivalente à une combinaison linéaire $a_1 E_1 + a_2 E_2$ avec $a_1, a_2 \geq 0$.

Si D est une \mathbf{R} -courbe de $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$, alors

$$a_i = (D \cdot E_{3-i}) \equiv (D(\mathbf{R}) \cdot E_{3-i}(\mathbf{R})) \pmod{2}.$$

et si $[D(\mathbf{R})] = 0$ dans $H_1(\mathbf{T}^2, \mathbf{Z}/2)$, alors a_1, a_2 sont pairs. Par ailleurs, d'après la formule d'adjonction (voir le théorème 4.1.44), on a

$$\begin{aligned} 2p_a(D) - 2 &= (a_1 E_1 + a_2 E_2) \cdot ((a_1 - 2)E_1 + (a_2 - 2)E_2) \\ &= a_1(a_2 - 2) + a_2(a_1 - 2) \end{aligned}$$

et donc $p_a(D) = (a_1 - 1)(a_2 - 1)$. De là, si a_1, a_2 sont pairs, alors le genre arithmétique $p_a(D)$ est impair. Si D est rationnelle, alors d'après la proposition 4.1.43, elle possède un nombre impair de points singuliers et l'un d'entre eux est donc nécessairement réel. \square

De façon surprenante, l'exemple ci-dessus est en fait le seul cas où on ne peut pas avoir approximation.

Théorème 5.4.25. — *Un cercle plongé L dans une variété algébrique réelle V rationnelle compacte non singulière admet une approximation \mathcal{C}^∞ par des courbes rationnelles non singulières en leurs points réels si et seulement si le couple (V, L) n'est pas difféomorphe à la paire (\mathbf{T}^2, L_0) où L_0 est un cercle contractile sur le tore \mathbf{T}^2 .*

Démonstration. — Si $\dim V \geq 3$, le résultat se déduit du théorème 5.4.21 de la façon suivante : soient $f: \mathbf{S}^1 \rightarrow V$ un plongement \mathcal{C}^∞ d'image L , et $V_{\mathbf{C}}$ une complexification projective non singulière de V . La preuve du théorème 5.4.21, voir [BK99], produit des approximations de f par les restrictions à $\mathbf{P}^1(\mathbf{R})$ de morphismes $g: \mathbf{P}^1(\mathbf{C}) \rightarrow V_{\mathbf{C}}$ tels que $g^*T_{V_{\mathbf{C}}}$ est ample. Or, si $\dim V \geq 3$, une petite perturbation générale d'un morphisme $g: \mathbf{P}^1(\mathbf{C}) \rightarrow V_{\mathbf{C}}$ tel que $g^*T_{V_{\mathbf{C}}}$ est ample est un plongement, voir [Kol96, II.3.4].

Supposons donc que V est une surface. On donne ici quelques éléments de preuve, pour la preuve complète, on renvoie à [KM16, Theorem 3]. Tout d'abord, si V_1, V_2 sont des surfaces algébriques réelles rationnelles compactes non singulières difféomorphes, alors il existe un difféomorphisme birationnel

$g: V_1 \rightarrow V_2$ d'après le théorème 5.4.1. Supposons qu'on a une courbe rationnelle $C \subset V$ non singulière en ses points réels et un difféomorphisme

$$\phi: (V, L) \xrightarrow{\sim} (V, C).$$

D'après le théorème 5.4.16, le difféomorphisme ϕ^{-1} est approché dans la topologie \mathcal{C}^∞ par des difféomorphismes birationnels $\psi_n: V \rightarrow V$. Ainsi

$$C_n := \psi_n(C) \subset V$$

est une suite de courbes rationnelles et $(C_n)_n$ tend vers L dans la topologie \mathcal{C}^∞ . On peut résoudre les points non réels de C_C pour obtenir une approximation de L par des courbes rationnelles non singulières $C'_n \subset V_n$. Ici, les surfaces V_n sont birationnellement difféomorphes à V .

On termine la preuve en commençant par une énumération des paires topologiques possibles puis, pour chaque paire à l'exception de (\mathbf{T}^2, L_0) , on construit un modèle algébrique réel rationnel, c'est-à-dire formé d'une surface algébrique réelle rationnelle V non singulière et d'une courbe rationnelle $C \subset V$ non singulière en ses points réels. À titre d'illustration, nous présentons ci-dessous la construction d'un modèle algébrique réel rationnel pour le couple $(\#^g \mathbf{T}^2 \# \mathbf{RP}^2, L)$ où L est une courbe séparante qui matérialise la somme connexe de la surface orientable $\#^g \mathbf{T}^2$ avec \mathbf{RP}^2 , c'est-à-dire que L est le lieu de recollement des deux surfaces privées d'un disque, voir la définition B.5.12.

Exemple 5.4.26. — Soient L_1, \dots, L_{g+1} des droites distinctes passant par l'origine dans \mathbf{R}^2 et $H(x, y) = 0$ l'équation de leur réunion. Pour $0 < \varepsilon \ll 1$ bien choisi, soit $\overline{C^\pm} \subset \mathbf{P}^2$ la clôture de Zariski de l'image du cercle unité $\mathcal{Z}(x^2 + y^2 = 1) \subset \mathbf{R}^2$ par l'application

$$(x, y) \mapsto (1 \pm \varepsilon H(x, y))(x, y).$$

Les courbes $\overline{C^\pm}$ sont rationnelles et se rencontrent l'une l'autre en les $2g+2$ points où le cercle unité rencontre l'une des droites L_i . Les courbes $\overline{C^+}$ et $\overline{C^-}$ se rencontrent aussi en la paire de points conjugués $(1 : \pm i : 0)$. Notons que $(1 : \pm i : 0)$ sont les seuls points de $\overline{C^\pm}$ à l'infini.

On utilise la réciproque de la projection stéréographique centrée au pôle sud (voir la preuve de la proposition 5.3.1) pour compactifier \mathbf{R}^2 par la quadrique $Q_{3,1} := \mathcal{Z}(z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 - z_0^2) \subset \mathbf{P}^3$. Partant de \mathbf{P}^2 , on obtient cette projection par l'éclatement de la paire de points $(1 : \pm i : 0)$ suivi de la contraction de la transformée birationnelle de la droite à l'infini.

L'équateur est vu comme l'image du cercle unité. On obtient des courbes rationnelles $C^\pm \subset Q_{3,1}$. Du fait que $(1 : \pm i : 0)$ sont les seuls points de

$\overline{C^\pm}$ à l'infini, le pôle sud n'appartient à aucune des courbes C^\pm et donc les points réels de C^\pm sont tous non singuliers. De plus les courbes C^+ et C^- se rencontrent l'une l'autre aux $2g + 2$ points sur l'équateur.

Choisissons l'un de ces points p et considérons $C_0 := C^+ \cup C^-$ comme l'image d'une application ϕ_0 de la courbe réductible $B_0 := \mathcal{Z}(uv) \subset \mathbf{P}_{uvw}^2$ vers $Q_{3,1}$ qui envoie le point $(0 : 0 : 1)$ sur p . Par [AK03, Appl.17] ou [Kol96, II.7.6.1], ϕ_0 peut être déformée en des morphismes

$$\phi_t : B_t := \mathcal{Z}(uv - tw^2) \rightarrow Q_{3,1}.$$

Notons $C_t \subset Q_{3,1}$ l'image de B_t . Pour t proche de l'origine avec le signe adéquat, $C_t(\mathbf{R}) \subset \mathbf{S}^2 = Q_{3,1}(\mathbf{R})$ parcourt un voisinage de l'équateur deux fois et possède $2g + 1$ points d'auto-intersection ; voir la figure 5.6.

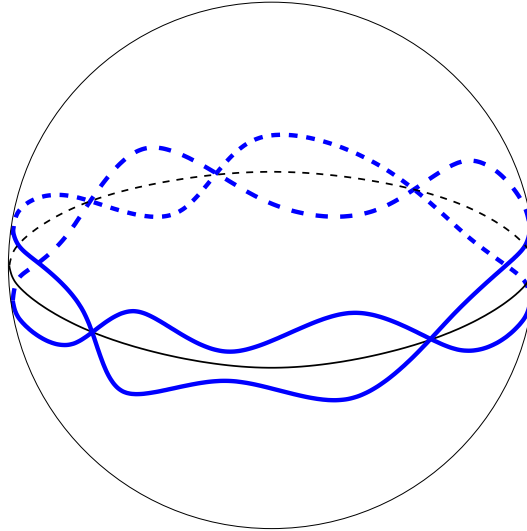


FIGURE 5.6. Le cas $g = 2$.

Pour finir, éclatons les $2g + 1$ points singuliers réels de C_t pour obtenir une surface rationnelle $X_g \rightarrow Q_{3,1}$. La transformée birationnelle de C_t est une courbe rationnelle $C_g \subset X_g$ qui est non singulière en ses points réels.

Les $2g + 1$ régions de $\mathbf{S}^2 \setminus C_t(\mathbf{R})$ proches de l'équateur se réunissent en un ruban de Möbius sur $X_g(\mathbf{R}) \setminus C_g(\mathbf{R})$ et la réunion des hémisphères nord et sud devient $\#^g \mathbf{T}^2$ avec une pique. De là

$$(X_g(\mathbf{R}), C_g(\mathbf{R})) \approx \mathbf{RP}^2 \# (\mathbf{S}^2, \mathbf{L}) \#^g \mathbf{T}^2.$$

□

Les constructions utilisées dans la preuve du théorème 5.4.25 ont aussi permis de caractériser par des conditions purement topologiques la possibilité pour une courbe fermée connexe simple L sur S d'admettre une approximation par des (-1) -courbes qui sont pourtant des objets plutôt rigides.

Définition 5.4.27. — Soit $C \subset V$ une courbe algébrique réelle sur une surface algébrique réelle. On dit que C est une (-1) -courbe s'il existe un morphisme birationnel $\pi: V \rightarrow W$ tel que $\pi(C)$ est un point non singulier de W et π restreint à $V \setminus C \rightarrow W \setminus \pi(C)$ est un isomorphisme.

Cette définition est justifiée par le fait que, d'après le critère de Castelnuovo, voir le théorème 4.3.4, il existe un tel morphisme birationnel $\pi: V \rightarrow W$ si et seulement s'il existe une complexification $V_{\mathbf{C}}$ de V telle que $(C_{\mathbf{C}} \cdot C_{\mathbf{C}}) = -1$ (intersection complexe dans $V_{\mathbf{C}}$).

Théorème 5.4.28. — Soit V une surface algébrique réelle rationnelle compacte non singulière et $L \subset V$ une courbe C^{∞} , les assertions suivantes sont équivalentes :

1. La surface V est non orientable au voisinage de L et l'une des trois conditions suivantes est satisfaite :
 - $V \setminus L$ est une sphère pointée, ou
 - $V \setminus L$ est un tore pointé, ou
 - $V \setminus L$ est non orientable.
2. La courbe L est homotope à une (-1) -courbe ;
3. La courbe L admet une approximation C^{∞} par des (-1) -courbes.

Démonstration. — On peut déduire ce résultat de [KM16, Theorem 6] ou bien directement de la façon suivante. Si L est homotope à une (-1) -courbe, alors la surface ouverte $V \setminus L$ est homéomorphe au lieu réel d'une surface rationnelle non singulière privée d'un point. Grâce au théorème de Comessatti sur les surfaces rationnelles, on sait que la surface ouverte $V \setminus L$ est ou bien non orientable, ou bien homéomorphe à une sphère pointée ou à un tore pointé. Le théorème 5.4.25, ou [KM16, Theorem 3], assure alors que ces conditions nécessaires sont suffisantes. \square

Signalons pour terminer cette partie deux conjectures encore ouvertes au moment de l'écriture de ces lignes.

Conjecture 5.4.29. — [KM16, Conjecture 26.3] Soit V une variété algébrique réelle affine non singulière rationnellement connexe. Alors une application différentiable $\mathbf{S}^1 \rightarrow V$ de classe C^{∞} est approchée par des courbes

rationnelles si et seulement si elle est homotope à une courbe rationnelle $\mathbf{P}^1(\mathbf{R}) \rightarrow V$.

Conjecture 5.4.30. — [BK10, Conjecture 1.12] *Étant données deux variétés algébriques réelles affines non singulières V et W , V compacte et W rationnelle, une application lisse $V \rightarrow W$ admet une approximation par des applications régulières si et seulement si elle est homotope à une application régulière.*

Nous renvoyons le lecteur intéressé à [BW18a, BW18b] pour des progrès récents à propos de ces conjectures.

5.5. Faux plans réels

On a vu avec le théorème 5.4.1 que deux surfaces algébriques réelles rationnelles compactes non singulières sont birationnellement difféomorphes si et seulement si elles sont difféomorphes. La situation est plus contrastée pour des surfaces non compactes. Nous présentons dans cette section une série de résultats récents sur les *faux plans réels* [DM17, DM16, BCM⁺16].

Faux plans projectifs. — Un *faux plan projectif*, comme défini par Mumford [Mum79], est une surface projective complexe non singulière X dont les nombres de Betti sont identiques à ceux du plan projectif $\mathbf{P}^2(\mathbf{C})$ et qui n'est pas birégulièrement isomorphe à ce dernier.

On aurait donc pu définir un *faux plan projectif réel* comme étant un faux plan projectif complexe muni d'une structure réelle, dont le lieu réel est difféomorphe à $\mathbf{P}^2(\mathbf{R})$ et qui n'est pas isomorphe à la \mathbf{R} -variété $(\mathbf{P}^2(\mathbf{C}), \sigma_{\mathbf{P}})$. Mais malgré l'existence annoncée de 100 faux plans projectifs à isomorphisme birégulier près, [PY07, PY10, CS10], aucun d'entre eux ne possède de structure réelle d'après [KK02, §5]. Ainsi il n'existe aucun faux plan projectif réel.

Proposition 5.5.1. — *Soit (X, σ) une \mathbf{R} -surface projective non singulière telle que les nombres de Betti de la surface complexe X soient*

$$(b_0(X), b_1(X), b_2(X), b_3(X), b_4(X)) = (1, 0, 1, 0, 1) ,$$

alors (X, σ) est isomorphe à la \mathbf{R} -variété $(\mathbf{P}^2(\mathbf{C}), \sigma_{\mathbf{P}})$.

Faux plans réels. — Le cas des faux plans projectifs motive la définition suivante.

Définition 5.5.2. — Un *faux plan réel* est une \mathbf{R} -surface quasi-projective non singulière (X, σ) dont les nombres de Betti sont identiques à ceux du plan affine $\mathbf{A}^2(\mathbf{C})$

$$(b_0(X), b_1(X), b_2(X), b_3(X), b_4(X)) = (1, 0, 0, 0, 0),$$

dont le lieu réel $X(\mathbf{R})$ est difféomorphe à \mathbf{R}^2 , et qui n'est pas isomorphe à la \mathbf{R} -variété $(\mathbf{A}^2(\mathbf{C}), \sigma_{\mathbf{A}})$.

Les surfaces complexes de mêmes nombres de Betti que le plan affine ont été abondamment étudiées, elles sont souvent appelées \mathbf{Q} -plans ou *surfaces \mathbf{Q} -acycliques*.

Définition 5.5.3. — Une surface complexe dont les nombres de Betti de degré non nul sont tous nuls est dite *\mathbf{Q} -acyclique*.

Proposition 5.5.4. — Une surface algébrique complexe *\mathbf{Q} -acyclique* est affine et rationnelle.

Démonstration. — Voir [Fuj82] pour la preuve qu'une surface complexe \mathbf{Q} -acyclique est affine, et [GPS97, GP99] pour la preuve qu'une telle surface est rationnelle. \square

Corollaire 5.5.5. — Soit (X, σ) un faux plan réel, alors la surface algébrique complexe X est affine et rationnelle.

La première question importante au vu du cas projectif est l'existence d'un tel faux plan réel. Nous en donnons un exemple plus bas. Il existe en fait une infinité de telles surfaces, voir [DM17, DM16].

Avant de présenter l'exemple en question, nous revenons pour être complet sur la question de l'existence de plans complexes *exotiques*.

Théorème 5.5.6. — Il existe des variétés différentielles non difféomorphes à \mathbf{R}^4 mais dont l'espace topologique sous-jacent est homéomorphe à \mathbf{R}^4 .

Démonstration. — Voir [FQ90]. \square

Définition 5.5.7. — De telles variétés différentielles sont des \mathbf{R}^4 *exotiques*.

Dans l'énoncé suivant, on utilise la notion de *simple connexité à l'infini* dont la définition correcte est assez technique, voir la preuve du théorème principal dans [Ram71] ou voir [HR96, Chapter 9] pour une étude détaillée de l'homotopie à l'infini. Pour faire court, disons qu'on demande l'existence d'une

exhaustion par une famille de compacts emboîtés dont les complémentaires sont simplement connexes à partir d'un certain rang.

Théorème 5.5.8 (Myanishi, Ramanujam). — Une surface algébrique complexe non singulière dont l'espace topologique sous-jacent (pour la topologie forte) est contractile et simplement connexe à l'infini est isomorphe à $\mathbf{A}^2(\mathbf{C})$.

Démonstration. — Voir [Ram71]. □

Corollaire 5.5.9. — Il n'existe aucune surface algébrique complexe non singulière X telle que la variété différentielle de dimension réelle 4 sous-jacente à X soit un \mathbf{R}^4 exotique.

Remarque 5.5.10. — Pour $n \neq 4$, toute variété différentielle dont l'espace topologique sous-jacent est homéomorphe à \mathbf{R}^n est difféomorphe à \mathbf{R}^n , voir [Sta62].

Passons maintenant à la construction d'un faux plan réel. De nombreux autres exemples sont décrits en détail dans [DM17, DM16].

Exemple 5.5.11 (Surface de Ramanujam). — Considérons la \mathbf{R} -courbe

$$D = C \cup Q \subset \mathbf{P}^2$$

réunion de la cubique cuspidale $C = \mathcal{Z}(x^2z + y^3)$ avec sa conique osculatrice Q en un point réel général $q \in C(\mathbf{R})$. Ainsi Q est une \mathbf{R} -conique non singulière qui rencontre C au point réel q avec une multiplicité 5; Q rencontre donc transversalement C en un autre point réel p . On considère la surface projective $Y = B_p\mathbf{P}^2$ obtenue en éclatant \mathbf{P}^2 en p . Le complémentaire dans

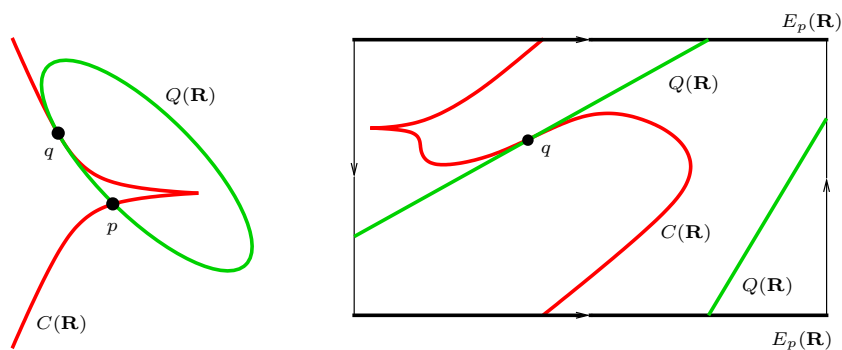


FIGURE 5.7. Construction d'une surface de Ramanujam et connexité du complémentaire.

Y de la transformée stricte \tilde{D} de D , la surface $X := Y \setminus \tilde{D}$ est une *surface de Ramanujam*, voir [Ram71]. En particulier, comme expliqué dans [DM17, Exemple 3.8], la surface complexe X est une surface contractile qui n'est pas isomorphe au plan affine $\mathbf{A}^2(\mathbf{C})$. De plus par construction, X est munie de la structure réelle σ induite par $\sigma_{\mathbf{P}}$ sur $\mathbf{P}^2(\mathbf{C})$ et il est aisé de vérifier que $X(\mathbf{R})$ est connexe et difféomorphe à \mathbf{R}^2 , voir la partie gauche de la figure 5.7 où E_p est la courbe exceptionnelle de l'éclatement $B_p\mathbf{P}^2 \rightarrow \mathbf{P}^2$ (rappelons ici que l'éclatée de $\mathbf{P}^2(\mathbf{R})$ en un point est une bouteille de Klein $B_p\mathbf{P}^2(\mathbf{R}) \approx \mathbf{K}^2$, voir le corollaire F.3.2). En conclusion, (X, σ) est un faux plan réel.

On peut en fait construire toute une série de telles *Surfaces de Ramanujam* en continuant à éclater des points sur E_p selon différentes configurations et en ne « gardant » dans la surface affine à la fin que la dernière droite exceptionnelle, voir [DM17, Exemple 3.8].

CHAPITRE 6

VARIÉTÉS DE DIMENSION 3

L'essentiel de ce chapitre a fait l'objet d'une publication préliminaire dans la Gazette de la SMF, [Man14].

6.1. La conjecture de Nash de 1952 à 2000 en passant par 1914

Variétés rationnelles. — Rappelons la conjecture de Nash dont il est question dans le titre (conjecture énoncée en introduction du présent livre page 8).

Conjecture. — *Toute variété C^∞ compacte sans bord connexe de dimension non nulle admet un modèle rationnel réel (définition 5.1.1).*

Cette conjecture avait été contredite par anticipation en 1914 pour les surfaces projectives non singulières, puis prouvée au début des années 90 pour les variétés projectives de dimension 3 singulières, puis contredite à la fin des années 90 pour les variétés de dimension 3 et plus, non singulières et projectives, et enfin prouvée pour les variétés de dimension 3 non singulières mais compactes non-projectives! Nous allons détailler ces résultats portant sur les différentes propriétés des modèles algébriques dans la suite de cette section.

Nash pour les surfaces. — La conjecture de Nash était déjà contredite en dimension 2 par un théorème de Comessatti (prouvé au chapitre 4, voir le corollaire 4.4.16) paru dans un article de 1914 [Com14], article vraisemblablement oublié à l'époque de Nash.

Théorème (Théorème de Comessatti). — *Soit X une \mathbf{R} -surface projective non singulière. Si X est rationnelle, alors son lieu réel $X(\mathbf{R})$ est difféomorphe à \mathbf{S}^2 , à $\mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^1$, ou à une surface non orientable.*

Remarquons que l'on obtient un résultat différent si l'on remplace « X non singulière » par « X éventuellement singulière ». Notons tout d'abord que le lieu réel d'une \mathbf{R} -surface singulière n'est plus nécessairement une variété topologique (c'est-à-dire localement homéomorphe à \mathbf{R}^2). De ce fait, la notion de difféomorphisme entre deux tels espaces topologiques n'est pas toujours définie. Pour un énoncé comparable au théorème ci-dessus, on remplace donc « difféomorphe » par « homéomorphe ».

Exemple 6.1.1 (Modèles rationnels réels des surfaces compactes)

Nous suivons ici [BM92] pour construire un modèle rationnel pour chaque surface topologique. D'après le théorème de Comesatti, de tels modèles sont nécessairement singuliers dès que la surface est orientable de genre est supérieur à 2. On commence par construire un modèle rationnel non singulier de n'importe quelle surface non orientable. Pour cela, il suffit d'éclater k points du plan projectif $\mathbf{P}^2(\mathbf{R})$ pour obtenir une surface algébrique X_k telle que $X_k(\mathbf{R})$ est non orientable de caractéristique d'Euler $1 - k$. Pour construire un modèle d'une surface orientable de genre $g > 0$, on pose $k = 2g$ et on choisit les $k = 2g > 0$ points alignés sur une droite H . Après éclatement de ces k points, la transformée birationnelle $\tilde{H} \subset X_{2g}$ est d'auto-intersection négative $1 - 2g$ et peut être contractée pour obtenir une surface algébrique Y_g . La surface Y_1 est non singulière et $Y_1(\mathbf{R})$ est difféomorphe au tore, mais si $g > 1$, la surface Y_g est singulière au point P image de \tilde{H} par la contraction. Comme l'auto-intersection de \tilde{H} est impaire, on peut vérifier qu'un petit voisinage de P dans $Y_g(\mathbf{R})$ est homéomorphe au disque. La surface $Y_g(\mathbf{R})$ est alors homéomorphe à une surface orientable de genre g . En effet, comme expliqué dans l'appendice F, l'éclatement topologique d'une surface orientable S_g de genre g centré en un point $Q \in S_g$ est difféomorphe à une somme connexe de $2g + 1$ plans projectifs $B_Q S_g \approx S_g \# \mathbf{RP}^2 \approx \mathbf{RP}^2 \# \dots \# \mathbf{RP}^2$. En particulier, $S_g \setminus \{Q\} \approx X_{2g}(\mathbf{R}) \setminus H \approx Y_g(\mathbf{R}) \setminus \{P\}$, la surface $Y_g(\mathbf{R})$ est donc homéomorphe à S_g .

Au vu de ces nuances, il est naturel de proposer des variations sur le thème de la conjecture de Nash. Nous dressons un petit panorama des versions envisagées par différents auteurs.

Nash topologique est vraie. — On renvoie à l'appendice F pour la définition des éclatements et contractions dans le cadre différentiable. Le résultat suivant, qui peut être vu comme un analogue topologique de la conjecture

de Nash, a été prouvé en dimension 3 par Akbulut et King [AK91] et par Benedetti et Marin [BM92], puis en toute dimension par Mikhalkin [Mik97].

Théorème 6.1.2 ([Mik97]). — *Toute variété C^∞ compacte sans bord connexe est difféomorphe à une variété C^∞ obtenue à partir de \mathbf{RP}^n par une suite d'éclatements et de contractions différentiables.*

Nash projective singulière est vraie si $n \leq 3$. — Nous avons expliqué précédemment la preuve de cette version en dimension 2. Pour les variétés de dimension 3, il ne suffit plus d'éclater des points et de contracter des diviseurs, il faut aussi autoriser certaines chirurgies le long de nœuds, c'est-à-dire des cercles plongés dans la variété considérée. On se restreint ici pour simplifier aux nœuds dont un voisinage tubulaire est orientable. Un voisinage tubulaire fermé d'un nœud est alors difféomorphe à $\mathbf{S}^1 \times \mathbf{D}^2$. Rappelons que topologiquement, toute 3-variété compacte sans bord s'obtient à partir de la sphère \mathbf{S}^3 par chirurgie le long d'un nœud. Une *chirurgie* le long d'un nœud L dans une variété M consiste à recoller un tore solide $T := \mathbf{S}^1 \times \mathbf{D}^2$ au bord du complémentaire d'un voisinage tubulaire ouvert U_L de L . Ce recollement est réalisé par un difféomorphisme $\varphi \in \text{Diff}(\mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^1)$ du tore $\mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^1 = \partial(M \setminus U_L) = \partial T$ sur lui-même. L'opération qui produit $M_\varphi = M \setminus U_L \cup_\varphi T$ à partir de M s'appelle une *chirurgie* le long de L . Benedetti et Marin montrent qu'à l'exception de certains types topologiques traités à part, la plupart des variétés de dimension 3 sont obtenues à partir de \mathbf{S}^3 par éclatements de points et certaines chirurgies qu'ils appellent *déchirures*. Cette présentation des transformations topologiques leur permet de montrer la conjecture de Nash topologique en dimension 3. Ils réalisent alors de manière algébrique les déchirures et obtiennent une \mathbf{R} -variété X singulière⁽¹⁾ et une résolution des singularités $Y \rightarrow X$ telles que Y est birationnellement équivalente à $Q_{4,1} = \mathcal{Z}(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 - x_0^2) \subset \mathbf{P}^4$, $Y(\mathbf{R})$ est difféomorphe à \mathbf{S}^3 et $X(\mathbf{R})$ est homéomorphe à M .

Théorème 6.1.3 ([BM92]). — *Soit M une variété C^∞ compacte sans bord connexe de dimension 3. Alors il existe une \mathbf{R} -variété algébrique projective singulière X rationnelle et telle que $X(\mathbf{R})$ soit homéomorphe à M .*

Nash non projective non singulière est vraie si $n = 3$. — Munie de la topologie euclidienne, une variété algébrique complexe projective non singulière est en particulier une variété analytique complexe compacte, voir l'appendice D. Réciproquement, si l'on suppose en plus que le corps des fonctions

1. Ici « singulière » = « éventuellement singulière ».

méromorphes d'une variété analytique complexe compacte est de degré de transcendance maximal (c'est-à-dire égal à la dimension d'après le théorème de Siegel [Sie55]), on obtient une variété qui est très proche d'une variété projective, voir [Moi67]. Pourtant, la conjecture de Nash est satisfaite pour ces variétés en dimension 3 alors qu'elle est fautive pour les variétés projectives comme on le verra avec le théorème 6.1.9.

Définition 6.1.4. — Une variété analytique complexe non singulière compacte de dimension n est *de Moishezon* si elle possède n fonctions méromorphes algébriquement indépendantes (à mettre en regard avec la discussion qui précède la définition 1.3.37). Une **R**-variété de Moishezon est une variété de Moishezon munie d'une involution anti-holomorphe globale $\sigma: X \rightarrow X$.

Remarque 6.1.5. — D'après [Moi67] (version anglaise de [Moř66a, Moř66b, Moř66c]), une variété analytique complexe non singulière compacte est de Moishezon si elle est biméromorphe à une variété projective.

Toute surface non singulière de Moishezon est projective [BHPVdV04, IV.5]. Les premiers exemples de variétés de Moishezon de dimension 3 non singulières et non projectives sont dus à Hironaka, voir [Har77, Appendix B.3].

La conjecture de Nash non projective non singulière est vérifiée pour $n = 3$ d'après le résultat suivant.

Théorème 6.1.6. — Soit M une variété C^∞ de dimension 3 compacte sans bord connexe. Alors il existe une **R**-variété de Moishezon non singulière (X, σ) , et une application biméromorphe $\pi: \mathbf{P}^3 \dashrightarrow X$ vérifiant $\pi\sigma_0 = \sigma\pi$ et telle que $X(\mathbf{R})$ soit difféomorphe à M .

Démonstration. — Voir [Kol02, Theorem 1.3]. □

On peut être plus précis, voir [Kol02], et dire qu'il existe une suite d'éclatements et de contractions à centres non singuliers (voir l'appendice F pour les définitions)

$$\mathbf{P}^3 = X_0 \xrightarrow{\pi_0} X_1 \xrightarrow{\pi_1} \dots \xrightarrow{\pi_{n-1}} X_n = X$$

où pour tout i , la variété X_i est non singulière. De plus cette suite est réelle dans le sens suivant : chaque variété est munie d'une involution anti-holomorphe globale $\sigma_i: X_i \rightarrow X_i$; $\sigma_0 = \sigma_{\mathbf{P}}$, $\sigma_n = \sigma$; et ces structures réelles vérifient $\pi_i\sigma_i = \sigma_{i+1}\pi_i$ pour tout i .

Pour parvenir à ce résultat, Kollár utilise la classification de Benedetti-Marín de ce qu'il appelle les « flops topologiques » qui sont un cas particulier

des déchirures vues plus haut. Ensuite il montre comment les réaliser par des flops algébriques. Décrivons rapidement le type particulier de *flop algébrique* utilisé par Kollár. Il s'agit d'une application birationnelle $f: X \dashrightarrow X'$ qui se factorise $X \xleftarrow{\pi} X_1 \xrightarrow{\pi'} X'$ où π et π' ont un même diviseur exceptionnel $E \subset X_1$ qui est isomorphe à $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$, chaque morphisme contractant un des deux facteurs \mathbf{P}^1 . La transformation du lieu réel $X(\mathbf{R}) \dashrightarrow X'(\mathbf{R})$ est alors un flop topologique. Réciproquement, l'existence d'une telle transformation sur une variété X de dimension 3 nécessite une courbe rationnelle $C \subset X$ plongée d'une façon bien particulière :

1. le diviseur exceptionnel E de l'éclatement $\pi: X_1 \rightarrow X$ centré en C est isomorphe à $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$,
2. $\pi|_E: E \rightarrow \mathbf{P}^1$ est la projection sur le premier facteur,
3. il existe une contraction $\pi': X_1 \rightarrow X'$ de E dont la restriction à E est la projection sur le second facteur.

La première étape pour prouver le théorème est de réaliser une approximation algébrique convenable de certains rubans de Möbius plongés représentant des flops topologiques (on utilise pour cela le théorème d'approximation 5.4.21). La seconde étape est obtenue en construisant des flops algébriques grâce à des éclatements qui ne modifient pas le lieu réel. Dans ce processus, la variété X' n'est plus projective en général mais reste de Moishezon puisque le corps des fonctions est préservé par transformation birationnelle. On trouvera la construction complète dans [Kol01a, § 4].

Nash projective non singulière est fausse pour $n > 1$. — Comme on l'a vu, le cas de la dimension $n = 2$ est résolu par le théorème de Comessatti. L'échec de la conjecture de Nash pour les variétés projectives non singulières de dimension $n = 3$ est une conséquence du théorème 6.1.9 ci-dessous, prouvé dans la série d'articles [Kol98b, Kol99a, Kol99b, Kol00]. Avec son théorème, Kollár a prouvé en particulier qu'à un nombre fini d'exceptions potentielles près, les variétés hyperboliques (définition B.8.6) de dimension 3 ne possèdent pas de modèle projectif non singulier rationnel, voir le corollaire 6.1.10, et il a conjecturé que cette situation était plus générale. Peu de temps après, Viterbo et Eliashberg ont confirmé cette expectative en montrant qu'en toute dimension $n > 2$, aucune variété hyperbolique ne possède de modèle projectif non singulier rationnel, voir le corollaire 6.1.18.

Les énoncés de Kollár et Viterbo-Eliashberg s'appliquent à une classe de variétés généralisant les variétés rationnelles : les variétés *uniréglées* déjà rencontrées au chapitre sur les surfaces, voir la définition 4.4.1.

Définition 6.1.7. — Une variété réelle ou complexe X de dimension n est *uniréglée* si elle est dominée par un cylindre de même dimension, c'est-à-dire s'il existe une variété Y de dimension $n - 1$ et une application rationnelle

$$Y \times \mathbf{P}^1 \dashrightarrow X$$

d'image dense pour la topologie de Zariski.

Remarque 6.1.8. — La définition ci-dessus est exactement la même que X soit complexe ou réelle ; « uniréglée » est une propriété invariante par extension du corps de base, voir [Deb01, §4.1, Remark 4.2(5)].

La variété produit $\mathbf{P}^{n-1} \times \mathbf{P}^1$ étant birationnellement équivalente à \mathbf{P}^n , il est immédiat qu'une variété rationnelle sur \mathbf{R} ou sur \mathbf{C} est uniréglée. Pour montrer que $\mathbf{P}^{n-1} \times \mathbf{P}^1$ est birationnellement équivalente à \mathbf{P}^n , il suffit de considérer par exemple l'application rationnelle

$$((x_0 : \dots : x_{n-1}), (y_0 : y_1)) \mapsto (x_0 y_0 : x_1 y_0 : \dots : x_{n-1} y_0 : x_0 y_1).$$

En effet, cette application rationnelle induit un isomorphisme entre l'ouvert $\{x_0 \neq 0\} \times \{y_0 \neq 0\}$ de $\mathbf{P}_{x_0 : \dots : x_{n-1}}^{n-1} \times \mathbf{P}_{y_0 : y_1}^1$ et l'ouvert $\{z_0 \neq 0\}$ de $\mathbf{P}_{z_0 : \dots : z_n}^n$.

Théorème de Kollár. — Avant d'énoncer le théorème de Kollár, il nous faut introduire quelques éléments de classification des variétés topologiques de dimension 3. La classification topologique des surfaces connexes compactes sans bord, théorème E.1.6, se résume à deux invariants : l'orientabilité qui est un invariant binaire et la caractéristique d'Euler qui est un invariant entier naturel. Pour les variétés de dimension 3, la situation est bien plus riche. Nous renvoyons en appendice B.8 pour un aperçu sur les variétés topologiques de dimension 3 et nous nous contentons ici d'un raccourci.

D'après le théorème B.8.16, toute variété topologique compacte de dimension 3 est construite à partir de « blocs » appartenant à l'une des trois classes disjointes suivantes :

1. Variétés de Seifert, voir la définition B.8.1 ;
2. Variétés **Sol**, voir la définition B.8.8 ;
3. Variétés hyperboliques, voir la définition B.8.6.

Il faut aussi remarquer que les espaces lenticulaires, définition B.8.2, qui apparaissent dans l'énoncé ci-dessous appartiennent à la première classe d'après

la proposition [B.8.3](#). Mais une somme connexe d'au moins deux tels espaces n'est pas Seifert sauf dans un cas, $\mathbf{RP}^3 \# \mathbf{RP}^3$, d'après les propositions [B.8.11](#) et [B.8.13](#).

Théorème 6.1.9 (Kollár 1998). — *Soit X une \mathbf{R} -variété algébrique projective non singulière de dimension 3. Supposons X uniréglée et $X(\mathbf{R})$ orientable, alors toute composante connexe de $X(\mathbf{R})$ est difféomorphe à l'une des variétés suivantes :*

1. Une variété de Seifert ;
2. Une somme connexe d'un nombre fini d'espaces lenticulaires ;
3. Une variété **Sol** ;
4. Une variété appartenant à une liste finie d'exceptions potentielles ;
5. Une variété obtenue à partir de l'une des précédentes en effectuant la somme connexe avec un nombre fini de copies de \mathbf{RP}^3 et un nombre fini de copies de $\mathbf{S}^2 \times \mathbf{S}^1$.

Démonstration. — L'énoncé ci-dessus se déduit de l'énoncé original, [[Kol01b](#), Th. 6.6], en utilisant la proposition [6.2.3](#). Nous en proposons un peu plus loin une preuve résumée. \square

Corollaire 6.1.10. — *À un nombre fini d'exceptions potentielles près, les variétés hyperboliques orientables de dimension 3 ne possèdent pas de modèle projectif non singulier uniréglé.*

Remarque 6.1.11. — En fait, les travaux de Kollár permettent de se passer de l'hypothèse d'orientabilité dans l'énoncé [6.1.10](#), voir [[Kol99a](#), Theorem 12.1, Theorem 1.8, Theorem 1.2], [[Kol99b](#), Theorem 8.3] et [[Kol00](#)].

Preuve du corollaire 6.1.10. — Une variété hyperbolique M est géométrique donc indécomposable d'après le corollaire [B.8.12](#). D'après le théorème [6.1.9](#), à un nombre fini d'exceptions près, une composante connexe indécomposable du lieu réel d'une variété projective non singulière uniréglée orientable est une variété de Seifert ou un espace lenticulaire (qui est aussi une variété de Seifert) ou bien une variété **Sol**. Or aucune de ces variétés n'est hyperbolique d'après le corollaire [B.8.14](#). \square

L'une des difficultés principales dans la preuve du théorème [6.1.9](#) est le contrôle de la transformation de la topologie à travers le programme du modèle minimal (MMP) sur \mathbf{R} . C'est le théorème [6.1.13](#) ci-dessous qui permet de réduire la classification topologique générale à un certain type de variétés.

Programme du modèle minimal sur \mathbf{R} . — À partir d'une \mathbf{R} -variété algébrique projective non singulière (X, σ) de dimension 3, il est possible d'effectuer une suite de transformations birationnelles « élémentaires »

$$X = X_0 \xrightarrow{\pi_0} X_1 \xrightarrow{\pi_1} \cdots \xrightarrow{\pi_{n-1}} X_n = X^*$$

jusqu'à l'obtention d'une \mathbf{R} -variété (X^*, σ^*) dont la structure globale est « simple ». De plus cette suite de transformations est réelle dans le sens suivant : chaque variété X_i est munie d'une structure réelle $\sigma_i : X_i \rightarrow X_i$; $\sigma_0 = \sigma$; $\sigma_n = \sigma^*$; et ces structures réelles vérifient $\pi_i \sigma_i = \sigma_{i+1} \pi_i$ pour tout i .

Le prix à payer est que les variétés X_i , $i > 0$ et X^* ne sont plus non singulières. Il faut étendre la classe dans laquelle on travaille aux variétés possédant des singularités particulières. Les singularités en questions sont appelées *singularités terminales*, voir [Kol98b] pour la définition et une classification de ces singularités pour une \mathbf{R} -variété de dimension 3. Mentionnons ici qu'en dimension 3 ces singularités sont isolées.

L'on entend par structure globale « simple » le fait que X^* satisfasse l'une des conditions ci-dessous (voir [Kol99a, Theorem 3.11] pour un énoncé plus précis) :

- Le diviseur canonique K_{X^*} est nef, voir la définition 2.6.41.
- Il existe une \mathbf{R} -fibration en coniques $X^* \rightarrow Y$ au-dessus d'une \mathbf{R} -surface ;
- Il existe une \mathbf{R} -fibration en surfaces de del Pezzo $X^* \rightarrow Y$ au-dessus d'une \mathbf{R} -courbe ;
- La variété X^* est une variété de Fano, c'est-à-dire que son diviseur anti-canonique $-K_{X^*}$ est ample, voir la définition 2.6.20.

Théorème 6.1.12. — *Soient (X, σ) une \mathbf{R} -variété algébrique projective non singulière de dimension 3 et (X^*, σ^*) le résultat d'un MMP sur \mathbf{R} . Si X est uniréglée, alors X^* est un fibré de l'un des types ci-dessous (ces fibrés sont des fibrés de Mori) :*

1. *Un fibré en coniques au-dessus d'une surface ;*
2. *Une fibration en surfaces de del Pezzo au-dessus d'une courbe ;*
3. *Une 3-variété de Fano au-dessus du point.*

Démonstration. — Si la variété X est uniréglée, K_{X^*} ne peut pas être nef. En effet, en caractéristique nulle, une variété uniréglée non singulière contient une courbe rationnelle *libre*, voir [Deb01, Corollary 4.11] et d'après [Deb01, Exemple 4.7(1)], il n'existe pas de courbe rationnelle libre sur une variété

de diviseur canonique nef. La variété X^* appartient donc à l'une des trois dernières classes énumérées plus haut. \square

L'une des découvertes de Kollár est que l'on peut éviter les difficultés les plus importantes rencontrées pendant le MMP si le lieu réel de la variété est orientable.

Théorème 6.1.13. — Soit (X, σ) une \mathbf{R} -variété algébrique de dimension 3, projective, non singulière et (X^*, σ^*) le résultat d'un MMP sur \mathbf{R} . Supposons le lieu réel $X(\mathbf{R})$ orientable.

Alors la normalisation topologique $\overline{X^*(\mathbf{R})} \rightarrow X^*(\mathbf{R})$ (voir la définition 4.4.35) est une variété linéaire par morceaux et toute composante connexe $L \subset X(\mathbf{R})$ s'obtient à partir de $\overline{X^*(\mathbf{R})}$ par sommes connexes de composantes de $\overline{X^*(\mathbf{R})}$, de copies de \mathbf{RP}^3 et de copies de $\mathbf{S}^2 \times \mathbf{S}^1$.

Démonstration. — Voir [Kol99a, Theorem 1.2]. \square

Résumé de preuve du théorème 6.1.9. — D'après le théorème 6.1.12, la \mathbf{R} -variété (X, σ) est birationnelle à une \mathbf{R} -variété (X^*, σ^*) qui est un fibré de Mori de l'un des trois types énumérés. Le théorème 6.1.13 permet alors de conclure à partir des types topologiques possibles de ces fibrés :

1. Un fibré en coniques au-dessus d'une surface. Kollár a classifié ces fibrés dans [Kol99b, Theorem 1.1], il ressort en particulier de cette classification qu'à somme connexe avec des \mathbf{RP}^3 et des $\mathbf{S}^2 \times \mathbf{S}^1$ près, M est une variété de Seifert ou une somme connexe d'espaces lenticulaires.
2. Une fibration à fibres rationnelles au-dessus d'une courbe, alors [Kol00, Theorem 1.1] affirme qu'à somme connexe avec des \mathbf{RP}^3 et des $\mathbf{S}^2 \times \mathbf{S}^1$ près, M est une variété de Seifert, une somme connexe d'espaces lenticulaires, un fibré en tores au-dessus du cercle ou un \mathbf{Z}_2 -quotient d'un tel fibré. Dans les deux derniers cas, M est une variété Sol d'après la proposition 6.2.3.
3. Une variété de Fano à singularités terminales et l'on sait [Kaw92] (voir aussi [Kol98a, Section 6]) qu'il n'existe qu'un nombre fini de familles de telles variétés. On peut même exhiber une borne explicite, bien que peu réaliste. En effet, d'après Kollár, voir par exemple [Kol17, avant le théorème 24], il y a au plus $10^{10^{500}}$ types topologiques différents pour les \mathbf{R} -variétés de Fano à singularités terminales.

\square

Remarque 6.1.14. — On ne sait pas grand chose à l’heure actuelle sur la topologie des variétés de Fano de dimension 3, voici néanmoins trois références concernant les variétés de Fano réelles : les cubiques réelles de \mathbf{P}^4 ont été classifiées par Krasnov [Kra06, Kra09] et les structures réelles sur la variété de Fano V_{22} ont été classifiées par Kollár et Schreyer [KS04].

Théorème de Viterbo. — La preuve du théorème 6.1.16 ci-dessous, qui porte sur les variétés hyperboliques (ainsi que la preuve du théorème 6.2.4 concernant les variétés Sol), utilise la théorie symplectique des champs (SFT) qui par ses méthodes nous emmènerait assez loin de la géométrie algébrique. Par manque de place, nous avons renoncé à présenter cet important outil et nous renvoyons le lecteur intéressé à [EGH00, 1.7.5] (Voir aussi [MW12] pour les variétés Sol). Rappelons seulement ici comment la géométrie symplectique intervient dans notre contexte.

Une variété algébrique complexe projective non singulière X de dimension complexe n étant donnée, on considère sa structure de variété différentielle sous-jacente. Pour tout plongement projectif $j: X \hookrightarrow \mathbf{P}^N(\mathbf{C})$, la restriction à $j(X)$ de la métrique de Fubini-Study de $\mathbf{P}^N(\mathbf{C})$ muni X d’une forme de Kähler ω , voir l’exemple D.3.6. De plus le couple (X, ω) formé de la variété différentielle X de dimension réelle paire $2n$ et d’une forme de Kähler ω est une variété symplectique, voir la remarque D.3.5.

Définition 6.1.15. — Soit (X, ω) une variété symplectique. On dit qu’une sous-variété différentielle $M \subset X$ est *lagrangienne* si

$$\omega|_M \equiv 0 \quad \text{et} \quad \dim_{\mathbf{R}} M = \frac{1}{2} \dim_{\mathbf{R}} X,$$

c’est-à-dire si M est une sous-variété *isotrope* de dimension maximale.

Théorème 6.1.16. — Soit X une variété algébrique complexe projective non singulière de dimension complexe > 2 . Soit $M \subset X$ une sous-variété lagrangienne pour une structure symplectique sous-jacente à X . Si X est unirrégulière, alors M n’admet pas de métrique riemannienne à courbure sectionnelle strictement négative.

Démonstration. — Voir [Vit99], [EGH00, 1.7.5]. □

Exercice 6.1.17. — Montrer que le lieu réel $X(\mathbf{R})$ d’une \mathbf{R} -variété projective non singulière (X, σ) est une sous-variété lagrangienne de la variété symplectique sous-jacente à X déterminée par un \mathbf{R} -plongement projectif de (X, σ) .

Corollaire 6.1.18. — Soit X une \mathbf{R} -variété projective non singulière de dimension > 2 . Si X est uniréglée, alors aucune composante connexe de $X(\mathbf{R})$ n'admet de métrique hyperbolique (une telle métrique possède une courbure sectionnelle constante égale à -1).

6.2. Les 3-variétés réelles uniréglées de 2000 à 2012

Le théorème 6.1.9 contraint fortement le lieu réel d'une \mathbf{R} -variété projective non singulière uniréglée de dimension 3. À la suite de son théorème, Kollár a proposé plusieurs conjectures concernant la classification topologique des lieux réels de ces variétés. L'objet de cette section est de faire le point sur ces conjectures.

Rappelons que si M est une variété orientée compacte sans bord de dimension 3, alors il existe une décomposition $M = M' \#^a \mathbf{RP}^3 \#^b (\mathbf{S}^2 \times \mathbf{S}^1)$ avec $a + b$ maximal qui est unique d'après un théorème de Milnor [Mil62] (voir la définition B.5.15 de somme connexe).

Pour une variété algébrique, être rationnelle, rationnellement connexe (voir plus loin) ou uniréglée étant invariant par équivalence birationnelle, les propriétés topologiques pertinentes de M dans notre contexte sont en fait portées par M' comme l'illustrent les exemples ci-dessous. Ceci motive la définition *ad hoc* suivante.

Définition 6.2.1. — Soient M une variété orientée compacte sans bord de dimension 3 et $M = M' \#^a \mathbf{RP}^3 \#^b (\mathbf{S}^2 \times \mathbf{S}^1)$ une décomposition avec $a + b$ maximal. Alors M' est la partie *essentielle* de M . Une propriété *essentielle* de M est une propriété de M' .

Exemple 6.2.2. — D'après [Kol99a, Exemple 1.4]. Soit X une \mathbf{R} -variété de dimension 3, non singulière.

1. Soit $P \in X(\mathbf{R})$ un point réel, alors pour la composante connexe M de $X(\mathbf{R})$ contenant P , nous obtenons (proposition F.3.1)

$$B_P M \approx M \# \mathbf{RP}^3.$$

2. Soit $D \subset X$ une \mathbf{R} -courbe possédant un unique point réel $\{0\} = D(\mathbf{R})$. Supposons de plus que proche de 0, cette courbe soit donnée par les équations $\{z = x^2 + y^2 = 0\}$. Notons $Y_1 = B_D X$, la variété obtenue par l'éclatement de X centré en D (Voir l'appendice F), cette nouvelle variété est réelle et possède un unique point singulier P . Considérons $Y := B_P Y_1$, la variété obtenue par l'éclatement de Y_1 centré en P qui

est une variété réelle non singulière. En notant $\pi: Y \rightarrow X$ la composition des éclatements, nous obtenons pour la composante connexe $M \subset X(\mathbf{R})$ contenant P la relation

$$\pi^{-1}M \approx M\#(\mathbf{S}^2 \times \mathbf{S}^1),$$

c'est-à-dire

$$B_P(B_D M) \approx M\#(\mathbf{S}^2 \times \mathbf{S}^1).$$

Variétés uniréglées. — Depuis les travaux de Kollár, théorème 6.1.9, nous savons que modulo les variétés **Sol**, définition B.8.8, et modulo un nombre fini de variétés de dimension 3 fermées, les variétés réelles uniréglées orientables sont essentiellement, voir la définition 6.2.1, des fibrés de Seifert ou des sommes connexes d'espaces lenticulaires. Les progrès accomplis depuis peuvent être résumés rapidement de la manière suivante. Grâce au théorème 6.1.16, nous savons qu'une variété hyperbolique ne peut être contenue dans le lieu réel d'une variété projective uniréglée non singulière. Le théorème 6.2.4 nous apprend qu'il existe au plus un nombre fini de variétés **Sol** qui puissent être contenues dans le lieu réel d'une variété projective uniréglée non singulière. Réciproquement, le théorème 6.2.7 associé à la proposition B.8.13 nous dit que toute variété géométrique, définition B.8.4, orientable qui n'est ni hyperbolique ni **Sol**, est difféomorphe à une composante connexe du lieu réel d'une variété projective uniréglée non singulière.

*Variétés **Sol** et suspensions⁽³⁾ des difféomorphismes du tore.* — Notons z une coordonnée sur le cercle $\mathbf{S}^1 := \{|z| = 1\} \subset \mathbf{C}$, et (u, v) des coordonnées sur le tore $\mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^1 := \{|u| = 1, |v| = 1\} \subset \mathbf{C} \times \mathbf{C}$. Alors $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Z})$ agit sur $\mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^1$ par

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto [(u, v) \mapsto (u^a v^b, u^c v^d)]$$

Pour $A \in \mathbf{GL}_2(\mathbf{Z})$, posons

$$M := (\mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^1) \times [0, 1] / ((u, v), 0) = (A \cdot (u, v), 1).$$

L'application $\rho: M \rightarrow \mathbf{S}^1 = [0, 1] / (0 = 1)$ est alors un fibré différentiel en tores de classe \mathcal{C}^∞ , voir la définition C.3.5. On peut montrer que l'espace total M de ce fibré est géométrique, voir la définition B.8.4, et que sa géométrie dépend du difféomorphisme de $\mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^1$ déterminé par la matrice A , voir [Sco83] par exemple. Soit λ une valeur propre de A , on a la trilogie :

3. Construction appelée aussi "mapping torus" dans la littérature.

1. si $|\lambda| = 1$ et A est périodique, alors M est une variété euclidienne,
2. si $|\lambda| = 1$ et A est non périodique, alors M est une variété **Nil**,
3. si $|\lambda| \neq 1$ (c'est-à-dire A hyperbolique), alors M est une variété **Sol**.

Remarquons que dans les deux premiers cas, c'est-à-dire lorsque M porte une géométrie euclidienne ou **Nil**, M admet aussi une fibration de Seifert, voir la proposition **B.8.13**. On en déduit qu'un fibré en tores au-dessus du cercle est soit une variété de Seifert soit une variété **Sol**.

Réciproquement les fibrés en tores avec recollement hyperbolique décrivent l'essentiel des variétés **Sol** comme le précise la proposition ci-dessous.

Proposition 6.2.3 (Classification des variétés Sol fermées)

*Soit M une variété **Sol** compacte sans bord alors l'une des deux assertions suivantes est vérifiée*

1. M est la suspension d'un difféomorphisme hyperbolique.
2. M est un saphir, c'est-à-dire un \mathbf{Z}_2 -quotient du cas précédent.

Démonstration. — Voir [MW12, Theorem 2.1]. □

Théorème 6.2.4. — *Une variété **Sol** fermée orientable ne peut se plonger comme composante connexe du lieu réel d'une variété projective non singulière de dimension 3 admettant une fibration à fibres rationnelles au-dessus d'une courbe.*

Démonstration. — Voir [MW12, Corollary 3.1]. □

Ce théorème prouve, à un nombre fini d'exceptions près, la première partie de la conjecture de Kollár [Kol01b, Conjecture 6.7(1)].

Corollaire 6.2.5. — *Si une composante connexe orientable M du lieu réel d'une \mathbf{R} -variété projective non singulière (X, σ) de dimension 3 uniréglée est une variété **Sol**, alors X est birationnelle à une \mathbf{R} -variété de Fano (Y, τ) telle que $Y(\mathbf{R})$ contient une composante connexe homéomorphe à M .*

Remarque 6.2.6. — En particulier, il existe au plus un nombre fini de telles variétés **Sol** uniréglées (et conjecturalement aucune! voir [Kol01b, Conjecture 6.7(1)]).

Preuve du corollaire 6.2.5. — On suit la même stratégie que pour la preuve du théorème 6.1.9. D'après le théorème 6.1.12, la \mathbf{R} -variété (X, σ) est birationnelle à une \mathbf{R} -variété (Y, τ) qui est un fibré de Mori. De plus $Y(\mathbf{R})$ contient une composante connexe homéomorphe à M d'après le théorème 6.1.13 car une

variété **Sol** est indécomposable d'après le corollaire [B.8.12](#). Le théorème [6.1.13](#) permet alors de conclure à partir des types topologiques possibles de ces fibrés de Mori :

1. Un fibré en coniques au-dessus d'une surface. Kollár a classifié ces fibrés dans [[Kol99b](#), Theorem 1.1], il ressort en particulier de cette classification que M est une variété de Seifert (ou un espace lenticulaire qui est aussi une variété de Seifert) et donc que M ne peut être **Sol** d'après le corollaire [B.8.14](#).
2. Une fibration à fibres rationnelles au-dessus d'une courbe, le théorème [6.2.4](#) affirme que M ne peut être **Sol**.
3. Une variété de Fano à singularités terminales et l'on sait qu'il n'existe qu'un nombre fini de familles de telles variétés.

□

Le théorème suivant, conjonction des deux articles [[HM05b](#)] et [[HM05a](#)], constitue une réciproque au théorème [6.1.9](#) pour peu que l'on prenne en compte la conjecture de Kollár [[Kol01b](#), Conjecture 6.7(1)], affirmant qu'il n'y a en fait pas d'exception, c'est-à-dire que toute composante connexe du lieu réel d'une variété de Fano non singulière de dimension 3 est essentiellement une variété de Seifert ou une somme connexe d'espaces lenticulaires.

Théorème 6.2.7. — *Toute variété de Seifert orientable et toute somme connexe d'espaces lenticulaires $\#_{i=1}^k \mathbf{L}_{p_i, q_i}$ est réalisable comme composante connexe du lieu réel d'une \mathbf{R} -variété projective non singulière uniréglée de dimension 3.*

Démonstration. — Voir [[HM05b](#), Theorem 1.1] pour la réalisation des variétés de Seifert et [[HM05a](#), Corollary 1.2] pour la réalisation des sommes connexes d'espaces lenticulaires. □

Remarque 6.2.8. — Ce théorème confirme la conjecture de Kollár [[Kol01b](#), Conjecture 6.7.(2)].

Variétés rationnellement connexes. — Nous avons vu que les variétés uniréglées, définition [6.1.7](#), généralisaient les variétés rationnelles. Nous nous intéressons ici à une propriété intermédiaire entre rationnelle et uniréglée.

Définition 6.2.9. — Une \mathbf{R} -variété projective (X, σ) de dimension n non singulière est *rationnellement connexe* (r. c.) s'il existe un ouvert de Zariski non vide $U \subset X$ tel que pour toute paire de points $x, y \in U$, il existe une

courbe rationnelle $f: \mathbf{P}^1(\mathbf{C}) \rightarrow X$ telle que $x, y \in f(\mathbf{P}^1(\mathbf{C}))$ (on n'exige pas que f soit réelle!).

Remarque 6.2.10. — Ci-dessus, nous avons choisi l'une des cinq définitions équivalentes données dans [Kol01c, Définition 41] pour les variétés non singulières. Pour la connexité rationnelle des variétés éventuellement singulières, voir [Deb01, Définition 4.3]; le lien avec la définition 6.2.9 est explicité par la remarque [Deb01, Remark 4.4(3)]. On consultera aussi [Deb01, Remark 4.4(4)] qui montre que, tout comme « uniréglée », la connexité rationnelle [Deb01, Définition 4.3] est préservée par extension du corps de base.

Par exemple, les variétés géométriquement rationnelles sont r. c., les hypersurfaces de degré inférieur à n dans \mathbf{P}^n sont r. c. et plus généralement toutes les variétés de Fano sont r. c. [KMM92, Cam92]. Pour voir que r. c. est intermédiaire entre rationnel et uniréglé, remarquons qu'une variété algébrique complexe projective non singulière X est uniréglée si pour tout point $x \in U$ dans un ouvert fixé, il existe une courbe rationnelle $f: \mathbf{P}^1(\mathbf{C}) \rightarrow X$ telle que $x \in f(\mathbf{P}^1(\mathbf{C}))$. En paraphrasant Kollár [Kol01c], on peut dire que la notion de variété r. c. est considérée comme la « bonne » généralisation de courbe rationnelle.

Avant d'énoncer le résultat principal de cette sous-section, théorème 6.2.12, nous établissons un corollaire du théorème 4.4.39 concernant les surfaces rationnelles singulières de Du Val.

Si $g: M \rightarrow B$ est une fibration de Seifert, voir la définition B.8.1, on note k le nombre de fibres multiples de g et pour chaque fibre multiple $g^{-1}(P_i)$, $i = 1 \dots k$, m_i sa multiplicité. Si M est une somme connexe d'espaces lenticulaires, voir la définition B.8.2, on note k le nombre d'espaces lenticulaires et pour chaque espace lenticulaire \mathbf{L}_{p_i, q_i} , $i = 1 \dots k$, m_i l'ordre de son groupe fondamental.

Théorème 6.2.11. — Soit (X, σ) une \mathbf{R} -variété projective non singulière de dimension 3 admettant une \mathbf{R} -fibration $X \rightarrow Y$ de fibre générale \mathbf{P}^1 . Si $X(\mathbf{R})$ est orientable et si Y est une \mathbf{R} -surface géométriquement rationnelle, alors pour toute composante connexe $M \subset X(\mathbf{R})$, on a

1. $k(M) \leq 4$;
2. $\sum_{i=1}^k (1 - \frac{1}{m_i+1}) \leq 2$;
3. Si $M \rightarrow B$ est une fibration de Seifert avec $|B| = \mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^1$, alors

$$k(M) = 0.$$

Les trois conclusions de ce théorème répondent par l'affirmative à trois conjectures de Kollár [Kol99b, Remark 1.2(1–3)], voir aussi [Kol01b, Conjecture 6.7.(3)].

Démonstration. — La preuve originale se trouve dans [CM09, Theorem 0.1, Section 6].

Soit $f: X \rightarrow Y$ une \mathbf{R} -variété projective non singulière de dimension 3 \mathbf{R} -fibrée en courbes rationnelles au-dessus d'une \mathbf{R} -surface géométriquement rationnelle Y . Supposons que $X(\mathbf{R})$ est orientable. Soit $M \subset X(\mathbf{R})$ une composante connexe. Kollár a prouvé (voir aussi [CM08, 3.3, 3.4, et la preuve du corollaire 0.2]), qu'il existe

1. Une paire de contractions birationnelles $c: X \rightarrow X'$, $r: Y \rightarrow Y'$, où
 - (a) X' est une \mathbf{R} -variété projective de dimension 3 à singularités terminales,
 - (b) Y' est une surface de Du Val.
2. Une \mathbf{R} -fibration en courbes rationnelles $f': X' \rightarrow Y'$ telle que $-K_{X'}$ est f' -ample et telle que $f' \circ c = r \circ f$.
3. La propriété importante de cette construction étant que $M'' = M' \#^{a'} \mathbf{RP}^3$ où M' est la partie essentielle de M et M'' est la composante connexe de la normalisation topologique $\bar{\nu}: \overline{X'(\mathbf{R})} \rightarrow X'(\mathbf{R})$ telle que $\bar{\nu}(M'') = c(M)$.

D'après [Kol99b, Theorem 8.1] et [CM08, Preuve du corollaire 0.2, fin de section 3], il existe une petite perturbation $g: M'' \rightarrow B$ de $f'|_{\bar{\nu}(M'')}$ telle que $g|_{g^{-1}(B \setminus \partial B)}$ est une fibration de Seifert et une application injective de l'ensemble des points singuliers de Y' contenus dans $f'(\bar{\nu}(M''))$ qui sont de type A^+ et globalement séparants si localement séparants. À travers cette injection, la multiplicité de la fibre vaut $m+1$ si le point singulier est du type A_m^+ . De là, les inégalités $k(M) \leq 4$ et $\sum_{i=1}^k (1 - \frac{1}{m_i+1}) \leq 2$ se déduisent du théorème 4.4.39. \square

L'état actuel de la classification des variétés uniréglées et rationnellement connexes en dimension 3 est résumé par l'énoncé suivant qui synthétise des travaux contenus dans [Kol98b, Kol99a, Kol99b, Kol00, Vit99, EGH00, HM05b, HM05a, CM08, CM09, MW12].

Théorème 6.2.12 (Classification). — Soient X une \mathbf{R} -variété projective non singulière de dimension 3 de lieu réel $X(\mathbf{R})$ orientable et $M \subset X(\mathbf{R})$ une composante connexe. Alors à un nombre fini d'exceptions potentielles près

1. Si X est uniréglée, alors il existe $a, b \in \mathbf{N}$ et une variété M' tels que

$$M = M' \#^a \mathbf{RP}^3 \#^b (\mathbf{S}^2 \times \mathbf{S}^1)$$

et M' admet une fibration de Seifert $M' \rightarrow B$ ou bien une décomposition $M' = \#_{i=1}^k \mathbf{L}_{p_i, q_i}$ en espaces lenticulaires.

2. Si X est rationnellement connexe et si M admet une fibration de Seifert $M \rightarrow B$ dont l'espace d'orbites B est orientable, alors M porte l'une des quatre géométries

$$\mathbf{S}^3, \mathbf{E}^3, \mathbf{S}^2 \times \mathbf{E}^1, \mathbf{Nil}.$$

Réciproquement, soit $M = M' \#^a \mathbf{RP}^3 \#^b (\mathbf{S}^2 \times \mathbf{S}^1)$ une variété compacte sans bord de dimension 3. Si M' est une variété de Seifert orientable ou une somme connexe d'espaces lenticulaires $M' = \#_{i=1}^k \mathbf{L}_{p_i, q_i}$, alors il existe une \mathbf{R} -variété projective X uniréglée et non singulière telle que M soit difféomorphe à une composante connexe de $X(\mathbf{R})$.

Démonstration. — Pour prouver (1), il suffit, d'après le théorème de Kollár 6.1.9, de réfuter la seule famille infinie d'exceptions 6.1.9.(3), c'est-à-dire de montrer que si $M \rightarrow \mathbf{S}^1$ est un fibré localement trivial en tores qui n'admet pas en même temps une fibration de Seifert, alors M appartient à la liste finie d'exceptions 6.1.9.(4). Ce qui est une conséquence du corollaire 6.2.5.

Le point (2) est une conséquence du théorème 6.2.11 en utilisant la proposition 4.4.34 et la table ci-dessous, extraite de [Sco83, Table 4.1], qui établit la géométrie de l'espace total M en fonction de la géométrie de l'orbifold de base B d'une fibration de Seifert $f: M \rightarrow B$ et du nombre d'Euler $e(f)$ de la fibration, voir [Sco83, après théorème 3.6] pour la définition de $e(f)$ et [Sco83, Lemme 3.7] pour sa propriété principale.

	$\chi(B) > 0$	$\chi(B) = 0$	$\chi(B) < 0$
$e(f) = 0$	$\mathbf{S}^2 \times \mathbf{E}^1$	\mathbf{E}^3	$\mathbf{H}^2 \times \mathbf{E}^1$
$e(f) \neq 0$	\mathbf{S}^3	\mathbf{Nil}	$\widetilde{\mathbf{SL}_2(\mathbf{R})}$

TABLE 6.2.1. Géométrie d'une variété de Seifert $f: M \rightarrow B$.

La seconde partie du théorème, l'énoncé réciproque, est une conséquence du théorème 6.2.7. □

6.3. Questions et conjectures

1. La conjecture suivante, posée en 2004 [Man04, Page 24] est toujours ouverte.

***Conjecture 6.3.1.** — Les composantes réelles géométriques des \mathbf{R} -variétés projectives non singulières uniréglées de dimension 3 orientables sont exactement les variétés de Seifert orientables.*

Au vu de 6.2.12, il y a au plus un nombre fini de contre-exemples éventuels à cette conjecture. De plus, un tel contre-exemple serait nécessairement une variété de Fano à singularité terminale possédant une composante connexe **Sol** dans son lieu réel.

2. Nous reprenons une question posée dans [MW12]. Nous avons vu qu'il existe des modèles uniréglés pour toutes les variétés de Seifert orientables, théorème 6.2.7, mais la question suivante est ouverte : quel est le modèle projectif réel non singulier le plus simple pour une variété hyperbolique, pour une variété **Sol** ?
3. En améliorant la construction de [HM05b], il devrait être possible de montrer que toute variété de Seifert non orientable admet un modèle uniréglé.

APPENDICES

APPENDICE A

ALGÈBRE COMMUTATIVE

Pour un accès facile, nous avons réuni ici des résultats bien connus comme des résultats certes classiques dans la littérature spécialisée mais pas toujours aisés à trouver. Notre référence principale est le livre de Eisenbud [Eis95].

A.1. Limites inductives

Pour des rappels utiles concernant les catégories et les limites, voir par exemple [Eis95, Appendices 5&6] en sachant que nos limites inductives sont des colimites filtrées chez Eisenbud. Nous nous limitons ici à quelques définitions de base.

Définition A.1.1 (Système inductif). — Soient \mathcal{C} une catégorie et (J, \leq) un ensemble partiellement ordonné tel que $\forall (i, j) \in J^2, \exists k \in J \mid i \leq k \text{ et } j \leq k$ (on dit que (J, \leq) est *filtrant*⁽¹⁾). Un *système inductif* indexé par J est la donnée d'une famille $\{M_j\}_{j \in J}$ d'objets de \mathcal{C} et de morphismes $\varphi_{ij}: M_i \rightarrow M_j$ pour les couples d'indices $(i, j) \in J^2$ tels que $i \leq j$, le tout vérifiant :

1. $\forall j \in J, \varphi_{jj} = \text{id}_{M_j}$;
2. $\forall (i, j, k) \in J^3, i \leq j \leq k \implies \varphi_{jk} \circ \varphi_{ij} = \varphi_{ik}$.

Définition A.1.2 (Limite inductive). — Soit $\{M_j\}_{j \in J}$ un système inductif dans une catégorie \mathcal{C} . La *limite inductive*⁽²⁾ du système $\{M_j\}$, si elle existe, est un objet M de \mathcal{C} muni de morphismes $\varphi_j: M_j \rightarrow M$ vérifiant les relations de compatibilité $\varphi_i = \varphi_j \circ \varphi_{ij}$ pour tout $i \leq j$, le tout vérifiant la propriété universelle suivante : pour tout objet N de \mathcal{C} muni de morphismes

1. En anglais : (J, \leq) is a *filtered set*, a *directed set* or a *directed preorder*.
2. En anglais : *inductive limit*, *direct limit* or *colimit of a filtered set*.

$\psi_j: M_j \rightarrow N$, compatibles avec les applications du système inductif, il existe, pour tout $j \in J$, une unique application $M \rightarrow N$ telle que ψ_j se factorise :

$$\begin{array}{ccc} M_j & \xrightarrow{\psi_j} & N \\ \varphi_j \downarrow & \nearrow & \\ M & & \end{array}$$

Lorsqu'elle existe, on note $\varinjlim_{j \in J} M_j$ la limite inductive du système $\{M_j\}_{j \in J}$.

Exemple A.1.3. — Si la catégorie \mathcal{C} est la catégorie des groupes, des anneaux, ou bien pour un anneau A fixé, la catégorie des A -modules ou des A -algèbres, alors la limite inductive existe : l'ensemble sous-jacent est le quotient de la réunion disjointe des M_j modulo une relation d'équivalence :

$$\varinjlim_{j \in J} M_j = \bigsqcup_{j \in J} M_j / \sim$$

où $x_i \in M_i$ est équivalent à $x_j \in M_j$ s'il existe $k \in J$ tel que $\varphi_{ik}(x_i) = \varphi_{jk}(x_j)$.

Exemple A.1.4. — Soit \mathcal{F} un faisceau (voir l'appendice C) en éléments de \mathcal{C} sur un espace topologique X . Pour un point $x \in X$ fixé, l'ensemble des voisinages ouverts de x ordonné par l'inclusion ($U \leq V$ si et seulement si $U \supseteq V$) est filtrant et $\{\mathcal{F}(U)\}_{U \ni x}$ forme un système inductif. La limite inductive de ce système est la *fibre* de \mathcal{F} au point x , notée \mathcal{F}_x . Pour chaque voisinage ouvert de x , le morphisme canonique $\mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}_x$ associe à toute section s de \mathcal{F} au-dessus de U le *germe* $s_x \in \mathcal{F}_x$ de s en x .

A.2. Anneaux, idéaux premiers, idéaux maximaux, modules

Par convention, les anneaux sont commutatifs et unitaires, les morphismes d'anneaux envoient donc l'unité sur l'unité.

L'ensemble des éléments inversibles de A est noté $U(A)$. Si K est un anneau, une K -algèbre A est un anneau muni d'un morphisme d'anneaux $K \rightarrow A$. Par exemple $K[X_1, \dots, X_n]$ est la K -algèbre des polynômes à n indéterminées et à coefficients dans K et $K(X_1, \dots, X_n)$ est la K -algèbre des fractions rationnelles à n indéterminées et à coefficients dans K .

Définition A.2.1. — Un élément non nul a d'un anneau A est un *diviseur de zéro* dans A s'il existe un élément non nul $b \in A$ tel que $ab = 0$.

Un anneau est *intègre* s'il possède au moins deux éléments et ne contient aucun diviseur de zéro.

Un *corps* est un anneau qui possède au moins deux éléments et dont tout élément non nul est inversible.

Définition A.2.2. — Soit A un anneau.

1. Un idéal I de A est *premier* s'il vérifie les propriétés :
 - (a) I est distinct de A
 - (b) si a et b sont des éléments de A tels que $ab \in I$, alors $a \in I$ ou $b \in I$.
2. Un idéal I de A est *maximal* s'il est distinct de A et si les seuls idéaux de A qui contiennent I sont I et A .

Définition A.2.3. — Soit I un idéal d'un anneau A , le *radical* \sqrt{I} de I dans A est l'idéal des racines d'éléments de I .

$$\sqrt{I} := \{a \in A \mid \text{il existe un entier naturel } n \geq 1, a^n \in I\}.$$

On dit qu'un idéal $I \subset A$ est un *idéal radical* si $I = \sqrt{I}$.

Exercice A.2.4 (Voir la remarque 1.2.29). — Soit K un corps, montrer que si F est un fermé de Zariski de $\mathbf{A}^n(K)$, alors $\mathcal{I}(F)$ est radical.

Définition A.2.5. — Un élément a d'un anneau A est *nilpotent* s'il existe un entier naturel $n > 1$ tel que $a^n = 0$. Le *nilradical* d'un anneau A est l'ensemble de ses éléments nilpotents. Un anneau est *réduit* si son nilradical est nul c'est-à-dire s'il ne possède aucun élément nilpotent non nul.

Exercice A.2.6. — Le nilradical d'un anneau A est un idéal, c'est l'idéal radical de l'idéal nul de A .

Proposition A.2.7. — Soient A un anneau et I un idéal de A .

1. L'idéal I est radical si et seulement si l'anneau quotient A/I est réduit.
2. L'idéal I est premier si et seulement si l'anneau quotient A/I est intègre.
3. L'idéal I est maximal si et seulement si A/I est un corps.

Démonstration. — Exercice facile. □

Proposition A.2.8 (Théorème de correspondance)

Soient A un anneau et $I \subset A$ un idéal. La surjection canonique $A \rightarrow A/I$ induit une correspondance bijective entre les idéaux premiers de A/I et les idéaux premiers de A contenant I ainsi qu'une correspondance bijective entre les idéaux maximaux de A/I et les idéaux maximaux de A contenant I .

Démonstration. — Exercice facile. □

Le lemme suivant est immédiat mais très utile.

Lemme A.2.9. — Soient A un anneau et $B \subset A$ un sous-anneau. Si I est un idéal premier de A , alors $I \cap B$ est un idéal premier de B .

Démonstration. — Soient a et b des éléments de B tels que $ab \in I \cap B$ et $a \notin I \cap B$. Comme $a \in B$ et $a \notin I \cap B$, a n'appartient pas à I . De là, $b \in I$ car I est un idéal premier de A et finalement b appartient à $I \cap B$. □

Exemple A.2.10. — Calcul de la dimension de l'ensemble algébrique affine $F := \mathcal{Z}(x^2 + y^2) \subset \mathbf{A}_{\mathbf{R}}^2$ de l'exemple 1.5.20. Il existe une seule chaîne (voir la définition 1.5.2) d'idéaux premiers de $\mathbf{R}[x, y]$ contenant $(x^2 + y^2)$ qui soit de longueur maximale :

$$(x^2 + y^2) \subset (x, y).$$

Il n'existe donc qu'une seule chaîne d'idéaux premiers de $\mathbf{R}[x, y]/(x^2 + y^2)$ de longueur maximale. La dimension de l'anneau $\mathbf{R}[x, y]/(x^2 + y^2)$ vaut donc 1 et $\dim F = 1$ d'après la définition 1.5.9.

Lemme A.2.11 (Lemme de Nakayama). — Soient A un anneau, $\mathfrak{a} \subset A$ un idéal et M un A -module de type fini tel que $M = \mathfrak{a}M$. Alors il existe $a \in 1 + \mathfrak{a}$ tel que $aM = 0$. En particulier, si A est local et \mathfrak{a} son idéal maximal, on a $M = 0$.

Démonstration. — Voir [Eis95, Corollary 4.8]. □

Définition A.2.12. — Un anneau S est *gradué* s'il admet une décomposition $S = \bigoplus_{d \geq 0} S_d$ en une somme directe de groupes abéliens S_d , telles que pour tous $d, e \geq 0$, $S_d \cdot S_e \subset S_{d+e}$. Un idéal $I \subset S$ est un *idéal homogène* si $I = \bigoplus_{d \geq 0} (I \cap S_d)$.

A.3. Localisation

Définition A.3.1. — Soient A un anneau, M un A -module, et $S \subset A$ une *partie multiplicative* ⁽³⁾ (i.e. un sous-ensemble stable par multiplication). Le *module localisé* (ou *localisation*) de M en S , noté $S^{-1}M$, est l'ensemble des classes d'équivalences de couples $(m, s) \in M \times S$ pour la relation $(m, s) \sim (m', s')$ s'il existe un élément $t \in S$ tel que $t(s'm - sm') = 0$ dans M muni

3. Par convention, le produit vide vaut 1, en particulier toute partie multiplicative d'un anneau A contient l'unité de A .

d'une structure de A -module évidente. La classe d'équivalence de (m, s) est notée m/s . Dans le cas $M = A$, on obtient l'anneau localisé $S^{-1}A$ de A en S .

Si f est un élément de A , l'ensemble $S = \{1, f, f^2, \dots, f^k, \dots\}$ est une partie multiplicative de A et note $A_f := S^{-1}A$ et $M_f := S^{-1}M$ ces types particuliers de localisés. Par exemple, si f est nilpotent, A_f est l'anneau nul.

Si $\mathfrak{p} \subset A$ est un idéal premier, $S := A \setminus \mathfrak{p}$ est une partie multiplicative et on note $A_{\mathfrak{p}} := S^{-1}A$ et $M_{\mathfrak{p}} := S^{-1}M$ ⁽⁴⁾ ces types particuliers de localisés. On note $\kappa(\mathfrak{p})$ l'anneau quotient $A_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}_{\mathfrak{p}}$.

On a un morphisme naturel $i: M \rightarrow S^{-1}M$ défini par $a \mapsto a/1$. La notion de localisation de morphisme est immédiate : si $\varphi: M \rightarrow N$ est un morphisme de A -modules, $S^{-1}\varphi: S^{-1}M \rightarrow S^{-1}N$ est défini par $(S^{-1}\varphi)(m/s) = \varphi(m)/s$.

Proposition A.3.2 (Propriété universelle de la localisation)

Soient A et B des anneaux, $S \subset A$ une partie multiplicative et $\varphi: A \rightarrow B$ un morphisme d'anneaux tel que $\varphi(S) \subset U(B)$ (l'ensemble $U(B)$ des éléments inversibles de l'anneau B est une partie multiplicative). Alors il existe une unique extension $\hat{\varphi}: S^{-1}A \rightarrow B$ de φ qui fait commuter le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\varphi} & B \\ i \downarrow & \nearrow \hat{\varphi} & \\ S^{-1}A & & \end{array}$$

Corollaire A.3.3. — L'anneau localisé $S^{-1}A$ est un A -module plat (définition A.4.5).

Démonstration. — Voir [Eis95, Proposition 2.5, page 66]. □

Exercice A.3.4. — Soient A un anneau et $\mathfrak{m} \subset A$ un idéal maximal, alors $A/\mathfrak{m} \simeq A_{\mathfrak{m}}/\mathfrak{m}_{\mathfrak{m}}$.

Proposition A.3.5. — Soient A un anneau, $\mathfrak{p} \subset A$ un idéal premier et $\varphi: A \rightarrow A_{\mathfrak{p}}$, $a \mapsto a/1$ l'application naturelle. Alors l'application $I \mapsto \varphi^{-1}(I)$ est une injection de l'ensemble des idéaux de $A_{\mathfrak{p}}$ dans l'ensemble des idéaux de A qui induit une bijection entre l'ensemble des idéaux premiers de $A_{\mathfrak{p}}$ et l'ensemble des idéaux premiers de A contenus dans \mathfrak{p} .

Démonstration. — [Eis95, Proposition 2.2]. □

4. Attention à certains cas où ces notations peuvent prêter à confusion : soit K un corps et $A = K[x]$, alors $A_x = K[x, \frac{1}{x}]$ (on localise en la partie multiplicative engendrée par l'élément x de A) mais $A_{(x)} = \{\frac{p}{q}, p, q \in K[x], q(0) \neq 0\}$ (on localise en la partie multiplicative qui est complémentaire de l'idéal premier engendré par x).

Définition A.3.6. — Le quotient $\kappa(\mathfrak{m}) = A/\mathfrak{m}$ d'un anneau A par un idéal maximal \mathfrak{m} est un *corps résiduel* de A .

Définition A.3.7. — Un anneau est *local* s'il possède un unique idéal maximal. Le corps résiduel d'un anneau local A d'idéal maximal \mathfrak{m} est noté

$$\kappa = A/\mathfrak{m}.$$

Définition A.3.8 (Anneau total des fractions)

Soit S l'ensemble des non diviseurs de zéro d'un anneau A (S est une partie multiplicative de A), l'*anneau des fractions* (ou *anneau total des fractions*) de A est le localisé

$$\text{Frac } A := S^{-1}A.$$

Proposition A.3.9 (Corps des fractions). — Si A est intègre, $\text{Frac } A$ est un corps, c'est le corps des fractions de A .

Remarque A.3.10. — Si A est un anneau intègre, l'idéal (0) est premier et le corps des fractions de A satisfait

$$\text{Frac } A = A_{(0)} = \kappa((0)).$$

Proposition A.3.11. — Soit A un anneau intègre et $\mathfrak{m} \subset A$ un idéal maximal. On peut considérer que le localisé $A_{\mathfrak{m}}$ est un sous-anneau de $\text{Frac } A$ et on a alors :

$$A = \bigcap_{\substack{\mathfrak{m} \text{ idéal} \\ \text{maximal de } A}} A_{\mathfrak{m}}$$

Démonstration. — Comme A est intègre, on peut supposer que les localisés $A_{\mathfrak{m}}$ s'injectent en des sous-anneaux de $\text{Frac } A$. Par définition, $A_{\mathfrak{m}}$ est formé des classes de fractions $\frac{g}{h}$ pour $g, h \in A, h \notin \mathfrak{m}$. Montrons que

$$\bigcap_{\substack{\mathfrak{m} \text{ idéal} \\ \text{maximal de } A}} A_{\mathfrak{m}} \subset A,$$

l'inclusion réciproque étant immédiate. Soit $f \in \bigcap_{\substack{\mathfrak{m} \text{ idéal} \\ \text{maximal de } A}} A_{\mathfrak{m}}$. Si $f = \frac{g}{h}$ pour $g, h \in A$, alors h est inversible dans A , car sinon l'idéal $A \cdot h$ serait contenu dans un idéal maximal, donc $\frac{g}{h} \in A$. \square

Lemme A.3.12 (Lemme d'évitement). — Soient A un anneau, I_1, \dots, I_n et I des idéaux de A tels que $I \subset \bigcup_{\ell=1}^n I_{\ell}$. Si A contient un corps infini, ou si au plus deux des I_{ℓ} ne sont pas premiers, alors il existe $\ell \in \{1, \dots, n\}$ tel que $I \subset I_{\ell}$.

Démonstration. — [Eis95, Lemma 3.3, page 90]. □

Définition A.3.13 (Anneau noethérien). — Un anneau A est *noethérien* si tout idéal de A est de type fini.

Exemple A.3.14. — Si K est un corps, l'anneau des polynômes $K[X_1, \dots, X_n]$ est noethérien d'après le célèbre théorème de la base de Hilbert qui énonce que si A un anneau commutatif noethérien, alors l'anneau des polynômes $A[X]$ est noethérien. Tout idéal $I \subset K[X_1, \dots, X_n]$ admet donc un ensemble *fini* de générateurs.

A.4. Produit tensoriel

Proposition A.4.1 (Propriété universelle du produit tensoriel)

Soient A un anneau, M et N des A -modules. Il existe un A -module, noté $M \otimes_A N$, muni d'une application A -bilinéaire $\psi: M \times N \rightarrow M \otimes_A N$ satisfaisant la propriété universelle suivante : pour tout A -module B et toute application A -bilinéaire $\varphi: M \times N \rightarrow B$, il existe une unique application A -linéaire

$$\hat{\varphi}: M \otimes_A N \rightarrow B$$

qui fait commuter le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} M \times N & \xrightarrow{\varphi} & B \\ \psi \downarrow & \nearrow \hat{\varphi} & \\ M \otimes_A N & & \end{array}$$

Le couple $(M \otimes_A N, \psi)$ est unique à isomorphisme près. On omet le plus souvent ψ dans la notation et on appelle le A -module $M \otimes_A N$ le produit tensoriel des A -modules M et N .

Voir par exemple [Eis95, Appendice 2.2] pour une preuve. Une manière de calculer le produit tensoriel $M \otimes_A N$ de deux A -modules M et N consiste à considérer le quotient du groupe abélien libre engendré par les symboles de la forme $m \otimes n := \psi(m, n)$ par le sous-groupe engendré par les éléments de la forme :

1. $m \otimes n + m' \otimes n - (m + m') \otimes n$
2. $m \otimes n + m \otimes n' - m \otimes (n + n')$
3. $(a \cdot m) \otimes n - m \otimes (a \cdot n)$

pour $m, m' \in M$, $n, n' \in N$ et $a \in A$.

Proposition A.4.2. — Soient A un anneau, M, M', N des A -modules. Alors :

1. $M \otimes_A N \simeq N \otimes_A M$;
2. $(M \oplus M') \otimes_A N \simeq (M \otimes_A N) \oplus (M' \otimes_A N)$.

Proposition A.4.3. — Soit $\varphi: A \rightarrow B$ un morphisme d'anneaux et I un idéal de A . Alors :

1. $B \otimes_A A/I = B/\varphi(I)B$;
2. $B \otimes_A A[t_1, \dots, t_n] = B[t_1, \dots, t_n]$;
3. Si S est une partie multiplicative de A , alors

$$(\varphi(S))^{-1}B = S^{-1}A \otimes_A B .$$

Démonstration. — Voir par exemple [Eis95, Appendice 2.2]. □

Exercice A.4.4. — Rappelons que selon un usage courant, nous notons le groupe cyclique d'ordre $m \neq 1$ par $\mathbf{Z}_m := \mathbf{Z}/m\mathbf{Z}$.

1. Soit $m > 1$ un entier impair, montrer que

$$\mathbf{Z}_m \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Z}_2 = 0 .$$

2. Soit m un entier pair (par convention $\mathbf{Z}_0 = \mathbf{Z}$), montrer que

$$\mathbf{Z}_m \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Z}_2 = \mathbf{Z}_2 .$$

Définition A.4.5. — Soit A un anneau. Un A -module M est *plat* si pour tout morphisme injectif $N' \rightarrow N$ de A -modules, le morphisme induit

$$M \otimes_A N' \rightarrow M \otimes_A N$$

est encore injectif.

Définition A.4.6. — Un A -module sur un anneau A est *libre* s'il possède une base, *projectif* s'il est facteur direct d'un A -module libre.

Lemme A.4.7. — Soit A un anneau.

1. Tout A -module libre est projectif.
2. Si A est un anneau local, tout A -module projectif est libre.
3. Tout A -module libre est plat.

Démonstration. — Voir par exemple [Eis95, Appendice 3.2]. □

Définition A.4.8. — Soient A un anneau et M un A -module. On note $T^k(M)$ le produit tensoriel $M \otimes \cdots \otimes M$ de M avec lui-même k fois, pour $n \geq 1$. Pour $k = 0$, on convient de poser $T^0(M) = A$. L'algèbre sur A (non commutative) $T(M) = \bigoplus_{k \geq 0} T^k(M)$ est l'algèbre tensorielle de M . L'algèbre symétrique $S(M) = \bigoplus_{k \geq 0} S^k(M)$ de M est le quotient de $T(M)$ par l'idéal bilatère engendré par les expressions de la forme $x \otimes y - y \otimes x$ pour tout $x, y \in M$, c'est une A -algèbre commutative. L'algèbre extérieure $\Lambda(M) = \bigoplus_{k \geq 0} \Lambda^k(M)$ de M est le quotient de $T(M)$ par l'idéal bilatère engendré par les expressions de la forme $x \otimes x$ pour $x \in M$, c'est une A -algèbre alternée.

Exercice A.4.9. — Si M est un A -module libre de rang r , alors $S(M) \simeq A[X_1, \dots, X_r]$.

A.5. Algèbres entières, théorème des zéros (Nullstellensatz)

Définition A.5.1 (Élément entier sur A). — Soient $\varphi: A \rightarrow B$ un morphisme d'anneaux (on dit que B est une A -algèbre) et $x \in B$. On dit que x est un élément *entier sur A* s'il vérifie une équation unitaire, c'est-à-dire s'il existe des éléments a_0, \dots, a_{n-1} de A tels que :

$$x^n + \varphi(a_{n-1})x^{n-1} + \cdots + \varphi(a_0) = 0.$$

Si tous les éléments de B sont entiers sur A , on dit que B est une algèbre *entière sur A* et que $\varphi: A \rightarrow B$ est un *morphisme entier*.

Définition A.5.2. — La *clôture intégrale* d'un sous-anneau $A \subset B$ dans B est l'anneau formé des éléments de B qui sont entiers sur A .

Un anneau A est *intégralement clos* s'il est intègre et s'il est sa propre clôture intégrale dans son corps des fractions $\text{Frac } A$.

La dimension $\dim A$ d'un anneau A est définie en 1.5.3.

Proposition A.5.3. — Soient A, B des anneaux et $A \rightarrow B$ un morphisme entier, alors $\dim B \leq \dim A$. Si de plus $A \rightarrow B$ est injectif alors $\dim A = \dim B$.

Démonstration. — Voir [Liu02, Proposition II.5.10]. □

Définition A.5.4. — Soient A et B des anneaux. Un morphisme d'anneaux $A \rightarrow B$ est un *morphisme fini* si c'est un morphisme entier et si B est de type fini pour la structure de A -module déterminée par $A \rightarrow B$. On dit alors que B est une *A -algèbre finie* (ou que B est une algèbre *finie sur A*).

Il est facile de voir que si B est une A -algèbre de type finie, B est entière sur A (et donc finie sur A) si et seulement si B est un A -module de type fini.

Définition A.5.5. — Soit K un corps. Une K -algèbre A est *affine* si elle est non nulle et de type fini. Un anneau A est *affine* s'il existe un corps K tel que A soit une K -algèbre affine.

Lemme A.5.6 (Lemme de normalisation de Noether)

Soient K un corps et A une K -algèbre affine, alors il existe un entier $d \geq 0$ et un morphisme fini injectif

$$K[X_1, \dots, X_d] \hookrightarrow A.$$

Démonstration. — Voir [Liu02, Proposition II.1.9]. □

Définition A.5.7. — Soit $L|K$ une extension de corps. S'il existe un entier d tel que L soit algébrique sur une sous-extension isomorphe à $K(X_1, \dots, X_d)$, on dit que L est de degré de transcendance fini sur K . On montre que d est alors unique. L'entier d est appelé le *degré de transcendance* de L sur K , on le note $\text{trdeg}_K L$.

Définition A.5.8. — Soit K un corps, un *corps de fonctions* sur K est un corps L qui est engendré sur K par un nombre fini d'éléments, c'est-à-dire qu'il existe $f_1, \dots, f_r \in L$ tels que $L = K(f_1, \dots, f_r)$. Un tel L est un corps de fonctions *en n variables* si son degré de transcendance $\text{trdeg}_K L = n$.

Théorème A.5.9 (Théorème de l'élément primitif)

Une extension de corps finie, c'est-à-dire de degré fini, et séparable est monogène.

Corollaire A.5.10. — *Soit K un corps de caractéristique nulle. Si $L|K$ est une extension algébrique de type fini, alors il existe un élément $\alpha \in L$ tel que*

$$L = K(\alpha).$$

Théorème des zéros sur un corps algébriquement clos. —

Définition A.5.11. — Un corps K est *algébriquement clos* si tout polynôme non constant de $K[X]$ admet une racine dans K .

Il y a plusieurs énoncés équivalents du théorème des zéros de Hilbert (dit aussi Nullstellensatz).

Théorème A.5.12 (Théorème des zéros 1). — Si K est un corps algébriquement clos, les idéaux maximaux de $K[X_1, \dots, X_n]$ sont de la forme $\mathfrak{m}_{(a_1, \dots, a_n)} = (X_1 - a_1, \dots, X_n - a_n)$ pour $(a_1, \dots, a_n) \in K^n$.

Corollaire A.5.13 (Théorème des zéros 2). — Soient K un corps algébriquement clos et I un idéal de $K[X_1, \dots, X_n]$. Alors

$$\mathcal{I}(\mathcal{Z}(I)) = I \quad \text{si et seulement si } I \text{ est un idéal radical.}$$

Théorème des zéros sur un corps réel clos. — Sur le corps des nombres réels (et plus généralement sur un corps réel clos, voir plus loin), l'énoncé correct analogue au corollaire A.5.13 est beaucoup moins puissant.

Définition A.5.14. — Soit A un anneau commutatif. Un idéal I de A est un idéal réel si, pour toute suite a_1, \dots, a_l d'éléments de A ,

$$a_1^2 + \dots + a_l^2 \in I \implies a_i \in I, \forall i = 1, \dots, l.$$

Théorème A.5.15 (Théorème des zéros réels). — Soit I un idéal de $\mathbf{R}[X_1, \dots, X_n]$. Alors

$$\mathcal{I}(\mathcal{Z}(I)) = I \quad \text{si et seulement si } I \text{ est un idéal réel.}$$

Démonstration. — Voir [BCR98, 4.1.4]. □

Ce théorème est valable plus généralement pour tout corps réel clos, par exemple $\mathbf{R}_{\text{alg}} = \overline{\mathbf{Q}} \cap \mathbf{R}$.

Définition A.5.16. — [BCR98, 1.1.6] Un corps K est un corps réel si pour tout $x_1, \dots, x_n \in K$,

$$\sum_{k=1}^n x_k^2 = 0 \implies x_1 = \dots = x_n = 0.$$

Remarque A.5.17. — Un corps réel est toujours de caractéristique zéro.

Définition A.5.18. — Un corps réel clos K est un corps réel qui n'admet pas d'extension algébrique réelle non triviale.

Théorème A.5.19. — [BCR98, Théorème 1.2.2] Soit K un corps. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. Le corps K est réel clos.
2. Le corps K admet un ordre unique dont le cône positif est formé des carrés de K , et tout polynôme de $K[X]$ de degré impair admet une racine dans K .

3. L'extension $K[i] = K[X]/(X^2 + 1)$ est un corps algébriquement clos.

Remarque A.5.20. — Pour les questions utilisant des méthodes transcendentes, seul le « vrai » corps des réels convient, voir [BCR98, page 2]. Par exemple, le théorème de Stone-Weierstrass 5.2.3 qui est à la base de la comparaison entre les situations algébriques et différentielles.

A.6. Modules quadratiques sur \mathbf{Z} , réseaux

Cette section est en partie inspirée de [Ser77, Chapitre V]. Rappelons qu'un \mathbf{Z} -module est un groupe abélien et que tout groupe abélien est muni d'une unique structure de \mathbf{Z} -module. Rappelons aussi qu'un \mathbf{Z} -module de type fini M se décompose en une partie libre et une partie de torsion (le « f » en indice est pour « free ») :

$$M = M_f \oplus \text{Tor}(M) .$$

Définition A.6.1. — Soit A un anneau. Une forme quadratique sur un A -module M est une application $Q: M \rightarrow A$ telle que

1. $Q(ax) = a^2Q(x)$ pour $a \in A$ et $x \in M$.
2. L'application $(x, y) \mapsto Q(x + y) - Q(x) - Q(y)$ est une forme bilinéaire.

Un tel couple (M, Q) est appelé un A -module quadratique.

Remarque A.6.2. — 1. La forme bilinéaire $(x, y) \mapsto Q(x + y) - Q(x) - Q(y)$ est clairement symétrique.

2. Si 2 est inversible dans A (par exemple si A est un corps de caractéristique différente de 2), alors l'application

$$(x, y) \mapsto \frac{1}{2}[Q(x + y) - Q(x) - Q(y)]$$

est une forme bilinéaire symétrique telle que l'image du couple (x, x) vaut $Q(x)$ pour tout $x \in M$. Cela établit une correspondance bijective entre formes bilinéaires symétriques et formes quadratiques sur M .

Définition A.6.3. — Soit K un corps de caractéristique différente de 2. On appelle *discriminant* d'un K -module quadratique (M, Q) le déterminant, modulo les carrés non nuls de K , d'une matrice B_Q de Q relativement à une base de M

$$d(Q) = \det(B_Q) \pmod{K^{*2}} .$$

Remarque A.6.4. — Soit (M, Q) un \mathbf{Z} -module quadratique libre de type fini. Comme une matrice de changement de base est de déterminant ± 1 , le déterminant d'une matrice de Q ne dépend pas de la base. Le *discriminant* du module quadratique (M, Q) est égal au déterminant de sa matrice relativement à une base de M

$$d(Q) = \det(Q) .$$

Définition A.6.5. — Un \mathbf{Z} -module libre M de rang fini n (c'est-à-dire isomorphe à \mathbf{Z}^n) est un *réseau* ⁽⁵⁾ s'il est muni d'une forme bilinéaire symétrique $(x, y) \mapsto (x \cdot y)$. Le réseau M est *entier* si la forme $(x, y) \mapsto (x \cdot y)$ est à valeurs entières. Le *déterminant* d'un réseau M est le discriminant de la forme quadratique $x \mapsto (x \cdot x)$. Un réseau entier est *unimodulaire* si son déterminant vaut ± 1 .

Remarque A.6.6. — Soit $(M, (x, y) \mapsto (x \cdot y))$ un réseau entier. Alors l'application $Q: M \rightarrow \mathbf{Z}, x \mapsto (x \cdot x)$ est une forme quadratique sur M . Le couple (M, Q) est donc un \mathbf{Z} -module quadratique sans torsion de rang fini.

L'un des intérêts majeurs des réseaux unimodulaires provient du résultat suivant :

Proposition A.6.7. — *Muni du cup-produit, le groupe de cohomologie en dimension moitié d'une variété topologique compacte sans bord orientée simplement connexe de dimension $4m$ est un réseau unimodulaire.*

Éskisse de preuve. — La proposition A.6.7 est une conséquence de la dualité de Poincaré (corollaire B.7.7). En effet, si M est une variété topologique compacte sans bord orientée de dimension $4m$, alors $H^{2m}(M; \mathbf{Z})_f$ est de rang fini et le cup-produit $H^{2m}(M; \mathbf{Z})_f \times H^{2m}(M; \mathbf{Z})_f \rightarrow \mathbf{Z}$ est une forme bilinéaire symétrique non dégénérée de déterminant 1. Si M est de plus simplement connexe, son homologie est sans torsion et par conséquent $H^{2m}(M; \mathbf{Z})$ est un \mathbf{Z} -module libre, c'est-à-dire que $H^{2m}(M; \mathbf{Z})_f = H^{2m}(M; \mathbf{Z})$. \square

Corollaire A.6.8. — *Soit X une surface algébrique complexe projective non singulière munie de sa topologie euclidienne (ou plus généralement une surface analytique complexe compacte non singulière). Muni du cup-produit, le groupe $H^2(X; \mathbf{Z})$ est un réseau unimodulaire.*

5. En anglais, *lattice* est utilisé pour *réseau*.

Lemme A.6.9. — Soit (M, Q) un \mathbf{Z} -module quadratique non dégénéré. On suppose que M est libre et de type fini. Soient A un sous-module et $B = A^\perp$. Alors la valeur absolue du discriminant de $Q|_A$ (resp. $Q|_B$) est égale à l'indice du sous-groupe $A \oplus B \subset M$:

$$|d(Q|_A)| = |d(Q|_B)| = [M : A \oplus B] .$$

Démonstration. — Voir [Wil78, Lemma 3.14]. □

Définition A.6.10. — La signature $(a, b) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N}$ d'une forme quadratique non dégénérée Q sur un \mathbf{Z} -module M est par définition la signature de la forme quadratique induite $Q_{\mathbf{R}}$ sur le \mathbf{R} -espace vectoriel $M \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{R}$. L'indice d'une forme quadratique non dégénérée Q de signature (a, b) est défini par

$$\tau(Q) := a - b .$$

Remarque A.6.11. — Si Q est non dégénérée, $Q_{\mathbf{R}}$ aussi et on a donc $a + b = \dim_{\mathbf{R}} M \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{R} = \text{rg}(M / \text{Tor}(M))$.

Définition A.6.12. — Soit $(M, (x, y) \mapsto (x \cdot y))$ un réseau unimodulaire. La forme bilinéaire symétrique $(x, y) \mapsto (x \cdot y)$ est *paire* (ou *de type II*) si pour tout $x \in M$, l'entier $(x \cdot x)$ est pair. Dans le cas contraire, c'est-à-dire s'il existe $x \in M$ tel que $(x \cdot x)$ soit impair, la forme est *impaire* (ou *de type I*).

Proposition A.6.13. — Soit (M, Q) un réseau unimodulaire. Si la forme Q est paire, alors son indice satisfait

$$\tau(Q) \equiv 0 \pmod{8} .$$

Démonstration. — Voir [Ser77, Corollaire 1, §V.2]. □

A.7. Involutions anti-linéaires

Définition A.7.1. — Soit E un \mathbf{C} -espace vectoriel. Une application

$$\sigma : E \rightarrow E$$

est une *involution anti-linéaire* si $\sigma \circ \sigma = \text{id}_E$ et si pour tout $\lambda \in \mathbf{C}$ et tout $a \in E$, on a

$$\sigma(\lambda a) = \bar{\lambda} \sigma(a) .$$

Définition A.7.2. — Soient $G := \text{Gal}(\mathbf{C}|\mathbf{R})$ le groupe de Galois, E un \mathbf{R} -espace vectoriel muni d'une opération de G et σ l'involution de E correspondante. On note $E^G := E^\sigma = \{a \in E \mid \sigma(a) = a\}$ le *sous-espace vectoriel*

des invariants et $E^{-\sigma} = \{a \in E \mid \sigma(a) = -a\}$ le sous-espace vectoriel des anti-invariants.

Le lemme élémentaire suivant est très utile.

Lemme A.7.3. — Soit E un \mathbf{C} -espace vectoriel de dimension finie muni d'une involution anti-linéaire σ . Alors une \mathbf{R} -base de E^σ est une \mathbf{C} -base de E formée d'éléments invariants par σ .

Démonstration. — Pour la structure de \mathbf{R} -espace vectoriel de E induite par l'inclusion $\mathbf{R} \subset \mathbf{C}$, σ est \mathbf{R} -linéaire. Comme σ est involutive, son polynôme annulateur est $X^2 - 1$. Il est scindé à racines simples, l'involution \mathbf{R} -linéaire σ est donc diagonalisable c'est-à-dire que les deux espaces propres, associés aux valeurs propres 1 et -1 , sont en somme directe. Les espaces propres associés aux valeurs propres 1 et -1 , $E^\sigma = E_1$, $E^{-\sigma} = E_{-1}$ satisfont donc $E = E^\sigma \oplus E^{-\sigma}$. Soit (a_1, \dots, a_d) une \mathbf{R} -base de E^σ , alors (ia_1, \dots, ia_d) est une \mathbf{R} -base de $E^{-\sigma}$ puisque $\sigma(ia_k) = -i\sigma(a_k) = -ia_k$ pour tout $k = 1, \dots, d$. On a donc $\dim_{\mathbf{R}} E^\sigma = \dim_{\mathbf{R}} E^{-\sigma} = \frac{1}{2} \dim_{\mathbf{R}} E = \dim_{\mathbf{C}} E$. Le $2d$ -uplet $(a_1, \dots, a_d, ia_1, \dots, ia_d)$ est donc une \mathbf{R} -base de E et (a_1, \dots, a_d) est une \mathbf{C} -base de E . \square

Solution des exercices de l'appendice A

A.2.4 Par définition, $\mathcal{I}(F) \subset \sqrt{\mathcal{I}(F)}$ et réciproquement si $f \in \sqrt{\mathcal{I}(F)}$, alors il existe $n \in \mathbf{N}^*$ tel que $f^n \in \mathcal{I}(F)$, c'est-à-dire que, pour cet entier n , on a $\forall x \in F, (f(x))^n = 0$. Mais f est à valeurs dans K qui est un corps donc un anneau réduct d'où $\forall x \in F, f(x) = 0$ et donc $f \in \mathcal{I}(F)$.

A.3.4 Soit $\varphi: A/\mathfrak{m} \rightarrow A_{\mathfrak{m}}/\mathfrak{m}_{\mathfrak{m}}, x \mapsto \frac{x}{1}$. Le quotient A/\mathfrak{m} est un corps donc φ est injectif. Réciproquement soit $\frac{x}{s} \in A_{\mathfrak{m}}$ avec $x \in A$ et $s \in A \setminus \mathfrak{m}$. Alors la classe de s dans A/\mathfrak{m} est non nulle et est donc inversible. Donc il existe $a \in A$ et $m_0 \in \mathfrak{m}$ tels que $1 = as + m_0$. Par ailleurs $\frac{x}{s} = \frac{x(as+m_0)}{s} = \frac{(xa)s}{s} + \frac{m_0}{s} \in \frac{xa}{1} + \mathfrak{m}_{\mathfrak{m}}$ d'où $\varphi(xa) = \frac{xa}{1} = \frac{x}{s}$ et φ est un isomorphisme.

A.4.4 1. Si m est impair, il est premier avec 2 donc il existe $(u, v) \in \mathbf{Z}^2$ tel que $2u + mv = 1$. Donc dans $\mathbf{Z}_m \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Z}_2$, on a

$$1 \otimes 1 = (2u + mv) \otimes 1 = 2u \otimes 1 = u \otimes 2 = u \otimes 0 = 0$$

d'où la conclusion puisque clairement $1 \otimes 1$ engendre $\mathbf{Z}_m \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Z}_2$.

2. Appliquons la propriété universelle du produit tensoriel à $\varphi: \mathbf{Z}_m \times_{\mathbf{Z}} \mathbf{Z}_2 \rightarrow \mathbf{Z}_2, (a, b) \mapsto ab$ qui est \mathbf{Z} -bilinéaire et satisfait $\varphi(1, 1) = 1 \neq 0$. Il existe donc $\hat{\varphi}: \mathbf{Z}_m \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Z}_2 \rightarrow \mathbf{Z}_2$ telle que $\hat{\varphi}(1 \otimes 1) \neq 0$ et en particulier $1 \otimes 1$ est non nul dans $\mathbf{Z}_m \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Z}_2$. De plus, comme $2(1 \otimes 1) = 1 \otimes 2 = 0$, l'ordre de $1 \otimes 1$ dans $\mathbf{Z}_m \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Z}_2$ est 2 d'où la conclusion puisque $1 \otimes 1$ engendre $\mathbf{Z}_m \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Z}_2$.

APPENDICE B

TOPOLOGIE

Notre référence principale pour cet appendice est le livre de Hatcher [Hat02].

B.1. Séparation


Une variété algébrique complexe ou réelle pouvant être munie de deux topologies naturelles, Zariski et euclidienne (voir les définitions 1.2.3 et 1.4.1), il est bon de revenir sur quelques différences fondamentales entre les deux.

Définition B.1.1. — Un espace topologique X est *séparé* (on dit aussi que X est un *espace de Hausdorff*) si deux points distincts de X admettent des voisinages disjoints.

Au début du chapitre 1, nous avons défini la topologie de Zariski sur l'espace affine $\mathbf{A}^n(K)$ et remarqué que celle-ci n'est pas séparée sauf cas très particulier ($n = 0$ ou $n = 1$ et $K = \mathbf{Z}_2$ par exemple). On a tout de même une notion de *variété algébrique séparée* inspirée du résultat élémentaire suivant :

Proposition B.1.2. — Soit X un espace topologique. Si l'on munit le produit cartésien $X \times X$ de la topologie produit (i.e. engendrée par les pavés ouverts), l'espace X est séparé si et seulement si la diagonale $\Delta := \{(x, x) \in X \times X \mid x \in X\}$ est fermée dans $X \times X$.

Définition B.1.3. — Une variété algébrique X sur un corps K est *séparée* si la diagonale $\Delta := \{(x, x) \in X \times X \mid x \in X\}$ est fermée dans $X \times X$ muni de la topologie de Zariski.

Exercice B.1.4 (Voir l'exercice 1.2.2). —  Soit K un corps infini. La topologie de Zariski sur le produit de deux ensembles algébriques affines $X \subset \mathbf{A}^n(K)$ et $Y \subset \mathbf{A}^m(K)$ est la topologie induite sur $X \times Y$ par la topologie de Zariski de $\mathbf{A}^{n+m}(K)$. Montrer que la topologie de Zariski sur un produit $X \times Y$ n'est pas la topologie produit des topologies de Zariski de X et de Y .

Définition B.1.5. — Un espace topologique X est *quasi-compact* si de tout recouvrement ouvert de X , on peut extraire un sous-recouvrement fini.

Proposition B.1.6. — *Un espace topologique est noethérien (voir la définition 1.2.22) si et seulement si tout sous-espace est quasi-compact. En particulier, tout sous-espace d'un ensemble algébrique est quasi-compact pour la topologie de Zariski.*

Définition B.1.7. — Un espace topologique est *compact* s'il est quasi-compact et séparé.

Récapitulons et complétons avec la proposition suivante :

Proposition B.1.8. — *Soit X une variété algébrique réelle ou complexe.*

1. *Muni de la topologie de Zariski, X est un espace topologique quasi-compact et tout sous-espace de X est quasi-compact. Si la variété X est projective, quasi-projective, affine ou quasi-affine, alors X est une variété algébrique séparée.*
2. *Muni de la topologie euclidienne, X est un espace topologique séparé. Si X est projective, cet espace topologique est compact.*

B.2. Ensembles semi-algébriques

Dans cette courte section, nous énonçons quelques définitions utiles et renvoyons à [BCR87, BCR98, Chapitres 2 et 8] pour un exposé complet.

Définition B.2.1. — Un *ensemble semi-algébrique* de \mathbf{R}^n est une réunion finie d'ensembles de la forme

$$\{x \in \mathbf{R}^n \mid P_1(x) = \dots = P_l(x) = 0 \text{ et } Q_1(x) > 0, \dots, Q_m(x) > 0\}$$

où P_i , $i = 1, \dots, l$ et Q_j , $j = 1, \dots, m$ sont des éléments de $\mathbf{R}[X_1, \dots, X_n]$.

Définition B.2.2. — Soient $A \subset \mathbf{R}^m$ et $B \subset \mathbf{R}^n$ des ensembles semi-algébriques. Une application $f: A \rightarrow B$ est dite *semi-algébrique* quand son graphe est semi-algébrique dans \mathbf{R}^{m+n} .

Définition B.2.3. — Soit $A \subset \mathbf{R}^m$ un ouvert semi-algébrique. Une *fonction de Nash* $f: A \rightarrow \mathbf{R}$ est une fonction qui est à la fois semi-algébrique et différentiable de classe \mathcal{C}^∞ . Soient $A \subset \mathbf{R}^m$ et $B \subset \mathbf{R}^n$ des ouverts semi-algébriques. Une *application de Nash* $f: A \rightarrow B$ est une application qui est à la fois semi-algébrique et différentiable de classe \mathcal{C}^∞ .

On dispose d'un théorème des fonctions implicites pour les applications de Nash, voir [BCR98, Proposition 2.9.7 et Corollary 2.9.8], ce qui justifie la définition suivante.

Définition B.2.4. — Soient $A \subset \mathbf{R}^m$ et $B \subset \mathbf{R}^n$ des ouverts semi-algébriques. Une application $f: A \rightarrow B$ est un *difféomorphisme de Nash* si f est à la fois une application de Nash et un difféomorphisme de classe \mathcal{C}^∞ .

B.3. Complexes simpliciaux, homologie

Définition B.3.1. — Un *complexe simplicial*⁽¹⁾ abstrait est un ensemble K dont les éléments sont appelés *sommets* muni d'une collection de sous-ensembles finis non vides de K appelés *simplexes* tels que tout sommet est contenu dans au moins un simplexe et tout sous-ensemble non vide d'un simplexe est un simplexe. Un sous-ensemble non vide d'un simplexe est appelé une *face* de ce simplexe. Une *application simpliciale* est une application $\varphi: K \rightarrow K'$ entre complexes simpliciaux qui envoie un simplexe sur un simplexe. Une *paire simpliciale* est un couple (K, L) de complexes simpliciaux tels que $L \subset K$ et tout simplexe de L est un simplexe de K .

On note $|K|$ la *réalisation géométrique* d'un complexe simplicial K , voir [Spa66, III.1] ou [Hat02, Section 2.1].

Définition B.3.2. — Un espace topologique X est *triangulable* s'il existe un complexe simplicial K dont la réalisation géométrique $|K|$ est homéomorphe à X . Un espace triangulable compact, donc homéomorphe à la réalisation géométrique d'un complexe simplicial fini, est souvent appelé un *polyèdre*.

Remarque B.3.3 (Triangulation des ensembles (semi-)algébriques)

Il est connu depuis bien longtemps que toute variété algébrique réelle ou complexe quasi-projective (ainsi que tout ensemble analytique réel ou complexe) est triangulable (voir par exemple [Wae30], [KB32], [LW33]). On renvoie à [Hir75, Theorem, page 170] pour une preuve « moderne » inspirée

1. *Schéma simplicial* dans [God58, II.3.2].

des travaux de Łojasiewicz [Łoj64]. On pourra aussi consulter [BCR98, §9.2] ou [Cos02, Chapter 3]. Hironaka montre en fait un résultat plus général : toute réunion disjointe d'un nombre fini d'ensembles semi-algébriques est triangulable. Rappelons, voir la définition B.2.1, qu'un ensemble semi-algébrique est un sous-ensemble de \mathbf{R}^N (ou d'un K^N pour un corps réel clos K) pour un certain N défini par des équations et des inéquations polynomiales. Un ensemble algébrique réel est donc en particulier un ensemble semi-algébrique. Pour voir que le théorème d'Hironaka implique la triangulabilité d'une variété algébrique complexe affine X par exemple, on commence par réaliser cette variété comme sous-ensemble algébrique d'un certain \mathbf{C}^n . En séparant les parties réelles et imaginaires des équations déterminant X , on plonge l'espace topologique (euclidien) sous-jacent à X dans \mathbf{R}^{2n} . Ce faisant, nous le réalisons comme ensemble algébrique réel de \mathbf{R}^{2n} et il ne reste plus qu'à appliquer le théorème d'Hironaka.

Définition B.3.4. — La *subdivision barycentrique* d'un complexe simplicial K est un complexe simplicial K' dont les sommets sont les simplexes de K et dont les simplexes sont les ensembles $\{s_0, \dots, s_n\}$, où les s_i sont des sommets de K' , c'est-à-dire des simplexes de K , tels que, après réarrangement :

$$s_0 \subset s_1 \subset \dots \subset s_n .$$

Autrement dit, s_i est une face de s_{i+1} pour $i = 0 \dots n - 1$.

Remarque B.3.5. — La notion de *complexe cellulaire*, ou *CW-complexe* voir [Hat02, Chapter 0 et Appendix], généralise la notion de complexe simplicial. Autrement dit : tout complexe simplicial, en particulier tout polyèdre ou tout graphe, est naturellement muni d'une structure de CW-complexe. Par ailleurs, tout CW-complexe est homotopiquement équivalent à un complexe simplicial de même dimension, [Hat02, Theorem 2C.5]. Toute variété différentielle et toute variété algébrique complexe ou réelle quasi-projective a le type d'homotopie d'un CW-complexe (pour la topologie euclidienne). Dans tous les cas, c'est le calcul de l'*homologie singulière* qui est visé. Dans le cas où l'espace topologique considéré est *triangulable*, c'est-à-dire qu'il admet une décomposition en complexe simplicial, on peut calculer l'homologie singulière en calculant son homologie simpliciale. La méthode employée de nos jours utilise les Δ -complexes [Hat02, Chapter II]. La définition d'homologie simpliciale d'un Δ -complexe donnée par Hatcher [*Ibid.*, Section 2.1] s'applique directement au sous-cas d'un complexe simplicial K (pour peu que l'on prenne soin de l'*orienter*) à travers sa réalisation comme espace topologique.

Théorème B.3.6 (Suite exacte longue de l'homologie d'une paire)

Soient G un groupe abélien (typiquement $G = \mathbf{Z}, \mathbf{Z}_2, \mathbf{Q}, \mathbf{C}$ ou \mathbf{R}) et (X, A) une paire topologique, on a alors la suite exacte :

$$(B.1) \quad \cdots \rightarrow H_k(A; G) \rightarrow H_k(X; G) \rightarrow H_k(X, A; G) \rightarrow H_{k-1}(A; G) \rightarrow \cdots \\ \rightarrow H_0(X, A; G) \rightarrow 0$$

Démonstration. — Voir [Hat02, 2.13, pages 114–117]. \square

Théorème B.3.7 (Suite exacte longue de la cohomologie d'une paire)

Soient G un groupe abélien et (X, A) une paire topologique, on a alors la suite exacte :

$$(B.2) \quad \cdots \rightarrow H^k(X, A; G) \rightarrow H^k(X; G) \rightarrow H^k(A; G) \rightarrow H^{k+1}(X, A; G) \rightarrow \cdots$$

Démonstration. — Voir [Hat02, §3.1, page 200]. \square

Définition B.3.8. — Soit G un groupe et $[G, G]$ son *groupe dérivé*, c'est-à-dire le sous-groupe de G engendré par les *commutateurs* $[x, y] := xyx^{-1}y^{-1}$. Le sous-groupe dérivé est distingué dans G et le groupe quotient

$$G^{ab} := G/[G, G]$$

est un groupe abélien appelé *l'abélianisé de G* .

Théorème B.3.9 (Théorème de Hurewicz). — Soient X un espace topologique connexe par arcs et x un point de X . À un lacet $\gamma: [0, 1] \rightarrow X$ passant par x correspond naturellement une 1-chaîne qui est un cycle dont la classe est un élément de $H_1(X; \mathbf{Z})$. Cette correspondance induit un isomorphisme fonctoriel entre l'abélianisé de $\pi_1(X, x)$ et $H_1(X; \mathbf{Z})$. En particulier, si $\pi_1(X)$ est abélien, $H_1(X; \mathbf{Z}) \simeq \pi_1(X)$.

Démonstration. — Voir [Hat02, Theorem 2.A1]. \square

B.4. Théorème des coefficients universels

Rappelons, voir section A.6, qu'un \mathbf{Z} -module de type fini M se décompose en une partie libre et une partie de torsion :

$$M = M_f \oplus \text{Tor}(M)$$

où $M_f \simeq \mathbf{Z}^r$ et $\text{Tor}(M) \simeq \mathbf{Z}_{d_1} \oplus \mathbf{Z}_{d_2} \oplus \cdots \oplus \mathbf{Z}_{d_l}$ avec pour tout $i < l$, $d_i > 1$ et $d_i | d_{i+1}$.

Théorème B.4.1 (Coefficients universels en cohomologie)

Soient X un espace topologique et G un groupe abélien. Alors pour tout k , la suite

$$0 \rightarrow \text{Ext}(H_{k-1}(X; \mathbf{Z}), G) \rightarrow H^k(X; G) \rightarrow \text{Hom}(H_k(X; \mathbf{Z}), G) \rightarrow 0$$

est exacte et scindée.

Démonstration. — Voir [Hat02, Theorem 3.2, page 195]. \square

Corollaire B.4.2. — Si les groupes $H_k(X; \mathbf{Z})$ et $H_{k-1}(X; \mathbf{Z})$ sont de type fini, alors

$$H^k(X; \mathbf{Z}) \simeq (H_k(X; \mathbf{Z}) / \text{Tor}(H_k(X; \mathbf{Z}))) \oplus \text{Tor}(H_{k-1}(X; \mathbf{Z})).$$

Démonstration. — Voir [Hat02, Corollary 3.3]. \square

Théorème B.4.3 (Coefficients universels en homologie)

Soient X un espace topologique et G un groupe abélien, alors pour tout k , la suite

$$0 \rightarrow H_k(X; \mathbf{Z}) \otimes G \rightarrow H_k(X; G) \rightarrow \text{Tor}(H_{k-1}(X; \mathbf{Z}), G) \rightarrow 0$$

est exacte et scindée.

Démonstration. — Voir [Hat02, Theorem 3A.3, page 264]. \square

Corollaire B.4.4. — Soit X un espace topologique, alors pour tout k ,

$$H_k(X; \mathbf{C}) = H_k(X; \mathbf{Q}) \otimes_{\mathbf{Q}} \mathbf{C},$$

On applique les théorèmes B.4.1 et B.4.3 à la cohomologie à coefficients dans \mathbf{Z}_2 :

Corollaire B.4.5. — Soit X un espace topologique, alors pour tout k , les suites

$$0 \rightarrow \text{Ext}(H_{k-1}(X; \mathbf{Z}), \mathbf{Z}_2) \rightarrow H^k(X; \mathbf{Z}_2) \rightarrow \text{Hom}(H_k(X; \mathbf{Z}), \mathbf{Z}_2) \rightarrow 0$$

$$0 \rightarrow H_k(X; \mathbf{Z}) \otimes \mathbf{Z}_2 \rightarrow H_k(X; \mathbf{Z}_2) \rightarrow \text{Tor}(H_{k-1}(X; \mathbf{Z}), \mathbf{Z}_2) \rightarrow 0$$

sont exactes et scindées.

Remarque B.4.6. — Soit $m > 1$ un entier naturel, alors l'image de la multiplication par m

$$\mathbf{Z}_2 \xrightarrow{\times m} \mathbf{Z}_2$$

est nulle si et seulement si m est pair. On en déduit (voir par exemple [Hat02, page 195 et proposition 3A.5, page 265]) :

— si m est pair, alors $\text{Ext}(\mathbf{Z}_m, \mathbf{Z}_2) \simeq \mathbf{Z}_2$ et $\text{Tor}(\mathbf{Z}_m, \mathbf{Z}_2) \simeq \mathbf{Z}_2$;

— si m est impair, alors $\text{Ext}(\mathbf{Z}_m, \mathbf{Z}_2) \simeq 0$ et $\text{Tor}(\mathbf{Z}_m, \mathbf{Z}_2) \simeq 0$.
Par ailleurs, on a

$$\begin{aligned} \text{Ext}(M \oplus M', \mathbf{Z}_2) &\simeq \text{Ext}(M, \mathbf{Z}_2) \oplus \text{Ext}(M', \mathbf{Z}_2) ; \\ \text{Tor}(M \oplus M', \mathbf{Z}_2) &\simeq \text{Tor}(M, \mathbf{Z}_2) \oplus \text{Tor}(M', \mathbf{Z}_2) . \end{aligned}$$

Si X est compacte on peut, à partir de la remarque ci-dessus, calculer le groupe $H_k(X; \mathbf{Z}_2)$ en considérant les facteurs invariants du \mathbf{Z} -module de type fini $H_{k-1}(X; \mathbf{Z})$:

$$H_{k-1}(X; \mathbf{Z}) = \mathbf{Z}_{j_1} \oplus \cdots \oplus \mathbf{Z}_{j_t} \oplus \mathbf{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbf{Z} ,$$

où j_i divise j_{i+1} pour tout i . Soit l le nombre de facteurs invariants j_i pairs, on a alors $\text{Ext}(H_{k-1}(X; \mathbf{Z}), \mathbf{Z}_2) \simeq \oplus^l \mathbf{Z}_2$ et $\text{Tor}(H_{k-1}(X; \mathbf{Z}), \mathbf{Z}_2) \simeq \oplus^l \mathbf{Z}_2$ aussi. D'où l'on tire

$$\begin{aligned} H^k(X; \mathbf{Z}_2) &\simeq \text{Hom}(H_k(X; \mathbf{Z}), \mathbf{Z}_2) \oplus^l \mathbf{Z}_2 ; \\ H_k(X; \mathbf{Z}_2) &\simeq H_k(X; \mathbf{Z}) \otimes \mathbf{Z}_2 \oplus^l \mathbf{Z}_2 . \end{aligned}$$

Exemple B.4.7. — (Homologie des espaces projectifs réels)

1. Homologie de \mathbf{RP}^2 . On a $H_0(\mathbf{RP}^2; \mathbf{Z}) \simeq \mathbf{Z}$, $H_1(\mathbf{RP}^2; \mathbf{Z}) \simeq \mathbf{Z}_2$ et $H_2(\mathbf{RP}^2; \mathbf{Z}) = \{0\}$. On en déduit que $H_0(\mathbf{RP}^2; \mathbf{Z}_2) \simeq H_1(\mathbf{RP}^2; \mathbf{Z}_2) \simeq H_2(\mathbf{RP}^2; \mathbf{Z}_2) \simeq \mathbf{Z}_2$ car $\text{Tor}(H_1(\mathbf{RP}^2; \mathbf{Z}), \mathbf{Z}_2) \simeq \mathbf{Z}_2$.
2. Homologie de \mathbf{RP}^3 . On a $H_0(\mathbf{RP}^3; \mathbf{Z}) \simeq \mathbf{Z}$, $H_1(\mathbf{RP}^3; \mathbf{Z}) \simeq \mathbf{Z}_2$, $H_2(\mathbf{RP}^3; \mathbf{Z}) = \{0\}$ et $H_3(\mathbf{RP}^3; \mathbf{Z}) \simeq \mathbf{Z}$. On en déduit que $H_0(\mathbf{RP}^3; \mathbf{Z}_2) \simeq H_1(\mathbf{RP}^3; \mathbf{Z}_2) \simeq H_2(\mathbf{RP}^3; \mathbf{Z}_2) \simeq H_3(\mathbf{RP}^3; \mathbf{Z}_2) \simeq \mathbf{Z}_2$ car $\text{Tor}(H_1(\mathbf{RP}^3; \mathbf{Z}), \mathbf{Z}_2) \simeq \mathbf{Z}_2$.

Définition B.4.8 (Homologie réduite). — Les groupes d'homologie réduite d'un espace topologique non vide X satisfont les relations suivantes :

$$\tilde{H}_k(X; \mathbf{Z}) = H_k(X; \mathbf{Z})$$

pour $k > 0$ et

$$\tilde{H}_0(X; \mathbf{Z}) \oplus \mathbf{Z} \simeq H_0(X; \mathbf{Z}) .$$

Exemple B.4.9. — (L'homologie réduite homogénéise les énoncés)

1. L'homologie réduite du point (et donc de tout espace contractile) est triviale pour tout k (y compris $k = 0$),

$$\forall k \quad \tilde{H}_k(\{x\}; \mathbf{Z}) = \{0\} .$$

2. L'homologie réduite d'une sphère de dimension n est concentrée en dimension n :

$$\begin{cases} \tilde{H}_n(\mathbf{S}^n; \mathbf{Z}) \simeq \mathbf{Z} \\ \tilde{H}_k(\mathbf{S}^n; \mathbf{Z}) = 0 \quad \forall k \neq n. \end{cases}$$

Remarquons pour être complet, que puisque $\mathbf{S}^0 = \{-1, 1\}$, on a

$$H_0(\mathbf{S}^0; \mathbf{Z}) \simeq \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z} \quad \text{et} \quad \tilde{H}_0(\mathbf{S}^0; \mathbf{Z}) \simeq \mathbf{Z}.$$

Proposition B.4.10. — Soit (X, L) une paire topologique. Si X est contractile et L non vide, alors

$$H_k(X, L; \mathbf{Z}) \simeq \tilde{H}_{k-1}(L; \mathbf{Z})$$

pour tout k .

Démonstration. — De la suite exacte (B.1), on déduit la suite exacte :

$$\cdots \rightarrow H_{k+1}(X, L; \mathbf{Z}) \rightarrow \tilde{H}_k(L; \mathbf{Z}) \rightarrow \tilde{H}_k(X; \mathbf{Z}) \rightarrow H_k(X, L; \mathbf{Z}) \rightarrow \cdots$$

Comme l'homologie réduite d'un espace contractile est triviale pour tout k , on obtient le résultat cherché. \square

Exemple B.4.11. — Pour tout $n > 0$ on a

$$\begin{cases} H_n(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n \setminus \{0\}; \mathbf{Z}) \simeq \mathbf{Z} \\ H_k(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n \setminus \{0\}; \mathbf{Z}) = 0 \quad \forall k \neq n. \end{cases}$$

Démonstration. — Le groupe $H_k(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n \setminus \{0\}; \mathbf{Z})$ est isomorphe au groupe d'homologie réduite $\tilde{H}_{k-1}(\mathbf{R}^n \setminus \{0\}; \mathbf{Z})$ du fait que \mathbf{R}^n est contractile, voir la proposition B.4.10; lui-même isomorphe à $\tilde{H}_{k-1}(\mathbf{S}^{n-1}; \mathbf{Z})$ puisque $\mathbf{R}^n \setminus \{0\}$ est homéomorphe à \mathbf{S}^{n-1} . Il ne reste qu'à appliquer l'exemple B.4.9(2). \square

Remarquons que pour $n = k = 1$, on a $H_{k-1}(\mathbf{R}^n \setminus \{0\}; \mathbf{Z}) \simeq \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}$.

B.5. Variétés topologiques et différentielles, orientabilité

Dans cette section, on se base sur [Hat02, 3.3].

Définition B.5.1. — Une *variété topologique*⁽²⁾ M de dimension n est un espace topologique séparé dont tout point possède un voisinage homéomorphe à \mathbf{R}^n .

2. En anglais : *topological manifold*.

Proposition B.5.2. — *La dimension d'une variété topologique M est caractérisée de façon intrinsèque par le fait que pour $x \in M$, le groupe d'homologie locale*

$$H_k(M, M \setminus \{x\}; \mathbf{Z})$$

est non nul seulement pour $k = n$ et dans ce cas, il est isomorphe à \mathbf{Z} .

Démonstration. — Supposons $n > 0$. Du fait que M est localement homéomorphe à \mathbf{R}^n , le groupe $H_k(M, M \setminus \{x\}; \mathbf{Z})$ est isomorphe au groupe $H_k(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n \setminus \{0\}; \mathbf{Z})$ par excision [Hat02, Theorem 2.20]. On conclut grâce à l'exemple B.4.11.

Si $n = 0$, et si M est connexe, alors $M = \{x\}$, et $H_k(M, M \setminus \{x\}; \mathbf{Z}) = H_k(\{x\}; \mathbf{Z})$, le cas non connexe s'en déduit. \square

Définition B.5.3. — Soit M une variété topologique de dimension n . Une *orientation* de M est une fonction $M \rightarrow \sqcup_{x \in M} H_n(M, M \setminus \{x\}; \mathbf{Z})$ qui à chaque $x \in M$ associe un générateur μ_x du groupe cyclique $H_n(M, M \setminus \{x\}; \mathbf{Z})$, cette fonction étant assujettie à la condition de consistance locale suivante. Tout point $x \in M$ possède un voisinage $B \subset \mathbf{R}^n \subset M$ qui est une boule ouverte de rayon fini de \mathbf{R}^n et telle que les orientations locales μ_y en tout point $y \in B$ sont les images d'un même générateur $\mu_B \in H_n(M, M \setminus B; \mathbf{Z}) \simeq H_n(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n \setminus B; \mathbf{Z})$ par les applications naturelles $H_n(M, M \setminus B; \mathbf{Z}) \rightarrow H_n(M, M \setminus \{y\}; \mathbf{Z})$.

Une variété M admettant une orientation est dite *orientable*, la variété M est dite *non orientable* dans le cas contraire.

Remarque B.5.4. — On déduit immédiatement de la définition ci-dessus qu'une variété M est orientable si toutes ses composantes connexes le sont et que M est non orientable si l'une au moins de ses composantes connexes est non orientable.

Remarque B.5.5. — En particulier, une variété topologique M de dimension 1 est orientable. En effet, on considère une composante connexe M_0 de M et on remarque qu'une orientation en un point x détermine une orientation en tout point y de la même composante connexe via l'isomorphisme canonique $H_1(M_0, M_0 \setminus \{x\}; \mathbf{Z}) \simeq H_1(M_0, M_0 \setminus B; \mathbf{Z}) \simeq H_1(M_0, M_0 \setminus \{y\}; \mathbf{Z})$ où B est la trace de n'importe quel arc de M_0 passant par x et y .

Proposition B.5.6 (Variétés non compactes). — *Soit M une variété topologique de dimension n connexe et non compacte. Alors pour tout $k \geq n$*

$$H_k(M; \mathbf{Z}) = H_k(M; \mathbf{Z}_2) = 0 .$$

Voir [Hat02, Proposition 3.29].

Théorème B.5.7 (Variétés compactes). — Soit M une variété topologique de dimension n connexe et compacte⁽³⁾. Alors on a pour les groupes d'homologie de degré n et plus :

1. $H_n(M; \mathbf{Z}_2) \simeq \mathbf{Z}_2$,
2. $H_n(M; \mathbf{Z}) \simeq \mathbf{Z}$ si M est orientable,
3. $H_n(M; \mathbf{Z}) \simeq 0$ si M est non orientable,
4. $H_k(M; \mathbf{Z}) = 0$ si $k > n$.

Voir [Hat02, Theorem 3.26].

Remarque B.5.8 (Classe fondamentale). — Ainsi une variété topologique compacte (sans bord) connexe M de dimension n possède une \mathbf{Z}_2 -classe d'homologie fondamentale $[M] \in H_n(M; \mathbf{Z}_2)$. Si la variété M est de surcroît orientée, alors elle possède même une \mathbf{Z} -classe d'homologie fondamentale $[M] \in H_n(M; \mathbf{Z})$, voir par exemple [Hat02, Theorem 3.26].

Corollaire B.5.9. — Soit M une variété topologique de dimension n connexe et compacte. Alors on a pour le sous-groupe de torsion de $H_{n-1}(M; \mathbf{Z})$:

1. $\text{Tor}(H_{n-1}(M; \mathbf{Z})) = 0$ si M est orientable,
2. $\text{Tor}(H_{n-1}(M; \mathbf{Z})) \simeq \mathbf{Z}_2$ si M est non orientable.

Voir [Hat02, Corollary 3.28].

Proposition B.5.10. — Soit M une variété différentielle, alors M est orientable si et seulement si elle possède un atlas \mathcal{A} dont les applications de transition préservent l'orientation, c'est-à-dire

$$\forall (U_1, \varphi_1), (U_2, \varphi_2) \in \mathcal{A}, U_1 \cap U_2 \neq \emptyset \implies \forall x \in U_1 \cap U_2, \det d_x(\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}) > 0.$$

Démonstration. — Voir [Hir76, §4.4]. □

Exercice B.5.11. — Une variété analytique complexe est une variété différentielle dont les applications de transition sont analytiques complexes. Montrer que non seulement une telle variété est orientable, mais qu'elle est même orientée en ce sens que la structure de variété analytique complexe (c'est-à-dire la donnée d'un atlas maximal dont les applications de transition sont holomorphes) induit une orientation particulière.

3. On utilise parfois l'adjectif *fermée* pour insister sur le fait qu'il s'agit d'une variété « compacte sans bord ».

Somme connexe. — La somme connexe de deux surfaces topologiques est une opération bien connue qui permet de munir l'ensemble des classes de surfaces compactes sans bord à homéomorphisme près d'une structure de semi-groupe engendré par les classes du tore \mathbf{T}^2 et du plan projectif réel \mathbf{RP}^2 , le neutre étant la classe de \mathbf{S}^2 et l'unique relation étant $\mathbf{T}^2 \# \mathbf{RP}^2 = \mathbf{RP}^2 \# \mathbf{RP}^2 \# \mathbf{RP}^2$.

Soient M_1 et M_2 deux variétés connexes de même dimension n . Soient $B_1 \subset M_1$ et $B_2 \subset M_2$ des boules ouvertes, les complémentaires $F_1 := M_1 \setminus B_1$ et $F_2 := M_2 \setminus B_2$ sont des variétés dont le bord est homéomorphe à une sphère \mathbf{S}^{n-1} . En identifiant F_1 et F_2 par un difféomorphisme le long des sphères ∂F_1 et ∂F_2 qui les bordent, on obtient une variété sans bord. Pour les détails du « recollement » de F_1 et F_2 , voir [Laf96, Laf15, Exercice II.28] ou [Die70, 16.26 problèmes 12 à 15]. Sous certaines hypothèses, la variété obtenue est unique [*Ibid.*] :

Définition B.5.12 (Somme connexe). — Si chacune des deux variétés M_1 et M_2 est non orientable ou bien admet un difféomorphisme sur elle-même qui renverse l'orientation, la variété obtenue est uniquement déterminée par les variétés M_1 et M_2 à homéomorphisme près, c'est la *somme connexe* des variétés M_1 et M_2 ; qui est notée $M_1 \# M_2$.

Remarque B.5.13. — Comme toute surface orientable admet un difféomorphisme sur elle-même qui renverse l'orientation (il existe même un tel difféomorphisme sans points fixes dont le quotient est la surface non orientable de caractéristique d'Euler moitié), la somme connexe de deux surfaces quelconques est bien définie.

Exercice B.5.14. — Un espace projectif réel de dimension impaire est non orientable. Un espace projectif réel de dimension paire est orientable et possède un difféomorphisme sur lui-même qui renverse l'orientation. Un espace projectif complexe est orientable et possède un difféomorphisme qui renverse l'orientation si et seulement s'il est de dimension (complexe) impaire, voir la proposition 2.2.28.

On utilise aussi la notion de somme connexe orientée.

Définition B.5.15 (Somme connexe orientée). — Soient M_1 et M_2 deux variétés connexes orientées de même dimension n . Soient $B_1 \subset M_1$ et $B_2 \subset M_2$ des boules ouvertes. Les complémentaires $F_1 := M_1 \setminus B_1$ et $F_2 := M_2 \setminus B_2$ sont des variétés dont le bord est homéomorphe à une sphère \mathbf{S}^{n-1} . En identifiant

F_1 et F_2 le long des sphères ∂F_1 et ∂F_2 par un difféomorphisme compatible avec les orientations induites, on obtient une variété sans bord orientée qui est uniquement déterminée par les variétés orientées M_1 et M_2 à homéomorphisme près, c'est la *somme connexe* $M_1 \# M_2$.

Remarque B.5.16. — Si on note $-M_2$ la variété M_2 munie de son orientation opposée, les sommes connexes $M_1 \# M_2$ et $M_1 \# -M_2$ ne sont pas homéomorphes en général. Signalons néanmoins qu'en dimension 2, les sommes connexes $M_1 \# M_2$ et $M_1 \# -M_2$ sont homéomorphes et qu'en dimension 3, les sommes connexes $M_1 \# M_2$ et $M_1 \# -M_2$ sont homéomorphes lorsque $M_2 = \mathbf{RP}^3$ ou $M_2 = \mathbf{S}^2 \times \mathbf{S}^1$, voir [Hem76, Chapter 3].

Structures Spin. — Références générales : [LM89, Chapter II], [Mil63b]. Le groupe $\mathbf{SO}(n)$ des isométries directes est un groupe topologique dont le groupe fondamental est

$$\begin{cases} \pi_1(\mathbf{SO}(2)) &= \mathbf{Z} \\ \pi_1(\mathbf{SO}(n)) &= \mathbf{Z}_2 \quad \forall n > 2. \end{cases}$$

Définition B.5.17 (Groupe $\mathbf{Spin}(n)$). — Soit $n > 1$, le groupe $\mathbf{Spin}(n)$ est l'unique revêtement double de $\mathbf{SO}(n)$.

$$1 \rightarrow \mathbf{Z}_2 \rightarrow \mathbf{Spin}(n) \rightarrow \mathbf{SO}(n) \rightarrow 1$$

Remarque B.5.18. — Pour $n > 2$, le groupe $\mathbf{Spin}(n)$ est le revêtement universel de $\mathbf{SO}(n)$.

Définition B.5.19. — Une variété différentielle orientée est *spinorielle* si son fibré tangent possède au moins une structure spin, voir [LM89, Chapter II, Definition 1.3, Remark 1.9].

Proposition B.5.20. — Une variété différentielle orientée V est spinorielle si et seulement si sa seconde classe de Stiefel-Whitney est nulle : $w_2(T_V) = 0$.

Démonstration. — Voir [LM89, Chapter II, Theorem 2.1] ou la référence originale [BH59, page 350]. \square

Topologie sur un ensemble d'applications. — Soit $k \in \mathbf{N} \cup \{\infty\}$. Étant données deux variétés différentielles V et W de classe \mathcal{C}^k , on note $\mathcal{C}^k(V, W)$ l'ensemble des applications différentiables de classe \mathcal{C}^k de V dans W .

Définition B.5.21 (Topologie faible). — Soit $k \in \mathbf{N}$. La topologie *faible* (ou \mathcal{C}^k -compacte-ouverte) sur l'ensemble $\mathcal{C}^k(V, W)$ est engendrée par les ouverts $\Omega(f; (\varphi, U); (\psi, U'); K; \varepsilon)$ définis comme suit. Soit $f \in \mathcal{C}^k(V, W)$, (φ, U) une carte de V , (ψ, U') une carte de W , $K \subset U$ un sous-espace compact tel que $f(K) \subset U'$ et $0 < \varepsilon \leq \infty$. L'ouvert

$$\Omega(f; (\varphi, U); (\psi, U'); K; \varepsilon)$$

est formé des fonctions $g: V \rightarrow W$, de classe \mathcal{C}^k , telles que $g(K) \subset U'$ et

$$\|D^l(\psi f \varphi^{-1})(x) - D^l(\psi g \varphi^{-1})(x)\| < \varepsilon$$

pour tout $x \in \varphi(K)$ et tout $l = 0, \dots, k$.

Pour $k = \infty$, la topologie *faible* sur l'ensemble $\mathcal{C}^\infty(V, W)$ est la réunion des topologies induites par les inclusions $\mathcal{C}^k(V, W) \hookrightarrow \mathcal{C}^\infty(V, W)$ pour k fini.

Définition B.5.22 (Topologie forte). — Soit $k \in \mathbf{N}$. La topologie *forte* (ou *fine*, ou *de Whitney*) sur l'ensemble $\mathcal{C}^k(V, W)$ est engendrée par les ouverts $\Omega(f; \Phi; \Psi; K; \varepsilon)$ définis comme suit. Soit $\Phi = \{(\varphi_i, U_i)\}_{i \in \Lambda}$ une famille *localement finie* de cartes de V , c'est-à-dire que chaque point x de V possède un voisinage qui rencontre seulement un nombre fini d'ouverts U_i . Soit $K = \{K_i\}_{i \in \Lambda}$ une famille de sous-ensembles compacts de V tels que $K_i \subset U_i$ pour tout i . Soient $\Psi = \{(\psi_i, U'_i)\}_{i \in \Lambda}$ une famille de cartes de W et $\varepsilon = \{\varepsilon_i\}_{i \in \Lambda}$ une famille de réels strictement positifs. Pour toute application $f \in \mathcal{C}^k(V, W)$ qui envoie chaque K_i dans U'_i , l'ouvert

$$\Omega(f; \Phi; \Psi; K; \varepsilon)$$

est formé des fonctions $g: V \rightarrow W$, de classe \mathcal{C}^k , telles que pour tout $i \in \Lambda$, $g(K_i) \subset U'_i$ et

$$\|D^l(\psi_i f \varphi_i^{-1})(x) - D^l(\psi_i g \varphi_i^{-1})(x)\| < \varepsilon_i$$

pour tout $x \in \varphi_i(K_i)$ et tout $l = 0, \dots, k$.

Pour $k = \infty$, la topologie *forte* sur l'ensemble $\mathcal{C}^\infty(V, W)$ est la réunion des topologies induites par les inclusions $\mathcal{C}^k(V, W) \hookrightarrow \mathcal{C}^\infty(V, W)$ pour k fini.

Remarque B.5.23. — Lorsque V est compacte, la topologie faible et la topologie forte sont équivalentes sur $\mathcal{C}^k(V, W)$. Pour plus de précisions, voir [Hir76, §2.1].

B.6. Cohomologie

Soit X un espace topologique et G un anneau (typiquement $G = \mathbf{Z}, \mathbf{Z}_2, \mathbf{Q}, \mathbf{C}$ ou \mathbf{R}). On note $C^k(X; G)$ le groupe des cochaînes $\phi: C_k(X) \rightarrow G$ et $H^k(X; G)$ les groupes de cohomologie associés au complexe de cochaînes

$$(B.3) \quad \dots \rightarrow C^k(X; G) \rightarrow C^{k+1}(X; G) \rightarrow \dots$$

Définition B.6.1 (Cup-produit). — Soient X un espace topologique et l, k des entiers. Il existe une application bilinéaire, le *cup-produit* :

$$\smile: H^l(X; \mathbf{Z}) \times H^k(X; \mathbf{Z}) \longrightarrow H^{l+k}(X; \mathbf{Z})$$

qui à la classe d'une l -cochaîne $\psi \in C^l(X; \mathbf{Z})$ et à la classe d'une k -cochaîne $\phi \in C^k(X; \mathbf{Z})$ associe la classe de la $(l+k)$ -cochaîne $\psi \smile \phi \in C^{l+k}(X; \mathbf{Z})$ dont la valeur sur un $(l+k)$ -simplexe singulier $s: \Delta^{l+k} \rightarrow X$ est donnée par la formule

$$(\psi \smile \phi)(s) := \psi(s|_{[0, \dots, k]})\phi(s|_{[k, \dots, k+l]})$$

On renvoie à [Hat02, §3.2] pour les détails de la construction.

Proposition B.6.2. — Soient $f: X \rightarrow Y$ une application continue entre espaces topologiques et l, k des entiers. La naturalité du cup-produit s'explique pour les applications induites $f^*: H^{l+k}(Y; \mathbf{Z}) \rightarrow H^{l+k}(X; \mathbf{Z})$, $f^*: H^l(Y; \mathbf{Z}) \rightarrow H^l(X; \mathbf{Z})$ et $f^*: H^k(Y; \mathbf{Z}) \rightarrow H^k(X; \mathbf{Z})$ par

$$f^*(\psi \smile \phi) = f^*(\psi) \smile f^*(\phi)$$

pour $\psi \in H^l(Y; \mathbf{Z})$ et $\phi \in H^k(Y; \mathbf{Z})$.

Démonstration. — Voir [Hat02, Proposition 3.10]. □

Le cup-produit munit $H^*(X; G)$ d'une structure d'anneau. Le théorème suivant est utilisé pour calculer l'anneau de cohomologie d'un espace produit.

Théorème B.6.3. — Soient X, Y des espaces topologiques raisonnables (CW -complexes) et G un anneau. Le cross-produit

$$H^*(X; G) \otimes_G H^*(Y; G) \rightarrow H^*(X \times Y; G)$$

est un isomorphisme d'anneaux gradués si $H^k(Y; G)$ est un G -module libre de type fini pour tout k .

Démonstration. — Voir [Hat02, Theorem 3.16]. □

Théorème B.6.4 (Formule de Künneth). — Soient X, Y des espaces topologiques raisonnables (CW-complexes) et K un corps. L'application cross-produit en homologie

$$\bigoplus_l (H_l(X; K) \otimes_K H_{k-l}(Y; K)) \rightarrow H_k(X \times Y; K)$$

est un isomorphisme pour tout k .

Démonstration. — Voir [Hat02, Corollary 3.B7]. □

Exemple B.6.5. — On peut calculer l'homologie des tores de dimension n $T^n = S^1 \times \dots \times S^1$ à partir des nombres de Betti du cercle S^1 : $b_0(S^1) = b_1(S^1) = 1$ et $b_k(S^1) = 0$ pour $k \notin \{0, 1\}$. On obtient

$$b_k(T^n) = b_{k-1}(T^{n-1}) + b_k(T^{n-1}).$$

D'où $b_0(T^n) = 1$, $b_1(T^n) = b_1(T^{n-1}) + 1 = n$. En organisant les nombres de Betti des tores sur un triangle de Pascal, on obtient :

$$b_k(T^n) = \binom{n}{k}.$$

Remarque B.6.6. — Voir [Hat02, Theorem 3.B6] pour une formule de Künneth valable dans le cas avec torsion.

Cohomologie à support compact. — Soit X un espace topologique et G un anneau (typiquement $G = \mathbf{Z}, \mathbf{Z}_2, \mathbf{Q}, \mathbf{C}$ ou \mathbf{R}). On note $C_c^k(X; G)$ le sous-groupe de $C^k(X; G)$ formé des cochaînes $\phi: C_k(X) \rightarrow G$ pour lesquelles il existe un ensemble compact $K = K_\phi \subset X$ tel que ϕ s'annule sur toutes les chaînes dans $X \setminus K$. Si $\delta: C^k(X; G) \rightarrow C^{k+1}(X; G)$ désigne le morphisme cobord, alors $\delta\phi$ est nul sur les chaînes dans $X \setminus K$. Les sous-groupes

$$(B.4) \quad \dots \rightarrow C_c^k(X; G) \rightarrow C_c^{k+1}(X; G) \rightarrow \dots$$

forment donc un sous-complexe du complexe des cochaînes singulières de X à valeurs dans G .

Définition B.6.7 (Cohomologie à support compact)

Les groupes de cohomologie

$$H_c^k(X; G)$$

associés au sous-complexe (B.4) sont les groupes de *cohomologie à support compact* de X à coefficients dans G .

Proposition B.6.8. — *On a la suite exacte de cohomologie à support compact d'une paire compacte (X, L) :*

(B.5)

$$\cdots \rightarrow H_c^k(X \setminus L; G) \rightarrow H^k(X; G) \rightarrow H^k(L; G) \rightarrow H_c^{k+1}(X \setminus L; G) \rightarrow \cdots$$

B.7. Dualité de Poincaré

Nous énumérons dans cette section plusieurs avatars de la dualité de Poincaré, l'hypothèse commune à l'ensemble des versions étant que l'espace topologique ambiant soit une *variété topologique*, c'est-à-dire que tout point de cet espace possède un voisinage homéomorphe à un \mathbf{R}^n , voir la définition B.5.1. Nous renvoyons à l'article [PP12] pour un aperçu historique. On trouvera la plupart des preuves manquantes des énoncés qui suivent dans [Hat02, §3.3] ou [Gre67].

Théorème B.7.1. — *Soit M une variété topologique de dimension n . Il existe un isomorphisme de dualité*

$$D_M: H_c^k(M; \mathbf{Z}_2) \xrightarrow{\cong} H_{n-k}(M; \mathbf{Z}_2).$$

Si M est orientable, alors il existe un isomorphisme de dualité

$$D_M: H_c^k(M; \mathbf{Z}) \xrightarrow{\cong} H_{n-k}(M; \mathbf{Z})$$

qui ne dépend que du choix d'une orientation de M .

Démonstration. — Voir [Hat02, Theorem 3.35]. □

Corollaire B.7.2. — *Soit M une variété topologique de dimension n . Si M est compacte et orientable, alors on a un isomorphisme de dualité*

$$D_M: H^k(M; \mathbf{Z}) \xrightarrow{\cong} H_{n-k}(M; \mathbf{Z}).$$

Remarque B.7.3. — Dans ce cas, comme la variété M est compacte et orientable, orientons la. Munie d'une orientation, la variété M possède une classe fondamentale $[M]$ et l'isomorphisme D_M est donné pour tout k par le *cap-produit*, voir ci-dessous, avec cette classe fondamentale :

$$D_M(\phi) = [M] \frown \phi.$$

Définition B.7.4 (Cap-produit). — Soient X un espace topologique et $l \geq k$ des entiers. Il existe une application bilinéaire, le *cap-produit* :

$$\frown: H_l(X; \mathbf{Z}) \times H^k(X; \mathbf{Z}) \longrightarrow H_{l-k}(X; \mathbf{Z})$$

qui à la classe d'un l -simplexe singulier $s: \Delta^l \rightarrow X$ et la classe d'une k -cochaîne $\phi \in C^k(X; \mathbf{Z})$ associe la classe du $(l-k)$ -simplexe $s \frown \phi := \phi(s|_{[0, \dots, k]})s|_{[k, \dots, l]}$.

On renvoie à [Hat02, §3.3] pour les détails de la construction.

Proposition B.7.5. — Soit $f: X \rightarrow Y$ une application continue entre espaces topologiques, la propriété de naturalité du cap-produit est explicitée dans le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} H_l(X; \mathbf{Z}) \times H^k(X; \mathbf{Z}) & \xrightarrow{\quad \frown \quad} & H_{l-k}(X; \mathbf{Z}) \\ f_* \downarrow & & \uparrow f^* & & \downarrow f_* \\ H_l(Y; \mathbf{Z}) \times H^k(Y; \mathbf{Z}) & \xrightarrow{\quad \frown \quad} & H_{l-k}(Y; \mathbf{Z}) \end{array}$$

par

$$f_*(\alpha) \frown \phi = f_*(\alpha \frown f^*(\phi))$$

pour $\alpha \in H_l(X; \mathbf{Z})$ et $\phi \in H^k(Y; \mathbf{Z})$.

Démonstration. — Voir [Hat02, §3.3]. □

Le cup-produit et le cap-produit sont liés par la formule

$$\psi(\alpha \frown \phi) = (\phi \smile \psi)(\alpha)$$

pour $\alpha \in H_{k+l}(X; \mathbf{Z})$, $\phi \in H^k(X; \mathbf{Z})$ et $\psi \in H^l(X; \mathbf{Z})$.

En considérant la partie libre des groupes de cohomologie, on obtient un *accouplement parfait* :

Théorème B.7.6. — Soit M une variété topologique de dimension n . Si M est compacte et orientée, alors pour tout $0 \leq k \leq n$, l'accouplement cup-produit

$$\begin{cases} P^k: H^k(M; \mathbf{Z})_f \times H^{n-k}(M; \mathbf{Z})_f \rightarrow \mathbf{Z} \\ (\phi, \psi) \mapsto (\phi \smile \psi)[M] \end{cases}$$

est une forme \mathbf{Z} -bilinéaire telle que les applications \mathbf{Z} -linéaires induites

$$H^k(M; \mathbf{Z})_f \rightarrow \text{Hom}(H^{n-k}(M; \mathbf{Z})_f; \mathbf{Z})$$

et

$$H^{n-k}(M; \mathbf{Z})_f \rightarrow \text{Hom}(H^k(M; \mathbf{Z})_f; \mathbf{Z})$$

sont des isomorphismes.

Corollaire B.7.7. — Soit M une variété topologique compacte de dimension paire $n = 2m$.

1. L'accouplement cup-produit

$$H^m(M; \mathbf{Z}_2) \times H^m(M; \mathbf{Z}_2) \rightarrow \mathbf{Z}_2$$

est une forme bilinéaire symétrique non dégénérée de déterminant 1.

2. Si M est orientée, alors l'accouplement cup-produit

$$H^m(M; \mathbf{Z})_f \times H^m(M; \mathbf{Z})_f \rightarrow \mathbf{Z}$$

est une forme bilinéaire (symétrique si m est pair, alternée sinon) non dégénérée de déterminant ± 1 .

La proposition A.6.7 est une application cruciale de la dualité de Poincaré.

Théorème B.7.8 (Coefficients dans \mathbf{Z}). — Soit M une variété topologique de dimension n . Si M est compacte et orientée, alors pour tout $0 \leq k \leq n$, il existe une application bilinéaire (une « forme d'intersection »)

$$P_k: H_k(M; \mathbf{Z}) \times H_{n-k}(M; \mathbf{Z}) \rightarrow \mathbf{Z}$$

qui induit une identification entre la partie libre

$$H_k(M; \mathbf{Z})_f = H_k(M; \mathbf{Z}) / \text{Tor}(H_k(M; \mathbf{Z}))$$

du \mathbf{Z} -module $H_k(M; \mathbf{Z})$ et le \mathbf{Z} -module dual $\text{Hom}(H_{n-k}(M; \mathbf{Z}), \mathbf{Z})$.

En particulier, si $H_k(M; \mathbf{Z})$ et $H_{n-k}(M; \mathbf{Z})$ sont des \mathbf{Z} -modules libres, alors à toute base $\{e_i\}$ de $H_k(M; \mathbf{Z})$ correspond une base duale $\{f_j\}$ de $H_{n-k}(M; \mathbf{Z})$, déterminée par

$$P_k(e_i, f_j) = \delta_{ij} .$$

Proposition B.7.9. — Si M est une variété topologique compacte et orientée de dimension paire $n = 2m$, la forme bilinéaire en dimension moitié

$$P_m: H_m(M; \mathbf{Z}) \times H_m(M; \mathbf{Z}) \rightarrow \mathbf{Z}$$

est symétrique si m est pair et alternée si m est impair.

Théorème B.7.10 (Coefficients dans \mathbf{Z}_2). — Soit M une variété topologique de dimension n . Si M est compacte, alors pour tout $0 \leq k \leq n$, il existe une forme d'intersection

$$P_k: H_k(M; \mathbf{Z}_2) \times H_{n-k}(M; \mathbf{Z}_2) \rightarrow \mathbf{Z}_2$$

qui induit une identification entre le \mathbf{Z}_2 -espace vectoriel $H_k(M; \mathbf{Z}_2)$ et $\text{Hom}(H_{n-k}(M; \mathbf{Z}_2), \mathbf{Z}_2)$ lui même isomorphe à $H^{n-k}(M; \mathbf{Z}_2)$ puisque \mathbf{Z}_2 est un corps.

Proposition B.7.11. — Si M est une variété topologique compacte de dimension paire $n = 2m$, la forme bilinéaire en dimension moitié

$$P_m: H_m(M; \mathbf{Z}_2) \times H_m(M; \mathbf{Z}_2) \rightarrow \mathbf{Z}_2$$

est symétrique.

Remarque B.7.12. — Dans le cas où M est une variété différentielle, et si $\alpha = [A] \in H_k(M; \mathbf{Z})$ et $\beta = [B] \in H_{n-k}(M; \mathbf{Z})$ sont les classes fondamentales de deux sous-variétés différentielles orientées A de dimension k et B de dimension $n - k$ transverses dans M ⁽⁴⁾. Alors, comme A et B sont de dimensions complémentaires dans un compact, l'intersection $A \pitchfork B$ est formée d'un nombre fini de points. Soit $P \in A \pitchfork B$ un tel point, on associe un signe $\varepsilon_P = \pm 1$ à P : si l'orientation déterminée par l'orientation de l'espace tangent $T_P A$ et celle de $T_P B$ est identique à celle de $T_P M$, alors $\varepsilon_P := 1$; dans le cas contraire, $\varepsilon_P := -1$. On a alors

$$P_k(\alpha, \beta) = \sum_{P \in A \pitchfork B} \varepsilon_P \in \mathbf{Z}.$$

Dans le cas des coefficients dans \mathbf{Z}_2 , M , A et B n'ont pas besoin d'être orientées (elles sont \mathbf{Z}_2 -orientées) et $P_k(\alpha, \beta)$ est égal au nombre modulo 2 des points $P \in A \pitchfork B$.

On prendra garde que cette interprétation de la forme P_k ne s'applique qu'à des classes bien particulières et ne permet pas de définir la forme d'intersection en toute généralité. En particulier une classe d'homologie n'est pas toujours représentable par une sous-variété différentielle plongée, voir [Tho54].

Remarque B.7.13. — En se plaçant dans les conditions de la remarque ci-dessus, on montre facilement que si M est une variété de dimension paire $n = 2m$, la forme bilinéaire $P_m: H_m(M; \mathbf{Z}) \times H_m(M; \mathbf{Z}) \rightarrow \mathbf{Z}$ est symétrique si m est pair et alternée si m est impair.

Remarque B.7.14. — On peut énoncer des analogues des résultats B.7.1 et B.7.2 pour une variété qui n'est pas forcément orientable. (Pour s'en souvenir, il suffit de penser, comme le font les topologues, qu'une telle variété est \mathbf{Z}_2 -orientable, voir par exemple [Hat02, discussion précédant le théorème 3.26].)

Théorème B.7.15. — Soit M une variété topologique de dimension n , alors

$$H_c^k(M; \mathbf{Z}_2) \simeq H_{n-k}(M; \mathbf{Z}_2).$$

4. C'est-à-dire qu'en tout point P de l'intersection $A \cap B$, on a pour les espaces tangents $T_P M = T_P A \oplus T_P B$, on indique alors que l'intersection est transverse par $A \pitchfork B$.

Corollaire B.7.16. — Soit M une variété topologique de dimension n . Si M est compacte, alors

$$H^k(M; \mathbf{Z}_2) \simeq H_{n-k}(M; \mathbf{Z}_2).$$

Application à l'orientabilité d'une sous-variété. —

Proposition B.7.17. — Soit $S \subset \mathbf{RP}^3$ une sous-variété différentielle de dimension 2 connexe. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

1. S est orientable ;
2. toute droite de \mathbf{RP}^3 transverse à S rencontre S en un nombre pair de points ;
3. la classe d'homologie (voir la définition 3.7.1) $[S]_2 \in H_2(\mathbf{RP}^3; \mathbf{Z}_2)$ est nulle ;
4. le complémentaire $\mathbf{RP}^3 \setminus S$ possède deux composantes connexes.

Démonstration. — On se réfère à [BR90, Proposition 5.1.7].

1 \implies 2 : si la surface S est orientable, elle possède une classe fondamentale $[S]$ dans $H_2(S; \mathbf{Z})$ mais comme $H_2(\mathbf{RP}^3; \mathbf{Z}) = \{0\}$, la classe $i_*([S])$ dans $H_2(\mathbf{RP}^3; \mathbf{Z})$ doit être nulle. Soit H une droite de \mathbf{RP}^3 transverse à S . Comme $[H]$ engendre $H_1(\mathbf{RP}^3; \mathbf{Z}) \simeq \mathbf{Z}_2$, l'intersection $H \cap S$ est formée d'un nombre pair de points d'après la dualité de Poincaré.

2 \implies 3 : par dualité de Poincaré, $[S]_2 = 0$ dans $H_2(\mathbf{RP}^3; \mathbf{Z}_2)$ car $[H]_2$ engendre $H_1(\mathbf{RP}^3; \mathbf{Z}_2)$.

3 \implies 4 : considérons la suite exacte d'homologie de la paire (\mathbf{RP}^3, S) ,

$$0 \rightarrow H_3(\mathbf{RP}^3; \mathbf{Z}_2) \simeq \mathbf{Z}_2 \rightarrow H_3(\mathbf{RP}^3, S; \mathbf{Z}_2) \rightarrow$$

$$H_2(S; \mathbf{Z}_2) \simeq \mathbf{Z}_2 \xrightarrow{i_*} H_2(\mathbf{RP}^3; \mathbf{Z}_2) \simeq \mathbf{Z}_2$$

Du fait que i_* est triviale par hypothèse, on a alors $H_3(\mathbf{RP}^3, S; \mathbf{Z}_2) \simeq \mathbf{Z}_2 \oplus \mathbf{Z}_2$. Par dualité d'Alexander, voir [Hat02, Theorem 3.44], on a $H^0(\mathbf{RP}^3 \setminus S; \mathbf{Z}_2) \simeq H_3(\mathbf{RP}^3, S; \mathbf{Z}_2)$, et $\mathbf{RP}^3 \setminus S$ possède donc deux composantes connexes.

4 \implies 1 : du fait que $\mathbf{RP}^3 \setminus S$ possède deux composantes connexes, on peut orienter le fibré normal à S dans \mathbf{RP}^3 . Comme \mathbf{RP}^3 est orientable, on obtient une orientation du fibré tangent, c'est-à-dire une orientation de S , voir [Hir76, Lemma 4.4.1 et Theorem 4.4.5]. \square

Applications aux variétés algébriques. — On étudie dans cette partie la dualité de Poincaré sur les variétés algébriques projectives et affines, complexes et réelles.

ANR compacts. — Un espace topologique X est *normal* s'il est séparé (définition B.1.1.) et s'il vérifie de plus l'axiome de séparation plus fort suivant :

Pour tout couple d'ensembles fermés A et B disjoints, il existe deux ouverts disjoints U et V tels que A soit inclus dans U et B dans V . En particulier tout espace métrisable est normal.

Un espace topologique est dit *paracompact* s'il est séparé et si tout recouvrement ouvert admet un raffinement (ouvert) localement fini. On rappelle qu'un recouvrement (X_i) d'un espace topologique X est dit *localement fini* si tout point de X possède un voisinage disjoint de presque tous les X_i , i.e. de tous sauf pour un ensemble fini d'indices i .

Tout espace paracompact est normal. Tout compact est paracompact. Tout CW-complexe est paracompact. Tout espace métrisable est paracompact, et toute variété paracompacte est métrisable.

Définition B.7.18. — Un espace topologique X est appelé un ANR (Absolute Neighborhood Retract) s'il satisfait la propriété universelle suivante. Pour tout espace topologique normal Y , toute application continue $f: B \rightarrow X$ définie sur un fermé B de Y s'étend en une application continue $U \rightarrow X$ d'un voisinage ouvert U de B dans Y .

Proposition B.7.19. — (*Exemples d'ANR*)

1. \mathbf{R}^n est ANR.
2. Tout ouvert d'un ANR est un ANR.
3. Toute variété topologique compacte est un ANR.
4. [Hu59, page 30 K.4] Soit X un espace métrisable, X_1, X_2 deux sous-espaces fermés tels que $X = X_1 \cup X_2$. Si X_1, X_2 et $X_1 \cap X_2$ sont des ANR, alors X est ANR.

Proposition B.7.20. — Soit V une variété topologique compacte et soit $B \subset V$ un sous-espace compact ANR, alors

$$H_c^k(V \setminus B; \mathbf{Z}) \simeq H^k(V, B; \mathbf{Z}).$$

Démonstration. — Voir [Gre67, Cor. 27.4]. □

Remarque B.7.21. — Se généralise au cas où V est un ANR compact.

Proposition B.7.22. — Soit V une variété réelle projective non singulière de dimension n et $V_{\mathbf{C}}$ une complexification non singulière de V , alors

$$H^k(V_{\mathbf{C}}, V; \mathbf{Z}) \simeq H_{2n-k}(V_{\mathbf{C}} \setminus V; \mathbf{Z}).$$

Démonstration. — La dualité de Poincaré appliquée à la variété topologique $V_{\mathbf{C}} \setminus V$ de dimension $2n$ donne

$$H_c^k(V_{\mathbf{C}} \setminus V; \mathbf{Z}) \simeq H_{2n-k}(V_{\mathbf{C}} \setminus V; \mathbf{Z}) .$$

Comme par ailleurs V est un ANR compact dans la variété compacte $V_{\mathbf{C}}$, on a $H_c^k(V_{\mathbf{C}} \setminus V; \mathbf{Z}) \simeq H^k(V_{\mathbf{C}}, V; \mathbf{Z})$. \square

Proposition B.7.23. — Soit S une variété algébrique complexe affine non singulière de dimension n , et (V, B) une complétion projective lisse telle que B soit un diviseur à croisements normaux (SNC), alors

$$(B.6) \quad H^k(V, B; \mathbf{Z}) \simeq H_{2n-k}(S; \mathbf{Z}) .$$

Démonstration. — La dualité de Poincaré appliquée à la variété topologique S donne $H_c^k(S; \mathbf{Z}) \simeq H_{2n-k}(S; \mathbf{Z})$. Comme d'après la proposition B.7.19.(4), B est un ANR compact dans la variété compacte V , on a $H_c^k(S; \mathbf{Z}) \simeq H^k(V, B; \mathbf{Z})$. \square

Exemple B.7.24 (Homologie des surfaces affines rationnelles)

Dans la situation précédente, on suppose que V est une surface complexe ($n = 2$), B est alors une courbe complexe. De la suite exacte de cohomologie associée à la paire (V, B) on extrait :

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow H^1(V; \mathbf{Z}) \rightarrow H^1(B; \mathbf{Z}) \rightarrow \\ H^2(V, B; \mathbf{Z}) \rightarrow H^2(V; \mathbf{Z}) \rightarrow H^2(B; \mathbf{Z}) \rightarrow \\ H^3(V, B; \mathbf{Z}) \rightarrow H^3(V; \mathbf{Z}) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

En effet, $H^3(B; \mathbf{Z}) = 0$ car B est de dimension 2 en tant que variété topologique et $H^1(V, B; \mathbf{Z}) \simeq H_3(S; \mathbf{Z}) = 0$ car S est une surface complexe affine. Supposons maintenant que V est une surface *rationnelle* et que B est un arbre de courbes rationnelles. Dans ce cas, on a $H^1(B; \mathbf{Z}) \simeq H_1(B; \mathbf{Z}) = 0$, $H^1(V; \mathbf{Z}) \simeq H_3(V; \mathbf{Z}) = 0$ et $H^3(V; \mathbf{Z}) \simeq H_1(V; \mathbf{Z}) = 0$. En utilisant la dualité de Poincaré (B.6) appliquée à la variété topologique S qui est de dimension 4, on a alors une suite exacte :

$$0 \rightarrow H_2(S; \mathbf{Z}) \rightarrow H^2(V; \mathbf{Z}) \rightarrow H^2(B; \mathbf{Z}) \rightarrow H_1(S; \mathbf{Z}) \rightarrow 0 .$$

B.8. Variétés de dimension 3

Variétés de Seifert. — Soit $\mathbf{S}^1 \times \mathbf{D}^2$ le tore solide où \mathbf{S}^1 est le cercle unité $\{u \in \mathbf{C} \mid |u| = 1\}$ et \mathbf{D}^2 est le disque unité fermé $\{z \in \mathbf{C}, |z| \leq 1\}$. Une

fibration de Seifert du tore solide est une application différentiable de la forme

$$f: \mathbf{S}^1 \times \mathbf{D}^2 \rightarrow \mathbf{D}^2, (u, z) \mapsto u^q z^p,$$

où p, q sont des entiers naturels, tels que $p \neq 0$ et $(p, q) = 1$. L'application f est une fibration en cercles qui est localement triviale au-dessus du disque épointé $\mathbf{D}^2 \setminus \{0\}$. Si $p > 1$, la fibre $f^{-1}(0)$ est une *fibre multiple* de multiplicité p .

Définition B.8.1. — Une variété compacte sans bord M de dimension 3 est dite *de Seifert* si elle admet une *fibration de Seifert*, c'est-à-dire s'il existe une application différentiable $g: M \rightarrow B$ au-dessus d'une surface B telle que chaque point $P \in B$ admet un voisinage fermé U au-dessus duquel la restriction de g à $g^{-1}(U)$ est difféomorphe à une fibration de Seifert du tore solide.

En particulier, toute fibre de g est difféomorphe à \mathbf{S}^1 et g est localement triviale en dehors d'un ensemble fini $\{P_1, \dots, P_k\} \subset B$; la fibre $g^{-1}(P_i)$ étant multiple.

Espaces lenticulaires. — Soit $n \in \mathbf{N}^*$, notons μ_n le sous-groupe multiplicatif de \mathbf{C}^* des racines n -ièmes de l'unité.

Définition B.8.2. — Soient $0 < q < p$ des entiers premiers entre eux. L'espace lenticulaire $\mathbf{L}_{p,q}$ est le quotient de la sphère

$$\mathbf{S}^3 = \{(w, z) \in \mathbf{C}^2 \mid |w|^2 + |z|^2 = 1\}$$

par l'action de μ_p définie par

$$\zeta \cdot (w, z) = (\zeta w, \zeta^q z),$$

pour tout $\zeta \in \mu_p$ et tout $(w, z) \in \mathbf{C}^2$.

Proposition B.8.3. — *Tout espace lenticulaire admet une fibration de Seifert.*

En fait un tel espace admet une infinité de fibrations de Seifert. Les espaces du type $\mathbf{L}_{p,1}$ admettent même une fibration localement triviale.

Démonstration. — Une telle fibration s'obtient par exemple à partir de la fibration de Hopf de la sphère \mathbf{S}^3 au-dessus de la sphère $\mathbf{S}^2 \approx \mathbf{C} \cup \{\infty\}$.

$$(B.7) \quad \begin{array}{ccc} \mathbf{S}^3 & \longrightarrow & \mathbf{S}^2 \\ (w, z) & \longmapsto & w/z. \end{array}$$

Un quotient cyclique de la fibration de Hopf est une fibration de Seifert au-dessus d'un orbifold de dimension 2 (voir la définition 4.4.32) :

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_{p,q} &\longrightarrow \mathbf{S}^2(p,q) \\ (w,z) &\longmapsto w^q/z. \end{aligned}$$

□

Nous venons de voir que tout espace lenticulaire est une variété de Seifert. Par contre, à l'exception de $\mathbf{L}_{2,1} \# \mathbf{L}_{2,1} = \mathbf{RP}^3 \# \mathbf{RP}^3$, une somme connexe d'au moins deux espaces lenticulaires n'admet aucune fibration de Seifert, voir les propositions B.8.11 et B.8.13.

Variétés C^∞ géométriques. — Une variété riemannienne Ω est *homogène* si son groupe d'isométries $\text{Isom}(\Omega)$ agit transitivement sur Ω . Une *géométrie* Ω est une variété riemannienne simplement connexe, homogène qui admet un quotient de volume fini. Si Ω est un groupe de Lie réel, on en fait une variété riemannienne en le munissant d'une métrique invariante à gauche et on parle de « la » géométrie Ω .

Définition B.8.4. — Une variété différentielle M de classe C^∞ est *géométrique* si M est difféomorphe au quotient d'une géométrie Ω par un sous-groupe discret d'isométries $\Lambda \subset \text{Isom}(\Omega)$ agissant sans point fixe. On dit aussi que $M = \Lambda \backslash \Omega$ admet une *structure géométrique modelée* sur Ω . Par extension, une variété à bord est *géométrique* si son intérieur, voir en page 417, est géométrique.

Lorsque Ω est un groupe de Lie, les hypothèses retenues impliquent l'existence d'un réseau de covolume fini, c'est-à-dire que Ω est un groupe de Lie *unimodulaire*.

Définition B.8.5. — Un *groupe cristallographique* de dimension n est un groupe discret Λ d'isométries de l'espace euclidien \mathbf{E}^n tel que le quotient $\Lambda \backslash \mathbf{E}^n$ est compact.

Définition B.8.6. — Une variété différentielle C^∞ de dimension n est *sphérique*, (resp. *euclidienne*, resp. *hyperbolique*) si elle admet une géométrie modelée sur \mathbf{S}^n (resp. \mathbf{E}^n , resp. \mathbf{H}^n)⁽⁵⁾.

5. \mathbf{H}^n est le demi-espace $\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n \mid x_n > 0\}$ muni de la métrique $\frac{1}{x_n^2}(dx_1^2 + \dots + dx_{n-1}^2 + dx_n^2)$.

D'après le théorème d'uniformisation, on sait que toute surface topologique compacte admet une géométrie sphérique, euclidienne ou hyperbolique, voir par exemple [Sti92]. Il est remarquable que toute surface soit géométrique et que de plus, toutes les géométries de dimension 2 soient à courbure sectionnelle constante. Ceci n'est plus le cas en dimension 3 où en sus des géométries à courbure constante \mathbf{S}^3 , \mathbf{E}^3 et \mathbf{H}^3 , on trouve les cinq géométries $\mathbf{S}^2 \times \mathbf{E}^1$, $\mathbf{H}^2 \times \mathbf{E}^1$, $\widetilde{\mathbf{SL}}_2(\mathbf{R})$, \mathbf{Nil} et \mathbf{Sol} . Thurston a montré qu'à équivalence près, les huit géométries précédentes sont les seules en dimension 3 pourvu que l'on impose à leur groupe d'isométries d'être maximal.

Théorème B.8.7 (Thurston). — *À équivalence près, il y a exactement huit géométries de groupe d'isométries maximal en dimension 3 :*

$$\mathbf{S}^3, \mathbf{E}^3, \mathbf{H}^3, \mathbf{S}^2 \times \mathbf{E}^1, \mathbf{H}^2 \times \mathbf{E}^1, \widetilde{\mathbf{SL}}_2(\mathbf{R}), \mathbf{Nil}, \mathbf{Sol}.$$

Démonstration. — Voir [BBM⁺10, page 2] ou [Sco83]. \square

Nous ne décrivons pas ici de manière détaillée les huit géométries, (voir [Sco83]) mais nous nous contentons de définir rapidement certains groupes de Lie. Le groupe $\widetilde{\mathbf{SL}}_2(\mathbf{R})$ est le revêtement universel de $\mathbf{SL}_2(\mathbf{R})$. Le groupe \mathbf{Nil} est le groupe de Heisenberg des matrices 3×3 triangulaires supérieures dont les éléments diagonaux sont tous égaux à 1.

Le groupe \mathbf{Sol} est le seul groupe de Lie de dimension 3 simplement connexe, admettant un quotient de volume fini qui soit résoluble mais non nilpotent. Le groupe de Lie \mathbf{Sol} est l'ensemble \mathbf{R}^3 muni du produit semi-direct induit par l'action

$$\mathbf{R} \times \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2, (z, (x, y)) \mapsto (e^z x, e^{-z} y).$$

La loi de groupe sur \mathbf{R}^3 est

$$((\alpha, \beta, \lambda), (x, y, z)) \mapsto (e^\lambda x + \alpha, e^{-\lambda} y + \beta, z + \lambda)$$

et la métrique

$$ds^2 = e^{-2z} dx^2 + e^{2z} dy^2 + dz^2$$

est invariante à gauche. Le groupe $\text{Isom}(\mathbf{Sol})$ possède huit composantes connexes et sa composante neutre est \mathbf{Sol} lui-même, voir [Tro98, Lemme 3.2].

Définition B.8.8. — Une variété M de dimension 3 est une *variété Sol* s'il existe un sous-groupe discret d'isométries $\Lambda \subset \text{Isom}(\mathbf{Sol})$ agissant sans point fixe tel que

$$M = \Lambda \backslash \mathbf{Sol}.$$

Nous avons vu que toute surface compacte est géométrique. A contrario une variété M de dimension 3 n'admet pas en général de structure géométrique. En revanche, on a

Proposition B.8.9. — *Si une variété M de dimension 3 admet une structure géométrique, alors cette dernière est unique pourvu que M soit de volume fini.*

Démonstration. — Voir [Sco83, §5]. □

Définition B.8.10 (Variété indécomposable). — Une variété C^∞ compacte sans bord M de dimension 3 est *indécomposable* si pour toute décomposition en somme connexe $M = M_1 \# M_2$, l'un des termes M_1 ou M_2 est homéomorphe à \mathbf{S}^3 .

Proposition B.8.11. — *Soit M une variété C^∞ compacte sans bord M de dimension 3. Si M est géométrique et n'est pas difféomorphe à $\mathbf{RP}^3 \# \mathbf{RP}^3$, alors M est indécomposable.*

Démonstration. — Voir [Sco83, page 457]. □

Comme $\mathbf{RP}^3 \# \mathbf{RP}^3$ est modélée sur $\mathbf{S}^2 \times \mathbf{E}^1$, on a le corollaire suivant.

Corollaire B.8.12. — *Soit M une variété C^∞ compacte sans bord M de dimension 3. Si M est géométrique pour une autre géométrie que $\mathbf{S}^2 \times \mathbf{E}^1$, alors M est indécomposable.*

Un résultat important de la théorie est que les variétés de Seifert admettent une structure géométrique, on a même une caractérisation des six géométries « de Seifert », voir [Sco83, Theorem 5.3].

Proposition B.8.13. — *Une variété C^∞ compacte sans bord M de dimension 3, orientable, est une variété de Seifert si et seulement si M admet une géométrie modélée sur l'une des six géométries*

$$\mathbf{S}^3, \mathbf{S}^2 \times \mathbf{E}^1, \mathbf{E}^3, \mathbf{Nil}, \mathbf{H}^2 \times \mathbf{E}^1, \widetilde{\mathbf{SL}_2(\mathbf{R})}.$$

Cette proposition reste vraie pour M non orientable si l'on étend la définition de variété de Seifert aux variétés portant un feuilletage en cercles (ce qui revient à admettre un modèle local non orientable en sus des modèles utilisés dans la définition B.8.1).

Corollaire B.8.14. — *Soit $M = \Lambda \setminus \Omega$ une variété géométrique compacte et sans bord, alors M est soit une variété de Seifert, soit $\Omega = \mathbf{Sol}$, soit $\Omega = \mathbf{H}^3$.*

Parmi les variétés topologiques de dimension 3, les variétés hyperboliques, c'est-à-dire les quotient $\Lambda \backslash \mathbf{H}^3$ où $\Lambda \subset \mathbf{PO}(3, 1)$ est un sous-groupe discret de déplacements, sont celles dont la géométrie est la plus riche et que l'on connaît le moins bien.

Géométrisation et classification. — Plusieurs articles sont parus dans la Gazette des Mathématiciens à propos de la Conjecture de Poincaré et de la conjecture de Géométrisation de Thurston [And05], [Mil04], [Bes05], [Bes13]. En nous basant sur l'introduction de [BBM⁺10], nous rappelons très rapidement l'état de l'art depuis que les travaux de Perelman ont ouvert la voie à une classification complète.

Classification des variétés C^∞ de dimension 3. — Dans cette sous-section, une variété de dimension n peut posséder un bord, noté ∂M , caractérisé par le fait que tout point $p \in \partial M$ possède un voisinage dans M qui est localement homéomorphe au produit $\mathbf{R}^{n-1} \times \mathbf{R}_{\geq 0} = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n \mid x_n \geq 0\}$ avec p identifié à $(0, \dots, 0)$. S'il est non vide, le bord d'une variété de dimension n est une variété de dimension $n - 1$ dont le bord est vide : $\partial \partial M = \emptyset$. L'intérieur d'une variété à bord est la sous-variété complémentaire du bord $M \setminus \partial M$. Tout point $p \in M \setminus \partial M$ possède un voisinage homéomorphe à \mathbf{R}^n . Une variété fermée est une variété compacte telle que $\partial M = \emptyset$.

Une surface fermée connexe S dans une variété M de dimension 3 orientable et compacte est *essentielle* si son groupe fondamental s'injecte dans $\pi_1(M)$ et si S ne borde pas une 3-boule ni ne coborde un produit avec une composante connexe de ∂M .

Énonçons la célèbre conjecture de géométrisation de Thurston (voir B.8.4 pour la définition de *variété géométrique*).

Conjecture B.8.15 (Conjecture de géométrisation de Thurston)

L'intérieur d'une variété de dimension 3 orientable et compacte peut être découpée le long d'une collection finie de 2-sphères et de 2-tores plongés essentiels, disjoints deux-à-deux, en une collection canonique de 3-variétés géométriques après avoir bouché les bords sphériques par des 3-boules.

Chaque composante connexe du complémentaire de la famille de tores et sphères admet une métrique localement homogène de volume fini. Soit M une telle composante connexe, et \widehat{M} la variété compacte obtenue en « bouchant » les trous. Alors M possède une structure géométrique modélée sur l'une des huit géométries du théorème B.8.7.

Cette conjecture contient comme cas particulier la non moins célèbre conjecture de Poincaré.

Conjecture (Conjecture de Poincaré). — *Soit M une variété topologique de dimension 3 simplement connexe et fermée alors M est homéomorphe à la 3-sphère.*

En réunissant le théorème d'hyperbolisation de Thurston [BBM⁺10, 1.1.5] et le théorème de Perelman [BBM⁺10, 1.1.6] on obtient la classification pour les variétés orientables.

Théorème B.8.16 (Théorème de géométrisation)

La conjecture de géométrisation B.8.15 ci-dessus est vraie pour toute variété compacte orientable de dimension 3.

APPENDICE C

FAISCEAUX, ESPACES ANNELÉS

Pour rédiger cet appendice, nous nous sommes appuyé sur les livres de Godement [God58, Chapitre II], Liu [Liu02, § 2.2.1] et Hartshorne [Har77, § II.1]. Nous ne traitons pas la cohomologie des faisceaux pour laquelle nous renvoyons le lecteur à [Liu02, §5.2] ou [Har77, Chapter III].

C.1. Faisceaux

On fera attention à une difficulté technique : en plusieurs occasions dans ce livre, nous citons [Ser55a] où un faisceau de base X est un espace étalé (espace topologique muni d'une application continue vers X , voir la définition C.2.2) alors que dans [Har77, Chapter II], notamment, un faisceau est un préfaisceau (foncteur contravariant, voir la définition C.1.1 ci-dessous) assujéti à des axiomes, voir la définition C.1.4. Le corollaire C.4.3 montre que ces deux présentations sont équivalentes (d'ailleurs dans son livre, Godement les identifie librement [God58, Remarque II.1.2.1]).

Définition C.1.1. — Soit X un espace topologique, un *préfaisceau* \mathcal{F} (de groupes abéliens) sur X consiste en la donnée pour chaque ouvert $U \subset X$ d'un groupe abélien $\mathcal{F}(U)$ et pour chaque couple d'ouverts emboîtés $V \subset U \subset X$ d'un morphisme de groupes (*morphisme de restriction*) $\rho_{UV} : \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}(V)$. Le tout étant assujéti aux conditions suivantes :

1. $\mathcal{F}(\emptyset) = \{0\}$;
2. $\rho_{UU} = \text{id}_U$;
3. si $W \subset V \subset U \subset X$ sont des ouverts emboîtés, alors $\rho_{UW} = \rho_{VW} \circ \rho_{UV}$.

On définit de la même manière les *préfaisceaux d'ensembles* (resp. *préfaisceaux d'anneaux*) : les $\mathcal{F}(U)$ sont des ensembles (resp. des anneaux) et les $\rho_{UV} : \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}(V)$ sont des applications (resp. des morphismes d'anneaux). Il existe de nombreuses variantes et par exemple pour un anneau A fixé, on définit les *préfaisceaux de A -modules* et les *préfaisceaux de A -algèbres*.

On a une notion naturelle de *sous-préfaisceau* \mathcal{F}' de \mathcal{F} : $\mathcal{F}'(U)$ est un sous-groupe (resp. sous-ensemble, resp. sous-anneau, etc.) de $\mathcal{F}(U)$ et le morphisme ρ'_{UV} est induit par ρ_{UV} .

Exemple C.1.2. — Soit X un espace topologique.

1. Soit K un anneau, on définit un préfaisceau \mathcal{F} de la manière suivante : pour tout ouvert $U \in X$, $\mathcal{F}(U) := K^U$ est l'anneau des fonctions définies sur U et à valeurs dans K et les morphismes ρ_{UV} sont les restrictions usuelles des fonctions.
2. Le préfaisceau \mathcal{C}^0 des fonctions à valeurs réelles continues est un sous-préfaisceau du préfaisceau des fonctions à valeurs réelles : $\mathcal{C}^0(U) \subset \mathbf{R}^U$.

Soit \mathcal{F} un faisceau sur X et $U \subset X$ un ouvert. Un élément $s \in \mathcal{F}(U)$ est appelé une *section* de \mathcal{F} au-dessus de U . Une *section globale* est alors une section au-dessus de l'espace X tout entier. Par analogie avec les préfaisceaux de fonctions, on note $s|_V$ l'élément $\rho_{UV}(s)$ de $\mathcal{F}(V)$ et on l'appelle la *restriction* de s à V .

Définition C.1.3. — L'ensemble des sections $\mathcal{F}(U)$ d'un préfaisceau \mathcal{F} au-dessus d'un ouvert U est aussi noté $\Gamma(U, \mathcal{F})$.

Définition C.1.4 (Faisceau). — Un préfaisceau \mathcal{F} est un *faisceau* si pour tout ouvert $U \subset X$ et pour tout recouvrement ouvert $\{U_i\}_{i \in I}$ de U les deux conditions suivantes sont vérifiées :

1. (Unicité) Si $s \in \mathcal{F}(U)$ et $s|_{U_i} = 0$ pour tout $i \in I$, alors $s = 0$;
2. (Recollement des sections locales) Si $s_i \in \mathcal{F}(U_i)$, $i \in I$ sont telles que $s_i|_{U_i \cap U_j} = s_j|_{U_i \cap U_j}$ pour toute paire $i, j \in I$, alors il existe une section $s \in \mathcal{F}(U)$ telle que $s|_{U_i} = s_i$ pour tout $i \in I$. (Cette section s est alors unique d'après (1).)

Exemple C.1.5 (Faisceaux de fonctions). — Soit X un espace topologique. Soit K un anneau (par exemple \mathbf{R} ou \mathbf{C}), le préfaisceau des fonctions à valeurs dans K de l'exemple C.1.2(1) est un faisceau, le *faisceau des fonctions sur X à valeurs dans K* . Un *faisceau de fonctions* est un sous-faisceau du faisceau des fonctions.

1. Le faisceau \mathcal{C}^0 des fonctions à valeurs réelles (ou complexes) continues.
2. On définit de la même manière les faisceaux \mathcal{C}^k des fonctions à valeurs réelles (ou complexes) de classes \mathcal{C}^k , \mathcal{C}^∞ des fonctions à valeurs réelles (ou complexes) de classe \mathcal{C}^∞ .
3. Le faisceau des fonctions holomorphes est un sous-faisceau du faisceau des fonctions à valeurs complexes.
4. Plus généralement, un sous-préfaisceau du faisceau des fonctions est un faisceau dès que la caractérisation des fonctions considérées est locale (typiquement comme dans le cas des fonctions régulières sur un ensemble quasi-algébrique, voir les définitions 1.2.33, 1.2.34 et 1.2.35).

Définition C.1.6 (Faisceau des restrictions sur un sous-espace)

Soient K un anneau, X un espace topologique, \mathcal{F} un faisceau de fonctions de X à valeurs dans K et $Y \subset X$ un sous-espace topologique muni de la topologie induite. On définit un faisceau \mathcal{F}_Y sur Y en décrétant que pour tout ouvert U de Y , une fonction $f: U \rightarrow A$ appartient à $\mathcal{F}_Y(U)$ si pour tout point x de U , il existe un voisinage ouvert V de x dans X et une fonction $g \in \mathcal{F}_X(V)$ telle que $g(y) = f(y)$ pour tout $y \in V \cap U$.

Le faisceau \mathcal{F}_Y est en fait le *faisceau associé*, voir la définition C.4.1, au préfaisceau des restrictions de fonctions aux ouverts de Y .

Remarque C.1.7. — Notons que cette façon de définir \mathcal{F}_Y est spécifique aux faisceaux de fonctions. Remarquons en particulier que le faisceau \mathcal{F}_Y ainsi défini est un faisceau de fonctions de Y dans K .

Remarque C.1.8. — Si $U \subset X$ est un ouvert, alors $\mathcal{F}_U = \mathcal{F}_X|_U$ où, pour tout ouvert $V \subset U$, on a noté $\mathcal{F}_X|_U(V) := \mathcal{F}(V)$. Voir la définition C.4.8 et l'exemple C.4.9.

C.2. Espace étalé dans X

Soient X un espace topologique et (E, π) , un couple formé d'un espace topologique E et d'une application continue $\pi: E \rightarrow X$. Soit Y un sous-ensemble de X . On appelle *section* (continue) s de (E, π) au-dessus de Y toute application continue $s: Y \rightarrow E$ telle que $\pi(s(x)) = x$ pour tout $x \in Y$. On définit un faisceau \widehat{E} de base X associé à (E, π) de la manière suivante : pour chaque ouvert $U \subset X$, $\widehat{E}(U)$ est l'ensemble des sections continues de (E, π) au-dessus de U , et pour $U \supset V$, la restriction à V d'une section au-dessus de U est la restriction de l'application $U \rightarrow E$ correspondante.

Définition C.2.1. — Le faisceau \widehat{E} ainsi défini est le *faisceau des sections* de (E, π) .

Définition C.2.2. — Si π est un homéomorphisme local (c'est-à-dire que tout point $p \in E$ possède un voisinage ouvert homéomorphe par π à un voisinage ouvert de $\pi(p)$ dans X), on dit que (E, π) est un *espace étalé dans* X .

Nous verrons plus loin, définition C.4.1, que réciproquement on peut associer un espace étalé à tout préfaisceau.

Remarque C.2.3. — La construction C.2.1 admet de nombreuses variantes. Notamment si X est une variété différentielle (resp. analytique), on peut de la même manière définir le faisceau des sections différentiables (resp. analytiques) d'un couple (E, π) où E est une variété différentielle (resp. analytique) et $\pi: E \rightarrow X$ est une application différentiable (resp. analytique).

Remarque C.2.4. — On peut prouver qu'un faisceau \mathcal{F} est déterminé de manière unique par la donnée des $\mathcal{F}(U)$ et ρ_{UV} pour U, V appartenant à une base d'ouverts \mathcal{B} de l'espace topologique X (c'est-à-dire que tout ouvert de X est union d'éléments de \mathcal{B} et toute intersection finie d'éléments de \mathcal{B} est un élément de \mathcal{B}). Par exemple, si X est une variété algébrique réelle ou complexe, il suffit de connaître $\mathcal{F}(\mathcal{D}(f))$ pour les ouverts affines $\mathcal{D}(f)$ où f est une fonction régulière (voir l'exercice 1.3.15(3)).

C.3. Fibres d'un faisceau

Définition C.3.1. — Soit \mathcal{F} un préfaisceau de groupes abéliens sur un espace topologique X , et soit $x \in X$. La *fibre* du préfaisceau \mathcal{F} au point x est le groupe

$$\mathcal{F}_x := \varinjlim_{U \ni x} \mathcal{F}(U)$$

la limite inductive (voir la définition A.1.2 et l'exemple A.1.4) étant prise sur les voisinages ouverts de X . Si \mathcal{F} est un préfaisceau d'anneaux (resp. de A -algèbres ou de A -modules pour un anneau A fixé), alors \mathcal{F}_x est un anneau (resp. un A -module ou une A -algèbre). Soit $s \in \mathcal{F}(U)$ une section; pour tout $x \in U$, on note l'image de s dans \mathcal{F}_x par s_x . On appelle s_x le *germe* de s en x . L'application $\mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}_x, s \mapsto s_x$ est un morphisme de groupes (resp. d'anneaux, resp. de A -modules, resp. de A -algèbres).

Remarque C.3.2. — Dans le cas particulier d'un faisceau de fonctions \mathcal{F} tel que tous les ensembles de sections $\mathcal{F}(U)$ sont des sous-ensembles d'un même ensemble commun et tous les morphismes de restriction sont les inclusions $\rho_{UV}: \mathcal{F}(U) \subset \mathcal{F}(V)$, la limite inductive est alors la réunion et on a donc

$$\mathcal{F}_x = \bigcup_{U \ni x} \mathcal{F}(U).$$

Lemme C.3.3. — Soit \mathcal{F} un faisceau de groupes abéliens sur un espace topologique X . Soient $s, t \in \mathcal{F}(X)$ des sections globales telles que $s_x = t_x$ pour tout $x \in X$. Alors $s = t$.

Démonstration. — On peut supposer que $t = 0$. Pour tout $x \in X$, il existe un voisinage ouvert U_x de x tel que $s|_{U_x} = 0$, puisque $s_x = 0$. Comme les ouverts $\{U_x\}_{x \in X}$ recouvrent X , on a en fait $s = 0$ par définition de faisceau. \square

Soit (E, π) un espace étalé au-dessus de X et \widehat{E} son faisceau des sections (voir la définition C.2.1). Pour toute section s de (E, π) au-dessus d'un ouvert U de X , l'image $s(U)$ est ouverte dans E , c'est-à-dire qu'une section de (E, π) est une application ouverte. Pour tout $p \in E$, π étant un homéomorphisme local, il existe une section s de (E, π) définie dans un voisinage de $x = \pi(p)$, et telle que $s(x) = p$. Les ensembles de la forme $s(U)$ forment donc une base d'ouverts de E .

Proposition C.3.4. — La fibre $E_x := \pi^{-1}(x)$ de l'espace étalé (E, π) s'identifie à la fibre de son faisceau des sections.

$$E_x \simeq \widehat{E}_x = \varinjlim_{U \ni x} \widehat{E}(U).$$

Démonstration. — Il suffit de montrer que si deux sections s et t de (E, π) définies dans des voisinages ouverts U et V d'un point x de X sont égales en x , alors elles sont égales sur tout un voisinage $W \subset U \cap V$ de x . Les sections étant des applications ouvertes, $s(U)$ et $t(V)$ sont des ouverts de E . Comme $s(x) = t(x)$, l'intersection $s(U) \cap t(V)$ est non vide. L'application π étant un homéomorphisme local, il existe un ouvert $W' \subset s(U) \cap t(V)$ tel que $\pi|_{W'}: W' \rightarrow \pi(W')$ est une bijection. L'égalité $\pi \circ s = \pi \circ t$ implique donc $s = t$ sur $W := \pi(W')$. \square

On dispose d'une construction réciproque : l'ensemble somme des fibres $\bigsqcup_{x \in X} \mathcal{F}_x$ d'un faisceau $\{U \mapsto \mathcal{F}(U)\}_{U \text{ ouvert de } X}$ sur un espace topologique X , muni d'une topologie adéquate, forme l'espace étalé de \mathcal{F} , voir la définition C.4.1.

Fibré localement trivial. —

Définition C.3.5. — Soient X et F des espaces topologiques. Rappelons qu'un *fibré localement trivial*⁽¹⁾ de fibre F au-dessus de X est la donnée d'un couple (E, π) où $\pi: E \rightarrow X$ est une application continue qui se trivialisent localement en un produit. À savoir qu'il existe un recouvrement ouvert $\{U_i\}_{i \in I}$ de X et une famille d'homéomorphismes $\{\psi_i: \pi^{-1}(U_i) \xrightarrow{\cong} U_i \times F\}_{i \in I}$; ces données étant assujetties à la condition que pour tout $i \in I$ le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(U_i) & \xrightarrow[\cong]{\psi_i} & U_i \times F \\ & \searrow \pi|_{\pi^{-1}(U_i)} & \swarrow (u, f) \mapsto u \\ & & U_i \end{array}$$

Si $x \in U_i \cap U_j$, $\psi_j|_{U_i \cap U_j} \circ \psi_i^{-1}|_{U_i \cap U_j}$ induit une application continue ψ_{ij} de $U_i \cap U_j$ dans le groupe symétrique de F .

Un *revêtement* de X est un fibré localement trivial dont la fibre est un espace topologique discret. Dans ce cas, π est alors un homéomorphisme local.

Un *fibré (localement trivial) différentiel de classe \mathcal{C}^k* est défini comme ci-dessus en remplaçant les espaces topologiques en présence par des variétés différentielles de classe \mathcal{C}^k et les applications continues par des applications différentiables de classe \mathcal{C}^k .

Un *fibré K -vectoriel de rang r* est un fibré localement trivial de fibre $F = K^r$ tel que pour tout $x \in X$ et toute paire d'ouverts U_i, U_j contenant x , $\psi_{ij}(x) \in \mathbf{GL}_r(K)$. Plus généralement, un *fibré vectoriel* est un fibré vectoriel de rang constant sur chaque composante connexe de X .

Exemple C.3.6. — Un fibré localement trivial de fibre F n'est pas en général un espace étalé mais si la fibre F est un espace topologique discret (par exemple un ensemble fini muni de la topologie idoine), π est alors un homéomorphisme local. Autrement dit, un espace étalé (E, π) est un *revêtement* de X .

Morphismes de faisceaux. —

Définition C.3.7. — Soient \mathcal{F} et \mathcal{G} des préfaisceaux (resp. faisceaux) de groupes abéliens sur un espace topologique X . Un *morphisme de préfaisceaux* (resp. *morphisme de faisceaux*) $\alpha: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ est une famille de morphismes de

1. Dans la littérature, *localement trivial* est souvent sous-entendu; ce qui prête parfois à confusion.

groupes $\{\alpha(U): \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{G}(U)\}_{U \text{ ouvert de } X}$, compatibles avec les morphismes de restriction ρ_{UV} .

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(U) & \xrightarrow{\alpha_U} & \mathcal{G}(U) \\ \rho_{UV}^{\mathcal{F}} \downarrow & & \downarrow \rho_{UV}^{\mathcal{G}} \\ \mathcal{F}(V) & \xrightarrow{\alpha_V} & \mathcal{G}(V) \end{array}$$

La composition des morphismes de préfaisceaux est clairement définie. Un *isomorphisme* est donc un morphisme admettant un morphisme réciproque. Autrement dit, un morphisme de préfaisceaux $\alpha: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ est un isomorphisme si et seulement si $\alpha(U): \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{G}(U)$ est un isomorphisme de groupes pour tout ouvert U de X .

Définition C.3.8. — Soient X un espace topologique et $\alpha: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ un morphisme de faisceaux de groupes abéliens sur X . Le *noyau* de α , noté $\ker \alpha$, est donné par le préfaisceau $U \mapsto \ker(\alpha(U))$ (qui est un faisceau). L'*image* de α , notée $\text{Im } \alpha$, est le faisceau associé au préfaisceau $U \mapsto \text{Im}(\alpha(U))$.

Remarque C.3.9. — Par définition, le faisceau $\ker \alpha$ est un sous-faisceau de \mathcal{F} . Par propriété universelle du faisceau associé, il existe un morphisme naturel $\theta: \text{Im } \alpha \rightarrow \mathcal{G}$ qui est en fait injectif. On peut donc identifier $\text{Im } \alpha$ à un sous-faisceau de \mathcal{G} .

Soit $\alpha: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ un morphisme de préfaisceaux sur X . Par propriété universelle de la limite inductive, on a que pour tout $x \in X$, α induit canoniquement un morphisme de groupes $\alpha_x: \mathcal{F}_x \rightarrow \mathcal{G}_x$ tel que $(\alpha(U)(s))_x = \alpha_x(s_x)$ pour tout voisinage ouvert U de x et tout élément $s \in \mathcal{F}(U)$.

Définition C.3.10. — Soient \mathcal{F} et \mathcal{G} des préfaisceaux sur un espace topologique X . Un morphisme de préfaisceaux $\alpha: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ est *injectif* (resp. *surjectif*) si pour tout $x \in X$, l'application $\alpha_x: \mathcal{F}_x \rightarrow \mathcal{G}_x$ est injective (resp. surjective).

Si α est injectif, alors pour tout ouvert U de X l'application $\alpha(U): \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{G}(U)$ est injective. En particulier, α est injectif si et seulement si $\ker \alpha$ est trivial.



Même si α est surjectif, les applications $\alpha(U): \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{G}(U)$ ne sont pas surjectives en général.

Exemple C.3.11. — Soit X une variété analytique complexe, \mathcal{O}_X le faisceau de groupes additifs des fonctions holomorphes et \mathcal{O}_X^* le faisceau de groupes

multiplicatifs des fonctions holomorphes inversibles (c'est-à-dire ne s'annulant nulle part). En associant à toute fonction holomorphe $f: U \rightarrow \mathbf{C}$, la fonction $\alpha(U)(f) := \exp \circ f: U \rightarrow \mathbf{C}^*$ pour tout ouvert U de X , on obtient un morphisme de faisceaux $\alpha: \mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{O}_X^*$. Comme localement toute fonction holomorphe ne s'annulant pas est de la forme $\exp \circ f$, ce morphisme de faisceaux est surjectif; mais il est bien connu que, si U n'est pas simplement connexe, l'application $f \mapsto \exp \circ f$ de $\mathcal{O}_X(U)$ dans $\mathcal{O}_X^*(U)$ n'est pas surjective puisque l'application identité n'a pas d'antécédent.

Proposition C.3.12. — *Un morphisme de faisceaux $\alpha: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ sur X est un isomorphisme si et seulement si $\alpha_x: \mathcal{F}_x \rightarrow \mathcal{G}_x$ est un isomorphisme de groupes pour tout $x \in X$.*

Démonstration. — [Liu02, Proposition 2.12]. □

En résumé, si α_x est surjective pour tout x , α_U ne l'est pas forcément pour tout U mais si α_x est injective et surjective pour tout x , alors α_U aussi pour tout U .

Corollaire C.3.13. — *Soit $\alpha: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ un morphisme de faisceaux sur X . Alors c'est un isomorphisme si et seulement s'il est injectif et surjectif.*

Définition C.3.14. — Soit X un espace topologique. Une suite de faisceaux $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H}$ est *exacte* si $\mathcal{F}_x \rightarrow \mathcal{G}_x \rightarrow \mathcal{H}_x$ est une suite exacte de groupes pour tout $x \in X$.

Exemple C.3.15. — Revenons à l'exemple C.3.11, la fonction exponentielle induit une suite exacte de groupes abéliens

$$(C.1) \quad 0 \rightarrow \mathbf{Z} \xrightarrow{\text{incl.}} \mathbf{C} \xrightarrow{z \mapsto \exp(2\pi iz)} \mathbf{C}^* \rightarrow 0$$

où \mathbf{C} est muni de sa structure additive et \mathbf{C}^* sa structure multiplicative. Soit X un espace analytique complexe réduit, en considérant les fonctions holomorphes à valeurs dans la suite exacte (C.1), on obtient une suite exacte de faisceaux. Soit X un espace analytique complexe réduit. On a une suite exacte de faisceaux

$$(C.2) \quad 0 \rightarrow \mathbf{Z} \rightarrow \mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{O}_X^* \rightarrow 0$$

où \mathbf{Z} est le faisceau constant, \mathcal{O}_X est le faisceau structural et \mathcal{O}_X^* est le faisceau des éléments inversibles de \mathcal{O}_X pour la multiplication.

C.4. Faisceau des sections d'un espace étalé

En fait tout faisceau est le faisceau des sections d'un espace étalé. Pour le montrer, on considère pour commencer un préfaisceau \mathcal{F} . On note $E(\mathcal{F})$ l'ensemble somme $\sqcup_{x \in X} \mathcal{F}_x$ et $\pi: E(\mathcal{F}) \rightarrow X$ l'application qui envoie tout point $p \in \mathcal{F}_x$ sur x . L'application canonique $\mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}_x$, $s \mapsto s_x$ permet d'associer à chaque élément $s \in \mathcal{F}(U)$ une application $\tilde{s}: U \rightarrow E(\mathcal{F})$, $x \mapsto s_x$ qui satisfait $\pi(\tilde{s}(x)) = x$ pour tout $x \in U$. Il reste à munir $E(\mathcal{F})$ de la topologie la moins fine rendant continues les applications \tilde{s} ($s \in \mathcal{F}(U)$, U ouvert de X). L'application π est alors un homéomorphisme local. On allège la notation du faisceau des sections de $E(\mathcal{F})$ en notant, comme Hartshorne (voir [Har77, Définition II.1.2 et Exercice II.1.13]), $\mathcal{F}^+ := \widehat{E(\mathcal{F})}$.

Si dans les constructions ci-dessus, \mathcal{F} est un préfaisceau de groupes abéliens, (resp. d'anneaux, etc.), $E(\mathcal{F})$ est naturellement muni d'une loi de composition continue $(p, q) \mapsto p + q$ définie pour $\pi(p) = \pi(q)$, et induisant sur chaque fibre \mathcal{F}_x une structure de groupe abélien (resp. ainsi que d'une loi de composition continue $(p, q) \mapsto pq$ définie pour $\pi(p) = \pi(q)$, ces deux lois induisant sur chaque fibre \mathcal{F}_x une structure d'anneau). Si s et t sont des sections de $(E(\mathcal{F}), \pi)$ au-dessus d'un ouvert U de X , $s + t$ est la section $x \mapsto s(x) + t(x)$ (resp. st est la section $x \mapsto s(x)t(x)$).

Définition C.4.1 (Faisceau associé à un préfaisceau)

Le couple $(E(\mathcal{F}), \pi)$ est l'espace étalé attaché au préfaisceau \mathcal{F} et le faisceau \mathcal{F}^+ est le faisceau associé au préfaisceau \mathcal{F} .

Le faisceau \mathcal{F}^+ associé au préfaisceau \mathcal{F} est muni d'un morphisme

$$\mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}^+$$

universel pour les morphismes de \mathcal{F} dans un faisceau. À savoir que tout morphisme $\alpha: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ dans un faisceau \mathcal{G} , se factorise par un unique morphisme $\tilde{\alpha}: \mathcal{F}^+ \rightarrow \mathcal{G}$

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}^+ & \xrightarrow{\tilde{\alpha}} & \mathcal{G} \\ \uparrow & \searrow \alpha & \nearrow \\ \mathcal{F} & & \end{array}$$

En particulier, si \mathcal{F} est un sous-préfaisceau d'un faisceau \mathcal{G} , \mathcal{F}^+ est un sous-faisceau de \mathcal{G} déterminé de la façon suivante : pour tout ouvert $U \subset X$, un élément $f \in \mathcal{G}(U)$ appartient à $\mathcal{F}^+(U)$ si et seulement s'il existe un recouvrement ouvert $\{U_i\}_{i \in I}$ de U tel que pour tout $i \in I$, $\rho_{UU_i}(f) \in \mathcal{F}(U_i)$.

Théorème C.4.2. — [God58, Théorème 1.2.1], [Har77, Proposition II.1.2] Soient X un espace topologique et \mathcal{F} un préfaisceau de base X . Le faisceau \mathcal{F}^+ des sections de l'espace étalé $E(\mathcal{F})$ est isomorphe au préfaisceau \mathcal{F} si et seulement si ce dernier est un faisceau.

Corollaire C.4.3. — Tout faisceau de base X est isomorphe au faisceau des sections d'un espace étalé dans X , unique à isomorphisme unique près.

Remarque C.4.4. — Dans le cas où \mathcal{F} est un préfaisceau de fonctions de X dans K , voir l'exemple C.1.2, les sections locales de \mathcal{F}^+ au-dessus d'un ouvert $U \subset X$ sont définies par :

$$\mathcal{F}^+(U) = \{f: U \rightarrow K \mid \forall x \in U, \exists V \subset U \text{ voisinage ouvert de } x \text{ et} \\ \exists g \in \mathcal{F}(V) \mid f|_V = g\}.$$

Définition C.4.5. — Soient X un espace topologique, \mathcal{F} un faisceau sur X et \mathcal{F}' un sous-faisceau de \mathcal{F} . Alors $U \mapsto \mathcal{F}(U)/\mathcal{F}'(U)$ est un préfaisceau sur X . Le faisceau associé $\mathcal{F}/\mathcal{F}' := (U \mapsto \mathcal{F}(U)/\mathcal{F}'(U))^+$ est appelé le *faisceau quotient*.

Proposition C.4.6. — Soient X un espace topologique, \mathcal{F} un faisceau sur X et \mathcal{F}' un sous-faisceau de \mathcal{F} . On a

$$\forall x \in X, \quad (\mathcal{F}/\mathcal{F}')_x = \mathcal{F}_x/\mathcal{F}'_x.$$

Remarque C.4.7. — L'espace étalé $E(\mathcal{F})$ n'est pas en général un espace topologique séparé même si X l'est. En effet, pour des sections s, t au-dessus d'un ouvert U de X , l'ensemble des éléments $x \in U$ tels que $s(x) = t(x)$ forme un ouvert de U ; mais si $E(\mathcal{F})$ est séparé, c'est aussi un fermé de U . En particulier, deux sections égales en x sont égales dans toute la composante connexe de x dans U . Le faisceau \mathcal{F} vérifie donc le *principe du prolongement analytique*. Par exemple, si X est une variété analytique complexe et \mathcal{F} est le faisceau des fonctions analytiques, alors $E(\mathcal{F})$ est séparé. Mais si \mathcal{F} est le faisceau des fonctions continues, alors $E(\mathcal{F})$ n'est certainement pas séparé.

Définition C.4.8. — Soient X un espace topologique, \mathcal{F} un faisceau de base X et $(E(\mathcal{F}), \pi)$ l'espace étalé associé. Soit $Y \subset X$ un sous-espace topologique et $E|_Y := \pi^{-1}(Y)$. Le faisceau associé $\widehat{E}|_Y$ est noté $\mathcal{F}|_Y$, c'est le *faisceau restreint* ou la *restriction* du faisceau \mathcal{F} à Y .

Exemple C.4.9. — Si \mathcal{F} est un préfaisceau sur X et $U \subset X$ un ouvert. En notant, pour tout ouvert $V \subset U$, $\mathcal{F}|_U(V) := \mathcal{F}(V)$ on obtient un préfaisceau

sur U appelé *restriction* du préfaisceau \mathcal{F} à U . Bien sûr si \mathcal{F} est un faisceau, on retrouve le faisceau restreint $\mathcal{F}|_U$ défini ci-dessus.

Proposition C.4.10. — Soient X un espace topologique, \mathcal{F} un faisceau de base X et $Y \subset X$ un sous-espace topologique. Alors pour tout $x \in Y$,

$$(\mathcal{F}|_Y)_x = \mathcal{F}_x .$$

Soient X et Y des espaces topologiques, \mathcal{F} un faisceau sur X , \mathcal{G} un faisceau sur Y , $\varphi: X \rightarrow Y$ une application continue. Alors pour tout ouvert $V \subset Y$, $\varphi^{-1}(V)$ est un ouvert de X et on note $\varphi_*\mathcal{F}$ le faisceau sur Y donné par $V \mapsto \mathcal{F}(\varphi^{-1}(V))$.

Définition C.4.11. — Le faisceau $\varphi_*\mathcal{F}$ sur Y est appelé *image directe* de \mathcal{F} .

On définit aussi un faisceau image réciproque de \mathcal{G} , faisceau que l'on note habituellement $\varphi^{-1}\mathcal{G}$.

Définition C.4.12. — Le faisceau $\varphi^{-1}\mathcal{G}$ sur X associé au préfaisceau

$$U \mapsto \varinjlim_{V \supset \varphi(U)} \mathcal{G}(V)$$

où U est un ouvert de X et la limite est prise au-dessus de tous les ouverts V de Y contenant $\varphi(U)$ est appelé *image réciproque* de \mathcal{G} .

Remarque C.4.13. — Attention, dans [God58], le faisceau image réciproque de \mathcal{G} par φ est noté $\varphi^*\mathcal{G}$. Suivant [Har77, § II.5], nous réservons cette notation au cas où \mathcal{G} est un faisceau de \mathcal{O}_Y -modules (voir la définition C.5.4 ci-dessous) : dans ce cas, $\varphi^{-1}\mathcal{G}$ est un faisceau de $\varphi^{-1}\mathcal{O}_Y$ -modules et $\varphi^*\mathcal{G} := \varphi^{-1}\mathcal{G} \otimes_{\varphi^{-1}\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_X$ est un faisceau de \mathcal{O}_X -modules.

Proposition C.4.14. — $\forall x \in X, (\varphi^{-1}\mathcal{G})_x = \mathcal{G}_{\varphi(x)}$.

Exercice C.4.15. — Si $i: Z \hookrightarrow Y$ est l'injection canonique d'un sous-espace topologique de Y , alors

$$i^{-1}\mathcal{G} = \mathcal{G}|_Z .$$

C.5. Espaces annelés

Tant que l'on se limite aux variétés algébriques, voir la définition 1.3.1, on peut se restreindre aux faisceaux qui sont des sous-faisceaux du faisceau des fonctions. Dans le cadre plus général de la théorie des schémas, on considère des faisceaux d'anneaux locaux, on obtient ainsi la catégorie des espaces annelés.

Définition C.5.1. — On appelle *espace annelé* (pour *localement annelé en anneaux locaux*) la donnée d'un espace topologique X et d'un faisceau d'anneaux \mathcal{O}_X sur X tel que $\mathcal{O}_{X,x}$ est un anneau local pour tout $x \in X$. Le faisceau \mathcal{O}_X est appelé le *faisceau structural* de (X, \mathcal{O}_X) . Soient (X, \mathcal{O}_X) et (Y, \mathcal{O}_Y) des espaces annelés, un *morphisme d'espaces annelés* est un couple $(\varphi, \varphi^\#)$ formé d'une application continue $\varphi: X \rightarrow Y$ et d'un morphisme $\varphi^\#: \mathcal{O}_Y \rightarrow \varphi_*\mathcal{O}_X$ de faisceaux d'anneaux sur Y .

Définition C.5.2. — Un morphisme $(\varphi, \varphi^\#): (X, \mathcal{O}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$ est une *immersion ouverte* (resp. *immersion fermée*) si

1. φ est un homéomorphisme sur $\varphi(X)$;
2. $\varphi(X)$ est ouvert (resp. fermé) dans Y ;
3. $\varphi_x^\#$ est un isomorphisme (resp. morphisme surjectif) pour tout $x \in X$.

Exemple C.5.3. — Dans le cas où \mathcal{O}_X (resp. \mathcal{O}_Y) est un sous-faisceau du faisceau \mathcal{F}_X (resp. \mathcal{F}_Y) des fonctions à valeurs dans un anneau K , toute application continue $\varphi: X \rightarrow Y$ induit un morphisme $\varphi^\#: \mathcal{O}_Y \rightarrow \varphi_*\mathcal{F}_X$ de faisceaux d'anneaux sur Y associé au morphisme « tiré en arrière » :

$$\forall U \text{ ouvert de } Y, f \in \mathcal{O}_Y(U) \mapsto (f \circ \varphi: \varphi^{-1}(U) \rightarrow K) .$$

Le couple $(\varphi, \varphi^\#)$ est alors un morphisme d'espaces annelés si l'image de $\varphi^\#$ est contenue dans $\varphi_*\mathcal{O}_X$. En particulier, si (X, \mathcal{O}_X) et (Y, \mathcal{O}_Y) sont des variétés algébriques sur un même corps K , $(\varphi, \varphi^\#)$ est un morphisme d'espaces annelés si et seulement si φ est un morphisme de variétés algébriques sur K .

Définition C.5.4. — Soit (X, \mathcal{O}_X) un espace annelé. Un *faisceau de \mathcal{O}_X -modules* (ou simplement un *\mathcal{O}_X -module*) est un faisceau \mathcal{F} sur X , tel que pour tout ouvert $U \subset X$, le groupe $\mathcal{F}(U)$ est un $\mathcal{O}_X(U)$ -module, et pour toute inclusion d'ouverts $V \subset U$, le morphisme de restriction $\mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}(V)$ est compatible avec les structures de modules *via* le morphisme d'anneaux $\mathcal{O}_X(U) \rightarrow \mathcal{O}_X(V)$.

Définition C.5.5. — Soit (X, \mathcal{O}_X) un espace annelé. La *somme directe* de deux \mathcal{O}_X -modules \mathcal{F} et \mathcal{G} est un \mathcal{O}_X -module noté $\mathcal{F} \oplus \mathcal{G}$. Le *produit tensoriel* de deux \mathcal{O}_X -modules \mathcal{F} et \mathcal{G} est le faisceau noté $\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G}$ associé au préfaisceau $U \mapsto \mathcal{F}(U) \otimes_{\mathcal{O}_X(U)} \mathcal{G}(U)$, voir la proposition A.4.1 définissant le produit tensoriel de A -modules sur un anneau A .

Définition C.5.6 (Faisceau localement libre). — Soit (X, \mathcal{O}_X) un espace annelé. Un \mathcal{O}_X -module \mathcal{F} est *libre* s'il est isomorphe à une somme directe

$\mathcal{O}_X \oplus \mathcal{O}_X \oplus \dots$. Il est *localement libre* s'il existe un recouvrement de X par des ouverts U pour lesquels $\mathcal{F}|_U$ est un $\mathcal{O}_X|_U$ -module libre. Un tel ouvert U est un *ouvert trivialisant* \mathcal{F} . Le *rang* d'un \mathcal{O}_X -module localement libre sur un ouvert trivialisant est le nombre, fini ou infini, de copies de \mathcal{O}_X nécessaires. Un *faisceau d'idéaux* sur X est un \mathcal{O}_X -module \mathcal{I} qui est un sous-faisceau de \mathcal{O}_X .

Un \mathcal{O}_X -module \mathcal{F} est donc localement libre s'il existe un recouvrement ouvert de X et un ensemble I pour chaque ouvert U de ce recouvrement tel que

$$\mathcal{F}|_U \simeq \mathcal{O}_X^{(I)}|_U$$

où on a noté $\mathcal{O}_X^{(I)}$ la somme directe de copies de \mathcal{O}_X indexée par I .

Soit $r \geq 1$ un entier. Un \mathcal{O}_X -module \mathcal{F} est donc localement libre de rang r s'il existe un recouvrement de X par des ouverts U pour lesquels

$$\mathcal{F}|_U \simeq \mathcal{O}_X^r|_U$$

où on a noté \mathcal{O}_X^r la somme directe de r copies de \mathcal{O}_X . Plus généralement, le rang d'un faisceau localement libre étant constant sur les composantes connexes de X , un faisceau localement libre est *de type fini* s'il possède un rang fini sur chaque composante connexe de X .

Exemple C.5.7. — Soient (X, \mathcal{O}_X) un espace annelé et \mathcal{F} un \mathcal{O}_X -module. On définit l'*algèbre tensorielle* $T(\mathcal{F})$ (resp. l'*algèbre symétrique* $S(\mathcal{F})$, resp. l'*algèbre extérieure* $\Lambda(\mathcal{F})$) du \mathcal{O}_X -module \mathcal{F} en prenant le faisceau associé au préfaisceau $U \mapsto T(\mathcal{F}(U))$ (resp. $U \mapsto S(\mathcal{F}(U))$, resp. $U \mapsto \Lambda(\mathcal{F}(U))$) où les opérations tensorielles s'appliquent à la structure de $\mathcal{O}_X(U)$ -module de $\mathcal{F}(U)$, voir la définition A.4.8.

Si \mathcal{F} est localement libre de rang r , alors $T^k(\mathcal{F})$ (resp. $S^k(\mathcal{F})$, resp. $\Lambda^k(\mathcal{F})$) est aussi un faisceau localement libre de rang r^k (resp. $\binom{r+k-1}{r-1}$, resp. $\binom{r}{k}$).

Définition C.5.8 (Faisceau inversible). — Un *faisceau inversible* sur X est un faisceau localement libre de rang 1, c'est-à-dire qu'il existe un recouvrement de X par des ouverts U pour lesquels $\mathcal{F}|_U$ est isomorphe à $\mathcal{O}_X|_U$.

Proposition C.5.9. — Soient (X, \mathcal{O}_X) un espace annelé et \mathcal{F} un \mathcal{O}_X -module. Alors \mathcal{F} est un faisceau localement libre si et seulement si \mathcal{F}_x est un $\mathcal{O}_{X,x}$ -module libre pour tout $x \in X$.

Proposition C.5.10 (Formule de projection). — Soit $\varphi: (X, \mathcal{O}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$ un morphisme d'espace annelés. Si \mathcal{F} est un \mathcal{O}_X -module et \mathcal{E} est

un faisceau de \mathcal{O}_Y -modules localement libre de rang fini, alors il existe un isomorphisme naturel

$$\varphi_*(\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \varphi^* \mathcal{E}) \simeq \varphi_*(\mathcal{F}) \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{E} .$$

C.6. Faisceaux cohérents

Nous commençons par la définition la plus générale. Dans les cas qui nous intéressent, voir l'exemple C.6.8, nous verrons qu'un faisceau cohérent est un faisceau isomorphe au quotient d'un faisceau de modules localement libre de type fini.

Définition C.6.1 (Faisceau engendré par ses sections globales)

Soient (X, \mathcal{O}_X) un espace annelé et \mathcal{F} un \mathcal{O}_X -module. On dit que \mathcal{F} est *engendré par ses sections globales* en $x \in X$ si le morphisme canonique $\mathcal{F}(X) \otimes_{\mathcal{O}_X(X)} \mathcal{O}_{X,x} \rightarrow \mathcal{F}_x$ est surjectif. On dit que \mathcal{F} est *engendré par ses sections globales* si c'est le cas en tout point x de X .

Exemple C.6.2. — Soit (X, \mathcal{O}_X) un espace annelé. Soit I un ensemble, alors le faisceau $\mathcal{O}_X^{(I)}$ somme directe de copies de \mathcal{O}_X indexée par I est engendré par ses sections globales.

Lemme C.6.3. — Soit (X, \mathcal{O}_X) un espace annelé. Alors un \mathcal{O}_X -module \mathcal{F} est engendré par ses sections globales si et seulement s'il existe un ensemble I et un morphisme surjectif de \mathcal{O}_X -modules

$$\mathcal{O}_X^{(I)} \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow 0 .$$

Définition C.6.4 (Faisceau quasi-cohérent). — Soient (X, \mathcal{O}_X) un espace annelé et \mathcal{F} un \mathcal{O}_X -module. On dit que \mathcal{F} est *quasi-cohérent* si pour tout $x \in X$, il existe un voisinage ouvert U de x dans X et une suite exacte de \mathcal{O}_X -modules

$$\mathcal{O}_X^{(J)}|_U \rightarrow \mathcal{O}_X^{(I)}|_U \rightarrow \mathcal{F}|_U \rightarrow 0 .$$

Exemple C.6.5. — Soit (X, \mathcal{O}_X) un espace annelé.

1. Le faisceau structural \mathcal{O}_X est quasi-cohérent.
2. Tout \mathcal{O}_X -module localement libre est quasi-cohérent.
3. Tout faisceau d'idéaux est quasi-cohérent.

Définition C.6.6 (Faisceau de type fini). — Soient (X, \mathcal{O}_X) un espace annelé et \mathcal{F} un \mathcal{O}_X -module. On dit que \mathcal{F} est *de type fini* si pour tout $x \in X$, il existe un voisinage ouvert U de x dans X , un entier $r \geq 1$ et un morphisme surjectif de \mathcal{O}_X -modules

$$\mathcal{O}_X^r|_U \rightarrow \mathcal{F}|_U \rightarrow 0.$$

Définition C.6.7 (Faisceau cohérent). — Soient (X, \mathcal{O}_X) un espace annelé et \mathcal{F} un \mathcal{O}_X -module. On dit que \mathcal{F} est *cohérent* s'il est de type fini et si pour tout ouvert U de X , tout entier r et tout morphisme $\alpha: \mathcal{O}_X^r|_U \rightarrow \mathcal{F}|_U$, le noyau $\ker \alpha$ est de type fini.

Exemple C.6.8 (Faisceau structural). — 1. Le faisceau structural \mathcal{O}_X d'une variété algébrique (X, \mathcal{O}_X) sur un corps K algébriquement clos est cohérent.
 2. Le faisceau structural \mathcal{O}_X d'un schéma localement noethérien (X, \mathcal{O}_X) est cohérent.
 3. Le faisceau des germes de fonctions holomorphes sur une variété analytique complexe non singulière est cohérent, [Oka50].

Définition C.6.9 (Faisceau de présentation finie)

Soient (X, \mathcal{O}_X) un espace annelé et \mathcal{F} un \mathcal{O}_X -module. On dit que \mathcal{F} est *de présentation finie* si pour tout $x \in X$, il existe un voisinage ouvert U de x dans X , des entiers $r \geq 1$ et $c \geq 1$ et une suite exacte de \mathcal{O}_X -modules

$$\mathcal{O}_X^c|_U \rightarrow \mathcal{O}_X^r|_U \rightarrow \mathcal{F}|_U.$$

Tout faisceau cohérent est de présentation finie. La réciproque est vraie lorsque le faisceau structural est lui-même cohérent.

Proposition C.6.10. — *Soit (X, \mathcal{O}_X) un espace annelé. Si le faisceau \mathcal{O}_X est cohérent, alors un \mathcal{O}_X -module est cohérent si et seulement s'il est de présentation finie.*

Corollaire C.6.11. — *Soit (X, \mathcal{O}_X) un espace annelé de faisceau structural \mathcal{O}_X cohérent.*

1. *Tout \mathcal{O}_X -module localement libre de type fini (c'est-à-dire de rang fini sur tout ouvert trivialisant) est cohérent. En particulier tout \mathcal{O}_X -module localement libre de rang fini, et donc tout faisceau inversible, est cohérent.*

2. *Tout faisceau d'idéaux de type fini est cohérent. En particulier le faisceau d'idéaux des fonctions régulières s'annulant sur une sous-variété fermée d'une variété algébrique X de faisceau structural cohérent est cohérent.*

C.7. Variétés algébriques sur un corps algébriquement clos

Proposition C.7.1. — *Soit (X, \mathcal{O}_X) une variété algébrique sur un corps K algébriquement clos. Un faisceau de \mathcal{O}_X -modules \mathcal{F} est cohérent si et seulement s'il est de type fini et quasi-cohérent.*

Définition C.7.2 (\mathcal{O}_X -module associé à un $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ -module)

Soient X une variété algébrique affine sur un corps K algébriquement clos, $A := \mathcal{A}(X) = \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ l'anneau des coordonnées affines de X et M un A -module. On définit un \mathcal{O}_X -module \widetilde{M} sur les ouverts principaux de X (ces ouverts forment une base d'ouverts de X d'après l'exercice 1.3.15(3)). Soit $f \in A$ on pose $\widetilde{M}(\mathcal{D}(f)) = M_f = M \otimes_A A_f$. En particulier on a $\widetilde{M}(X) = \Gamma(X, \widetilde{M}) = M$.

Théorème C.7.3. — *Soit (X, \mathcal{O}_X) une variété algébrique sur un corps K algébriquement clos.*

Un faisceau de \mathcal{O}_X -modules \mathcal{F} est quasi-cohérent si et seulement si pour tout ouvert affine U de X , les $\mathcal{O}_X(U)$ -module $\mathcal{F}|_U$ et $\widetilde{\mathcal{F}(U)}$ sont isomorphes.

Il est cohérent si et seulement si les $\mathcal{O}_X(U)$ -module $\mathcal{F}|_U$ et $\widetilde{\mathcal{F}(U)}$ sont isomorphes et de type fini.

Théorème C.7.4. — *Soit (X, \mathcal{O}_X) une variété algébrique irréductible sur un corps K algébriquement clos. Alors Ω_X est un faisceau localement libre de rang $n = \dim X$ si et seulement si X est non singulière.*

Démonstration. — Voir [Har77, Theorem II.8.15]. □

Proposition C.7.5. — *Soient (X, \mathcal{O}_X) une variété algébrique sur un corps K algébriquement clos et \mathcal{F} un faisceau cohérent. Alors \mathcal{F} est un faisceau inversible si et seulement s'il existe un faisceau cohérent \mathcal{G} tel que $\mathcal{F} \otimes \mathcal{G} \simeq \mathcal{O}_X$.*

On renvoie à [Per95, III.7] pour d'autres propriétés des faisceaux quasi-cohérents sur un corps algébriquement clos.

APPENDICE D

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

Nous nous sommes inspiré du fameux article **GAGA** de Serre [Ser56] pour le début de cet appendice.

D.1. Espaces analytiques complexes, fonctions holomorphes

Définition D.1.1. — Un sous-ensemble U de \mathbf{C}^n est *analytique* s'il est localement lieu des zéros de fonctions holomorphes. Formellement : pour tout $x \in U$, il existe des fonctions f_1, \dots, f_k holomorphes dans un voisinage W de x , et telles que pour tout $z \in W$, z appartient à $U \cap W$ si et seulement si $f_i(z) = 0$, $i = 1 \dots k$. La restriction à U du faisceau des fonctions holomorphes \mathcal{H} sur \mathbf{C}^n est le faisceau, noté \mathcal{H}_U , des *fonctions holomorphes sur U* .

Un sous-ensemble analytique $U \subset \mathbf{C}^n$ est localement fermé dans \mathbf{C}^n , donc localement compact pour la topologie induite par celle de \mathbf{C}^n . Soit $x \in U$, l'anneau des germes $\mathcal{H}_{U,x}$ est isomorphe au quotient de \mathcal{H}_x par l'idéal de \mathcal{H}_x formé des germes de fonctions dont la restriction à U est nulle dans un voisinage de x .

Définition D.1.2. — Un *espace*⁽¹⁾ *analytique complexe* est un couple (X, \mathcal{O}_X) où X est un espace topologique et \mathcal{O}_X est un sous-faisceau du faisceau des fonctions sur X à valeurs dans \mathbf{C} ; ces deux données étant assujetties aux deux conditions suivantes.

1. En anglais, on dispose du terme *manifold* pour le cas non singulier. En français, le terme *variété* suppose que l'espace considéré est non singulier dans la catégorie des variétés topologiques, celle des variétés différentielles, celle des variétés analytiques mais pas dans la catégorie des variétés algébriques.

1. Il existe un recouvrement de l'espace X par des ouverts U_i tels que $(U_i, \mathcal{O}_X|_{U_i})$ est isomorphe comme espace annelé à un sous-ensemble analytique d'un \mathbf{C}^n muni de son faisceau des fonctions holomorphes.
2. La topologie sur X est séparée, voir la définition [B.1.1](#). Dans toutes les applications, on suppose de fait que l'espace topologique est à base dénombrable d'ouverts.

Le faisceau \mathcal{O}_X est appelé *faisceau des fonctions holomorphes* ou *faisceau des fonctions analytiques*.

Si X et Y sont des espaces analytiques complexes, un *morphisme* (ou *application analytique*) $\varphi: X \rightarrow Y$ est une application continue telle que pour tout ouvert $V \subset Y$ et toute fonction analytique $f: V \rightarrow K$, la fonction $f \circ \varphi: \varphi^{-1}(V) \rightarrow K$ est analytique.

Soit X un espace analytique, x un point de X , et \mathcal{O}_x l'anneau des germes de fonctions holomorphes sur X au point x ; cet anneau est une \mathbf{C} -algèbre locale : son unique idéal maximal \mathfrak{m} est formé des fonctions f nulles en x et $\mathcal{O}_x/\mathfrak{m} = \mathbf{C}$. Lorsque $X = \mathbf{C}^n$, l'algèbre $\mathcal{O}_x = \mathcal{H}_x$ n'est autre que l'algèbre $\mathbf{C}\{z_1, \dots, z_n\}$ des séries convergentes à n variables; dans le cas général, \mathcal{O}_x est isomorphe à une algèbre quotient $\mathbf{C}\{z_1, \dots, z_n\}/I$. Il en résulte que \mathcal{O}_x est un anneau noethérien. En particulier, pour que X soit isomorphe à \mathbf{C}^n au voisinage de x , il faut et il suffit que l'algèbre \mathcal{H}_x soit isomorphe à $\mathbf{C}\{z_1, \dots, z_n\}$, c'est-à-dire que \mathcal{O}_x soit un anneau local régulier (définition [1.5.32](#)) de dimension n . Un espace analytique dont tout point est régulier est appelé *variété analytique*, voir la définition [D.2.1](#) et la remarque [D.2.2](#).

Toute variété algébrique complexe (X, \mathcal{O}_X) est naturellement munie d'une structure d'espace analytique complexe (X^h, \mathcal{O}_X^h) où X^h est l'ensemble sous-jacent à l'espace X muni de la topologie euclidienne et \mathcal{O}_X^h est le faisceau des fonctions holomorphes associé à \mathcal{O}_X , c'est-à-dire que pour tout $x \in X$, $\mathcal{O}_{X,x}^h$ est le sous-anneau analytique de l'anneau des germes en x de fonctions à valeurs complexes engendré par $\mathcal{O}_{X,x}$. Une propriété essentielle de cette construction est que les complétés des anneaux locaux $\mathcal{O}_{X,x}$ et $\mathcal{O}_{X,x}^h$ sont isomorphes pour tout $x \in X$. [[Ser56](#), pages 9–11].

Théorème D.1.3 (Théorème de finitude de Cartan-Serre)

Soit (X, \mathcal{O}_X) un espace analytique compact et \mathcal{F} un faisceau cohérent sur X . Alors le \mathbf{C} -espace vectoriel $H^i(X, \mathcal{F})$ est de dimension finie pour tout $i \geq 0$ et

$$H^i(X, \mathcal{F}) = \{0\} \quad \text{pour tout } i > \dim_{\mathbf{C}} X .$$

Démonstration. — Voir [CS53] ou [BHPVdV04, Theorem 8.3]. \square

D.2. Variétés analytiques complexes

Définition D.2.1. — Une *variété analytique complexe* ⁽²⁾ est un espace analytique (X, \mathcal{O}_X) qui est localement isomorphe à \mathbf{C}^n . Si X et Y sont des variétés analytiques complexes, un *morphisme* (ou *application holomorphe*) $\varphi: X \rightarrow Y$ est une application continue telle que pour tout ouvert $V \subset Y$ et toute fonction holomorphe $f: V \rightarrow K$, la fonction $f \circ \varphi: \varphi^{-1}(V) \rightarrow K$ est holomorphe.

Remarque D.2.2. — Un espace analytique est donc une variété analytique si et seulement s'il est non singulier.

Variétés de Stein. — Nous renvoyons le lecteur intéressé à [GR79] pour la définition originale des variétés de Stein et nous nous contentons ici d'en donner une définition équivalente d'après le théorème de plongement pour les variétés de Stein [*Ibid.*].

Définition D.2.3. — Une variété analytique complexe est une *variété de Stein* si elle admet un plongement holomorphe propre dans un espace affine \mathbf{C}^n .

Rappelons qu'une variété algébrique V est *affine* si elle est isomorphe à une sous-variété fermée d'un espace affine.

Exemple D.2.4. — La variété analytique complexe sous-jacente à une variété algébrique affine non singulière sur \mathbf{C} est une variété de Stein.

En revanche la réciproque est fautive. Il existe des variétés algébriques non singulières qui sont de Stein sans être affines. Voir par exemple [Nee89] pour des développements à ce sujet.

Dualité de Serre. —

Théorème D.2.5 (Dualité de Serre). — Soient X une variété complexe projective non singulière de dimension n et \mathcal{L} un fibré vectoriel holomorphe sur X , alors

$$H^k(X, \mathcal{L}) \simeq H^{n-k}(X, \mathcal{L}^\vee \otimes \mathcal{K}_X).$$

En particulier

$$\chi(\mathcal{L}) = \chi(\mathcal{L}^\vee \otimes \mathcal{K}_X).$$

2. On trouve parfois *variété holomorphe* dans la littérature.

Démonstration. — Voir [Ser55b] pour la démonstration originale ou [Har77, Chapter III, Corollary 7.7] pour une version en géométrie algébrique. \square

D.3. Variétés kählériennes, théorie de Hodge

Pour une étude détaillée, on renvoie à [Voi02, Chapitre III].

Définition D.3.1. — Soit X une variété analytique complexe de dimension n . On note \mathcal{T}_X le *fibré tangent holomorphe* de X , il s'agit du fibré tangent réel $T_{X,\mathbf{R}}$ à la variété différentielle sous-jacente muni de la structure complexe héritée de la structure analytique de X .

Le fibré \mathcal{T}_X est isomorphe au sous-fibré $T_X^{1,0} \subset T_{X,\mathbf{C}} = T_{X,\mathbf{R}} \otimes \mathbf{C}$ formé des champs de vecteurs holomorphes, voir plus loin.

Définition D.3.2. — Le dual du fibré tangent holomorphe \mathcal{T}_X est le *fibré des formes holomorphes* $\Omega_X := \Omega_X^1 = \mathcal{T}_X^\vee$. Le *fibré des p -formes holomorphes* sur X est défini par $\Omega_X^p := \wedge^p \Omega_X$. Le *fibré canonique* de X est le fibré holomorphe en droites complexes

$$\mathcal{K}_X := \bigwedge^n \mathcal{T}_X^\vee = \Omega_X^n = \det \Omega_X .$$

Théorème D.3.3. — Soit n un entier positif non nul. On a une suite exacte de faisceaux sur $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$:

$$0 \rightarrow \Omega_{\mathbf{P}^n(\mathbf{C})} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbf{P}^n(\mathbf{C})}(-1) \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{P}^n(\mathbf{C})}(-1) \xrightarrow{n+1 \text{ termes}} \mathcal{O}_{\mathbf{P}^n(\mathbf{C})} \rightarrow 0$$

où $\mathcal{O}_{\mathbf{P}^n(\mathbf{C})}(-1)$ est le fibré tautologique, voir la section F.1 ou la définition 2.6.14.

Démonstration. — Voir [Har77, Theorem 2.8.13] pour une preuve en géométrie algébrique. \square

Une *métrique hermitienne* sur une variété holomorphe X est une famille \mathcal{C}^∞ de produits scalaires hermitiens sur chaque espace tangent holomorphe, c'est-à-dire une section $h \in \Gamma^\infty \left(X, \left(T_X^{1,0} \otimes \overline{T_X^{1,0}} \right)^* \right)$ telle que

1. $h_x(u, \bar{v}) = \overline{h_x(v, \bar{u})}$ pour tout $x \in X$ et pour tous vecteurs $u, v \in T_x^{1,0}$;
2. $h_x(u, \bar{u}) > 0$ pour tout vecteur non nul $u \in T_x^{1,0}$.

Une métrique hermitienne h sur une variété holomorphe X détermine une métrique riemannienne g sur la sous-variété différentielle sous-jacente, c'est la partie réelle de h :

$$g = \frac{1}{2}(h + \bar{h}).$$

La forme g est une forme bilinéaire symétrique sur le fibré complexifié $T_{X,\mathbf{C}} = T_{X,\mathbf{R}} \otimes \mathbf{C}$. Comme g est égale à sa conjuguée, c'est la complexification d'une forme bilinéaire symétrique réelle sur $T_{X,\mathbf{R}}$.

La métrique h détermine aussi une $(1, 1)$ -forme $\omega = -\Im(h) = \frac{i}{2}(h - \bar{h})$. Pour la même raison que précédemment, ω est la complexification d'une forme réelle sur le fibré tangent réel $T_{X,\mathbf{R}}$.

Définition D.3.4 (Variétés kählériennes). — Une variété *kählérienne*, ou *variété de Kähler*, est une variété analytique complexe (non singulière donc) munie d'une métrique hermitienne h telle que la 2-forme $\omega = -\Im(h)$ est fermée. La métrique h est alors une *métrique de Kähler*, ou *métrique kählérienne* sur X et la forme ω est une *forme de Kähler* sur X .

Remarque D.3.5. — La forme ω étant non dégénérée et fermée, c'est une forme symplectique. Une variété kählérienne est donc naturellement une variété symplectique.

Exemple D.3.6. — La variété analytique sous-jacente à une variété algébrique complexe projective non singulière est kählérienne. En effet, les espaces projectifs complexes sont kählériens. Un tel espace est muni de la *métrique de Fubini-Study* qui est kählérienne. On considère la fibration de Hopf $\mathbf{S}^{n+1} \rightarrow \mathbf{CP}^n$ dont les fibres sont des grands cercles de \mathbf{S}^{n+1} . La métrique sphérique sur \mathbf{S}^{n+1} est la restriction de la métrique euclidienne de l'espace ambiant \mathbf{R}^{n+2} . Elle est invariante sous l'action du groupe des rotations, identifié à \mathbf{S}^1 . La métrique de Fubini-Study sur $\mathbf{CP}^n = \mathbf{S}^{n+1}/\mathbf{S}^1$ est alors la métrique induite par la métrique sphérique de \mathbf{S}^{n+1} . On renvoie à [Voi02, 3.3.2] pour plus de détails sur cette métrique, et notamment son expression en coordonnées. Par restriction de la métrique de Fubini-Study, toute variété analytique complexe projective est une variété kählérienne compacte.

Exemple D.3.7 (Autres exemples de variétés kählériennes)

1. Toute courbe analytique complexe non singulière, c'est-à-dire toute surface de Riemann, voir l'appendice E, est kählérienne (et même projective si elle est compacte, voir théorème E.2.28). En effet, en dimension complexe 1, toute 2-forme est fermée.

2. Toute surface K3 est kählérienne, d'après le théorème de Siu, voir [Siu83] ou [X85].
3. L'espace euclidien complexe \mathbf{C}^n est kählérien pour la métrique hermitienne standard.
4. Par passage au quotient, tout tore complexe \mathbf{C}^n/Γ , où Γ est un réseau dans \mathbf{R}^{2n} , est kählérien.

Théorie de Hodge. — On peut se référer aux deux premiers chapitres de [GH78, Chapitre 0] pour cette sous-section.

Soit X une variété analytique complexe de dimension n . Pour $a \in X$, on note un système de coordonnées analytiques centrées en a par $z = (z_1, z_2, \dots, z_n)$. On a trois notions d'espace tangent en a .

1. *Tangent réel.* On note $T_{\mathbf{R},a}$ le tangent réel usuel pour la structure de variété \mathcal{C}^∞ de X , on le réalise comme l'espace des dérivations \mathbf{R} -linéaires de l'anneau des germes de fonctions \mathcal{C}^∞ à valeurs réelles, *i. e.* en écrivant les coordonnées $z_j = x_j + iy_j$ au voisinage de a , on a

$$T_{\mathbf{R},a} = \mathbf{R}\left\{\frac{\partial}{\partial x_j}, \frac{\partial}{\partial y_j}\right\}.$$

2. *Tangent complexe.* On note $T_{\mathbf{C},a} = T_{\mathbf{R},a} \otimes \mathbf{C}$ le tangent complexifié. On peut le voir comme l'espace des dérivations \mathbf{C} -linéaires de l'anneau des germes de fonctions \mathcal{C}^∞ à valeurs complexes

$$T_{\mathbf{C},a} = \mathbf{C}\left\{\frac{\partial}{\partial x_j}, \frac{\partial}{\partial y_j}\right\} = \mathbf{C}\left\{\frac{\partial}{\partial z_j}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j}\right\};$$

où

$$\frac{\partial}{\partial z_j} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_j} - i\frac{\partial}{\partial y_j}\right); \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_j} + i\frac{\partial}{\partial y_j}\right).$$

3. Décomposition de $T_{\mathbf{C},a}$. On définit $T_a^{1,0} = \mathbf{C}\left\{\frac{\partial}{\partial z_j}\right\} \subset T_{\mathbf{C},a}$ l'espace *tangent holomorphe* en a . On peut le caractériser comme le sous-espace de $T_{\mathbf{C},a}$ formé des dérivations qui s'annulent pour les fonctions f anti-holomorphes (c'est-à-dire telles que \bar{f} soit holomorphe). L'espace $T_a^{1,0}$ est donc indépendant du choix des coordonnées en a . On note $T_a^{0,1} = \mathbf{C}\left\{\frac{\partial}{\partial \bar{z}_j}\right\}$ le tangent anti-holomorphe. On a une décomposition en somme directe

$$(D.1) \quad T_{\mathbf{C},a} = T_a^{1,0} \oplus T_a^{0,1}.$$

On remarque que $T_{\mathbf{C},a}$ est muni d'une structure réelle par définition. La conjugaison

$$\frac{\partial}{\partial z_j} \mapsto \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j}$$

est donc bien définie et on a

$$T_a^{0,1} = \overline{T_a^{1,0}}.$$

On note $A^k(X, \mathbf{R})$ l'espace des k -formes différentielles à valeurs réelles sur X et $Z^k(X, \mathbf{R}) \subset A^k(X, \mathbf{R})$ le sous-espace des formes fermées. On note aussi $A(X, \mathbf{R}) := \bigoplus_k A^k(X, \mathbf{R})$ l'espace de toutes les formes différentielles. De même, $A^k(X, \mathbf{C})$ est l'espace des k -formes à valeurs complexes, $Z^k(X, \mathbf{C})$ son sous-espace des formes fermées et $A(X, \mathbf{C}) := \bigoplus_k A^k(X, \mathbf{C})$. Les groupes de cohomologie de De Rham de X sont alors définis par :

$$H_{\text{DR}}^k(X, \mathbf{R}) = \frac{Z^k(X, \mathbf{R})}{dA^{k-1}(X, \mathbf{R})};$$

$$H_{\text{DR}}^k(X, \mathbf{C}) = \frac{Z^k(X, \mathbf{C})}{dA^{k-1}(X, \mathbf{C})}.$$

Remarque D.3.8. — On a $H_{\text{DR}}^k(X, \mathbf{C}) = H_{\text{DR}}^k(X, \mathbf{R}) \otimes \mathbf{C}$.

D'après (D.1), on a une décomposition du cotangent

$$T_{\mathbf{C},a}^* = (T_a^{1,0})^* \oplus (T_a^{0,1})^*$$

pour chaque $a \in X$. On en déduit une décomposition de l'algèbre extérieure

$$\bigwedge^k T_{\mathbf{C},a}^* = \bigoplus_{p+q=k} \left(\bigwedge^p (T_a^{1,0})^* \otimes \bigwedge^q (T_a^{0,1})^* \right).$$

On pose

$$A^{p,q}(X) := \left\{ \varphi \in A^k(X, \mathbf{C}) \mid \varphi(a) \in \bigwedge^p (T_a^{1,0})^* \otimes \bigwedge^q (T_a^{0,1})^*, \forall a \in X \right\}$$

et on a

$$(D.2) \quad A^k(X, \mathbf{C}) = \bigoplus_{p+q=k} A^{p,q}(X).$$

Le résultat fondamental de Hodge est d'établir la décomposition correspondante pour la cohomologie lorsque la variété X est kählérienne compacte.

Une forme différentielle $\varphi \in A^{p,q}(X)$ est dite *de type* (p, q) . On note $\pi^{p,q}: A(X, \mathbf{C}) \rightarrow A^{p,q}(X)$ les projections. Soit φ une forme différentielle de type (p, q) . On a pour tout $a \in X$,

$$d\varphi(a) \in \left(\bigwedge^p (T_a^{1,0})^* \otimes \bigwedge^q (T_a^{0,1})^* \right) \wedge T_{\mathbf{C},a}^*,$$

c'est-à-dire

$$d\varphi \in A^{p+1,q}(X) \oplus A^{p,q+1}(X) .$$

On définit les opérateurs

$$\bar{\partial}: A^{p,q}(X) \rightarrow A^{p,q+1}(X) \quad , \quad \partial: A^{p,q}(X) \rightarrow A^{p+1,q}(X)$$

par

$$\bar{\partial} = \pi^{(p,q+1)} \circ d \quad , \quad \partial = \pi^{(p+1,q)} \circ d .$$

On a alors

$$d = \partial + \bar{\partial} .$$

Soit $Z_{\bar{\partial}}^{p,q}(X)$ l'espace des formes $\bar{\partial}$ -fermées de type (p, q) . Du fait que $\bar{\partial}^2 = 0$ sur $A^{p,q}(X)$, on peut définir les groupes de cohomologie de Dolbeault

$$H_{\bar{\partial}}^{p,q}(X) = \frac{Z_{\bar{\partial}}^{p,q}(X)}{\bar{\partial}A^{p,q-1}(X)} .$$

Soit $Z^{p,q}(X)$ l'espace des formes différentielles à valeurs complexes fermées de type (p, q) , on définit aussi

$$H^{p,q}(X) = \frac{Z^{p,q}(X)}{dA(X, \mathbf{C}) \cap Z^{p,q}(X)} .$$

Théorème de De Rham. — On rappelle que $H^*(X; \mathbf{R})$ désigne la cohomologie singulière de X à valeurs dans \mathbf{R} . C'est aussi la cohomologie à valeurs dans le faisceau constant \mathbf{R} . Soient φ une p -forme fermée et σ le bord d'une $(p+1)$ -chaîne τ . Le théorème de Stokes donne

$$\int_{\sigma} \varphi = \int_{\tau} d\varphi = 0 .$$

La p -forme φ définit donc un p -cocycle singulier. De plus pour toute p -forme φ et pour tout p -cycle σ , on a

$$\forall \eta \in A^{p-1}(X, \mathbf{R}), \quad \int_{\sigma} \varphi = \int_{\sigma} \varphi + d\eta .$$

On a donc une application $H_{DR}^*(X, \mathbf{R}) \rightarrow H^*(X; \mathbf{R})$ qui est en fait un isomorphisme d'après le théorème suivant :

Théorème D.3.9 (De Rham). — Soit X une variété C^∞ . On a un isomorphisme

$$H_{DR}^*(X, \mathbf{R}) \simeq H^*(X; \mathbf{R}) .$$

Pour le prouver, on utilise une résolution fine du faisceau constant \mathbf{R} . On note \mathcal{A}^p le faisceau des germes de p -formes \mathcal{C}^∞ sur X . La suite

$$0 \rightarrow \mathbf{R} \hookrightarrow \mathcal{A}^0 \xrightarrow{d} \mathcal{A}^1 \xrightarrow{d} \mathcal{A}^2 \xrightarrow{d} \dots$$

est exacte grâce au lemme de Poincaré qui dit que toute forme fermée est localement exacte :

Lemme D.3.10. — *Soit α une forme de degré d de classe \mathcal{C}^1 sur X avec $d > 0$. Si $d\alpha = 0$, alors pour tout ouvert contractile U de X , il existe une forme β de degré $d - 1$ de classe \mathcal{C}^1 sur U telle que $\alpha|_U = d\beta$.*

Démonstration. — Voir [GH78, Section 0.2, page 25] ou [Voi02, Proposition 2.31]. \square

Cette suite se scinde en une liste de suites exactes courtes ($d\mathcal{A}^p$ désigne le faisceau des p -formes fermées).

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \mathbf{R} \hookrightarrow \mathcal{A}^0 \xrightarrow{d} d\mathcal{A}^0 \rightarrow 0 \\ 0 \rightarrow d\mathcal{A}^0 \hookrightarrow \mathcal{A}^1 \xrightarrow{d} d\mathcal{A}^1 \rightarrow 0 \\ \vdots \\ 0 \rightarrow d\mathcal{A}^{p-2} \hookrightarrow \mathcal{A}^{p-1} \xrightarrow{d} d\mathcal{A}^{p-1} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Les suites de cohomologie associées se scindent car $H^q(X, \mathcal{A}^p) = 0$ pour tout q non nul et on obtient

$$\begin{aligned} H^p(X; \mathbf{R}) & \simeq H^{p-1}(X, d\mathcal{A}^0) \\ & \simeq H^{p-2}(X, d\mathcal{A}^1) \\ & \vdots \\ & \simeq H^1(X, d\mathcal{A}^{p-2}) \\ & \simeq \frac{H^0(X, d\mathcal{A}^{p-1})}{dH^0(X, \mathcal{A}^{p-1})} \\ & = \frac{\Gamma(d\mathcal{A}^{p-1})}{d\Gamma(\mathcal{A}^{p-1})} \\ & = H_{\text{DR}}^p(X, \mathbf{R}). \end{aligned}$$

Théorème de Dolbeault. — On rappelle que Ω^p est le faisceau des germes de p -formes holomorphes sur X et $H^q(X, \Omega^p)$ le q -ième groupe de cohomologie à valeurs dans ce faisceau.

Théorème D.3.11 (Dolbeault). — Soit X une variété analytique complexe, on a

$$H^q(X, \Omega_X^p) \simeq H_{\bar{\partial}}^{p,q}(X)$$

On note $\mathcal{A}_X^{p,q}$ le faisceau sur X des formes \mathcal{C}^∞ de type (p, q) . On a une résolution fine du faisceau Ω_X^p

$$0 \rightarrow \Omega_X^p \hookrightarrow \mathcal{A}_X^{p,0} \xrightarrow{\bar{\partial}} \mathcal{A}_X^{p,1} \xrightarrow{\bar{\partial}} \dots$$

Cette suite est exacte par le lemme de Poincaré pour $\bar{\partial}$ qui dit qu'une forme $\bar{\partial}$ -fermée est localement $\bar{\partial}$ -exacte :

Lemme D.3.12. — Soit α une forme de type (p, q) de classe \mathcal{C}^1 sur X avec $q > 0$. Si $\bar{\partial}\alpha = 0$, alors pour tout ouvert contractile U de X , il existe une forme β de type $(p, q-1)$ de classe \mathcal{C}^1 sur U telle que $\alpha|_U = \bar{\partial}\beta$.

Démonstration. — Voir [GH78, Section 0.2, page 25] ou [Voi02, Proposition 2.31]. \square

Le reste de la démonstration se calque sur la précédente.

Décomposition de Hodge. — Il nous reste à montrer que la décomposition (D.2) page 441, passe à la cohomologie lorsque la variété X est kählérienne compacte. On ne connaît pas de démonstration algébrique de ce fait, la preuve utilise une méthode transcendante. Le plan de la démonstration est le suivant. Chaque classe de cohomologie dans $H_{\text{DR}}^*(X, \mathbf{C})$ est représentée par une forme harmonique unique ; c'est le théorème de Hodge. D'autre part, comme X est kählérienne, les formes harmoniques se décomposent $\mathcal{H}^r = \bigoplus_{p+q=r} \mathcal{H}^{p,q}$.

Commençons par introduire les formes harmoniques. De la métrique hermitienne donnée sur X , on tire un produit hermitien, noté (\cdot, \cdot) , qui fait de $A^{p,q}(X)$ un espace préhilbertien. On montre que c'est même un espace de Hilbert et on introduit le laplacien $\Delta_{\bar{\partial}}$ pour répondre à la question :

Une forme $\psi \in Z_{\bar{\partial}}^{p,q}(X)$ étant donnée, peut-on trouver, dans la classe de cohomologie $[\psi] \in H_{\bar{\partial}}^{p,q}(X)$ de ψ un représentant de norme minimale ?

On peut montrer que $\bar{\partial}$ est un opérateur borné sur $A^{p,q}(X)$. Ceci permet d'introduire son adjoint $\bar{\partial}^* : A^{p,q}(X) \rightarrow A^{p,q-1}(X)$ défini par

$$\forall \eta \in A^{p,q-1}(X), \quad (\bar{\partial}^* \psi, \eta) = (\psi, \bar{\partial} \eta) .$$

On montre alors que ψ est de norme minimale dans $\psi + \bar{\partial}A^{p,q-1}$ si et seulement si

$$\bar{\partial}^*\psi = 0 .$$

Les éléments du groupe $H_{\bar{\partial}}^{p,q}(X)$ sont donc représentés par les solutions du système du second ordre

$$\bar{\partial}\psi = 0 , \quad \bar{\partial}^*\psi = 0 .$$

On introduit le laplacien pour remplacer ce système par une seule équation

$$\Delta_{\bar{\partial}} = \bar{\partial}\bar{\partial}^* + \bar{\partial}^*\bar{\partial} .$$

En effet d'une part, il est clair que $\bar{\partial}\psi = \bar{\partial}^*\psi = 0$ implique $\Delta_{\bar{\partial}}\psi = 0$; d'autre part, l'identité

$$(\Delta_{\bar{\partial}}\psi, \psi) = (\bar{\partial}\bar{\partial}^*\psi, \psi) + (\bar{\partial}^*\bar{\partial}\psi, \psi) = |\bar{\partial}^*\psi|^2 + |\bar{\partial}\psi|^2$$

permet de conclure pour la réciproque.

Une forme ψ vérifiant $\Delta_{\bar{\partial}}\psi = 0$ est dite harmonique. On note \mathcal{H}^r l'espace des formes harmoniques de degré r et $\mathcal{H}^{p,q}(X)$ l'espace des formes harmoniques de type (p, q) .

Théorème D.3.13 (Hodge). — *Soit X une variété analytique complexe compacte. Alors*

1. $\dim \mathcal{H}^{p,q}(X) < \infty$.
2. *La projection orthogonale*

$$\mathcal{H}: A^{p,q}(X) \rightarrow \mathcal{H}^{p,q}(X)$$

est bien définie et il existe un opérateur unique, l'opérateur de Green,

$$G: A^{p,q}(X) \rightarrow A^{p,q}(X)$$

tel que

$$G(\mathcal{H}^{p,q}(X)) = 0 , \quad \bar{\partial}G = G\bar{\partial} , \quad \bar{\partial}^*G = G\bar{\partial}^*$$

et

$$Id = \mathcal{H} + \Delta G \quad \text{sur} \quad A^{p,q}(X) .$$

Cette équation s'écrit aussi $\forall \psi \in A^{p,q}(X)$,

$$\psi = \mathcal{H}(\psi) + \bar{\partial}(\bar{\partial}^*G\psi) + \bar{\partial}^*(\bar{\partial}G\psi) .$$

On obtient donc pour $\psi \in Z_{\bar{\partial}}^{p,q}(X)$, l'identité $\psi = \mathcal{H}(\psi) + \bar{\partial}(\bar{\partial}^*G\psi)$ car $\bar{\partial}G\psi = G\bar{\partial}\psi = 0$. D'où un isomorphisme

$$H_{\bar{\partial}}^{p,q}(X) \simeq \mathcal{H}^{p,q} .$$

On introduit aussi l'opérateur $\Delta_d = dd^* + d^*d$ et la condition de Kähler implique alors que $\Delta_d = 2\Delta_{\bar{\partial}}$. On en déduit le résultat suivant :

Proposition D.3.14. — *Si X est kählérienne, les espaces vectoriels complexes $H_{\bar{\partial}}^{p,q}(X)$ et $H^{p,q}(X)$ sont isomorphes.*

Pour la même raison, toujours si X est kählérienne, le laplacien $\Delta_{\bar{\partial}}$ est un opérateur réel, d'où $\mathcal{H}^{q,p} = \overline{\mathcal{H}^{p,q}}$. De plus, étant réel, $\Delta_{\bar{\partial}}$ commute avec les projections $\pi^{p,q}$ et on a

$$\mathcal{H}^r(X) \simeq \bigoplus_{p+q=r} \mathcal{H}^{p,q}(X).$$

Corollaire D.3.15. — *Soit X une variété kählérienne compacte. On a une décomposition en somme directe*

$$H^r(X; \mathbf{C}) \simeq \bigoplus_{p+q=r} H^{p,q}(X)$$

qui satisfait

$$\overline{H^{p,q}(X)} = H^{q,p}(X).$$

Démonstration. — Par le théorème de De Rham, on sait que $H_{\text{DR}}^*(X, \mathbf{C}) \simeq H_{\text{DR}}^*(X, \mathbf{R}) \otimes \mathbf{C} \simeq H^*(X; \mathbf{R}) \otimes \mathbf{C} \simeq H^*(X; \mathbf{C})$. D'où le corollaire. \square

La dualité de Poincaré induit un isomorphisme

$$H^{n-k}(X; \mathbf{C}) \simeq H^k(X; \mathbf{C}).$$

En passant aux formes harmoniques, on montre qu'il est compatible avec la décomposition de Hodge d'où l'isomorphisme (que l'on peut montrer directement par la dualité de Serre, théorème D.2.5, voir la remarque D.4.2) :

$$H^{n-p,n-q}(X) \simeq H^{p,q}(X).$$

Conséquences. — a) Si $q = 0$, $H^{p,0}(X) \simeq H_{\bar{\partial}}^{p,0}(X) \simeq H^0(X, \Omega^p)$ qui est l'espace des p -formes holomorphes globales sur X . Une forme holomorphe est donc harmonique pour n'importe quelle métrique de Kähler sur une variété compacte.

b) Les nombres de Betti de degrés impairs sont pairs. En effet, si on note $b_k(X) = \dim_{\mathbf{C}} H^k(X; \mathbf{C})$ les nombres de Betti de X et $h^{p,q}(X) = \dim H^{p,q}(X)$ les nombres de Hodge de X , on a

$$b_k(X) = \sum_{p+q=k} h^{p,q}(X); \quad h^{p,q}(X) = h^{q,p}(X).$$

Donc si $k = 2q + 1$, on a $b_k(X) = 2 \sum_{p=0}^q h^{p,2q+1-p}(X)$.

c) On organise les groupes de cohomologie de X en un diagramme qu'on appelle le diamant de Hodge (traduction volontairement erronée de « Hodge diamond »), voir la figure D.1.

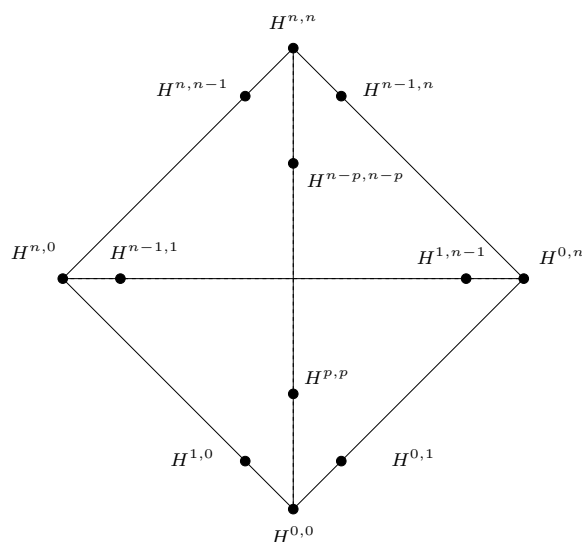


FIGURE D.1. Diamant de Hodge.

Le k -ième groupe de cohomologie est la somme directe des groupes de la k -ième ligne horizontale. On a une symétrie centrale $h^{n-p,n-q} = h^{p,q}$ et une symétrie par rapport à l'axe vertical central $h^{q,p} = h^{p,q}$.

Pour une surface connexe ($n = 2$) cela donne un diagramme où $q = h^{0,1}$ est l'irrégularité de la surface et $p_g = h^{0,2}$ son genre géométrique, voir la définition D.4.1.

$$\begin{array}{ccccc}
 & & 1 & & \\
 & & q & q & \\
 & & p_g & h^{1,1} & p_g \\
 & & q & q & \\
 & & 1 & &
 \end{array}$$

Exemple D.3.16. — Calcul de la cohomologie d'une surface de Riemann compacte S de genre g .

$$\begin{aligned} b_0 = b_2 = h^{0,0} = h^{1,1} = 1 ; \\ h^{1,0} = h^{0,1} = \dim H^0(S, \Omega^1) = g \text{ d'où } b_1 = 2g . \end{aligned}$$

L'existence de la décomposition de Hodge a une conséquence importante pour les \mathbf{R} -variétés.

Lemme D.3.17. — Soit (X, σ) une \mathbf{R} -variété kählérienne compacte. Alors si on note σ^* l'action induite par σ sur $H^*(X; \mathbf{C}) = H^*(X; \mathbf{Q}) \otimes_{\mathbf{Q}} \mathbf{C}$, on a

$$\sigma^* H^{p,q}(X) = H^{q,p}(X) .$$

Démonstration. — Voir [Sil89, Lemma I.(2.4) page 10]. □

D.4. Invariants numériques

Définition D.4.1. — Soit (X, \mathcal{O}_X) une variété analytique complexe compacte (par exemple l'espace analytique sous-jacent à une variété algébrique complexe projective non singulière) de dimension n .

Le *genre géométrique* de X est $p_g(X) := \dim H^n(X, \mathcal{O}_X)$. L'*irrégularité* de X est $q(X) := \dim H^1(X, \mathcal{O}_X)$. Les *nombre de Hodge* de X sont $h^{p,q}(X) := \dim H^q(X, \Omega_X^p)$.

Remarque D.4.2. — Par dualité de Serre, théorème D.2.5, appliquée au fibré en droites $\mathcal{O}_X = \Omega_X^0$, on a $p_g(X) = \dim H^0(X, \mathcal{K}_X) = \dim H^0(X, \Omega_X^n)$. En remarquant que $(\Omega_X^p)^\vee \otimes \mathcal{K}_X = \Omega_X^{n-p}$, voir par exemple [Har77, II, Exercice 5.16b], la dualité de Serre appliquée aux fibrés vectoriels Ω_X^p donne plus généralement $h^{p,q}(X) = h^{n-p, n-q}(X)$ pour tout p, q . Si X est une variété kählérienne, les nombres de Hodge satisfont de plus $h^{p,q}(X) = h^{q,p}(X)$ pour tout p, q .

Définition D.4.3 (Nombres de Chern d'une surface complexe)

Soit (X, \mathcal{O}_X) une variété analytique complexe compacte de dimension 2. Les *nombre de Chern* de X sont donnés par :

$$c_1^2(X) := c_1^2(\mathcal{K}_X) = (K_X^2) \text{ et } c_2(X) := \chi_{\text{top}}(X) = \sum_{k=0}^4 (-1)^k b_k(X) .$$

Exemple D.4.4 (Invariants numériques d'une surface de \mathbf{P}^3)

Soit X une hypersurface complexe non singulière de degré d dans $\mathbf{P}^3(\mathbf{C})$, on a alors les formules suivantes, voir par exemple [GH78, pages 601–602] :

$$\begin{aligned}
b_1(X) &= 0 ; \\
b_2(X) &= d^3 - 4d^2 + 6d - 2 ; \\
c_2(X) &= d^3 - 4d^2 + 6d ; \\
h^{0,2}(X) &= \frac{1}{6}(d-1)(d-2)(d-3) ; \\
h^{1,1}(X) &= \frac{1}{3}d(2d^2 - 6d + 7) .
\end{aligned}$$

Exemple D.4.5 (Invariants numériques d'un plan double)

D'après par exemple [BHPVdV04, V.22, page 237], on peut calculer les invariants numériques d'un revêtement double X de \mathbf{P}^2 ramifié au-dessus d'une courbe irréductible non singulière de degré $2k$ (une partie des formules ci-dessous est aussi prouvée dans [Wil78, §5, page 65–66]) :

$$\begin{aligned}
q(X) &= 0, \quad b_1(X) = 0 ; \\
h^{0,2}(X) &= 1 + \frac{1}{2}k(k-3) = \frac{1}{2}(k-1)(k-2) ; \\
c_1^2(X) &= 2(k-3)^2 ; \\
c_2(X) &= \chi_{top}(X) = 4k^2 - 6k + 6 .
\end{aligned}$$

On en déduit que

$$h^{1,1}(X) = c_2(X) - 2 - 2h^{0,2}(X) = 3k^2 - 3k + 2 .$$

Définition D.4.6 (Dimension algébrique). — Soit X une variété analytique complexe compacte connexe. La *dimension algébrique* de X est le degré de transcendance sur \mathbf{C} du corps des fonctions méromorphes de X :

$$a(X) := \text{trdeg}_{\mathbf{C}} \mathcal{M}(X) .$$

Cette définition est valide du fait que le corps des fonctions méromorphes d'une variété analytique complexe compacte connexe X est un corps de fonctions sur \mathbf{C} (définition A.5.8), voir [BHPVdV04, §I.7].

Proposition D.4.7. — *La dimension algébrique est un invariant biméromorphe.*

Définition D.4.8 (Dimension de Kodaira). — Soit X une variété analytique complexe compacte connexe. Soit $m \geq 1$, le nombre

$P_m(X) := \dim H^0(X, \mathcal{K}_X^{\otimes m})$ est le m^e plurigenre de X . En particulier, $P_1(X) = p_g(X)$. La dimension de Kodaira de X est définie comme suit :

$$\kappa(X) := \begin{cases} -\infty & \text{si } P_m(X) = 0 \text{ pour tout } m \geq 1 ; \\ k \geq 0 & \text{est le plus petit entier tel que la suite } \left\{ \frac{P_m(X)}{m^k} \right\}_m \text{ soit bornée.} \end{cases}$$

Proposition D.4.9. — La dimension de Kodaira est un invariant biméromorphe (et donc birationnel dans le cas de surfaces projectives).

Démonstration. — Voir [Ibid.]. □

Remarque D.4.10. — Soit X une variété analytique complexe compacte connexe. Alors, voir [Ibid.],

$$\kappa(X) \leq a(X) \leq \dim X .$$

En particulier, la dimension de Kodaira $\kappa(X)$ d'une variété complexe compacte X de dimension n prend les valeurs $-\infty, 0, 1, \dots, n$.

Définition D.4.11. — Une variété complexe compacte X (resp. une \mathbf{R} -surface (X, σ)) de dimension n est de type général si $\kappa(X) = n$, de type spécial si $\kappa(X) < n$.

Proposition D.4.12. — Soit X et Y des variétés analytiques complexes compactes connexes. Alors

$$\kappa(X \times Y) = \kappa(X) + \kappa(Y) .$$

Démonstration. — Voir [Uen75, page 63]. □

Théorème D.4.13 (Conjecture d'Itaka $C_{2,1}$). — Soient X une surface analytique complexe compacte connexe, Y une courbe compacte connexe et $\pi: X \rightarrow Y$ une fibration, autrement dit π est une application holomorphe surjective propre, mais cette dernière hypothèse est superflue dans le cas où X est compacte. Si X est minimale, on a

$$\kappa(X) \geq \kappa(Y) + \kappa(\text{fibre générale de } \pi) .$$

Démonstration. — Voir [BHPVdV04, Theorem III.18.4]. □

D.5. Variétés projectives

Contrairement au cas des courbes complexes compactes, traitées en appendice E, les variétés complexes compactes de dimension $n \geq 2$ ne sont pas toutes projectives et même pas toutes kählériennes. En revanche, toute variété analytique complexe projective est algébrique, c'est le célèbre théorème de Chow.

Théorème D.5.1 (Théorème de Chow). — *Soit X un sous-ensemble d'un espace projectif complexe. Si X est un sous-espace analytique fermé, alors X est une sous-variété algébrique.*

Démonstration. — Voir [GR65, Section V.D, Theorem 7]. □

Corollaire D.5.2. — *Soit X une variété analytique complexe compacte. Alors X peut être munie d'une structure de variété algébrique projective si et seulement s'il existe un plongement analytique $X \hookrightarrow \mathbf{P}^N(\mathbf{C})$ dans un espace projectif complexe.*

À un faisceau algébrique cohérent \mathcal{F} sur une variété algébrique complexe X est associé naturellement un faisceau analytique cohérent \mathcal{F}^h sur X^h voir [Ser56, §3, 9]. Les trois théorèmes qui suivent sont les fameux « théorèmes GAGA » qui signifient que, si X est projective, alors la théorie des faisceaux analytiques cohérents sur X^h coïncide essentiellement avec celle des faisceaux algébriques cohérents sur X . Ils sont valables sous l'hypothèse « X projective » et sont inexacts pour une variété affine. On renvoie à [Ser56, §3, 12] pour leurs preuves.

Théorème D.5.3. — *Soient X une variété algébrique complexe projective et \mathcal{F} un faisceau algébrique cohérent sur X . Pour tout entier $i \geq 0$, il existe un isomorphisme*

$$H^i(X, \mathcal{F}) \simeq H^i(X^h, \mathcal{F}^h).$$

Théorème D.5.4. — *Soient X une variété algébrique complexe projective, \mathcal{F} et \mathcal{G} des faisceaux algébriques cohérents sur X . Tout homomorphisme analytique de \mathcal{F}^h dans \mathcal{G}^h provient d'un homomorphisme algébrique de \mathcal{F} dans \mathcal{G} et d'un seul.*

Théorème D.5.5. — *Soient X une variété algébrique complexe projective. Pour tout faisceau analytique cohérent \mathcal{M} sur X^h , il existe un faisceau algébrique cohérent \mathcal{F} sur X tel que \mathcal{F}^h soit isomorphe à \mathcal{M} . De plus, cette propriété détermine \mathcal{F} de façon unique à un isomorphisme près.*

D.6. Variété de Picard, variété d'Albanese

De manière analogue à la définition 2.6.7, on définit les diviseurs de Cartier d'une variété analytique complexe X . Soit $U \subset X$ un ouvert pour la topologie euclidienne et $f \in \mathcal{M}_X(U)$ une fonction méromorphe sur U . Par définition, il existe un ouvert dense $V \subset U$ tel que $\forall p \in V$, $f(p) = \frac{g(p)}{h(p)}$ pour $g, h \in \mathcal{O}_X(V)$. Attention, en général il existe un lieu d'indétermination qui est de codimension 2.

Définition D.6.1. — Le faisceau quotient $\mathcal{D}_X = \mathcal{M}_X^*/\mathcal{O}_X^*$ est le faisceau des diviseurs de X donné par la suite exacte

$$1 \longrightarrow \mathcal{O}_X^* \longrightarrow \mathcal{M}_X^* \longrightarrow \mathcal{D}_X \longrightarrow 1$$

où \mathcal{O}_X^* est le faisceau des germes de fonctions holomorphes qui ne s'annulent pas et \mathcal{M}_X^* le faisceau des germes de fonctions méromorphes non identiquement nulles. Un *diviseur de Cartier* est une section globale du faisceau quotient \mathcal{D}_X . Un *diviseur principal* est le diviseur associé à une fonction méromorphe globale.

Soit $U \subset X$ un ouvert (toujours pour la topologie euclidienne) et $D = (U_i, f_i)_i \in \text{Div}(X) = \Gamma(U, \mathcal{M}_X^*/\mathcal{O}_X^*)$ un diviseur donné relativement à un recouvrement ouvert $\{V_i\}_i$ de U . Cela signifie qu'il existe des germes de fonctions holomorphes $g_i, h_i \in \mathcal{O}(V_i)$ tels que

$$f_i = \frac{g_i}{h_i} \quad \text{et} \quad \frac{g_i}{h_i} \cdot \left(\frac{g_j}{h_j} \right)^{-1} \in \mathcal{O}^*(V_i \cap V_j).$$

Proposition D.6.2. — Soit X une variété algébrique complexe projective non singulière, alors le groupe des diviseurs modulo équivalence linéaire est isomorphe au groupe de Picard des classes d'isomorphisme de fibrés holomorphes en droites (comparer à la définition 2.6.11) :

$$\text{Div}(X)/\mathcal{P}(X) \simeq H^1(X, \mathcal{O}^*) \simeq \text{Pic}(X).$$

Démonstration. — Voir [Hir66, Chapter I] ou [GH78, §1.1]. □

Proposition D.6.3. — Dans la suite exacte longue

$$\rightarrow H^1(X, \mathcal{O}_X) \rightarrow H^1(X, \mathcal{O}_X^*) \xrightarrow{\delta} H^2(X; \mathbf{Z}) \rightarrow H^2(X, \mathcal{O}_X) \rightarrow$$

associée à la suite exacte de l'exponentielle (voir l'exemple C.3.15)

$$0 \rightarrow \mathbf{Z} \xrightarrow{\text{incl.}} \mathcal{O}_X \xrightarrow{\exp(2\pi i \cdot)} \mathcal{O}_X^* \rightarrow 0,$$

le morphisme cobord $\delta: H^1(X, \mathcal{O}_X^*) \rightarrow H^2(X; \mathbf{Z})$ s'identifie à l'application première classe de Chern $c_1: \text{Pic}(X) \rightarrow H^2(X; \mathbf{Z})$.

Démonstration. — Voir [Hir66, Chapter I] ou [GH78, §1.1]. \square

Proposition D.6.4. — Soient (X, σ) une \mathbf{R} -variété et $G = \text{Gal}(\mathbf{C}|\mathbf{R})$. La suite exacte de l'exponentielle

$$0 \rightarrow \mathbf{Z} \xrightarrow{\text{incl.}} \mathcal{O}_X \xrightarrow{\exp(2\pi i \cdot)} \mathcal{O}_X^* \rightarrow 0$$

devient une suite de G -faisceaux si l'on prend soin de « tordre » le faisceau constant \mathbf{Z} en faisant agir G par $\sigma \cdot n = -n$.

Soit $d \in \text{Pic}(X)$, on a

$$c_1(\sigma^*(d)) = -\sigma^*(c_1(d)) .$$

Démonstration. — Le passage à la suite exacte longue

$$\rightarrow H^1(X, \mathcal{O}_X) \rightarrow H^1(X, \mathcal{O}^*) \xrightarrow{c_1} H^2(X; \mathbf{Z}) \rightarrow$$

nous permet d'écrire que pour toute classe de diviseurs $d \in H^1(X, \mathcal{O}^*)$, on a

$$c_1(\sigma^*(d)) = -\sigma^*(c_1(d)) .$$

Voir [Sil89, I.(4.7)] pour plus de détails. \square

Proposition D.6.5. — Soit (X, σ) une \mathbf{R} -variété projective non singulière telle que $p_g(X) = 0$ et $q(X) = 0$. Alors $c_1: \text{Pic}(X) \rightarrow H^2(X; \mathbf{Z})$ induit un isomorphisme de \mathbf{Z}_2 -espaces vectoriels

$$H^2(G, \text{Pic}(X)) \simeq H^1(G, H_2(X; \mathbf{Z})) .$$

Démonstration. — Voir [Sil89, I.(4.7–4.12) et III.(3.3–3.4)]. \square

Variété de Picard. —

Définition D.6.6. — Soit X une variété kählérienne compacte connexe (par exemple une variété complexe projective non singulière). La variété de Picard $\text{Pic}^0(X) \subset \text{Pic}(X)$ de X est le noyau du morphisme $c_1: \text{Pic}(X) \rightarrow H^2(X; \mathbf{Z})$.

D'après la proposition 2.6.12, le groupe quotient $\text{Pic}(X)/\text{Pic}^0(X)$ est donc isomorphe à un sous-groupe de $H^2(X; \mathbf{Z})$, le groupe de Néron-Severi $\text{NS}(X)$ de X , voir la définition 2.6.34.

Proposition D.6.7. — Si $q(X) > 0$, $\text{Pic}^0(X)$ est un tore complexe et même une variété abélienne si X est projective (non singulière).

Démonstration. — Voir [BHPVdV04, § I.13]. \square

Si X est munie d'une structure réelle, la suite exacte

$$(D.3) \quad 0 \rightarrow H^1(X; \mathbf{Z}) \xrightarrow{i^*} H^1(X, \mathcal{O}_X) \rightarrow \text{Pic}^0(X) \rightarrow 0$$

induit une structure réelle sur le tore quotient

$$\text{Pic}^0(X) = H^1(X, \mathcal{O}_X) / i^*(H^1(X; \mathbf{Z}))$$

en « tordant » l'action de Galois sur le faisceau constant \mathbf{Z} comme pour la suite exacte de l'exponentielle de la proposition D.6.4. Voir [Sil82, II.8] ou [Sil89, IV.1] pour plus de détails.

Proposition D.6.8. — Soit (X, σ) une \mathbf{R} -variété projective non singulière d'irrégularité $q > 0$. Alors la variété de Picard $\text{Pic}^0(X)$ est munie d'une structure de \mathbf{R} -variété induite, $\text{Pic}^0(X)^G = \text{Pic}^0(X)(\mathbf{R})$ est un groupe de Lie réel compact et l'on a :

$$\text{Pic}^0(X)^G = \text{Pic}^0(X)(\mathbf{R}) \simeq (\mathbf{R}/\mathbf{Z})^q \times (\mathbf{Z}/2)^{q-\lambda_1}$$

où $\lambda_1 := \dim_{\mathbf{Z}_2}(1 + \sigma_*)H^1(X; \mathbf{Z}_2)$ est la caractéristique de Comessatti du module involutif $(H^1(X; \mathbf{Z}), \sigma_*)$, voir la définition 3.1.3.

Démonstration. — Voir [Sil82, II.8] ou [Sil89, IV.1]. □

Remarque D.6.9. — On déduit de la dualité de Poincaré que $\dim_{\mathbf{Z}_2}(1 + \sigma_*)H^1(X; \mathbf{Z}_2) = \dim_{\mathbf{Z}_2}(1 + \sigma_*)(H_1(X; \mathbf{Z})_f \otimes \mathbf{Z}_2)$ c'est-à-dire que les caractéristiques de Comessatti des modules involutifs $(H^1(X; \mathbf{Z}), \sigma_*)$ et $(H_1(X; \mathbf{Z})_f, \sigma_*)$ sont égales.

Variété d'Albanese. — Voir [BHPVdV04, § I.13] par exemple. Considérons une variété kählérienne compacte connexe X (par exemple une variété complexe projective non singulière) telle que $q(X) \neq 0$. Soient $\omega_1, \dots, \omega_q$ des formes holomorphes formant une base de l'espace vectoriel complexe $H^0(X, \Omega_X)$ des formes différentielles holomorphes globales sur X . Alors $\omega_1, \dots, \omega_q, \bar{\omega}_1, \dots, \bar{\omega}_q$ est une base de $H^1(X; \mathbf{C})$ d'après le théorème D.3.11 et le corollaire D.3.15. On note $H_1(X; \mathbf{Z})_f := H_1(X; \mathbf{Z}) / \text{Tor}(H_1(X; \mathbf{Z}))$ la partie libre de $H_1(X; \mathbf{Z})$. Considérons maintenant une base $\gamma_1, \dots, \gamma_{2q}$ une base du \mathbf{Z} -module libre $H_1(X; \mathbf{Z})_f$. Les vecteurs

$$v_j = \begin{pmatrix} \int_{\gamma_j} \omega_1 \\ \vdots \\ \int_{\gamma_j} \omega_q \end{pmatrix} \in \mathbf{C}^q \quad \text{pour } j = 1, \dots, 2q$$

sont alors \mathbf{R} -linéairement indépendants et engendrent donc un *réseau* de \mathbf{C}^q . Le morphisme de groupes $H_1(X; \mathbf{Z})_f \rightarrow H^0(X, \Omega_X)^*$, $\gamma \mapsto (\omega \mapsto \int_\gamma \omega)$ est donc injectif.

Définition D.6.10. — Soit X une variété kählérienne compacte connexe (par exemple une variété complexe projective non singulière). La *variété d'Albanese* de X est définie par la suite exacte :

$$(D.4) \quad 0 \rightarrow H_1(X; \mathbf{Z})_f \rightarrow H^0(X, \Omega_X)^* \rightarrow \text{Alb}(X) \rightarrow 0 .$$

Autrement dit $\text{Alb}(X)$ est le *conoyau* de $H_1(X; \mathbf{Z})_f \rightarrow H^0(X, \Omega_X)^*$.

Sous nos hypothèses, si $q(X) \neq 0$, la variété $\text{Alb}(X)$ est un tore complexe de dimension $q(X)$. Si de plus X est munie d'une structure réelle σ , la suite exacte (D.4) induit sur $\text{Alb}(X)$ une structure réelle. Voir [Sil82, II.5] ou [Sil89, IV.1] pour plus de détails. Si X est projective, alors $\text{Alb}(X)$ est une variété abélienne, voir [Voi02, Corollaire 12.12].

Proposition D.6.11. — Soit (X, σ) une \mathbf{R} -variété kählérienne d'irrégularité $q > 0$. Alors la variété d'Albanese $\text{Alb}(X)$ est munie d'une structure de \mathbf{R} -variété induite, $\text{Alb}(X)^G = \text{Alb}(X)(\mathbf{R})$ est un groupe de Lie réel compact et l'on a :

$$\text{Alb}(X)^G = \text{Alb}(X)(\mathbf{R}) \simeq (\mathbf{R}/\mathbf{Z})^q \times (\mathbf{Z}/2)^{q-\lambda_1}$$

où $\lambda_1 := \dim_{\mathbf{Z}_2}(1 + \sigma_*)(H_1(X; \mathbf{Z})_f \otimes \mathbf{Z}_2)$ est la caractéristique de Comessatti du module involutif $(H_1(X; \mathbf{Z})_f, \sigma_*)$, voir la définition 3.1.3.

Démonstration. — Voir [Sil82, II.5] ou [Sil89, IV.1]. □

Remarque D.6.12. — Les tores complexes $\text{Alb}(X)$ et $\text{Pic}^0(X)$ associés à une même variété kählérienne compacte X sont isomorphes mais en général, les \mathbf{R} -variétés associées à une même \mathbf{R} -variété kählérienne compacte (X, σ) ne le sont pas. Si on note $\sigma_{\text{Alb}(X)}$ et $\sigma_{\text{Pic}^0(X)}$ les structure réelles associées à σ , alors la \mathbf{R} -variété $(\text{Alb}(X), \sigma_{\text{Alb}(X)})$ est isomorphe à la \mathbf{R} -variété $(\text{Pic}^0(X), -\sigma_{\text{Pic}^0(X)})$. Voir [Sil82, II.8, après le lemme 3].

Définition D.6.13. — Soient X une variété kählérienne compacte connexe d'irrégularité $q(X) \neq 0$ et P_0 un point de X . On définit l'*application d'Albanese* :

$$\alpha_{P_0} : X \rightarrow \text{Alb}(X), P \mapsto \left(\begin{array}{c} \int_{P_0}^P \omega_1 \\ \vdots \\ \int_{P_0}^P \omega_q \end{array} \right) \text{ mod } (v_1, \dots, v_{2q}) .$$

Si X est munie d'une structure réelle σ et si $P_0 \in X(\mathbf{R})$, α_{P_0} est un \mathbf{R} -morphisme voir [*Ibid.*].

D.7. Théorème de Riemann-Roch

RR sur les courbes. — Le théorème de Riemann-Roch sur les diviseurs d'une courbe abstraite [E.3.1](#), se généralise aux fibrés de rang r sur une courbe plongée dans une variété projective non singulière X .

Théorème D.7.1. — *Si $C \subset X$ une courbe (qui n'est supposée ni non singulière, ni réduite, ni irréductible) sur une variété projective non singulière X et \mathcal{F} un \mathcal{O}_C -faisceau localement libre de rang r . Alors*

$$\begin{aligned}\chi(\mathcal{F}) &= \deg(\mathcal{F}) + r\chi(\mathcal{O}_C) ; \\ h^0(C, \mathcal{F}) - h^1(C, \mathcal{F}) &= \deg(\mathcal{F}) + r(1 - p_a(C)) .\end{aligned}$$

Si \mathcal{F} un fibré vectoriel de rang r sur une courbe irréductible non singulière C , on a

$$h^0(C, \mathcal{F}) - h^1(C, \mathcal{F}) = \int_C c_1(\mathcal{F}) + r(1 - g(C)) .$$

Démonstration. — Voir [[BHPVdV04](#), Theorem II.3.1]. □

RR sur les surfaces. — Voir aussi le théorème [4.1.18](#).

Théorème D.7.2. — *Si X une surface projective non singulière et D un diviseur sur X , alors*

$$h^0(D) - h^1(D) + h^0(K_X - D) = \frac{1}{2}D \cdot (D - K_X) + \chi(\mathcal{O}_X)$$

où $\chi(\mathcal{O}_X)$ est la caractéristique d'Euler holomorphe de X .

Démonstration. — Voir [[BHPVdV04](#), Theorem I.5.5] ou [[Har77](#), Theorem V.1.6] pour une preuve en géométrie algébrique. □

D.8. Théorèmes d'annulation

On renvoie à [[EV92](#)] pour une discussion approfondie à propos des théorèmes d'annulations, c'est-à-dire des théorèmes donnant des conditions suffisantes pour l'annulation de groupes de cohomologie des faisceaux cohérents ⁽³⁾. Nous en énonçons deux parmi les plus importants.

3. La cohomologie des faisceaux appliquée aux faisceaux cohérents est aussi appelée *cohomologie cohérente*.

Théorème D.8.1 (Théorème d'annulation de Serre)

Soient X une variété algébrique projective non singulière sur un corps K algébriquement clos, \mathcal{L} est un faisceau inversible sur X et \mathcal{F} un faisceau cohérent sur X . Si \mathcal{L} est ample, alors il existe un entier naturel m_0 tel que :

$$H^i(X, \mathcal{F} \otimes \mathcal{L}^m) = \{0\} \quad \text{pour } i > 0 \text{ et } m \geq m_0 .$$

En particulier, pour $\mathcal{F} = \mathcal{O}_X$, on obtient l'annulation de $H^i(X, \mathcal{L}^m)$ pour $i > 0$ et m suffisamment grand.

Théorème D.8.2 (Théorème d'annulation de Kodaira)

Soient X une variété complexe projective non singulière de dimension n et \mathcal{L} un faisceau inversible sur X . Si \mathcal{L} est ample, alors :

1. $H^i(X, \mathcal{L} \otimes \mathcal{K}_X) = \{0\}$ pour $i > 0$;
2. $H^i(X, \mathcal{L}^{-1}) = \{0\}$ pour $i < n$.

Remarquons que par dualité de Serre, les égalités (1) et (2) sont équivalentes. La preuve originale est dans [Kod53].

D.9. Autres théorèmes fondamentaux

Théorème D.9.1 (Théorème de Bertini). — Soient $N \geq n \geq 2$ des entiers positifs non nuls, X une sous-variété analytique complexe de dimension n de $\mathbf{P}^N(\mathbf{C})$. Si X est connexe, alors un hyperplan $H \subset \mathbf{P}^N(\mathbf{C})$ général, c'est-à-dire pris en dehors d'un sous-ensemble algébrique strict de $\mathbf{P}^N(\mathbf{C})^\vee$, rencontre X transversalement et l'hypersurface $X \cap H$ est non singulière.

Démonstration. — Voir [BHPVdV04, Corollary I.20.3] et [GH78, 1.1, page 137]. □

Théorème D.9.2 (Lefschetz sur les sections hyperplanes)

Soient $N \geq n \geq 2$ des entiers positifs non nuls, X une sous-variété analytique complexe de dimension n de $\mathbf{P}^N(\mathbf{C})$ et $H \subset \mathbf{P}^N(\mathbf{C})$ un hyperplan tel que $X \cap H$ est une variété non singulière. Alors les morphismes d'inclusion

$$H_i(X \cap H; \mathbf{Z}) \rightarrow H_i(X; \mathbf{Z}) \quad \text{et} \quad \pi_i(X \cap H, \mathbf{Z}) \rightarrow \pi_i(X, \mathbf{Z})$$

sont des isomorphismes pour $0 \leq i \leq n - 2$.

Démonstration. — Voir [Mil63a]. □

Soit X une variété kählérienne compacte. Alors, d'après le corollaire [D.3.15](#), on a une décomposition $H^2(X; \mathbf{C}) = H^{2,0}(X) \oplus H^{1,1}(X) \oplus H^{0,2}(X)$.

L'image de l'application première classe de Chern $c_1: \text{Pic}(X) \rightarrow H^2(X; \mathbf{Z})$ est formée de classes de formes entières de type $(1, 1)$, voir [\[Voi02, §I.7.1\]](#). Ce qui est résumé dans [\[GH78, §1.2\]](#) en écrivant, un peu abusivement, que cette image est contenue dans l'« intersection » $H^{1,1}(X) \cap H^2(X; \mathbf{Z})_f$. Pour donner un sens à cette écriture, on peut considérer l'inclusion $H^2(X; \mathbf{Z})_f \rightarrow H^2(X; \mathbf{C})$ obtenue comme composée de l'isomorphisme $H^2(X; \mathbf{Z})_f \simeq \text{Hom}(H_2(X; \mathbf{Z}), \mathbf{Z})$, voir le théorème [B.4.1](#), avec le morphisme injectif de \mathbf{Z} -modules $\text{Hom}(H_2(X; \mathbf{Z}), \mathbf{Z}) \hookrightarrow \text{Hom}(H_2(X; \mathbf{Z}), \mathbf{C})$ induit par l'unique morphisme d'anneaux $\mathbf{Z} \hookrightarrow \mathbf{C}$.

Théorème D.9.3 (Lefschetz sur les $(1, 1)$ -cycles)

Soit X une variété kählérienne compacte. L'application première classe de Chern $c_1: \text{Pic}(X) \rightarrow H^2(X; \mathbf{Z})$ est surjective sur l'intersection $H^{1,1}(X) \cap H^2(X; \mathbf{Z})_f$.

Démonstration. — La preuve originale utilise les *fonctions normales* de Poincaré, voir [\[Lef71\]](#) qui reproduit le fameux *L'Analysis situs et la géométrie algébrique* de 1924. Voici une preuve basée sur la suite exacte de l'exponentielle (voir la proposition [D.6.3](#)) :

$$0 \rightarrow \mathbf{Z} \xrightarrow{i} \mathcal{O}_X \xrightarrow{\exp(2\pi i)} \mathcal{O}_X^* \rightarrow 0 .$$

La suite exacte longue est

$$\rightarrow H^1(X, \mathcal{O}_X) \rightarrow H^1(X, \mathcal{O}_X^*) \xrightarrow{c_1} H^2(X; \mathbf{Z}) \xrightarrow{i^*} H^2(X, \mathcal{O}_X) \rightarrow .$$

Dans cette suite exacte de \mathbf{Z} -modules, on utilise le fait que $H^1(X, \mathcal{O}_X^*)$ est isomorphe à $\text{Pic}(X)$ et que $H^2(X, \mathcal{O}_X)$ est isomorphe au \mathbf{Z} -module libre $H^{0,2}(X)$. L'application i^* est nulle sur le sous-groupe de torsion de $H^2(X; \mathbf{Z})$ et se factorise par l'inclusion $H^2(X; \mathbf{Z})_f \rightarrow H^2(X; \mathbf{C})$, voir ci-dessus, suivie de la projection $H^2(X; \mathbf{C}) \rightarrow H^{0,2}(X)$. La restriction de i^* à $H^{1,1}(X) \cap H^2(X; \mathbf{Z})_f$ est donc nulle ce qui montre l'assertion. Voir aussi [\[Voi02, I.7.9\]](#). \square

Théorème D.9.4 (Théorème de plongement de Kodaira)

Soit (X, \mathcal{O}_X) une variété analytique complexe compacte. Alors X est isomorphe à une variété projective non singulière (qui sera algébrique d'après le théorème de Chow) si et seulement si elle possède une métrique de Hodge, c'est-à-dire une métrique de Kähler dont la classe $\omega \in H^2(X; \mathbf{R})$ est entière. Et dans ce cas $\omega \in H^2(X; \mathbf{Z}) \cap H^{1,1}(X)$.

Démonstration. — Voir [Kod54, Theorem 4] ou [GH78, 1.4].

□

APPENDICE E

SURFACES DE RIEMANN ET COURBES ALGÈBRIQUES

On reprend dans cet appendice les résultats de base sur les surfaces de Riemann qui sont des objets centraux en géométrie.

E.1. Genre d'une surface, classification topologique

Dans ce livre, les surfaces topologiques apparaissent dans deux contextes très différents :

1. Comme surface topologique sous-jacente à une courbe algébrique complexe. Dans ce cas, le mot « courbe » se réfère à la dimension algébrique. Ici cette dimension correspond à la dimension complexe, alors que le mot « surface » se réfère à la dimension réelle. Par exemple, \mathbf{R}^2 est la surface topologique sous-jacente à la courbe complexe \mathbf{C} . La surface topologique sous-jacente à la droite projective complexe $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ est la sphère \mathbf{S}^2 .
2. Comme lieu réel d'une surface algébrique définie sur \mathbf{R} . Par exemple, \mathbf{R}^2 est le lieu réel de la surface algébrique \mathbf{C}^2 . Le lieu réel de la surface quadrique $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ est la sphère \mathbf{S}^2 .

Il convient de bien distinguer les deux situations.

Définition E.1.1. — Une surface topologique S est un espace topologique séparé localement homéomorphe à \mathbf{R}^2 , c'est-à-dire que pour tout $x \in S$, il existe un couple (U, φ) , où U est un voisinage ouvert de x dans S et $\varphi: U \rightarrow \mathbf{R}^2$ est un homéomorphisme.

Définition E.1.2. — Le genre $g := g(S)$ d'une surface topologique S est défini comme le nombre maximal de courbes simples fermées (= cercles plongés) sans points communs $\sqcup C_i \subset S$ que l'on peut tracer sur S sans la déconnecter :

1. $\forall i, j, \quad i \neq j \Rightarrow C_i \cap C_j = \emptyset$
2. $S \setminus \sqcup C_i$ est connexe.

Proposition E.1.3. — Soient S, S' deux surfaces topologiques. S'il existe un homéomorphisme (= continu, bijectif et de morphisme réciproque continu)

$$f: S \rightarrow S',$$

alors $g(S) = g(S')$.

Définition E.1.4. — La caractéristique d'Euler-Poincaré χ d'un polyèdre dont les ensembles de faces, d'arrêtes et de sommets sont notés respectivement F , A et S est définie par la formule :

$$\chi = \#F - \#A + \#S.$$

On renvoie à la proposition E.1.10 plus loin pour une caractérisation de l'orientabilité utilisant la structure de variété différentielle que possède une surface. On renvoie à la définition B.5.3 pour une définition de l'orientabilité n'utilisant que sa structure de variété topologique.

Retenons qu'une surface S est orientable si et seulement si toute courbe fermée simple contenue dans S possède un voisinage tubulaire trivial, c'est-à-dire homéomorphe à un ruban $\mathbf{S}^1 \times [-1, 1]$. A contrario S est non orientable si et seulement si elle possède une courbe simple fermée dont un voisinage tubulaire est homéomorphe à un ruban de Möbius, voir aussi le lemme 3.4.4.

Comme il existe au moins deux définitions irréconciliables pour le genre d'une surface non orientable dans la littérature, il est utile de préciser les relations entre caractéristique d'Euler-Poincaré du polyèdre sous-jacent à une surface (dont l'existence est garantie par un théorème de Radó de 1925, voir par exemple [Mas67, Chapitre 1]) et genre tel que défini en E.1.2 :

Proposition E.1.5. — Soit S une surface topologique munie d'une décomposition polyédrale. On a les relations suivantes :

1. Si S est orientable,

$$\chi(S) = 2 - 2g(S).$$

2. Si S est non-orientable,

$$\chi(S) = 2 - g(S).$$

En particulier, la caractéristique d'Euler-Poincaré d'une surface ne dépend pas de la décomposition polyédrale choisie.

Par exemple, la bouteille de Klein \mathbf{K}^2 est non-orientable et de caractéristique d'Euler nulle, elle possède un genre 2 alors que le tore, lui aussi de caractéristique nulle mais orientable, est de genre 1.

Théorème E.1.6 (Classification des surfaces compactes)

Soient S, S' deux surfaces topologiques compactes sans bord connexes. Supposons que les deux surfaces soient orientables (resp. toutes les deux non orientables). Alors

$$g(S) = g(S') \iff S \text{ homéomorphe à } S'.$$

Plus généralement, deux surfaces topologiques compactes connexes sont homéomorphes si et seulement si elles sont toutes les deux orientables (resp. toutes les deux non orientables), ont même caractéristique d'Euler et même nombre de composantes connexes de bord.

Pour une preuve, voir [Mas67, Chapitre 1]. On peut aussi raisonner à partir de [FK80].

Définition E.1.7. — Une variété différentielle de dimension 2 est une surface topologique S munie d'un atlas maximal \mathcal{A} dont les fonctions de transition sont des difféomorphismes.

Formellement :

1. $\forall x \in S, \exists (U, \varphi) \in \mathcal{A}, U$ voisinage ouvert de x dans $S, \varphi: U \rightarrow \mathbf{R}^2$ est un homéomorphisme,
2. $\forall (U_1, \varphi_1), (U_2, \varphi_2) \in \mathcal{A}, U_1 \cap U_2 \neq \emptyset \Rightarrow$
 $\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}$ est \mathcal{C}^∞ de $\varphi_2(U_1 \cap U_2) \subset \mathbf{R}^2$ sur $\varphi_1(U_1 \cap U_2) \subset \mathbf{R}^2$.
 $\Leftrightarrow \varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}|_{\varphi_2(U_1 \cap U_2)} \in \mathcal{C}^\infty(\varphi_2(U_1 \cap U_2))$.

En pratique, on ne fixe pas l'atlas maximal, n'importe quel recouvrement ouvert de S par des cartes vérifiant la condition (2) de la définition convient.

On renvoie au classique [Laf96] (maintenant traduit en anglais [Laf15]), pour une introduction aux variétés différentielles.

Convention : sauf mention expresse du contraire, les fonctions de transitions d'une variété différentielle seront supposées de classe \mathcal{C}^∞ mais ces définitions s'appliqueraient aux fonctions de classe \mathcal{C}^k pour k entier naturel non nul. Lorsque $k = 0$, on retrouve les surfaces topologiques.

Remarque E.1.8. — En dimension réelle 2, toute variété topologique est munie d'une unique structure de variété différentielle de classe \mathcal{C}^∞ , voir par

exemple [Hir76, Chapter 9], et tout homéomorphisme entre variétés topologiques admet une approximation par des difféomorphismes de classe C^∞ .

Exercice E.1.9. — On peut remplacer le point (1) de la définition par

1. $\forall x \in S, \exists (U, \varphi) \in \mathcal{A}, U$ voisinage ouvert de x dans S , $\varphi: U \rightarrow \mathbf{R}^2$ est un homéomorphisme de U sur $\varphi(U) \subset \mathbf{R}^2$.

[Indication : Une boule ouverte de \mathbf{R}^n est difféomorphe à \mathbf{R}^n .]

Proposition E.1.10. — Une surface différentielle est orientable si et seulement si elle possède un atlas \mathcal{A} dont les fonctions de transition préservent l'orientation, c'est-à-dire

$$\forall (U_1, \varphi_1), (U_2, \varphi_2) \in \mathcal{A}, U_1 \cap U_2 \neq \emptyset \Rightarrow \forall x \in U_1 \cap U_2, \det d_x(\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}) > 0$$

Démonstration. — Voir [Hir76, §4.4]. □

On note $[S]$ la classe d'orientabilité d'une surface S .

Corollaire E.1.11. — Soient S, S' deux surfaces différentielles compactes et connexes. On a l'équivalence :

$$S \text{ difféomorphe à } S' \Leftrightarrow g(S) = g(S') \text{ et } [S] = [S']$$

Exercice E.1.12. — Montrer que le tore produit $S^1 \times S^1 \subset \mathbf{R}^4$ est difféomorphe à un tore de révolution dans \mathbf{R}^3 en exhibant un difféomorphisme explicite.

E.2. Courbes complexes, surfaces de Riemann

Pour des énoncés et démonstrations détaillés sur les surfaces de Riemann, voir [FK80, Chapitre 1]. Si U est un ouvert de \mathbf{C} , on note $\mathcal{H}(U)$ l'anneau des fonctions holomorphes $U \rightarrow \mathbf{C}$.

Définition E.2.1 (Comparer avec la définition D.1.2)

Une courbe analytique complexe ou *surface de Riemann* X est un espace topologique séparé localement homéomorphe à \mathbf{C} , muni d'un atlas maximal \mathcal{A} dont les fonctions de transition sont holomorphes.

Formellement :

1. $\forall x \in X, \exists (U, \varphi) \in \mathcal{A}, U$ voisinage ouvert de x dans X , $\varphi: U \rightarrow \mathbf{C}$ est un homéomorphisme de U sur $\varphi(U) \subset \mathbf{C}$,

2. $\forall (U_1, \varphi_1), (U_2, \varphi_2) \in \mathcal{A}, U_1 \cap U_2 \neq \emptyset \Rightarrow$
 $\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}$ est holomorphe sur $\varphi_2(U_1 \cap U_2) \subset \mathbf{C}$ [d'image $\varphi_1(U_1 \cap U_2)$].
 $\Leftrightarrow \varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}|_{\varphi_2(U_1 \cap U_2)} \in \mathcal{H}(\varphi_2(U_1 \cap U_2))$.

On suivra la convention usuelle en supposant toujours qu'une surface de Riemann est *connexe*.

Remarque E.2.2. — (Fonctions de transition)

1. Les $\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}|_{\varphi_2(U_1 \cap U_2)}$ sont donc des biholomorphismes.
2. Un biholomorphisme étant en particulier un difféomorphisme de classe \mathcal{C}^∞ , l'atlas \mathcal{A} munit X d'une structure de surface différentielle.
3. Attention ! Un disque ouvert n'est pas biholomorphe au plan ! Plus généralement, un ouvert borné n'est pas biholomorphe à \mathbf{C} . En effet, d'après le théorème de Liouville, si $f \in \mathcal{O}(\mathbf{C})$ et $|f| < M$ sur \mathbf{C} , alors f est constante. La géométrie holomorphe est plus rigide que la géométrie différentielle.
4. Le déterminant jacobien d'une fonction de transition est strictement positif car holomorphe (exercice), la surface différentielle sous-jacente à une surface de Riemann est donc orientable.
5. En pratique, on ne fixe pas l'atlas maximal, n'importe quel recouvrement ouvert de X par des cartes vérifiant la condition 2. de la définition convient (exercice formel).
6. Attention ! Le terme traditionnel *surface* renvoie donc à cette structure sous-jacente de surface différentiable modélée sur \mathbf{R}^2 (qui est isomorphe à \mathbf{C} en tant que \mathbf{R} -espace vectoriel). Voir § E.1.

Exercice E.2.3. — (Exemples de surfaces de Riemann)

1. (a) Le corps \mathbf{C} des nombres complexes muni de sa topologie usuelle. Une seule carte, l'identité.
 (b) Un ouvert connexe de \mathbf{C} . Une seule carte, l'inclusion.
 (c) Un domaine, c'est-à-dire un ouvert connexe, $U \subset X$ d'une surface de Riemann, muni des restrictions à U des cartes de X .
2. La sphère de Riemann $\mathbf{C} \cup \{\infty\}$. Atlas :

$$(\mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}, z \mapsto z), (\mathbf{C}^* \cup \{\infty\} \rightarrow \mathbf{C}, z \mapsto \frac{1}{z}, \infty \mapsto 0).$$

Montrer que cette surface de Riemann est difféomorphe à la sphère usuelle de \mathbf{R}^3 .

[Indication : utiliser la projection stéréographique, voir la proposition 5.3.1.]

3. Les tores : soit $\tau \in \mathbf{H}(\Leftrightarrow \text{Im}(\tau) > 0)$ et

$$T := \mathbf{C}/\mathbf{Z} \oplus \tau\mathbf{Z}$$

où $z_1 \sim z_2 \Leftrightarrow \exists(n, m) \in \mathbf{Z}^2$ tel que $z_2 = z_1 + n + m\tau$.

[Indication : considérer des cartes sur un domaine fondamental.]

Définition E.2.4. — (Holomorphe)

1. Une fonction continue $f: X \rightarrow \mathbf{C}$ sur une surface de Riemann X est une *fonction holomorphe* si $\forall x \in X$, il existe une carte (U, φ) au voisinage de x telle que $f \circ \varphi^{-1}: \varphi(U) \rightarrow \mathbf{C}$ soit une fonction holomorphe. On note alors $f \in \mathcal{O}_X(X)$. Plus généralement, on note $\mathcal{O}_X(W)$ l'anneau des fonctions holomorphes sur un domaine W de X .
2. Une *application holomorphe* entre surfaces de Riemann (ou *morphisme*)

$$g: X \rightarrow Y$$

est une application continue qui vérifie que pour tout ouvert $V \subset Y$ et pour toute fonction holomorphe $f: V \rightarrow \mathbf{C}$, la fonction

$$f \circ g: g^{-1}(V) \rightarrow \mathbf{C}$$

est une fonction holomorphe.

On note $g^*(f) := f \circ g|_{g^{-1}(V)}$, g^* est le *tiré en arrière* de f par g (ou *pull-back*). Avec cette notation, g est holomorphe si et seulement si pour tout ouvert $V \subset Y$, on a

$$f \in \mathcal{O}_Y(V) \Rightarrow g^*(f) \in \mathcal{O}_X(g^{-1}(V)).$$

Une application holomorphe entre surfaces de Riemann $f: X \rightarrow Y$ est *conforme* si elle est injective et surjective.

Exercice E.2.5. — Dans ce cas f est un biholomorphisme grâce à la proposition E.2.9.

Exercice E.2.6. — (Caractérisation des fonctions holomorphes)

1. Montrer qu'une application \mathcal{C}^∞ entre surfaces $g: X \rightarrow Y$ est une application continue qui vérifie que pour toute fonction \mathcal{C}^∞ $f: Y \rightarrow \mathbf{R}^2$, la fonction $f \circ g: X \rightarrow \mathbf{R}^2$ est \mathcal{C}^∞ .

2. Montrer qu'une application continue $f: X \rightarrow Y$ entre surfaces de Riemann est holomorphe si et seulement si pour toutes cartes (U, φ) de X et (V, ψ) de Y telles que $f(U) \cap V \neq \emptyset$, l'expression en coordonnées $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}: \varphi(U \cap f^{-1}(V)) \subset \mathbf{C} \rightarrow \psi(V) \subset \mathbf{C}$ est une fonction holomorphe entre ouverts de \mathbf{C} .

Remarque E.2.7. — Si une surface de Riemann X est munie d'une involution anti-holomorphe σ , on dit que (X, σ) est *séparante* si le complémentaire $X \setminus X^\sigma$ est non connexe. On renvoie à l'article [Gab06] pour une étude très intéressante de cette propriété.

Définition E.2.8. — Une application holomorphe $g: X \rightarrow Y$ est dite *constante* si l'image de X par g est un point.

Proposition E.2.9 (Image ouverte). — Soit $f: X \rightarrow Y$ une application holomorphe entre surfaces de Riemann. Si f est non constante, l'image d'un ouvert connexe de X par f est un ouvert de Y . Autrement dit, une application holomorphe non constante entre surfaces de Riemann est une application ouverte.

Exercice E.2.10. — Prouver la proposition ci-dessus à partir du théorème analogue pour les fonctions holomorphes de \mathbf{C} .

Théorème E.2.11. — Soit X une surface de Riemann compacte, et Y une surface de Riemann. Une application holomorphe $f: X \rightarrow Y$ est constante ou surjective. Dans ce dernier cas Y est aussi compacte.

En particulier, toute fonction holomorphe $X \rightarrow \mathbf{C}$ est constante et l'anneau des fonctions holomorphes globales satisfait $\mathcal{O}_X(X) = \mathbf{C}$.

Démonstration. — Si f est non constante, alors $f(X)$ est ouverte d'après la proposition E.2.9, et compacte (car l'image d'un compact par une application continue est compacte). Ainsi $f(X)$ est un sous-ensemble fermé de Y (car Y est séparé). Du fait que X et Y sont connexes par convention, on a $f(X) = Y$. \square

Exercice E.2.12. — La droite affine complexe $\mathbf{A}^1(\mathbf{C}) \simeq \mathbf{C}$ est une surface de Riemann. Montrer que la droite projective complexe : $\mathbf{P}^1(\mathbf{C}) \simeq \mathbf{C}^2/\mathbf{C}^*$ est une surface de Riemann isomorphe, c'est-à-dire ici biholomorphe, à la sphère de Riemann.

Proposition E.2.13 (Expression locale d'une application holomorphe)

Soit $f: X \rightarrow Y$ une application holomorphe non constante entre surfaces

de Riemann. Soit $x_0 \in X$ et $y_0 = f(x_0)$, Soit ψ une carte de Y centrée en y_0 . Alors il existe une coordonnée locale z sur X s'annulant en x_0 , c'est-à-dire une carte centrée en x_0 , et un entier naturel d tels que l'expression de f dans les cartes choisies soit de la forme

$$z \mapsto z^d .$$

Démonstration. — En effet, considérons une coordonnée \tilde{z} de X centrée en x_0 et soit \tilde{f} l'expression de f dans les cartes \tilde{z} et ψ . On a $\tilde{f}(0) = 0$. Au voisinage de 0, on a un développement en série entière $\tilde{f}(\tilde{z}) = \sum a_k \tilde{z}^k$. Soit d le plus petit entier tel que $a_d \neq 0$, et soit $c \in \mathbf{C}$ tel que $c^d = a_d$. La fonction \tilde{f} est de la forme $\tilde{f}(\tilde{z}) = (c\tilde{z})^d(1 + u(\tilde{z}))$, avec u holomorphe et $u(0) = 0$. Comme on a une fonction holomorphe $w \mapsto \sqrt[d]{w}$ au voisinage de 1, la fonction $1 + u$ est de la forme h^d avec h holomorphe au voisinage de 0 et $h(0) = 1$, d'où $\tilde{f}(\tilde{z}) = (c\tilde{z} \cdot h(\tilde{z}))^d$. Posons $z(x) = c\tilde{z}(x) \cdot h(\tilde{z}(x))$. Il résulte du théorème des fonctions implicites que z est une coordonnée holomorphe au voisinage de x_0 . Et on a $\psi(f(z)) = (z(x))^d$ pour x voisin de x_0 . \square

Exercice E.2.14. — Vérifier que l'entier naturel d ne dépend que de f et de x_0 et ne dépend pas des cartes choisies.

Définition E.2.15. — L'entier naturel d est appelé *indice de ramification* de f en x_0 . On dit aussi que f prend la valeur $f(x_0)$ avec une *multiplicité* d en x_0 (au voisinage de $f(x_0)$, la fibre de f rencontre l'image d'un voisinage de x_0 en d points). Le nombre $b_f(x_0) := d - 1$ est appelé *indice de branchement* de f en x_0 .

Proposition E.2.16. — Soit $f: X \rightarrow Y$ une application holomorphe non constante entre surfaces de Riemann compactes. Il existe un entier m tel que tout $y \in Y$ est atteint précisément m fois en comptant les multiplicités, c'est-à-dire :

$$\forall y \in Y, \quad \sum_{x \in f^{-1}(y)} (b_f(x) + 1) = m .$$

Démonstration. — Voir [FK80, page 12].

On note

$$\Sigma_n := \left\{ y \in Y ; \sum_{x \in f^{-1}(y)} (b_f(x) + 1) \geq n \right\}$$

et on montre que chaque ensemble de cette forme est soit vide, soit égal à Y tout entier. On considère alors un point $y_0 \in Y$ arbitraire, et on pose $m := \sum_{x \in f^{-1}(y_0)} (b_f(x) + 1)$. On a donc $0 < m < \infty$, et comme $y_0 \in \Sigma_m$, on trouve $\Sigma_m = Y$. Du fait que $y_0 \notin \Sigma_{m+1}$, Σ_{m+1} doit être vide.

Pour montrer la première affirmation, on montre que Σ_n est ouvert et fermé dans Y connexe. \square

Définition E.2.17. — L'entier m , noté $\deg(f)$ est le *degré* de f . On dira aussi que f est un revêtement (ramifié) à m feuillets de Y par X .

Théorème E.2.18 (Riemann-Hurwitz). — Soit $f: X \rightarrow Y$ une application holomorphe non constante entre surfaces de Riemann compactes. Notons m le degré de f , alors

$$g(X) = m(g(Y) - 1) + 1 + \frac{1}{2} \sum_{x \in X} b_f(x).$$

Démonstration. — On prouve en fait une relation sur les caractéristiques d'Euler.

$$2 - 2g(X) = m(2 - 2g(Y)) - \sum_{x \in X} b_f(x).$$

Comme l'ensemble des points de branchements est fini, on peut supposer qu'ils sont contenus dans l'ensemble des sommets d'une décomposition polyédrale (F, A, S) de Y . Cette décomposition se relève par f en une décomposition qui possède $m\#F$ faces, $m\#A$ arêtes et $m\#S - \sum_{x \in X} b_f(x)$ sommets. \square

Exemple E.2.19 (Cubiques planes et courbes hyperelliptiques)

Nous avons les cubiques affines de forme $\{y^2 = x^3 + ax + b\} \subset \mathbf{A}^2(\mathbf{C})$, et les cubiques projectives de forme $C := \{y^2 = x^3 + ax + b\} \cup \{\infty\} \subset \mathbf{P}^2(\mathbf{C})$ ($\infty = (1 : 0 : 0)$). Ces formes sont appelées formes réduites. Pour calculer le genre de C , on considère plutôt la forme $\{y^2 = x(x-1)(x-h)\} \cup \{\infty\}$. Si la courbe est non singulière, c'est-à-dire en particulier si C est muni d'une structure de surface de Riemann compacte, alors C est un tore, $g = 1$. Pour le voir, considérons l'application (en coordonnées homogènes)

$$\pi: C \rightarrow \mathbf{P}^1(\mathbf{C}), (X : Y : Z) \mapsto (X : Z), \infty \mapsto (1 : 0).$$

En coordonnées affines, cela donne $(x, y) \mapsto x$, il s'agit donc d'un morphisme de degré 2 avec quatre points de ramification. La structure de surface de Riemann sur C est obtenue en tirant en arrière la structure de surface de Riemann de $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$, voir ci-après.

Plus généralement, on calcule avec le même raisonnement que les courbes hyperelliptiques $\{y^2 = P_{2g+1}(x)\} \cup \{\infty\} \subset \mathbf{P}^2(\mathbf{C})$, où P_{2g+1} est un polynôme de degré $2g+1$ à racines simples, sont de genre g . Ces courbes sont des revêtements doubles ramifiés de la sphère de Riemann.

Définition E.2.20. — Soit X une surface de Riemann.

1. Une application holomorphe sur X à valeurs dans \mathbf{C} est une *fonction holomorphe* sur X (voir la définition E.2.4).
2. Une application holomorphe X à valeurs dans $\mathbf{C} \cup \{\infty\}$ est une *fonction méromorphe* sur X . Pour tout ouvert $U \subset X$, on note $\mathcal{M}(U)$ la \mathbf{C} -algèbre des fonctions méromorphes sur U . Lorsque U est connexe, $\mathcal{M}(U)$ est un corps et en particulier, $\mathcal{M}(X)$ est le corps des fonctions méromorphes de la surface de Riemann X .

Remarque E.2.21. — Attention, en dimension supérieure, le point E.2.20 (2) ne fonctionne plus, il y a un lieu d'indétermination.

- Exercice E.2.22.** —
1. Un polynôme de degré d se prolonge en un fonction méromorphe sur $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ admettant un pôle d'ordre d en ∞ .
 2. (Très important!) Si f est une fonction méromorphe non constante sur une surface de Riemann compacte X , alors f possède autant de zéros que de pôles comptés avec multiplicités (utiliser la proposition E.2.16).
 3. Rappelons le définition usuelle d'une fonction méromorphe sur X :
Il s'agit d'une fonction $f: X \setminus D \rightarrow \mathbf{C}$ où $D \subset X$ est un sous-ensemble discret fermé et dont l'expression dans toute carte de X est méromorphe, c'est-à-dire holomorphe en dehors d'une sous-ensemble discret et admettant un pôle en ses points d'indétermination. En étendant f à X tout entier par ∞ en ses pôles, on retrouve la définition E.2.20.

Proposition E.2.23. — Une fonction méromorphe sur la sphère de Riemann est une fraction rationnelle, c'est-à-dire de la forme $\frac{p}{q}$ où p et q sont des polynômes.

Démonstration. — Soit $f: \mathbf{P}^1(\mathbf{C}) \rightarrow \mathbf{C}$ méromorphe. Par compacité de $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$, f n'a qu'un nombre fini de pôles. Quitte à remplacer f par $1/f$, on peut supposer que $\infty \in \mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ n'est pas un pôle. Soit $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbf{C}$ l'ensemble des pôles de f . Au voisinage de a_ν , la partie polaire de f est

$$h_\nu(z) = \sum_{l=-k_\nu}^{-1} c_l^\nu (z - a_\nu)^l$$

et la fonction $f - (h_1 + \dots + h_n)$ est holomorphe sur $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$. D'après le théorème E.2.11, c'est donc une constante, d'où f est rationnelle. \square

Remarquons que nous avons montré qu'une seule fonction méromorphe non constante détermine complètement la structure complexe de X . En effet, soit

$f \in \mathcal{M}(X)$ non constante, $x \in X$, et $n - 1 = b_f(x)$, alors f détermine une coordonnée locale centrée en x :

$$\begin{cases} (f - f(x))^{\frac{1}{n}} & \text{si } f(x) \neq \infty, \\ (f)^{-\frac{1}{n}} & \text{si } f(x) = \infty. \end{cases}$$

Exercice E.2.24. — En déduire une preuve du théorème de d’Alembert-Gauss (théorème fondamental de l’algèbre) : tout polynôme non constant admet une racine dans \mathbf{C} . Théorème que l’on peut généraliser en « tout polynôme non constant admet une racine dans la clôture algébrique du corps de ses coefficients ».

Toute surface de Riemann, en particulier toute surface de Riemann compacte, possède une fonction méromorphe globale non constante (résultat hautement non trivial). Par contre, il existe des surfaces complexes, notamment les tores généraux de dimension complexe ≥ 2 , qui ne possèdent aucune fonction méromorphe globale non constante.

Théorème E.2.25. — *Toute surface de Riemann possède des fonctions méromorphes non constantes.*

Démonstration. — Voir [FK80, Cor. II.5.3], le point clef étant le lemme de Weyl.⁽¹⁾ \square

Corollaire E.2.26. — *Toute surface de Riemann est triangulable.*

Remarque E.2.27. — 1. Une telle fonction non constante $f \in \mathcal{M}(X)$ détermine une application holomorphe $f: X \rightarrow \mathbf{P}^1$ qui est elle-même, d’après E.2.16, un revêtement ramifié à $m = \deg(f)$ feuilletts.

2. On obtient en fait un revêtement ramifié pour toute application holomorphe non constante $f: X \rightarrow Y$ entre surfaces de Riemann compactes. En restreignant ce revêtement au-dessus du complémentaire des points de branchement, on obtient un revêtement non ramifié de degré m . On montre que ce revêtement non ramifié détermine et est déterminé par f , voir [Do190, 5.(6.3.1) et 5.(6.3.4)].

Théorème E.2.28. — *Toute surface de Riemann compacte est projective.*

Plus précisément, soit X une surface de Riemann compacte, alors il existe un entier naturel N et un plongement holomorphe

$$\Phi: X \rightarrow \mathbf{P}^N(\mathbf{C}).$$

1. Hermann Weyl (1885–1955) à ne pas confondre avec André Weil (1906–1998).

De plus, $\Phi(X) \subset \mathbf{P}^N(\mathbf{C})$ est une courbe algébrique complexe projective.

Esquisse de preuve. — Du théorème E.2.25, on déduit l'existence d'un fibré ample, voir la définition 2.6.20, \mathcal{L} sur X . De l'existence d'un tel fibré, on déduit un morphisme $\varphi_{\mathcal{L}}$, voir la définition 2.6.20 ou [Dol90, page 182 (8.7.3)]. Il ne reste plus qu'à appliquer le théorème de Chow D.5.1. Pour une preuve complète, voir par exemple [Jos06, Theorem 5.7.1]. \square

Exemple E.2.29. — La fonction elliptique \wp de Weierstrass, voir [Car61, V.2.5], [FK80, page 4], [Sil09, VI.3], permet d'obtenir une preuve directe, c'est-à-dire sans passer par le théorème ci-dessus, que les tores complexes de dimension 1 du type $T_{\tau} := \mathbf{C}/\mathbf{Z} \oplus \tau\mathbf{Z}$ et déjà vus en E.2.3(3) sont algébriques.

Soit $\tau \in \mathbf{H}$, on pose

$$\wp(\tau; z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\substack{(n,m) \neq (0,0) \\ (n,m) \in \mathbf{Z}^2}} \left(\frac{1}{(z - n - m\tau)^2} - \frac{1}{(n + m\tau)^2} \right).$$

La fonction ainsi définie est une fonction méromorphe du plan doublement périodique par rapport au réseau $\mathbf{Z} \oplus \tau\mathbf{Z}$. Elle détermine donc une fonction méromorphe sur le tore T_{τ} . On montre que la fonction dérivée \wp' de \wp satisfait une équation algébrique en \wp :

$$(E.1) \quad (\wp')^2 = 4(\wp - e_1)(\wp - e_2)(\wp - e_3)$$

où $e_1 = \wp(\frac{1}{2})$, $e_2 = \wp(\frac{\tau}{2})$ et $e_3 = \wp(\frac{1+\tau}{2})$.

La fonction \wp' détermine aussi une fonction méromorphe sur le tore. Et la surface de Riemann T_{τ} peut être vue comme la courbe algébrique plane déterminée par l'équation

$$y^2 = 4(x - e_1)(x - e_2)(x - e_3).$$

E.3. Théorème de Riemann-Roch sur une courbe

Théorème E.3.1 (Théorème de Riemann-Roch)

Soient X une courbe projective non singulière et D un diviseur sur X . On rappelle que $h^k(D) = \dim H^k(X, \mathcal{O}_X(D))$ et on a

$$h^0(D) - h^0(K_X - D) = \deg D + 1 - g(X).$$

Démonstration. — Voir par exemple [Jos06, Theorem 5.4.1]. \square

E.4. Variété jacobienne associée à une courbe

Soient X une surface de Riemann compacte de genre g non nul et $(\omega_1, \dots, \omega_g)$ une base de l'espace vectoriel complexe $H^0(X, \Omega_X)$ des formes différentielles holomorphes globales sur X . Considérons aussi une base $\gamma_1, \dots, \gamma_{2g}$ une base du \mathbf{Z} -module libre $H_1(X; \mathbf{Z})$. Les $2g$ vecteurs

$$v_j = \begin{pmatrix} \int_{\gamma_j} \omega_1 \\ \vdots \\ \int_{\gamma_j} \omega_g \end{pmatrix} \in \mathbf{C}^g \quad \text{pour } j = 1, \dots, 2g$$

sont alors \mathbf{R} -linéairement indépendants, voir par exemple [ACGH85, §I.3], et engendrent donc un réseau de \mathbf{C}^g . De ce fait, l'intégration des formes différentielles holomorphes d'une surface de Riemann compacte X le long de ses 1-cycles détermine une injection

$$H_1(X; \mathbf{Z}) \hookrightarrow H^0(X, \Omega_X)^*, \quad \gamma \mapsto (\omega \mapsto \int_{\gamma} \omega)$$

qui permet de poser la définition suivante :

Définition E.4.1. — Soit X une surface de Riemann compacte de genre non nul. Le tore complexe

$$\text{Jac}(X) := H^0(X, \Omega_X)^* / H_1(X; \mathbf{Z})$$

est la *variété jacobienne* de la courbe X .

Remarque E.4.2. — La Jacobienne $\text{Jac}(X)$ d'une surface de Riemann X est un cas particulier de variété d'Albanese $\text{Alb}(X)$, voir la définition D.6.10.

Proposition E.4.3. — Soit X une surface de Riemann compacte de genre g non nul munie d'une structure réelle σ . On note $s = \#\pi_0(X(\mathbf{R}))$ le nombre de composantes connexes de $X(\mathbf{R})$. Alors la jacobienne $\text{Jac}(X)$ est munie d'une structure de \mathbf{R} -variété induite, $\text{Jac}(X)^G = \text{Jac}(X)(\mathbf{R})$ est un groupe de Lie réel compact qui est isomorphe à

1. $(\mathbf{R}/\mathbf{Z})^g \times (\mathbf{Z}/2)^{s-1}$ si $s \neq 0$;
2. $(\mathbf{R}/\mathbf{Z})^g$ si $s = 0$ et g est pair ;
3. $(\mathbf{R}/\mathbf{Z})^g \times \mathbf{Z}/2$ si $s = 0$ et g est impair.

Démonstration. — Si $X(\mathbf{R})$ est non vide, on a $\lambda_1 = g + 1 - s$, voir l'exercice 3.3.12 et l'exemple 3.6.9. D'après la remarque E.4.2, le résultat ci-dessus dans le cas $s \neq 0$ est donc un cas particulier de la proposition D.6.11. Voir [Sil82, Proposition 10] pour des détails complémentaires. \square

Théorème E.4.4 (Théorème d'Abel-Jacobi). — Soit X une courbe algébrique complexe projective non singulière, alors l'application d'Abel-Jacobi

$$\pi_{P_0} : X \rightarrow \text{Jac}(X), P \mapsto \begin{pmatrix} \int_{P_0}^P \omega_1 \\ \vdots \\ \int_{P_0}^P \omega_g \end{pmatrix} \pmod{(v_1, \dots, v_{2g})} .$$

induit un isomorphisme de groupes

$$\text{Pic}^0(X) \rightarrow \text{Jac}(X) .$$

Démonstration. — L'injectivité est le *théorème d'Abel* et la surjectivité est équivalente au *théorème d'inversion de Jacobi*. Voir [ACGH85, §I.3]. \square

APPENDICE F

ÉCLATEMENTS

On rencontre la notion d'éclatement un peu partout dans ce livre. Nous avons voulu réunir ici les aspects « géométrie algébrique » et les aspects « géométrie différentielle » de cette construction.

F.1. Éclatements de variétés \mathcal{C}^∞

Cette section est développée à partir de [Mik97, 2.1].

Fibré tautologique. — On désigne par $B_n \rightarrow \mathbf{RP}^n$ le fibré tautologique (fibré que l'on note couramment $\mathcal{O}_{\mathbf{P}^n}(-1)$ en géométrie algébrique, voir la définition 2.6.14) au-dessus de l'espace projectif \mathbf{RP}^n . Ce fibré a pour fibre en $L \in \mathbf{RP}^n$ la droite vectorielle de \mathbf{R}^{n+1} représentée par L . C'est un fibré réel de rang 1. Rappelons comment en décrire une trivialisatation locale. Soit v un vecteur non nul de \mathbf{R}^{n+1} et $L \in \mathbf{RP}^n$ la droite vectorielle qu'il engendre. Soit $H \subset \mathbf{R}^{n+1}$ un hyperplan supplémentaire de L . Notons $A \subset \mathbf{RP}^n$ l'ensemble des droites non contenues dans H . Chaque droite L' appartenant au voisinage A de L contient alors exactement un vecteur de la forme $v+w(L')$ avec $w(L') \in H$. On a alors un homéomorphisme

$$A \times \mathbf{R} \rightarrow B_n|_A, \quad (L', t) \mapsto (L', tw(L'))$$

qui est linéaire sur les fibres.

Par construction, B_n est une sous-variété du produit $\mathbf{R}^{n+1} \times \mathbf{RP}^n$ et le morphisme du fibré tautologique est la restriction de la projection

$$\mathbf{R}^{n+1} \times \mathbf{RP}^n \rightarrow \mathbf{RP}^n.$$

Notons $\pi: B_n \rightarrow \mathbf{R}^{n+1}$ la restriction de la projection sur le premier facteur. L'application π induit alors un difféomorphisme

$$B_n \setminus E_P \xrightarrow{\sim} \mathbf{R}^{n+1} \setminus \{P\}$$

où $P = (0, \dots, 0) \in \mathbf{R}^{n+1}$ et $E_P := \pi^{-1}(P)$.

On dit que $\pi: B_n \rightarrow \mathbf{R}^{n+1}$ est l'éclatement de \mathbf{R}^{n+1} centré en P . La sous-variété E_P de codimension 1 dans B_n s'appelle le *diviseur exceptionnel* de l'éclatement. Il découle immédiatement de la définition que E_P est difféomorphe à $\mathbf{R}\mathbf{P}^n$.

Remarque F.1.1. — Le fibré tautologique est aussi le fibré universel au dessus de $\mathbf{R}\mathbf{P}^n = \mathbf{G}_{n+1,1}(\mathbf{R})$, voir la définition 5.2.11.

Projectivisé du fibré normal. — Considérons une sous-variété compacte et sans bord C de codimension r dans une variété M de classe \mathcal{C}^∞ . Pour simplifier l'exposition, nous pouvons munir M d'une métrique riemannienne. Soit $\mathcal{N}_{M|C} \rightarrow C$ le fibré normal à C dans M qui est un fibré vectoriel de rang r . Notons

$$\pi_1: E_C \rightarrow C$$

le fibré projectivisé de $\mathcal{N}_{M|C} \rightarrow C$. Par définition, la fibre $\pi_1^{-1}(P)$ en $P \in C$ est l'espace projectif des droites de l'espace vectoriel $\mathcal{N}_{M|C,P}$; E_C est donc l'espace total d'un fibré de fibre $\mathbf{R}\mathbf{P}^{r-1}$ au-dessus de C .

Éclatement d'une variété le long d'une sous-variété. — Rappelons que C étant plongée dans M , il existe une application \mathcal{C}^∞ injective $j: \mathcal{N}_{M|C} \hookrightarrow M$ qui identifie $\mathcal{N}_{M|C}$ avec un voisinage ouvert $U = j(\mathcal{N}_{M|C})$ de C dans M . L'injection j est appelée *voisinage tubulaire* de C dans M . L'ouvert U est souvent appelé lui aussi voisinage tubulaire. En retour, j identifie C avec la section nulle de $\mathcal{N}_{M|C}$. On écrit abusivement $C \subset \mathcal{N}_{M|C}$ et j induit alors un difféomorphisme $\mathcal{N}_{M|C} \setminus C \xrightarrow{\sim} U \setminus C$. Notons \tilde{U} l'espace total du fibré tautologique au-dessus de E_C et identifions E_C à la section nulle $E_C \subset \tilde{U}$. Par construction, \tilde{U} est alors une variété de même dimension que M et nous avons un difféomorphisme naturel

$$\mu: \tilde{U} \setminus E_C \xrightarrow{\sim} U \setminus C$$

qui s'étend en une application \mathcal{C}^∞

$$f: \tilde{U} \rightarrow U \subset M$$

telle que $f|_{E_C} = \pi_1$.

En passant sous silence les choix effectués au cours de cette construction, on donne la définition suivante.

Définition F.1.2. — La variété éclatée \widetilde{M} de M le long de C est obtenue en recollant \widetilde{U} à $M \setminus C$ par le difféomorphisme μ . L'application C^∞

$$\pi: \widetilde{M} \rightarrow M$$

définie par $\pi|_{M \setminus C} = \text{id}$ et $\pi|_{\widetilde{U}} = f$ est l'éclatement topologique de M le long de C .

La sous-variété $C \subset M$ est le *centre* de l'éclatement et la sous-variété E_C de codimension 1 dans \widetilde{M} est le *diviseur exceptionnel*. On note souvent $B_C M := \widetilde{M}$ la variété éclatée.

Si $L \subset M$ est un sous-ensemble fermé, on dit qu'un sous-ensemble $\widetilde{L} \subset \widetilde{M}$ est le *transformé strict* de L si

- $\pi(\widetilde{L}) = L$,
- \widetilde{L} est fermé dans \widetilde{M} ,
- $\widetilde{L} \setminus E_C$ est dense dans \widetilde{L} .

Le lecteur intéressé par une discussion plus détaillée est invité à consulter [AK85, Section 2].

F.2. Éclatements de variétés algébriques

Transformée birationnelle. — Considérons maintenant une sous-variété algébrique $W \subset \mathbf{P}^N$ donnée par r équations $\{f_1 = 0, \dots, f_r = 0\}$.

Définition F.2.1. — La variété éclatée de \mathbf{P}^N le long de W est la sous-variété $B_W \mathbf{P}^N$ de $\mathbf{P}_{x_0: \dots: x_N}^N \times \mathbf{P}_{y_1: \dots: y_r}^{r-1}$ donnée par les $r - 1$ équations

$$\begin{cases} y_1 f_2(x_0, \dots, x_N) - y_2 f_1(x_0, \dots, x_N) = 0, \\ y_2 f_3(x_0, \dots, x_N) - y_3 f_2(x_0, \dots, x_N) = 0, \\ \vdots \\ y_{r-1} f_r(x_0, \dots, x_N) - y_r f_{r-1}(x_0, \dots, x_N) = 0. \end{cases}$$

Et l'éclatement $\pi_W: B_W \mathbf{P}^N \rightarrow \mathbf{P}^N$ est donné par :

$$((x_0 : \dots : x_N), (y_1 : \dots : y_r)) \mapsto (x_0 : \dots : x_N).$$

Si $\text{codim } W = r$, on retrouve l'interprétation en terme de fibré normal en chaque point lisse de W .

Pour une sous-variété $V \subset \mathbf{P}^N$, nous notons \widetilde{V} l'adhérence de Zariski de $\pi_W^{-1}(V \setminus W \cap V)$ dans $B_W \mathbf{P}^N$.

Définition F.2.2. — La sous-variété \tilde{V} est appelée *transformée birationnelle* (ou *transformée stricte*) de V par π_W .

On peut montrer que la variété \tilde{V} ne dépend pas des plongements de $V \subset \mathbf{P}^N$ et $W \subset \mathbf{P}^N$ mais seulement du plongement $W \cap V \subset V$, voir [Har77, II.7]. On note encore π_W la restriction $\tilde{V} \rightarrow V$ de π_W à \tilde{V} .

Définition F.2.3. — Soient V une variété projective et $W \subset V$ une sous-variété, la restriction $\pi_W: \tilde{V} \rightarrow V$ est l'*éclatement* de V de *centre* W . On note $B_W V := \tilde{V}$, c'est la *variété éclatée de V le long de W* . Le diviseur $\pi_W^*(W)$ est le *diviseur exceptionnel* de l'éclatement.

On note $B_W V := \tilde{V}$ la variété éclatée (« B » pour *Blow-up*).

Proposition F.2.4 (Propriété universelle de l'éclatement pour les surfaces)

Soit $f: Y \rightarrow X$ un morphisme birationnel de surfaces complexes projectives non singulières. Si $P \in X$ est un point d'indétermination de l'application rationnelle réciproque $f^{-1}: X \dashrightarrow Y$, alors f se factorise, de façon unique, en :

$$f: Y \xrightarrow{g} B_P X \xrightarrow{\pi_P} X$$

où g est un morphisme birationnel et π_P est l'éclatement de X en P .

Démonstration. — Voir [Bea78, Proposition II.8]. □

Remarque F.2.5. — On trouve dans [Har77, Proposition II.7.14] un énoncé plus général valable en dimension supérieure mais dont l'application au cas de surfaces donne un énoncé moins fort que ci-dessus, voir aussi [Har77, Remark V.5.4.1].

Corollaire F.2.6. — Soient X une surface complexe projectives non singulières et $f: X \rightarrow X$ un endomorphisme birationnel. Soit P un point de X fixé par f , alors il existe un unique endomorphisme birationnel $g: B_P X \rightarrow B_P X$ tel que $f \circ \pi_P = \pi_P \circ g$:

$$\begin{array}{ccc} B_P X & \xrightarrow{g} & B_P X \\ \downarrow \pi_P & & \downarrow \pi_P \\ X & \xrightarrow{f} & X \end{array}$$

Démonstration. — Il suffit d'appliquer la proposition précédente au morphisme birationnel $f \circ \pi_P: B_P X \rightarrow X$ en remarquant que le point $P = f(P)$ est un point d'indétermination de $(f \circ \pi_P)^{-1}$. En effet, si P n'est pas un point

d'indétermination de f^{-1} , alors $f^{-1}(P) = P$ est un point d'indétermination de π_P^{-1} . \square

Dans le cas où V et W sont lisses, on a un difféomorphisme entre l'éclaté topologique et l'éclaté algébrique qui commute avec les morphismes au-dessus de V .

F.3. Topologie des éclatements

Revoir si besoin la définition B.5.12 de somme connexe de deux variétés.

Proposition F.3.1. — Soit $P \in \mathbf{R}^n$, alors $B_P \mathbf{R}^n$ est difféomorphe à $\mathbf{R}^n \# \mathbf{R}P^n$. Plus généralement, si $C \subset M$ est une sous-variété non singulière de codimension r et de fibré normal trivial, $B_C M$ est difféomorphe à $M \# C \times \mathbf{R}P^r$.

Corollaire F.3.2. — Soit X une surface réelle et $B_P X$ l'éclaté de X en un point P de X . Alors, muni de la topologie euclidienne, la variété différentielle $B_P X$ de dimension réelle 2 est difféomorphe à

$$X \# \mathbf{R}P^2 .$$

En particulier, pour $P \in \mathbf{R}P^2$, la variété éclatée $B_P \mathbf{R}P^2$ est difféomorphe à la bouteille de Klein \mathbf{K}^2 .

Démonstration. — En effet, le bord $\partial(U_{\mathbf{R}P^2|\mathbf{R}P^1})$ d'un voisinage tubulaire de $\mathbf{R}P^1$ dans $\mathbf{R}P^2$ est difféomorphe au cercle \mathbf{S}^1 (le voisinage tubulaire étant lui un ruban de Möbius) \square

Proposition F.3.3. — Soit X une surface complexe et $B_P X$ l'éclaté de X en un point P de X . Par exemple, $B_{(0,0)} \mathbf{C}^2$ est la sous-variété complexe de $\mathbf{C}_{x,y}^2 \times \mathbf{C}P^1_{u,v}$ déterminée par l'équation $xv = yu$. Alors, muni de la topologie euclidienne, la variété différentielle $B_P X$ de dimension réelle 4 est difféomorphe à

$$X \# \overline{\mathbf{C}P^2}$$

où $\overline{\mathbf{C}P^2} = -\mathbf{C}P^2$ est le plan projectif complexe muni de l'orientation opposée.

Démonstration. — En effet, le bord $\partial(U_{\mathbf{C}P^2|\mathbf{C}P^1})$ d'un voisinage tubulaire de $\mathbf{C}P^1$ dans $\mathbf{C}P^2$ est difféomorphe à la sphère \mathbf{S}^3 et le fibré en cercles induit par la projection

$$\mathbf{S}^3 \approx \partial(U_{\mathbf{C}P^2|\mathbf{C}P^1}) \rightarrow \mathbf{C}P^1 \approx \mathbf{S}^2$$

est la fibration de Hopf, voir preuve de la proposition [B.8.3](#). L'éclatement d'un point revient à effectuer la chirurgie consistant à remplacer le voisinage tubulaire $U_{X|P}$ d'un point dans X qui est diffeomorphe à la boule unité de dimension 4 par $U_{\mathbf{CP}^2|\mathbf{CP}^1}$ en recollant le long de leurs bords qui sont des sphères \mathbf{S}^3 par un diffeomorphisme qui renverse l'orientation. Voir par exemple [\[KM61\]](#) ou [\[Hir51\]](#). \square

Exemple F.3.4. — À titre d'illustration, nous nous proposons d'expliciter le calcul de l'exemple suivant du à Kollàr, voir [\[Kol99a\]](#), Exemple 1.4].

Soient X une variété algébrique réelle de dimension 3, non singulière et $D \subset X$ une courbe réelle possédant un unique point réel $\{0\} = D(\mathbf{R})$. Supposons de plus que proche de 0, cette courbe soit donnée par les équations $\{z = x^2 + y^2 = 0\}$. Notons $Y_1 = B_D X$, la variété obtenue par l'éclatement de X centré en D . Cette nouvelle variété est réelle et possède un unique point singulier P . Considérons $Y := B_P Y_1$, la variété obtenue par l'éclatement de Y_1 centré en P qui est une variété réelle non singulière. On note $\pi: Y \rightarrow X$ la composition des éclatements. Nous nous proposons de montrer que pour la composante connexe $M \subset X(\mathbf{R})$ contenant P , on a la relation

$$\pi^{-1}M \approx M \# (\mathbf{S}^2 \times \mathbf{S}^1),$$

c'est-à-dire

$$B_P(B_D M) \approx M \# (\mathbf{S}^2 \times \mathbf{S}^1).$$

Notre but étant de déterminer la topologie de la variété éclatée, il est raisonnable de se placer dans la situation \mathcal{C}^∞ qui permet en particulier de travailler dans un ouvert U aussi « petit » que l'on veut, par exemple un voisinage ouvert de l'unique point réel de la courbe singulière D . Nous utiliserons librement l'identification $U \approx \mathbf{R}^3$. En analytique, une telle identification est impossible car \mathbf{C}^3 n'est pas biholomorphe à l'un de ses ouverts stricts. De même qu'en algébrique en raison de la faiblesse de la topologie de Zariski. Voir par exemple [\[Sha94\]](#), Chapter VI § 2.2] pour une façon plus sérieuse d'expliquer ce qui se passe ici.

Soit donc D la courbe d'équations $(z = x^2 + y^2 = 0)$ dans $X = \mathbf{R}^3$. Nous allons calculer successivement $\pi_1: Y_1 = B_D \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ et $\pi: Y = B_P Y_1 \rightarrow \mathbf{R}^3$ où $P \in Y_1$ est l'unique point singulier de Y_1 .

Par définition, $B_D \mathbf{R}^3 \subset \mathbf{R}_{x,y,z}^3 \times \mathbf{P}_{\alpha;\beta}^1$ est déterminé par l'équation

$$\alpha(x^2 + y^2) - \beta z = 0$$

qui possède un unique point singulier P appartenant à la carte affine $\alpha \neq 0$. En restriction à cette carte, Y_1 est l'hypersurface affine d'équation $x_1^2 + y_1^2 - z_1 t_1 = 0$ où $x_1 = x, y_1 = y, z_1 = z, t_1 = \beta$ et $P = (0, 0, 0, 0)$.

Pour calculer $B_P Y_1$, on éclate $\pi_P: \widetilde{\mathbf{R}^4} \rightarrow \mathbf{R}^4$ au point P et on considère le transformé strict $Y = B_P Y_1$ de Y_1 .

Les quatre équations de $\pi_P^{-1}(Y_1) \subset \mathbf{R}_{x_1, y_1, z_1, t_1}^4 \times \mathbf{P}_{a:b:c:d}^3$ étant

$$x_1^2 + y_1^2 - z_1 t_1 = ay_1 - bx_1 = bz_1 - cy_1 = ct_1 - dz_1 = 0.$$

En restriction à la carte $c \neq 0$, $\pi_P^{-1}(Y_1)$ est la variété affine d'équation $z_2^2(x_2^2 + y_2^2 - t_2) = 0$ dans le sous-espace affine de $\mathbf{R}_{x_2, y_2, z_2, t_2, a, b, d}^7$ d'équations

$$\begin{cases} x_2 = a, \\ y_2 = b, \\ t_2 = d. \end{cases}$$

où $z_2 = z_1, x_2 = x_1/z_1, y_2 = y_1/z_1, t_2 = t_1/z_1$.

La trace du diviseur exceptionnel sur cette carte est déterminée par $z_2 = 0$, et on en déduit que Y a pour équation $x_2^2 + y_2^2 - t_2 = 0$ dans le sous-espace affine $x_2 - a = y_2 - b = t_2 - d = 0$. Le lieu réel est donc la variété produit d'un parabolôïde de révolution avec la droite \mathbf{R} . Dans la carte $d \neq 0$ la situation topologique est identique et il nous reste à nous convaincre que le recollement est difféomorphe à

$$\mathbf{R}^3 \# \mathbf{S}^2 \times \mathbf{S}^1 \approx \mathbf{S}^2 \times \mathbf{S}^1 \setminus \mathbf{D}^3$$

où \mathbf{D}^3 est la boule de dimension 3.

BIBLIOGRAPHIE

- [A'C80] N. A'CAMPO – « Sur la première partie du seizième problème de Hilbert », in *Séminaire Bourbaki (1978/79)*, Lecture Notes in Math., vol. 770, Springer, Berlin, 1980, p. Exp. No. 537, pp. 208–227.
- [AC02] M. ALBERICH-CARRAMIÑANA – *Geometry of the plane Cremona maps*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1769, Springer-Verlag, Berlin, 2002.
- [ACGH85] E. ARBARELLO, M. CORNALBA, P. A. GRIFFITHS & J. HARRIS – *Geometry of algebraic curves. Vol. I*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], vol. 267, Springer-Verlag, New York, 1985.
- [AK85] S. AKBULUT & H. KING – « Submanifolds and homology of nonsingular real algebraic varieties », *Amer. J. Math.* **107** (1985), no. 1, p. 45–83.
- [AK91] S. AKBULUT & H. KING – « Rational structures on 3-manifolds », *Pacific J. Math.* **150** (1991), no. 2, p. 201–214.
- [AK03] C. ARAUJO & J. KOLLÁR – « Rational curves on varieties », in *Higher dimensional varieties and rational points (Budapest, 2001)*, Bolyai Soc. Math. Stud., vol. 12, Springer, Berlin, 2003, p. 13–68.
- [AM65] M. ARTIN & B. MAZUR – « On periodic points », *Ann. of Math.* (2) **81** (1965), p. 82–99.

- [AM08] M. AKRICHE & F. MANGOLTE – « Nombres de Betti des surfaces elliptiques réelles », *Beiträge Algebra Geom.* **49** (2008), no. 1, p. 153–164.
- [AM15] M. AKRICHE & S. MOULAHY – « Fibre singulière d'un pinceau réel en courbes de genre 2 », *Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. (6)* **24** (2015), no. 3, p. 427–482.
- [And05] M. T. ANDERSON – « Géométrisation des variétés de dimension 3 via le flot de Ricci », *Gaz. Math.* (2005), no. 103, p. 24–40, Translated from Notices Amer. Math. Soc. **51** (2004), no. 2, 184–193 by Zidine Djadli.
- [Arn71] V. I. ARNOL'D – « The situation of ovals of real plane algebraic curves, the involutions of four-dimensional smooth manifolds, and the arithmetic of integral quadratic forms », *Funkcional. Anal. i Priložen.* **5** (1971), no. 3, p. 1–9.
- [Art62] M. ARTIN – « Some numerical criteria for contractability of curves on algebraic surfaces », *Amer. J. Math.* **84** (1962), p. 485–496.
- [Art66] ———, « On isolated rational singularities of surfaces », *Amer. J. Math.* **88** (1966), p. 129–136.
- [AS68] M. F. ATIYAH & I. M. SINGER – « The index of elliptic operators. III », *Ann. of Math. (2)* **87** (1968), p. 546–604.
- [Ati66] M. F. ATIYAH – « K -theory and reality », *Quart. J. Math. Oxford Ser. (2)* **17** (1966), p. 367–386.
- [Băd01] L. BĂDESCU – *Algebraic surfaces*, Universitext, Springer-Verlag, New York, 2001, Translated from the 1981 Romanian original by Vladimir Mašek and revised by the author.
- [Bal91] E. BALLICO – « An addendum on : “Algebraic models of smooth manifolds” [Invent. Math. **97** (1989), no. 3, 585–611] by J. Bochnak and W. Kucharz », *Geom. Dedicata* **38** (1991), no. 3, p. 343–346.
- [BB06] B. BERTRAND & E. BRUGALLÉ – « A Viro theorem without convexity hypothesis for trigonal curves », *Int. Math. Res. Not.* (2006), p. Art. ID 87604, 33.

- [BBK89] J. BOCHNAK, M. BUCHNER & W. KUCHARZ – « Vector bundles over real algebraic varieties », *K-Theory* **3** (1989), no. 3, p. 271–298.
- [BBK90] ———, « Erratum : “Vector bundles over real algebraic varieties” [*K-Theory* **3** (1989), no. 3, 271–298] », *K-Theory* **4** (1990), no. 1, p. 103.
- [BBM⁺10] L. BESSIÈRES, G. BESSON, S. MAILLOT, M. BOILEAU & J. PORTI – *Geometrisation of 3-manifolds*, EMS Tracts in Mathematics, vol. 13, European Mathematical Society (EMS), Zürich, 2010.
- [BCM⁺16] F. BOGOMOLOV, I. CHELTSOV, F. MANGOLTE, C. SHRAMOV & D. TESTA – « Spitsbergen volume [Editorial] », *Eur. J. Math.* **2** (2016), no. 1, p. 1–8.
- [BCP11] I. BAUER, F. CATANESE & R. PIGNATELLI – « Surfaces of general type with geometric genus zero : a survey », in *Complex and differential geometry*, Springer Proc. Math., vol. 8, Springer, Heidelberg, 2011, p. 1–48.
- [BCR87] J. BOCHNAK, M. COSTE & M.-F. ROY – *Géométrie algébrique réelle*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3) [Results in Mathematics and Related Areas (3)], vol. 12, Springer-Verlag, Berlin, 1987.
- [BCR98] ———, *Real algebraic geometry*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3), vol. 36, Springer-Verlag, Berlin, 1998, Translated from the 1987 French original.
- [BDIM19] E. BRUGALLÉ, A. DEGTYAREV, I. ITENBERG & F. MANGOLTE – « Real algebraic curves with large finite number of real points », *Eur. J. Math.* **5** (2019), p. 686–711.
- [Bea78] A. BEAUVILLE – *Surfaces algébriques complexes*, Société Mathématique de France, Paris, 1978, Astérisque, No. 54.
- [Bea14] ———, « Some surfaces with maximal Picard number », *J. Éc. polytech. Math.* **1** (2014), p. 101–116.
- [Ben16a] M. BENZERGA – « Real structures on rational surfaces and automorphisms acting trivially on Picard groups », *Math. Z.* **282** (2016), no. 3-4, p. 1127–1136.

- [Ben16b] ———, « Structures réelles sur les surfaces rationnelles », Thèse, Université d'Angers, 2016, <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-01471071>.
- [Ben17] M. BENZERGA – « Finiteness of real structures on KLT Calabi-Yau regular smooth pairs of dimension 2 », Preprint, [arXiv:1702.08808](https://arxiv.org/abs/1702.08808) [math.AG], 2017.
- [Ben18] O. BENOIST – « Sums of three squares and Noether-Lefschetz loci », *Compos. Math.* **154** (2018), no. 5, p. 1048–1065.
- [Ben19] ———, « The period-index problem for real surfaces », *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.* **130** (2019), p. 63–110.
- [Bes05] L. BESSIÈRES – « Conjecture de Poincaré : la preuve de R. Hamilton et G. Perelman », *Gaz. Math.* (2005), no. 106, p. 7–35.
- [Bes13] G. BESSON – « La conjecture de Poincaré », *Gaz. Math.* (2013), no. 135, p. 5–16.
- [BH59] A. BOREL & F. HIRZEBRUCH – « Characteristic classes and homogeneous spaces. II », *Amer. J. Math.* **81** (1959), p. 315–382.
- [BH61] A. BOREL & A. HAEFLIGER – « La classe d'homologie fondamentale d'un espace analytique », *Bull. Soc. Math. France* **89** (1961), p. 461–513.
- [BH75] E. BOMBIERI & D. HUSEMOLLER – « Classification and embeddings of surfaces », in *Algebraic geometry (Proc. Sympos. Pure Math., Vol. 29, Humboldt State Univ., Arcata, Calif., 1974)*, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1975, p. 329–420.
- [BH07] I. BISWAS & J. HUISMAN – « Rational real algebraic models of topological surfaces », *Doc. Math.* **12** (2007), p. 549–567.
- [BHPVdV04] W. P. BARTH, K. HULEK, C. A. M. PETERS & A. VAN DE VEN – *Compact complex surfaces*, second éd., Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge., vol. 4, Springer-Verlag, Berlin, 2004.
- [Bih01a] F. BIHAN – « Betti numbers of real numerical quintic surfaces », in *Topology, ergodic theory, real algebraic geometry*, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, vol. 202, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2001, p. 31–38.

- [Bih01b] ———, « Une sextique de l'espace projectif réel avec un grand nombre d'anses », *Rev. Mat. Complut.* **14** (2001), no. 2, p. 439–461.
- [BK89] J. BOCHNAK & W. KUCHARZ – « Algebraic models of smooth manifolds », *Invent. Math.* **97** (1989), no. 3, p. 585–611.
- [BK91] ———, « Nonisomorphic algebraic models of a smooth manifold », *Math. Ann.* **290** (1991), no. 1, p. 1–2.
- [BK99] ———, « The Weierstrass approximation theorem for maps between real algebraic varieties », *Math. Ann.* **314** (1999), no. 4, p. 601–612.
- [BK10] ———, « Algebraic approximation of smooth maps », *Univ. Iagel. Acta Math.* (2010), no. 48, p. 9–40.
- [BKS82] J. BOCHNAK, W. KUCHARZ & M. SHIOTA – « The divisor class groups of some rings of global real analytic, Nash or rational regular functions », in *Real algebraic geometry and quadratic forms (Rennes, 1981)*, Lecture Notes in Math., vol. 959, Springer, Berlin-New York, 1982, p. 218–248.
- [BKS97] J. BOCHNAK, W. KUCHARZ & R. SILHOL – « Morphisms, line bundles and moduli spaces in real algebraic geometry », *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* (1997), no. 86, p. 5–65 (1998).
- [BKS00] ———, « Erratum to : “Morphisms, line bundles and moduli spaces in real algebraic geometry” [Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. No. 86, (1997), 5–65 (1998)] », *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* (2000), no. 92, p. 195 (2001).
- [BKVV13] M. BILSKI, W. KUCHARZ, A. VALETTE & G. VALETTE – « Vector bundles and regulous maps », *Math. Z.* **275** (2013), no. 1-2, p. 403–418.
- [BM76] E. BOMBIERI & D. MUMFORD – « Enriques' classification of surfaces in char. p . III », *Invent. Math.* **35** (1976), p. 197–232.
- [BM77] ———, « Enriques' classification of surfaces in char. p . II », in *Complex analysis and algebraic geometry*, Iwanami Shoten, Tokyo, 1977, p. 23–42.
- [BM92] R. BENEDETTI & A. MARIN – « Déchirures de variétés de dimension trois et la conjecture de Nash de rationalité en dimension trois », *Comment. Math. Helv.* **67** (1992), no. 4, p. 514–545.

- [BM07] F. BIHAN & F. MANGOLTE – « Topological types and real regular Jacobian elliptic surfaces », *Geom. Dedicata* **127** (2007), p. 57–73.
- [BM11] J. BLANC & F. MANGOLTE – « Geometrically rational real conic bundles and very transitive actions », *Compos. Math.* **147** (2011), no. 1, p. 161–187.
- [BM14] ———, « Cremona groups of real surfaces », in *Automorphisms in Birational and Affine Geometry*, Springer Proceedings in Mathematics & Statistics, vol. 79, Springer, 2014, p. 35–58.
- [BMP03] M. BOILEAU, S. MAILLOT & J. PORTI – *Three-dimensional orbifolds and their geometric structures*, Panoramas et Synthèses [Panoramas and Syntheses], vol. 15, Société Mathématique de France, Paris, 2003.
- [Bom73] E. BOMBIERI – « Canonical models of surfaces of general type », *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* (1973), no. 42, p. 171–219.
- [Bor60] A. BOREL – *Seminar on transformation groups*, With contributions by G. Bredon, E. E. Floyd, D. Montgomery, R. Palais. Annals of Mathematics Studies, No. 46, Princeton University Press, Princeton, N.J., 1960.
- [BR90] R. BENEDETTI & J.-J. RISLER – *Real algebraic and semi-algebraic sets*, Actualités Mathématiques. [Current Mathematical Topics], Hermann, Paris, 1990.
- [Bre72] G. E. BREDON – *Introduction to compact transformation groups*, Academic Press, New York-London, 1972, Pure and Applied Mathematics, Vol. 46.
- [Bru06] E. BRUGALLÉ – « Real plane algebraic curves with asymptotically maximal number of even ovals », *Duke Math. J.* **131** (2006), no. 3, p. 575–587.
- [BS64] A. BOREL & J.-P. SERRE – « Théorèmes de finitude en cohomologie galoisienne », *Comment. Math. Helv.* **39** (1964), p. 111–164.
- [BW69] G. E. BREDON & J. W. WOOD – « Non-orientable surfaces in orientable 3-manifolds », *Invent. Math.* **7** (1969), p. 83–110.

- [BW18a] O. BENOIST & O. WITTENBERG – « On the integral hodge conjecture for real varieties, I », Preprint, [arXiv:1801.00872](https://arxiv.org/abs/1801.00872) [math.AG], 2018.
- [BW18b] ———, « On the integral hodge conjecture for real varieties, II », Preprint, [arXiv:1801.00873](https://arxiv.org/abs/1801.00873) [math.AG], 2018.
- [Cam92] F. CAMPANA – « Connexité rationnelle des variétés de Fano », *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)* **25** (1992), no. 5, p. 539–545.
- [Car61] H. CARTAN – *Théorie élémentaire des fonctions analytiques d'une ou plusieurs variables complexes*, Avec le concours de Reiji Takahashi, Enseignement des Sciences. Hermann, Paris, 1961.
- [Cas01] G. CASTELNUOVO – « Le trasformazioni generatrici del gruppo cremoniano nel piano », *Atti della R. Accad. delle Scienze di Torino* **36** (1901), p. 861–874.
- [Cat03] F. CATANESE – « Moduli spaces of surfaces and real structures », *Ann. of Math. (2)* **158** (2003), no. 2, p. 577–592.
- [Cat08] ———, « Differentiable and deformation type of algebraic surfaces, real and symplectic structures », in *Symplectic 4-manifolds and algebraic surfaces*, Lecture Notes in Math., vol. 1938, Springer, Berlin, 2008, p. 55–167.
- [CD13] D. CERVEAU & J. DÉSERTI – *Transformations birationnelles de petit degré*, Cours Spécialisés [Specialized Courses], vol. 19, Société Mathématique de France, Paris, 2013.
- [CF03] F. CATANESE & P. FREDIANI – « Real hyperelliptic surfaces and the orbifold fundamental group », *J. Inst. Math. Jussieu* **2** (2003), no. 2, p. 163–233.
- [Che78] A. CHENCINER – *Courbes algébriques planes*, Publications Mathématiques de l'Université Paris VII, vol. 4, Université de Paris VII U.E.R. de Mathématiques, Paris, 1978, Ré-édité en 2008 chez Springer-Verlag.
- [CL13] A. CHAMBERT-LOIR – *Algèbre commutative et introduction à la géométrie algébrique*, Cours de troisième cycle, Paris VI, 2013, <http://www.math.u-psud.fr/~chambert/enseignement/2013-14/aceiga/aceiga.pdf>.

- [CLO15] D. A. COX, J. LITTLE & D. O'SHEA – *Ideals, varieties, and algorithms*, fourth éd., Undergraduate Texts in Mathematics, Springer, Cham, 2015, An introduction to computational algebraic geometry and commutative algebra.
- [CM08] F. CATANESE & F. MANGOLTE – « Real singular del Pezzo surfaces and 3-folds fibred by rational curves. I », *Michigan Math. J.* **56** (2008), no. 2, p. 357–373.
- [CM09] ———, « Real singular del Pezzo surfaces and 3-folds fibred by rational curves. II », *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4)* **42** (2009), no. 4, p. 531–557.
- [Com12] A. COMESSATTI – « Fondamenti per la geometria sopra le superficie razionali dal punto di vista reale », *Math. Ann.* **73** (1912), no. 1, p. 1–72.
- [Com14] ———, « Sulla connessione delle superficie razionali reali », *Annali di Math.* **23** (1914), no. 3, p. 215–283.
- [Com25] ———, « Sulle varietà abeliane reali », *Ann. Mat. Pura Appl.* **2** (1925), no. 1, p. 67–106.
- [Com26] ———, « Sulle varietà abeliane reali », *Ann. Mat. Pura Appl.* **3** (1926), no. 1, p. 27–71.
- [Com28] ———, « Sulla connessione delle superficie algebriche reali », *Ann. Mat. Pura Appl.* **5** (1928), no. 1, p. 299–317.
- [Cos92] M. COSTE – « Épaississement d'une hypersurface algébrique réelle », *Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci.* **68** (1992), no. 7, p. 175–180.
- [Cos02] ———, « An introduction to semialgebraic geometry », <https://perso.univ-rennes1.fr/michel.coste/polyens/SAG.pdf>, 2002.
- [CS53] H. CARTAN & J.-P. SERRE – « Un théorème de finitude concernant les variétés analytiques compactes », *C. R. Acad. Sci. Paris* **237** (1953), p. 128–130.
- [CS10] D. I. CARTWRIGHT & T. STEGER – « Enumeration of the 50 fake projective planes », *C. R. Math. Acad. Sci. Paris* **348** (2010), no. 1-2, p. 11–13.

- [Deb01] O. DEBARRE – *Higher-dimensional algebraic geometry*, Universitext, Springer-Verlag, New York, 2001.
- [Deg12] A. DEGTYAREV – *Topology of algebraic curves. An approach via dessins d'enfants*, De Gruyter Studies in Mathematics, vol. 44, Walter de Gruyter & Co., Berlin, 2012.
- [Del73] P. DELIGNE – « Le Théorème de Noether », in *SGA 7 II*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 340, Springer, Berlin, 1973, p. 328–340.
- [DFM18] A. DUBOULOZ, G. FREUDENBURG & L. MOSER-JAUSLIN – « Algebraic vector bundles on the 2-sphere and smooth rational varieties with infinitely many real forms », Preprint, [arXiv:1807.05885](https://arxiv.org/abs/1807.05885) [math.AG], 2018.
- [Die70] J. DIEUDONNÉ – *Éléments d'analyse. Tome III : Chapitres XVI et XVII*, Cahiers Scientifiques, Fasc. XXXIII, Gauthier-Villars Éditeur, Paris, 1970.
- [DIK00] A. DEGTYAREV, I. ITENBERG & V. KHARLAMOV – *Real Enriques surfaces*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1746, Springer-Verlag, Berlin, 2000.
- [DIK08] ———, « On deformation types of real elliptic surfaces », *Amer. J. Math.* **130** (2008), no. 6, p. 1561–1627.
- [Dim85] A. DIMCA – « Monodromy and Betti numbers of weighted complete intersections », *Topology* **24** (1985), no. 3, p. 369–374.
- [DIZ14] A. DEGTYAREV, I. ITENBERG & V. ZVONILOV – « Real trigonal curves and real elliptic surfaces of type I », *J. Reine Angew. Math.* **686** (2014), p. 221–246.
- [DK81] H. DELFS & M. KNEBUSCH – « Semialgebraic topology over a real closed field. II. Basic theory of semialgebraic spaces », *Math. Z.* **178** (1981), no. 2, p. 175–213.
- [DK96a] A. DEGTYAREV & V. KHARLAMOV – « Halves of a real Enriques surface », *Comment. Math. Helv.* **71** (1996), no. 4, p. 628–663.
- [DK96b] ———, « Topological classification of real Enriques surfaces », *Topology* **35** (1996), no. 3, p. 711–729.

- [DK00] ———, « Topological properties of real algebraic varieties : Rokhlin's way », *Uspekhi Mat. Nauk* **55** (2000), no. 4(334), p. 129–212.
- [DK02] ———, « Real rational surfaces are quasi-simple », *J. Reine Angew. Math.* **551** (2002), p. 87–99.
- [DM16] A. DUBOULOZ & F. MANGOLTE – « Real frontiers of fake planes », *Eur. J. Math.* **2** (2016), no. 1, p. 140–168.
- [DM17] ———, « Fake real planes : exotic affine algebraic models of \mathbb{R}^2 », *Selecta Math. (N.S.)* **23** (2017), p. 1619–1668.
- [DM18] ———, « Algebraic models of the line in the real affine plane », Preprint, [arXiv:1805.11406](https://arxiv.org/abs/1805.11406) [math.AG], 2018.
- [DO19] T.-C. DINH & K. OGUIISO – « A surface with discrete and nonfinitely generated automorphism group », *Duke Math. J.* **168** (2019), no. 6, p. 941–966.
- [Dol90] P. DOLBEAULT – *Analyse complexe*, Collection Maîtrise de Mathématiques Pures. [Collection of Pure Mathematics for the Master's Degree], Masson, Paris, 1990.
- [DPT80] M. DEMAZURE, H. C. PINKHAM & B. TEISSIER (éds.) – *Séminaire sur les Singularités des Surfaces*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 777, Springer, Berlin, 1980, Held at the Centre de Mathématiques de l'École Polytechnique, Palaiseau, 1976–1977.
- [Duc14] A. DUCROS – *Introduction à la théorie des schémas*, Preprint, 2014, [arXiv:1401.0959](https://arxiv.org/abs/1401.0959) [math.AG].
- [Edm81] A. L. EDMONDS – « Orientability of fixed point sets », *Proc. Amer. Math. Soc.* **82** (1981), no. 1, p. 120–124.
- [EGH00] Y. ELIASHBERG, A. GIVENTAL & H. HOFER – « Introduction to symplectic field theory », *Geom. Funct. Anal.* (2000), no. Special Volume, Part II, p. 560–673, GAFA 2000 (Tel Aviv, 1999).
- [Ehr51] C. EHRESMANN – « Les connexions infinitésimales dans un espace fibré différentiable », in *Colloque de topologie (espaces fibrés)*, Bruxelles, 1950, Georges Thone, Liège; Masson et Cie., Paris, 1951, p. 29–55.

- [Ehr95] ———, « Les connexions infinitésimales dans un espace fibré différentiable », in *Séminaire Bourbaki, Vol. 1*, Soc. Math. France, Paris, 1995, p. Exp. No. 24, 153–168.
- [Eis95] D. EISENBUD – *Commutative algebra*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 150, Springer-Verlag, New York, 1995, With a view toward algebraic geometry.
- [EV92] H. ESNAULT & E. VIEHWEG – *Lectures on vanishing theorems*, DMV Seminar, vol. 20, Birkhäuser Verlag, Basel, 1992.
- [FHMM16] G. FICHOU, J. HUISMAN, F. MANGOLTE & J.-P. MONNIER – « Fonctions régulières », *J. Reine Angew. Math.* **718** (2016), p. 103–151.
- [FK80] H. M. FARKAS & I. KRA – *Riemann surfaces*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 71, Springer-Verlag, New York, 1980.
- [Flo60] E. E. FLOYD – « Periodic maps via smith theory », in *Seminar on transformation groups* (A. Borel, éd.), Princeton University Press, Princeton, N.J., 1960, p. 35–48.
- [FM94] R. FRIEDMAN & J. W. MORGAN – *Smooth four-manifolds and complex surfaces*, *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3) [Results in Mathematics and Related Areas (3)]*, vol. 27, Springer-Verlag, Berlin, 1994.
- [FMQ17] G. FICHOU, J.-P. MONNIER & R. QUAREZ – « Continuous functions on the plane regular after one blowing-up », *Math. Z.* **285** (2017), no. 1-2, p. 287–323.
- [FQ90] M. H. FREEDMAN & F. QUINN – *Topology of 4-manifolds*, Princeton Mathematical Series, vol. 39, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1990.
- [Fuj82] T. FUJITA – « On the topology of noncomplete algebraic surfaces », *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math.* **29** (1982), no. 3, p. 503–566.
- [Ful89] W. FULTON – *Algebraic curves*, Advanced Book Classics, Addison-Wesley Publishing Company Advanced Book Program, Redwood City, CA, 1989, Notes written with the collaboration of Richard Weiss, Reprint of 1969 original.

- [Ful98] ———, *Intersection theory*, second éd., Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge. A Series of Modern Surveys in Mathematics [Results in Mathematics and Related Areas. 3rd Series. A Series of Modern Surveys in Mathematics], vol. 2, Springer-Verlag, Berlin, 1998.
- [Gab00] A. GABARD – « Topologie des courbes algébriques réelles : une question de Felix Klein », *Enseign. Math. (2)* **46** (2000), no. 1-2, p. 139–161.
- [Gab04] ———, « Sur la topologie et la géométrie des courbes algébriques réelles », 2004, Thèse de l'Université de Genève <http://archive-ouverte.unige.ch/unige:273>.
- [Gab06] ———, « Sur la représentation conforme des surfaces de Riemann à bord et une caractérisation des courbes séparantes », *Comment. Math. Helv.* **81** (2006), no. 4, p. 945–964.
- [GH78] P. GRIFFITHS & J. HARRIS – *Principles of algebraic geometry*, Wiley-Interscience [John Wiley & Sons], New York, 1978, Pure and Applied Mathematics.
- [God58] R. GODEMENT – *Topologie algébrique et théorie des faisceaux*, Actualit'es Sci. Ind. No. 1252. Publ. Math. Univ. Strasbourg. No. 13, Hermann, Paris, 1958.
- [GP99] R. V. GURJAR & C. R. PRADEEP – « \mathbf{Q} -homology planes are rational. III », *Osaka J. Math.* **36** (1999), no. 2, p. 259–335.
- [GPS97] R. V. GURJAR, C. R. PRADEEP & A. R. SHASTRI – « On rationality of logarithmic \mathbf{Q} -homology planes. II », *Osaka J. Math.* **34** (1997), no. 3, p. 725–743.
- [GR65] R. C. GUNNING & H. ROSSI – *Analytic functions of several complex variables*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1965.
- [GR79] H. GRAUERT & R. A. REMMERT – *Theory of Stein spaces*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], vol. 236, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1979, Translated from the German by Alan Huckleberry.
- [Gre67] M. J. GREENBERG – *Lectures on algebraic topology*, W. A. Benjamin, Inc., New York-Amsterdam, 1967.

- [Gro57] A. GROTHENDIECK – « Sur quelques points d’algèbre homologique », *Tôhoku Math. J. (2)* **9** (1957), p. 119–221.
- [Gro95] ———, « Technique de descente et théorèmes d’existence en géométrie algébrique. I. Généralités. Descente par morphismes fidèlement plats », in *Séminaire Bourbaki, Vol. 5*, Soc. Math. France, Paris, 1995, p. Exp. No. 190, 299–327.
- [Gud69] D. A. GUDKOV – « Complete topological classification of the disposition of ovals of a sixth order curve in the projective plane », *Gorkov. Gos. Univ. Učen. Zap. Vyp.* **87** (1969), p. 118–153.
- [Gud71] ———, « Construction of a new series of M -curves », *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **200** (1971), p. 1269–1272.
- [Haa95] B. HAAS – « Les multilucarnes : nouveaux contre-exemples à la conjecture de Ragsdale », *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **320** (1995), no. 12, p. 1507–1512.
- [Har74] V. M. HARLAMOV – « A generalized Petrovskii inequality », *Funkcional. Anal. i Priložen.* **8** (1974), no. 2, p. 50–56.
- [Har76] ———, « Topological types of nonsingular surfaces of degree 4 in $\mathbf{R}P^3$ », *Funkcional. Anal. i Priložen.* **10** (1976), no. 4, p. 55–68.
- [Har77] R. HARTSHORNE – *Algebraic geometry*, Springer-Verlag, New York, 1977, Graduate Texts in Mathematics, No. 52.
- [Hat02] A. HATCHER – *Algebraic topology*, Cambridge University Press, Cambridge, 2002.
- [Hem76] J. HEMPEL – *3-Manifolds*, Princeton University Press, Princeton, N. J., 1976, Ann. of Math. Studies, No. 86.
- [Hir51] F. HIRZEBRUCH – « Über eine Klasse von einfachzusammenhängenden komplexen Mannigfaltigkeiten », *Math. Ann.* **124** (1951), p. 77–86.
- [Hir64] H. HIRONAKA – « Resolution of singularities of an algebraic variety over a field of characteristic zero. I, II », *Ann. of Math. (2)* **79** (1964), 109–203; *ibid. (2)* **79** (1964), p. 205–326.

- [Hir66] F. HIRZEBRUCH – *Topological methods in algebraic geometry*, Third enlarged edition. New appendix and translation from the second German edition by R. L. E. Schwarzenberger, with an additional section by A. Borel. Die Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, Band 131, Springer-Verlag New York, Inc., New York, 1966.
- [Hir69] ———, « The signature of ramified coverings », in *Global Analysis (Papers in Honor of K. Kodaira)*, Univ. Tokyo Press, Tokyo, 1969, p. 253–265.
- [Hir75] H. HIRONAKA – « Triangulations of algebraic sets », in *Algebraic geometry (Proc. Sympos. Pure Math., Vol. 29, Humboldt State Univ., Arcata, Calif., 1974)*, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1975, p. 165–185.
- [Hir76] M. W. HIRSCH – *Differential topology*, Springer-Verlag, New York, 1976, Graduate Texts in Mathematics, No. 33.
- [HM05a] J. HUISMAN & F. MANGOLTE – « Every connected sum of lens spaces is a real component of a uniruled algebraic variety », *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **55** (2005), no. 7, p. 2475–2487.
- [HM05b] ———, « Every orientable Seifert 3-manifold is a real component of a uniruled algebraic variety », *Topology* **44** (2005), no. 1, p. 63–71.
- [HM09] ———, « The group of automorphisms of a real rational surface is n -transitive », *Bull. Lond. Math. Soc.* **41** (2009), no. 3, p. 563–568.
- [HM10] ———, « Automorphisms of real rational surfaces and weighted blow-up singularities », *Manuscripta Math.* **132** (2010), no. 1-2, p. 1–17.
- [Hor75] E. HORIKAWA – « On deformations of quintic surfaces », *Invent. Math.* **31** (1975), no. 1, p. 43–85.
- [HP52] W. V. D. HODGE & D. PEDOE – *Methods of algebraic geometry. Vol. II. Book III : General theory of algebraic varieties in projective space. Book IV : Quadrics and Grassmann varieties*, Cambridge, at the University Press, 1952.

- [HR96] B. HUGHES & A. RANICKI – *Ends of complexes*, Cambridge Tracts in Mathematics, vol. 123, Cambridge University Press, Cambridge, 1996.
- [Hu59] S.-T. HU – *Homotopy theory*, Pure and Applied Mathematics, Vol. VIII, Academic Press, New York, 1959.
- [Hui94] J. HUISMAN – « Cycles on real abelian varieties », Prépublication de l'Institut Fourier 271, Grenoble, 1994.
- [Hui95] ———, « On real algebraic vector bundles », *Math. Z.* **219** (1995), no. 3, p. 335–342.
- [Hui11] ———, « Topology of real algebraic varieties; some recent results on rational surfaces », in *Real Algebraic Geometry, Rennes : France (2011)*, Prépublication, 2011, hal-00609687, p. 51–62.
- [IMS09] I. ITENBERG, G. MIKHALKIN & E. SHUSTIN – *Tropical algebraic geometry*, second éd., Oberwolfach Seminars, vol. 35, Birkhäuser Verlag, Basel, 2009.
- [Isk65] V. A. ISKOVSKIĬ – « On birational forms of rational surfaces », *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.* **29** (1965), p. 1417–1433.
- [Isk67] ———, « Rational surfaces with a pencil of rational curves », *Mat. Sb. (N.S.)* **74 (116)** (1967), p. 608–638.
- [Ite93] I. ITENBERG – « Contre-exemples à la conjecture de Ragsdale », *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **317** (1993), no. 3, p. 277–282.
- [Ite95] ———, « Counter-examples to Ragsdale conjecture and T -curves », in *Real algebraic geometry and topology (East Lansing, MI, 1993)*, Contemp. Math., vol. 182, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1995, p. 55–72.
- [JO69] K. JÄNICH & E. OSSA – « On the signature of an involution », *Topology* **8** (1969), p. 27–30.
- [Jos06] J. JOST – *Compact Riemann surfaces*, third éd., Universitext, Springer-Verlag, Berlin, 2006, An introduction to contemporary mathematics.

- [JP00] N. JOGLAR-PRIETO – « Rational surfaces and regular maps into the 2-dimensional sphere », *Math. Z.* **234** (2000), no. 2, p. 399–405.
- [JPM04] N. JOGLAR-PRIETO & F. MANGOLTE – « Real algebraic morphisms and del Pezzo surfaces of degree 2 », *J. Algebraic Geom.* **13** (2004), no. 2, p. 269–285.
- [Kam75] T. KAMBAYASHI – « On the absence of nontrivial separable forms of the affine plane », *J. Algebra* **35** (1975), p. 449–456.
- [Kas77] A. KAS – « On the deformation types of regular elliptic surfaces », in *Complex analysis and algebraic geometry*, Iwanami Shoten, Tokyo, 1977, p. 107–111.
- [Kaw92] Y. KAWAMATA – « Boundedness of \mathbf{Q} -Fano threefolds », in *Proceedings of the International Conference on Algebra, Part 3 (Novosibirsk, 1989)* (Providence, RI), Contemp. Math., vol. 131, Amer. Math. Soc., 1992, p. 439–445.
- [KB32] B. O. KOOPMAN & A. B. BROWN – « On the covering of analytic loci by complexes », *Trans. Amer. Math. Soc.* **34** (1932), no. 2, p. 231–251.
- [KI96] V. KHARLAMOV & I. ITENBERG – « Towards the maximal number of components of a nonsingular surface of degree 5 in \mathbf{RP}^3 », in *Topology of real algebraic varieties and related topics*, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, vol. 173, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1996, p. 111–118.
- [KK02] V. S. KULIKOV & V. M. KHARLAMOV – « On real structures on rigid surfaces », *Izv. Ross. Akad. Nauk Ser. Mat.* **66** (2002), no. 1, p. 133–152.
- [KK16] W. KUCHARZ & K. KURDYKA – « Some conjectures on continuous rational maps into spheres », *Topology Appl.* **208** (2016), p. 17–29.
- [KK18] ———, « Stratified-algebraic vector bundles », *J. Reine Angew. Math.* **745** (2018), p. 105–154.
- [KKK18] J. KOLLÁR, W. KUCHARZ & K. KURDYKA – « Curve-rational functions », *Math. Ann.* **370** (2018), no. 1-2, p. 39–69.

- [Kle82] F. KLEIN – « Ueber Riemann's Theorie der algebraischen Functionen und ihrer Integrale. », Leipzig. Teubner (1882)., 1882.
- [Kle66] S. L. KLEIMAN – « Toward a numerical theory of ampleness », *Ann. of Math. (2)* **84** (1966), p. 293–344.
- [KM61] M. A. KERVAIRE & J. W. MILNOR – « On 2-spheres in 4-manifolds », *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.* **47** (1961), p. 1651–1657.
- [KM09] J. KOLLÁR & F. MANGOLTE – « Cremona transformations and diffeomorphisms of surfaces », *Adv. Math.* **222** (2009), no. 1, p. 44–61.
- [KM12] K. KUYUMZHIYAN & F. MANGOLTE – « Infinitely transitive actions on real affine suspensions », *J. Pure Appl. Algebra* **216** (2012), no. 10, p. 2106–2112.
- [KM16] J. KOLLÁR & F. MANGOLTE – « Approximating curves on real rational surfaces », *J. Algebraic Geom.* **25** (2016), p. 549–570.
- [KMM92] J. KOLLÁR, Y. MIYAOKA & S. MORI – « Rational connectedness and boundedness of Fano manifolds », *J. Differential Geom.* **36** (1992), no. 3, p. 765–779.
- [KN15] J. KOLLÁR & K. NOWAK – « Continuous rational functions on real and p-adic varieties », *Math. Z.* **279** (2015), p. 85–97.
- [Kne76a] M. KNEBUSCH – « On algebraic curves over real closed fields. I », *Math. Z.* **150** (1976), no. 1, p. 49–70.
- [Kne76b] ———, « On algebraic curves over real closed fields. II », *Math. Z.* **151** (1976), no. 2, p. 189–205.
- [Kod53] K. KODAIRA – « On a differential-geometric method in the theory of analytic stacks », *Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A.* **39** (1953), p. 1268–1273.
- [Kod54] ———, « On Kähler varieties of restricted type (an intrinsic characterization of algebraic varieties) », *Ann. of Math. (2)* **60** (1954), p. 28–48.
- [Kod64] ———, « On the structure of compact complex analytic surfaces. I », *Amer. J. Math.* **86** (1964), p. 751–798.

- [Kol96] J. KOLLÁR – *Rational curves on algebraic varieties*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge. A Series of Modern Surveys in Mathematics [Results in Mathematics and Related Areas. 3rd Series. A Series of Modern Surveys in Mathematics], vol. 32, Springer-Verlag, Berlin, 1996.
- [Kol97] ———, « Real algebraic surfaces », [arXiv:alg-geom/9712003](https://arxiv.org/abs/alg-geom/9712003), 1997.
- [Kol98a] ———, « The Nash conjecture for threefolds », *Electron. Res. Announc. Amer. Math. Soc.* **4** (1998), p. 63–73 (electronic).
- [Kol98b] ———, « Real algebraic threefolds. I. Terminal singularities », *Collect. Math.* **49** (1998), no. 2-3, p. 335–360, Dedicated to the memory of Fernando Serrano.
- [Kol99a] ———, « Real algebraic threefolds. II. Minimal model program », *J. Amer. Math. Soc.* **12** (1999), no. 1, p. 33–83.
- [Kol99b] ———, « Real algebraic threefolds. III. Conic bundles », *J. Math. Sci. (New York)* **94** (1999), no. 1, p. 996–1020, Algebraic geometry, 9.
- [Kol00] ———, « Real algebraic threefolds. IV. Del Pezzo fibrations », in *Complex analysis and algebraic geometry*, de Gruyter, Berlin, 2000, p. 317–346.
- [Kol01a] ———, « The topology of real algebraic varieties », in *Current developments in mathematics, 2000*, Int. Press, Somerville, MA, 2001, p. 197–231.
- [Kol01b] ———, « The topology of real and complex algebraic varieties », in *Taniguchi Conference on Mathematics Nara '98*, Adv. Stud. Pure Math., vol. 31, Math. Soc. Japan, Tokyo, 2001, p. 127–145.
- [Kol01c] ———, « Which are the simplest algebraic varieties? », *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)* **38** (2001), no. 4, p. 409–433.
- [Kol02] ———, « The Nash conjecture for nonprojective threefolds », in *Symposium in Honor of C. H. Clemens (Salt Lake City, UT, 2000)*, Contemp. Math., vol. 312, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2002, p. 137–152.
- [Kol07] ———, *Lectures on resolution of singularities*, Annals of Mathematics Studies, vol. 166, Princeton University Press, Princeton, NJ, 2007.

- [Kol17] ———, « Nash's work in algebraic geometry », *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)* **54** (2017), no. 2, p. 307–324.
- [Kra83] V. A. KRASNOV – « Harnack-Thom inequalities for mappings of real algebraic varieties », *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.* **47** (1983), no. 2, p. 268–297.
- [Kra06] ———, « Rigid isotopy classification of real three-dimensional cubics », *Izv. Ross. Akad. Nauk Ser. Mat.* **70** (2006), no. 4, p. 91–134.
- [Kra09] ———, « On the topological classification of real three-dimensional cubics », *Mat. Zametki* **85** (2009), no. 6, p. 886–893.
- [KS04] J. KOLLÁR & F.-O. SCHREYER – « Real Fano 3-folds of type V_{22} », in *The Fano Conference*, Univ. Torino, Turin, 2004, p. 515–531.
- [Kuc96] W. KUCHARZ – « Algebraic equivalence and homology classes of real algebraic cycles », *Math. Nachr.* **180** (1996), p. 135–140.
- [Kuc99] ———, « Algebraic morphisms into rational real algebraic surfaces », *J. Algebraic Geom.* **8** (1999), no. 3, p. 569–579.
- [Kuc09] ———, « Rational maps in real algebraic geometry », *Adv. Geom.* **9** (2009), no. 4, p. 517–539.
- [Kuc13] ———, « Regular versus continuous rational maps », *Topology Appl.* **160** (2013), no. 12, p. 1375–1378.
- [Kuc14a] ———, « Approximation by continuous rational maps into spheres », *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)* **16** (2014), no. 8, p. 1555–1569.
- [Kuc14b] ———, « Continuous rational maps into the unit 2-sphere », *Arch. Math. (Basel)* **102** (2014), no. 3, p. 257–261.
- [Kuc16a] ———, « Continuous rational maps into spheres », *Math. Z.* **283** (2016), no. 3-4, p. 1201–1215.
- [Kuc16b] ———, « Stratified-algebraic vector bundles of small rank », *Arch. Math. (Basel)* **107** (2016), no. 3, p. 239–249.

- [Laf96] J. LAFONTAINE – *Introduction aux variétés différentielles.*, Grenoble : Presses Universitaires de Grenoble; Les Ulis : EDP Sciences, 1996 (French).
- [Laf15] ———, *An introduction to differential manifolds*, second éd., Springer, Cham, 2015.
- [Lau71] H. B. LAUFER – *Normal two-dimensional singularities*, Princeton University Press, Princeton, N.J., 1971, Annals of Mathematics Studies, No. 71.
- [Laz04] R. LAZARSFELD – *Positivity in algebraic geometry. I*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge. A Series of Modern Surveys in Mathematics [Results in Mathematics and Related Areas. 3rd Series. A Series of Modern Surveys in Mathematics], vol. 48, Springer-Verlag, Berlin, 2004, Classical setting : line bundles and linear series.
- [Lef71] S. LEFSCHETZ – *Selected papers*, Chelsea Publishing Co., Bronx, N.Y., 1971.
- [Les18] J. LESIEUTRE – « A projective variety with discrete, non-finitely generated automorphism group », *Invent. Math.* **212** (2018), no. 1, p. 189–211.
- [Liu02] Q. LIU – *Algebraic geometry and arithmetic curves*, Oxford Graduate Texts in Mathematics, vol. 6, Oxford University Press, Oxford, 2002, Translated from the French by Reinie Ern e, Oxford Science Publications.
- [LM89] H. B. LAWSON, JR. & M.-L. MICHELSON – *Spin geometry*, Princeton Mathematical Series, vol. 38, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1989.
- [Łoj64] S. ŁOJASIEWICZ – « Triangulation of semi-analytic sets », *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa (3)* **18** (1964), p. 449–474.
- [LV06] Y. LASZLO & C. VITERBO – « Estimates of characteristic numbers of real algebraic varieties », *Topology* **45** (2006), no. 2, p. 261–280.
- [LW33] S. LEFSCHETZ & J. H. C. WHITEHEAD – « On analytical complexes », *Trans. Amer. Math. Soc.* **35** (1933), no. 2, p. 510–517.

- [Mal67] B. MALGRANGE – *Ideals of differentiable functions*, Tata Institute of Fundamental Research Studies in Mathematics, No. 3, Tata Institute of Fundamental Research, Bombay ; Oxford University Press, London, 1967.
- [Man67] Y. I. MANIN – « Rational surfaces over perfect fields. II », *Mat. Sb. (N.S.)* **72 (114)** (1967), p. 161–192.
- [Man86] ———, *Cubic forms*, second éd., North-Holland Mathematical Library, vol. 4, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1986, Algebra, geometry, arithmetic, Translated from the Russian by M. Hazewinkel.
- [Man94] F. MANGOLTE – « Une surface réelle de degré 5 dont l’homologie est entièrement engendrée par des cycles algébriques », *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **318** (1994), no. 4, p. 343–346.
- [Man97] ———, « Cycles algébriques sur les surfaces $K3$ réelles », *Math. Z.* **225** (1997), no. 4, p. 559–576.
- [Man00] ———, « Surfaces elliptiques réelles et inégalité de Ragsdale-Viro », *Math. Z.* **235** (2000), no. 2, p. 213–226.
- [Man01] M. MANETTI – « On the moduli space of diffeomorphic algebraic surfaces », *Invent. Math.* **143** (2001), no. 1, p. 29–76.
- [Man03] F. MANGOLTE – « Cycles algébriques et topologie des surfaces bielliptiques réelles », *Comment. Math. Helv.* **78** (2003), no. 2, p. 385–393.
- [Man04] ———, « Real algebraic geometry of some 2-dimensional and 3-dimensional varieties », Habilitation à diriger des recherches, Université de Savoie, June 2004, <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00006900/file/tel-00006900.pdf>.
- [Man06] ———, « Real algebraic morphisms on 2-dimensional conic bundles », *Adv. Geom.* **6** (2006), no. 2, p. 199–213.
- [Man14] ———, « Topologie des variétés algébriques réelles de dimension 3 », *Gaz. Math.* **139** (2014), p. 5–34.
- [Man17a] ———, « Real rational surfaces », in *Real Algebraic Geometry*, vol. 51, Panoramas et synthèses, 2017, p. 1–26.

- [Man17b] ———, *Variétés algébriques réelles*, Cours Spécialisés [Specialized Courses], vol. 24, Société Mathématique de France, Paris, 2017, viii + 484 pages.
- [Man20] ———, *Real algebraic varieties*, Springer Monographs in Mathematics, Springer, 2020, To appear.
- [Mar80] A. MARIN – « Quelques remarques sur les courbes algébriques planes réelles », in *Seminar on Real Algebraic Geometry (Paris, 1977/1978 and Paris, 1978/1979)*, Publ. Math. Univ. Paris VII, vol. 9, Univ. Paris VII, Paris, 1980, p. 51–68.
- [Mas67] W. S. MASSEY – *Algebraic topology : An introduction*, Harcourt, Brace & World, Inc., New York, 1967.
- [Maz86] B. MAZUR – « Arithmetic on curves », *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)* **14** (1986), no. 2, p. 207–259.
- [MH73] J. MILNOR & D. HUSEMOLLER – *Symmetric bilinear forms*, Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1973, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Band 73.
- [Mik97] G. MIKHALKIN – « Blowup equivalence of smooth closed manifolds », *Topology* **36** (1997), no. 1, p. 287–299.
- [Mil62] J. MILNOR – « A unique decomposition theorem for 3-manifolds », *Amer. J. Math.* **84** (1962), p. 1–7.
- [Mil63a] ———, *Morse theory*, Based on lecture notes by M. Spivak and R. Wells. Annals of Mathematics Studies, No. 51, Princeton University Press, Princeton, N.J., 1963.
- [Mil63b] ———, « Spin structures on manifolds », *Enseignement Math. (2)* **9** (1963), p. 198–203.
- [Mil64] ———, « On the Betti numbers of real varieties », *Proc. Amer. Math. Soc.* **15** (1964), p. 275–280.
- [Mil04] ———, « Vers la conjecture de Poincaré et la classification des variétés de dimension 3 », *Gaz. Math.* (2004), no. 99, p. 13–25, Translated from Notices Amer. Math. Soc. **50** (2003), no. 10, 1226–1233.

- [Moř66a] B. G. MOŘEZON – « On n -dimensional compact complex manifolds having n algebraically independent meromorphic functions. I », *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.* **30** (1966), p. 133–174.
- [Moř66b] ———, « On n -dimensional compact complex manifolds having n algebraically independent meromorphic functions. II », *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.* **30** (1966), p. 345–386.
- [Moř66c] ———, « On n -dimensional compact complex manifolds having n algebraically independent meromorphic functions. III », *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.* **30** (1966), p. 621–656.
- [Moi67] B. MOISHEZON – « On n -dimensional compact varieties with n independent meromorphic functions », *Amer. Math. Soc. Translations* **63** (1967), p. 51–177.
- [Mon18] J.-P. MONNIER – « Semi-algebraic geometry with rational continuous functions », *Math. Ann.* **372** (2018), no. 3-4, p. 1041–1080.
- [MS74] J. W. MILNOR & J. D. STASHEFF – *Characteristic classes*, Princeton University Press, Princeton, N. J., 1974, Annals of Mathematics Studies, No. 76.
- [MT86] R. MNEIMNÉ & F. TESTARD – *Introduction à la théorie des groupes de Lie classiques*, Collection Méthodes. [Methods Collection], Hermann, Paris, 1986.
- [MT19] L. MOSER-JAUSLIN & R. TERPEREAU – « Real structures on symmetric spaces », Preprint, [arXiv:1904.10723](https://arxiv.org/abs/1904.10723) [math.AG], 2019.
- [MTB18] L. MOSER-JAUSLIN, R. TERPEREAU & M. BOROVOI – « Real structures on horospherical varieties », Preprint, [arXiv:1808.10793](https://arxiv.org/abs/1808.10793) [math.AG], 2018.
- [Mum69] D. MUMFORD – « Enriques' classification of surfaces in char p . I », in *Global Analysis (Papers in Honor of K. Kodaira)*, Univ. Tokyo Press, Tokyo, 1969, p. 325–339.
- [Mum79] D. MUMFORD – « An algebraic surface with K ample, $(K^2) = 9$, $p_g = q = 0$ », *Amer. J. Math.* **101** (1979), no. 1, p. 233–244.

- [Mun84] J. R. MUNKRES – *Elements of algebraic topology*, Addison-Wesley Publishing Company, Menlo Park, CA, 1984.
- [MvH98] F. MANGOLTE & J. VAN HAMEL – « Algebraic cycles and topology of real Enriques surfaces », *Compositio Math.* **110** (1998), no. 2, p. 215–237.
- [MW12] F. MANGOLTE & J.-Y. WELSCHINGER – « Do uniruled six-manifolds contain Sol Lagrangian submanifolds? », *Int. Math. Res. Not. IMRN* (2012), no. 7, p. 1569–1602.
- [Nas52] J. NASH – « Real algebraic manifolds », *Ann. of Math. (2)* **56** (1952), p. 405–421.
- [Nat99] S. M. NATANZON – « Moduli of real algebraic curves and their superanalogues. Spinors and Jacobians of real curves », *Uspekhi Mat. Nauk* **54** (1999), no. 6(330), p. 3–60.
- [Nee89] A. NEEMAN – « Ueda theory : theorems and problems », *Mem. Amer. Math. Soc.* **81** (1989), no. 415, p. vi+123.
- [Nik83] V. V. NIKULIN – « Involutions of integer quadratic forms and their applications to real algebraic geometry », *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.* **47** (1983), no. 1, p. 109–188.
- [Nik96] ———, « On the topological classification of real Enriques surfaces. I », in *Topology of real algebraic varieties and related topics*, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, vol. 173, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1996, p. 187–201.
- [Now17] K. J. NOWAK – « Some results of algebraic geometry over Henselian rank one valued fields », *Selecta Math. (N.S.)* **23** (2017), no. 1, p. 455–495.
- [Oka50] K. OKA – « Sur les fonctions analytiques de plusieurs variables. VII. Sur quelques notions arithmétiques », *Bull. Soc. Math. France* **78** (1950), p. 1–27.
- [Ore01] S. Y. OREVKOV – « Real quintic surface with 23 components », *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **333** (2001), no. 2, p. 115–118.
- [Ore03] S. Y. OREVKOV – « Riemann existence theorem and construction of real algebraic curves », *Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. (6)* **12** (2003), no. 4, p. 517–531.

- [Per81] U. PERSSON – « Chern invariants of surfaces of general type », *Compositio Math.* **43** (1981), no. 1, p. 3–58.
- [Per82] ———, « Horikawa surfaces with maximal Picard numbers », *Math. Ann.* **259** (1982), no. 3, p. 287–312.
- [Per95] D. PERRIN – *Géométrie algébrique*, Savoirs Actuels. [Current Scholarship], InterEditions, Paris, 1995, Une introduction. [An introduction].
- [Pet33] I. G. PETROVSKY – « Sur la topologie des courbes réelles et algébriques », *C. R. Acad. Sci. Paris* **197** (1933), p. 1270–1272.
- [Pet38] ———, « On the topology of real plane algebraic curves », *Ann. of Math. (2)* **39** (1938), no. 1, p. 189–209.
- [PP12] P. POPESCU-PAMPU – « La dualité de Poincaré », *Images des Mathématiques* (2012).
- [PP17] A. PARUSIŃSKI & L. PĂUNESCU – « Arc-wise analytic stratification, Whitney fibering conjecture and Zariski equisingularity », *Adv. Math.* **309** (2017), p. 254–305.
- [PY07] G. PRASAD & S.-K. YEUNG – « Fake projective planes », *Invent. Math.* **168** (2007), no. 2, p. 321–370.
- [PY10] ———, « Addendum to “Fake projective planes” *Invent. Math.* 168, 321–370 (2007) », *Invent. Math.* **182** (2010), no. 1, p. 213–227.
- [Rag06] V. RAGSDALE – « On the Arrangement of the Real Branches of Plane Algebraic Curves », *Amer. J. Math.* **28** (1906), no. 4, p. 377–404.
- [Ram71] C. P. RAMANUJAM – « A topological characterisation of the affine plane as an algebraic variety », *Ann. of Math. (2)* **94** (1971), p. 69–88.
- [Ren15] A. RENAUDINEAU – « A real sextic surface with 45 handles », *Math. Z.* **281** (2015), no. 1-2, p. 241–256.
- [Ren17] ———, « A tropical construction of a family of real reducible curves », *J. Symbolic Comput.* **80** (2017), no. part 2, p. 251–272.

- [Ris85] J.-J. RISLER – « Type topologique des surfaces algébriques réelles de degré 4 dans \mathbf{RP}^3 », *Astérisque* (1985), no. 126, p. 153–168, *Geometry of K3 surfaces : moduli and periods* (Palaiseau, 1981/1982).
- [Ris93] ———, « Construction d’hypersurfaces réelles (d’après Viro) », *Astérisque* (1993), no. 216, p. Exp. No. 763, 3, 69–86, *Séminaire Bourbaki*, Vol. 1992/93.
- [Rob16] M. F. ROBAYO – « Prime order birational diffeomorphisms of the sphere », *Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci.* **16** (2016), p. 909–970.
- [Rus02] F. RUSSO – « The antibirational involutions of the plane and the classification of real del Pezzo surfaces », in *Algebraic geometry*, de Gruyter, Berlin, 2002, p. 289–312.
- [RV05] F. RONGA & T. VUST – « Birational diffeomorphisms of the real projective plane », *Comment. Math. Helv.* **80** (2005), no. 3, p. 517–540.
- [Sam67] P. SAMUEL – *Méthodes d’algèbre abstraite en géométrie algébrique*, Seconde édition, corrigée. *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete*, Band 4, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1967.
- [Sch11] M. SCHÜTT – « Quintic surfaces with maximum and other Picard numbers », *J. Math. Soc. Japan* **63** (2011), no. 4, p. 1187–1201.
- [Sch15] ———, « Picard numbers of quintic surfaces », *Proc. Lond. Math. Soc. (3)* **110** (2015), no. 2, p. 428–476.
- [Sco83] P. SCOTT – « The geometries of 3-manifolds », *Bull. London Math. Soc.* **15** (1983), no. 5, p. 401–487.
- [Ser55a] J.-P. SERRE – « Faisceaux algébriques cohérents », *Ann. of Math. (2)* **61** (1955), p. 197–278.
- [Ser55b] ———, « Un théorème de dualité », *Comment. Math. Helv.* **29** (1955), p. 9–26.
- [Ser56] ———, « Géométrie algébrique et géométrie analytique », *Ann. Inst. Fourier, Grenoble* **6** (1955–1956), p. 1–42.

- [Ser77] ———, *Cours d'arithmétique*, Presses Universitaires de France, Paris, 1977, Deuxième édition revue et corrigée, Le Mathématicien, No. 2. Version anglaise : A course in arithmetic, Graduate Texts in Mathematics, No. 7, Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1973.
- [Ser94] ———, *Cohomologie galoisienne*, fifth éd., Lecture Notes in Mathematics, vol. 5, Springer-Verlag, Berlin, 1994.
- [Sha94] I. R. SHAFAREVICH – *Basic algebraic geometry*, second éd., Springer-Verlag, Berlin, 1994, Two volumes. Translated from the 1988 Russian edition and with notes by Miles Reid.
- [Shi71] G. SHIMURA – *Introduction to the arithmetic theory of automorphic functions*, Publications of the Mathematical Society of Japan, No. 11. Iwanami Shoten, Publishers, Tokyo, 1971, Kanô Memorial Lectures, No. 1.
- [Shi72a] ———, « On the field of rationality for an abelian variety », *Nagoya Math. J.* **45** (1972), p. 167–178.
- [Shi72b] T. SHIODA – « On elliptic modular surfaces », *J. Math. Soc. Japan* **24** (1972), p. 20–59.
- [Shi81] ———, « On the Picard number of a complex projective variety », *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)* **14** (1981), no. 3, p. 303–321.
- [Sie55] C. L. SIEGEL – « Meromorphe Funktionen auf kompakten analytischen Mannigfaltigkeiten », *Nachr. Akad. Wiss. Göttingen. Math.-Phys. Kl. Ila.* **1955** (1955), p. 71–77.
- [Sil82] R. SILHOL – « Real abelian varieties and the theory of Comessatti », *Math. Z.* **181** (1982), no. 3, p. 345–364.
- [Sil84] ———, « Real algebraic surfaces with rational or elliptic fibrings », *Math. Z.* **186** (1984), no. 4, p. 465–499.
- [Sil89] ———, *Real algebraic surfaces*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1392, Springer-Verlag, Berlin, 1989.
- [Sil92] ———, « Compactifications of moduli spaces in real algebraic geometry », *Invent. Math.* **107** (1992), no. 1, p. 151–202.

- [Sil09] J. H. SILVERMAN – *The arithmetic of elliptic curves*, second éd., Graduate Texts in Mathematics, vol. 106, Springer, Dordrecht, 2009.
- [Siu83] Y. T. SIU – « Every $K3$ surface is Kähler », *Invent. Math.* **73** (1983), no. 1, p. 139–150.
- [Slo80] P. SLODOWY – *Simple singularities and simple algebraic groups*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 815, Springer, Berlin, 1980.
- [Spa66] E. H. SPANIER – *Algebraic topology*, McGraw-Hill Book Co., New York, 1966.
- [Sta62] J. STALLINGS – « The piecewise-linear structure of Euclidean space », *Proc. Cambridge Philos. Soc.* **58** (1962), p. 481–488.
- [Sti92] J. STILLWELL – *Geometry of surfaces*, Universitext, Springer-Verlag, New York, 1992, Corrected reprint of the 1992 original.
- [Suw69] T. SUWA – « On hyperelliptic surfaces », *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. I* **16** (1969), p. 469–476 (1970).
- [Tho54] R. THOM – « Quelques propriétés globales des variétés différentiables », *Comment. Math. Helv.* **28** (1954), p. 17–86.
- [Tho65] ———, « Sur l’homologie des variétés algébriques réelles », in *Differential and Combinatorial Topology (A Symposium in Honor of Marston Morse)*, Princeton Univ. Press, Princeton, N.J., 1965, p. 255–265.
- [Tog73] A. TOGNOLI – « Su una congettura di Nash », *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa (3)* **27** (1973), p. 167–185.
- [Tou72] J.-C. TOUGERON – *Idéaux de fonctions différentiables*, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1972, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Band 71.
- [Tro98] M. TROYANOV – « L’horizon de SOL », *Exposition. Math.* **16** (1998), no. 5, p. 441–479.
- [Uen73] K. UENO – « Classification of algebraic varieties. I », *Compositio Math.* **27** (1973), p. 277–342.
- [Uen75] ———, *Classification theory of algebraic varieties and compact complex spaces*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 439,

- Springer-Verlag, Berlin-New York, 1975, Notes written in collaboration with P. Cherenack.
- [vH00] J. VAN HAMEL – *Algebraic cycles and topology of real algebraic varieties*, CWI Tract, vol. 129, Stichting Mathematisch Centrum Centrum voor Wiskunde en Informatica, Amsterdam, 2000, Dissertation, Vrije Universiteit Amsterdam, Amsterdam.
- [Vir80] O. J. VIRO – « Curves of degree 7, curves of degree 8 and the Ragsdale conjecture », *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **254** (1980), no. 6, p. 1306–1310.
- [Vit99] C. VITERBO – « Symplectic real algebraic geometry », Unpublished, 1999.
- [Voi02] C. VOISIN – *Théorie de Hodge et géométrie algébrique complexe*, Cours Spécialisés [Specialized Courses], vol. 10, Société Mathématique de France, Paris, 2002.
- [Wae30] B. V. D. WAERDEN – « Topologische begründung des kalküls der abzählenden geometrie », *Mathematische Annalen* **102** (1930), p. 337–362.
- [Wal35] R. J. WALKER – « Reduction of the singularities of an algebraic surface », *Ann. of Math. (2)* **36** (1935), no. 2, p. 336–365.
- [Wei56] A. WEIL – « The field of definition of a variety », *Amer. J. Math.* **78** (1956), p. 509–524.
- [Wei94] C. A. WEIBEL – *An introduction to homological algebra*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 38, Cambridge University Press, Cambridge, 1994.
- [Wel02] J.-Y. WELSCHINGER – « Forme d’intersection tordue et extension de la congruence d’Arnol’d », *Math. Z.* **242** (2002), no. 3, p. 589–614.
- [Wel03] ———, « Real structures on minimal ruled surfaces », *Comment. Math. Helv.* **78** (2003), no. 2, p. 418–446.
- [Wil78] G. WILSON – « Hilbert’s sixteenth problem », *Topology* **17** (1978), no. 1, p. 53–73.
- [Wit34] E. WITT – « Zerlegung reeller algebraischer Funktionen in Quadrate. Schiefkörper über reellem Funktionenkörper », *J. Reine Angew. Math.* **171** (1934), p. 4–11.

- [X85] *Géométrie des surfaces K3 : modules et périodes* – Société Mathématique de France, Paris, 1985, Papers from the seminar held in Palaiseau, October 1981–January 1982, Astérisque No. 126 (1985).
- [Yas16] E. YASINSKY – « Subgroups of odd order in the real plane Cremona group », *J. Algebra* **461** (2016), p. 87–120.
- [Zeu74] H. G. ZEUTHEN – « Sur les différentes formes des courbes planes du quatrième ordre. », *Math. Ann.* **7** (1874), p. 410–432 (French).
- [Zim18] S. ZIMMERMANN – « The Abelianization of the real Cremona group », *Duke Math. J.* **167** (2018), no. 2, p. 211–267.

INDEX DES NOTATIONS

\cong	Isomorphisme de structures, de variétés, de \mathbf{R} -variétés, etc.	28
\sim	Équivalence linéaire des diviseurs	129
\approx	Difféomorphisme	230
$[x]$	Partie entière de x	228
$\lceil x \rceil$	Partie entière supérieure de x	228
\smile	Cup-produit en cohomologie singulière	404
\frown	Cap-produit en (co)homologie singulière	406
$\Gamma(U, \mathcal{F}) = \mathcal{F}(U)$	Sections du faisceau \mathcal{F} au-dessus de U	22
$\Gamma(V)$	Groupe quotient $H^2(V; \mathbf{Z})/H_{\mathbf{C}\text{-alg}}^2(V; \mathbf{Z})$	323
Ω_X	Fibré des formes différentielles (régulières ou holomorphes)	438
Ω_X^p	Fibré des p -formes différentielles (régulières ou holomorphes)	438
χ	Caractéristique d'Euler	462
$\chi_{\text{top}}(X)$	Caractéristique d'Euler topologique de X	219
$\chi(\mathcal{O}_X)$	Caractéristique d'Euler holomorphe de X	213
$\gamma_{n,k}$	Fibré universel sur $\mathbf{G}_{n,k}(K)$	314
λ, λ_σ	Caractéristique de Comessatti	156
$\nu: \tilde{X} \rightarrow X$	Normalisation de X	62
$\sigma_{\mathbf{A}} := \sigma_{\mathbf{A}^n}$	Conjugaison complexe usuelle sur \mathbf{C}^n	87
$\sigma_{\mathbf{P}} := \sigma_{\mathbf{P}^n}$	Conjugaison complexe usuelle sur $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$	87
${}^\sigma \mathcal{L}$	Faisceau conjugué de \mathcal{L}	100
${}^\sigma \psi$	Application conjuguée de ψ	92
${}^\sigma f$	Fonction conjuguée de f	87
$(A)^2$	Nombre d'auto-intersection du diviseur A	216
$(A \cdot B)$	Nombre d'intersection des diviseurs A et B	216
$\mathbf{A}^n(K)$	Espace affine de dimension n sur K	13

$\mathcal{A}(F)$	K -algèbre des coordonnées affines de F	13
$A_{\mathfrak{p}}$	Localisé de A en l'idéal premier \mathfrak{p}	378
A_f	Localisé de A en l'élément f	378
$\text{Alb}(X)$	Variété d'Albanese de X	455
$B_P X$	Surface éclatée de X en P	221
$\mathcal{C}^\infty(V, W)$	Espace des applications de V dans W	311
\widehat{C}	Complétée projective de C	23
\widetilde{C}	Normalisée de C	62
C^Φ	Courbe d'équation f^Φ	68
$\text{CaCl}(X)$	Groupe des classes linéaires de diviseurs de Cartier de X	130
$\text{Cl}(X)$	Groupe des classes linéaires de diviseurs de X	129
$\mathcal{D}(f)$	Lieu de non annulation de f	16
$ D $	Système linéaire associé à D	133
$\text{Div}(X)$	Groupe des diviseurs de Cartier de X	130
E_P	Courbe exceptionnelle de l'éclatement en P	221
$\text{Ext}(H, A)$	Groupe des classes d'extensions de H par A	395
$F_{\mathbf{C}}$	Complexification d'un ensemble algébrique F	111
$\text{Frac } A$	Anneau des fractions de l'anneau A	380
$\mathbf{G}_{n,k}(K)$	Grassmannienne des k -sous-espaces vectoriels de K^n	201
$\text{Gal}(\mathbf{C} \mathbf{R})$	Groupe de Galois de l'extension $\mathbf{C} \mathbf{R}$	94
$H_{2k}^{\mathbf{R}\text{-alg}}(X; \mathbf{Z})$	Classes représentables par des cycles complexes invariants	202
\mathbf{H}	Corps des quaternions	313
$H_{\mathbf{C}\text{-alg}}^2(V; \mathbf{Z})$	Classes des fibrés \mathbf{C} -vectoriels algébriques de rang 1 sur V	323
$H^k(G, M)$	k^{e} groupe de cohomologie de Galois du module M	156
$H^k(X, L; A)$	k^{e} groupe de cohomologie singulière de la paire (X, L) à coefficients dans A	154
$H_{\text{alg}}^k(X(\mathbf{R}); \mathbf{Z}_2)$	Groupe des classes fondamentales de sous-variétés algébriques.	200
$H_k(X, L; A)$	k^{e} groupe d'homologie singulière de la paire (X, L) à coefficients dans A	154
$H_k^{\text{alg}}(X(\mathbf{R}); \mathbf{Z}_2)$	Groupe des classes fondamentales de sous-variétés algébriques.	200
$\mathcal{I}(U)$	Idéal formé des polynômes nuls sur U	13
$\mathcal{I}(U)$	Idéal homogène formé des polynômes nuls sur U	15
\sqrt{I}	Idéal radical de I	377
I_L	Idéal de $L[X_1, \dots, X_n]$ engendré par I	16
$I_{\mathbf{C}}$	Idéal $I \otimes_{\mathbf{R}[X_1, \dots, X_n]} \mathbf{C}[X_1, \dots, X_n]$	16

$\text{Jac}(X)$	Jacobienne de X	473
$K(U)$	Corps des fonctions rationnelles de U sur K	35
K_X	Diviseur canonique de X	213
\mathcal{K}_X	Faisceau canonique de X	213
\mathcal{K}_X	Fibré canonique de X	438
$\bar{\mathcal{L}}$	Anti-faisceau du faisceau \mathcal{L}	89
M^G, M^σ	Sous-module des invariants	154
$M^{-\sigma}$	Sous-module des anti-invariants	154
$[M]$	Classe d'homologie fondamentale de M	400
\mathcal{M}_X	Faisceau des fonctions rationnelles sur X	48
$M_{\mathfrak{p}}$	A -module localisé de M en l'idéal premier $\mathfrak{p} \subset A$	378
M_f	A -module localisé de M en l'élément $f \in A$	378
$\mathcal{N}_{M C}$	Fibré normal à C dans M	476
$\text{NS}(X)$	Groupe de Néron-Severi de X	137
$N_{X X(\mathbf{R})}$	Fibré normal à $X(\mathbf{R})$ dans X	177
$\text{Num}(X)$	Groupe des diviseurs modulo équivalence numérique	219
$(\mathcal{O}_X)_{X(\mathbf{R})}^G$	Partie invariante du faisceau restreint au lieu réel	101
\mathcal{O}_X	Faisceau des fonctions régulières sur X	22
$\mathcal{O}_X(D)$	Faisceau inversible associé à un diviseur D sur X	132
$\mathcal{O}_X(D)$	Fibré en droites associé à un diviseur D sur X	132
$\mathcal{O}_x = \mathcal{O}_{U,x}$	Algèbre des germes de fonctions sur U régulières en x	22
$\mathcal{O}_{\mathbf{P}^n}(-1)$	Fibré tautologique	132
$\mathcal{O}_{\mathbf{P}^n}(1)$	132
$\mathbf{P}^n(K)$	Espace projectif de dimension n sur K	14
$\text{Pic}(X/B)$	Groupe de Picard relatif de $\pi: X \rightarrow B$	239
$\text{Pic}(X/\pi)$	Groupe de Picard relatif de $\pi: X \rightarrow B$	239
$\mathcal{P}(U)$	K -algèbre des fonctions polynomiales sur U	19
\hat{P}	Homogénéisé du polynôme P	23
$\mathcal{P}(X)$	Groupe des diviseurs principaux de X	129
$\text{Pic}(X)$	Groupe de Picard de X	132
$\text{Pic}^0(X)$	Variété de Picard de X	137
$\mathcal{R}(U)$	K -algèbre des fonctions régulières sur U	21
$\mathcal{R}(V, W)$	Espace des applications régulières de V dans W	311
$\text{Reg } X$	Lieu régulier de X	62
$\mathcal{S}(F)$	K -algèbre des coordonnées homogènes de F	15
$S^{-1}M$	Module localisé de M en S	378
$\text{Sing } X$	Lieu singulier de X	62

$T_X^{0,1}$	Fibré tangent anti-holomorphe	440
$T_X^{1,0}$	Fibré tangent holomorphe	440
T_X	Fibré tangent	160
$T_{X,\mathbf{C}}$	Fibré tangent complexe	438
$T_{X,\mathbf{R}}$	Fibré tangent réel	438
\overline{T}_X	Fibré tangent holomorphe	438
$T_a F$	Espace tangent usuel à F en $a \in F$	58
$T_a^{Zar} F$	Espace tangent de Zariski à F en $a \in F$	58
$\text{Tor}(H, A)$	Groupe de torsion commune à A et H	395
$U(A)$	Partie multiplicative des éléments inversibles d'un anneau A	376
$U_{\mathbf{C}}$	Complexification d'un ensemble quasi-algébrique U	111
$\overline{X} := (X, \overline{\mathcal{O}_X})$	Variété conjuguée de (X, \mathcal{O}_X)	89
$X, X(\mathbf{R}), X(\mathbf{C}), X_{\mathbf{C}}, X_{\mathbf{R}}$		121
\mathbf{Z}_m	Groupe cyclique d'ordre m	154
$\mathcal{Z}(I)$	Ensemble des zéros de l'idéal I	16
$\mathcal{Z}(f)$	Ensemble des zéros de la fonction f	16
$\mathcal{Z}_L(I)$	Ensemble des zéros dans $\mathbf{A}^n(L)$ de l'idéal I	16
$Z^1(X)$	Groupe des diviseurs de Weil de X	128
$a(X)$	Dimension algébrique de X	449
$b_*(X)$	Nombre de Betti total de X	167
$b_*(X; \mathbf{Z}_2)$	Nombre de Betti total de X à coefficients dans \mathbf{Z}_2	167
$b_k(X)$	k^{e} nombre de Betti de X	167
$b_k(X; \mathbf{Z}_2)$	k^{e} nombre de Betti de X à coefficients dans \mathbf{Z}_2	167
$c_k(X)$	k^{e} classe de Chern de X	160
f^{Φ}	Tiré en arrière de f par Φ	68
$g(C)$	Genre géométrique d'une courbe C	224
$h^{a,b}(X)$	Nombres de Hodge de X	213
$\kappa(X)$	Dimension de Kodaira de X	214
\mathfrak{m}_x	Idéal maximal des fonctions nulles en x	23
$\mathfrak{m}_x^{\mathcal{P}}$	Idéal maximal des fonctions polynomiales nulles en x	24
$\mathfrak{m}_x^{\mathcal{R}}$	Idéal maximal des fonctions régulières nulles en x	24
$\text{mult}_A(D)$	Multiplicité d'un diviseur de Cartier D en un diviseur A	131
$\text{mult}_A(D)$	Multiplicité d'un diviseur de Weil D en un diviseur A	128
$\text{mult}_A(f)$	Multiplicité d'une fonction rationnelle f en un diviseur A	129
$p_a(C)$	Genre arithmétique d'une courbe C	224
$p_g(X)$	Genre géométrique d'une variété X	448
$p_v(D)$	Genre virtuel d'un diviseur D	226

$q(X)$	Irrégularité d'une variété X	448
$r_k(X)$	dimension du sous-espace invariant de $H_k(X; \mathbf{Q})$	180
$\text{trdeg}_K L$	Degré de transcendance de l'extension $L K$	384
$v_k(X)$	k^{e} classe de Wu de X	175
$w_k(X)$	k^{e} classe de Stiefel-Whitney de X	160

INDEX TERMINOLOGIQUE

- (-1)-courbe, 235, 350
- (-2)-courbe, 235
- XVI^e problème de Hilbert, 183, 186
- Abel-Jacobi
 - application d', 474
 - théorème d', 474
- Abélianisé, 395
- Abélienne
 - surface, 268, 278
- Absolute Neighborhood Retract, 411
- Adjonction
 - formule d', 223, 225
- Affine
 - algèbre, 384
 - anneau, 384
 - ouvert, 38
 - recouvrement, 38
 - variété, 40
- Affines
 - coordonnées, 13
- Albanese
 - application, 455
 - variété d', 455
- Algèbre
 - affine, 384
 - des anti-invariants, 388
 - des coordonnées affines, 13
 - des fonctions rationnelles, 35
 - des invariants, 388
- entière sur un anneau, 383
- extérieure, 383
- finie, 383
- sur K , 376
- symétrique, 383
- tensorielle, 383
- Algébrique
 - \mathbf{R} -variété, 90
 - cycle, 200
 - dimension, 449
 - morphisme, 38
 - sous-variété, 39
 - variété, 38
 - variété complexe, 39, 49
 - variété réelle, 39, 49
 - variété totalement, 201
- Analytique
 - \mathbf{R} -variété, 90
 - application, 435
 - ensemble, 435
 - fonction, 435
- Analytique complexe
 - espace, 435
 - variété, 437
- Anneau
 - affine, 384
 - des fractions, 380
 - gradué, 378
 - intégralement clos, 383

- intègre, 376
- local, 380
- local régulier, 60
- localisé, 378
- noethérien, 381
- réduit, 377
- total des fractions, 380
- ANR, 411
- Anti-faisceau, 89
- Anti-holomorphe
 - application, 90
- Anti-linéaire
 - involution, 388
- Anti-régulière
 - application, 90
- Application
 - analytique, 435
 - anti-holomorphe, 90
 - anti-régulière, 90
 - birationnelle, 45
 - birationnelle \mathbf{R} -birégulière, 108
 - constante, 467
 - d'Abel-Jacobi, 474
 - d'Albanese, 455
 - de Nash, 393
 - holomorphe, 437, 466
 - lisse, 311
 - rationnelle, 44
 - rationnelle \mathbf{R} -régulière, 107
 - rationnelle de \mathbf{R} -variétés, 94
 - régulière, 29, 38
 - régulière de \mathbf{R} -variétés, 93
 - régulue, 333
 - semi-algébrique, 392
 - simpliciale, 393
- Approximation
 - algébrique, 311
 - par des applications régulières, 311
- Arithmétique
 - genre, 224
- Atlas adapté, 110
- Bertini
 - théorème de, 457
- Betti
 - nombre de, 167
- Bézout
 - théorème de, 69, 70, 143
- Bielliptique
 - surface, 268, 280
- Birationnel
 - morphisme, 45
- Birationnelle
 - application, 45
- Birationnellement équivalentes
 - variétés, 45
- Bockstein
 - morphisme de, 325
- Bouteille de Klein, 159, 167, 175, 230, 232, 248, 256, 281, 286, 288, 319, 322, 335, 463, 479
- Canonique
 - dimension, 214
 - diviseur, 135, 213
 - fibré, 135, 213
- Cap-produit, 406
- Caractéristique
 - d'Euler, 462
 - d'Euler holomorphe, 213
 - d'Euler topologique, 219
 - de Comessatti, 156
- Cartan-Serre
 - théorème de finitude de, 436
- Centre
 - éclatement, 478
- Chern
 - classe de, 160
 - nombres de, 448
- Chow
 - théorème de, 451
- Classe
 - caractéristique, 160
 - d'un sous-espace analytique
 - compact, 199
 - de Chern, 160
 - de Stiefel-Whitney, 160
 - de Wu, 175
 - fondamentale, 199, 400
 - fondamentale d'homologie, 400
- Clos
 - algébriquement, 384

- corps réel, 385
- intégralement, 383
- Clôture
 - intégrale, 383
- Cocycle
 - condition de, 132
- Codimension
 - d'un idéal, 55
- Coefficients universels
 - théorème des, 396
- Cohérent
 - faisceau, 433, 434
- Cohomologie
 - à support compact, 405
 - singulière, 404
- Comessatti
 - caractéristique de, 156
 - inégalités de, 171
 - théorème de, 253
- Commutateur, 395
- Compact, 392
- Complète
 - variété algébrique, 51
 - variété algébrique réelle, 51
- Complétée projective, 23
- Complexe
 - simplicial, 393
 - topologie, 50
 - variété, 39, 49
- Composante
 - connexe de x , 114
 - irréductible, 18
- Condition
 - de cocycle, 132
- Conique, 33
 - affine, 33
 - projective, 33
- Coniques
 - fibré en, 227, 228, 239
- Conjecture
 - de Nash, 8, 355
 - de Ragsdale, 147
- Conjugué
 - faisceau, 100, 122
- Conjuguée
 - fonction, 87
 - variété, 89, 110
- Contraction, 234
- Coordonnées
 - affines, 13
 - analytiques, 64
 - homogènes, 15
- Corps, 376
 - algébriquement clos, 384
 - de fonctions, 384
 - des fonctions, 35
 - des fonctions rationnelles, 35
 - des fractions, 380
 - réel, 385
 - réel clos, 385
 - résiduel, 380
- Courbe, 63
 - affine plane, 66
 - complexe, 464
 - de Fermat, 314
 - exceptionnelle, 221
 - irréductible, 66
 - maximale, 169
 - paire, 296
 - projective plane, 66
 - réduite, 66
 - séparante, 184
 - sur une surface, 213
- Cremona
 - groupe de, 339
- Cristallographique
 - groupe, 414
- Critère
 - de Nakai-Moishezon, 140
- Cup-produit, 404
- Cycle
 - algébrique, 200
 - de codimension 1, 128
- Déformation
 - d'une variété complexe, 241
- Degré, 128, 129, 141, 469
 - complexe, 142
 - d'une surface de del Pezzo, 229
 - de transcendance, 54, 384
 - réel, 142

- Del Pezzo
 - surface de, 229
- Difféomorphisme
 - de Nash, 393
- Dimension
 - algébrique, 449
 - canonique, 214
 - d'Itaka, 214
 - d'un anneau, 54
 - d'un ensemble algébrique affine, 55
 - d'un espace topologique, 56
 - d'un idéal, 55
 - d'une variété algébrique, 63
 - d'une variété topologique, 398
 - de Kodaira, 214, 449
- Directe
 - somme, 430
- Discriminant
 - d'un module quadratique, 386
 - d'un réseau entier, 387
 - \mathbf{Z} -module quadratique, 387
- Diviseur
 - ample, 134
 - big, 134
 - canonique, 135, 213
 - de Cartier, 130, 452
 - de la section hyperplane, 134
 - de Weil, 128
 - de zéro dans un anneau, 376
 - effectif, 128, 213
 - exceptionnel, 478
 - gros, 134
 - nef, 140
 - principal, 129, 130
 - très ample, 134
- Domaine
 - d'une application rationnelle, 44
- Dominante
 - application rationnelle, 44
- Dualité
 - de Poincaré, 406
 - de Serre, 218, 437
- Équivalence
 - de structures réelles, 97
- Éclatement, 221, 477, 478
 - propriété universelle, 478
 - topologique, 477
- Effectif
 - diviseur, 213
- Ehresmann
 - théorème de fibration d', 242
- Élément
 - entier sur un anneau, 383
 - nilpotent, 377
- Elliptique
 - propre, 284
 - surface, 283, 284
- Emboîtement
 - d'ovales, 146
- Enriques
 - surface d', 268, 274
- Ensemble
 - algébrique affine, 13
 - algébrique, 15
 - algébrique projectif, 14
 - analytique, 435
 - des zéros d'un idéal, 16
 - des zéros d'une fonction, 16
 - quasi-affine, 15
 - quasi-algébrique, 15
 - quasi-projectif, 15
 - semi-algébrique, 392
- Équivalence
 - numérique, 219
- Espace
 - affine, 13
 - analytique complexe, 435
 - annelé, 430
 - de Hausdorff, 391
 - étalé, 422, 427
 - lenticulaire, 413
 - localement annelé en anneaux
 - locaux, 430
 - normal, 411
 - paracompact, 411
 - projectif, 15
 - tangent de Zariski, 58
 - topologique
 - quotient, 165
- Étalé

- espace, 422
- Euclidienne
 - topologie, 50
 - variété, 414
- Exceptionnelle
 - courbe, 221
- Exotique
 - \mathbf{R}^4 , 352
 - variété différentielle, 352
- Exponentielle
 - suite exacte de l', 426, 452
- Ext, 395
- Extérieure
 - algèbre, 383
- Factorisation forte, 236
- Faisceau, 420
 - \mathbf{R} -, 100, 122
 - ample, 134
 - associé, 427
 - cohérent, 433, 434
 - conjugué, 100, 122
 - d'idéaux, 430
 - de \mathcal{O}_X -modules, 430
 - de présentation finie, 433
 - de type fini, 433
 - engendré par ses sections
 - globales, 432
 - de fonctions, 420
 - des fonctions, 420
 - des fonctions régulières, 22
 - des fonctions rationnelles, 48
 - des fonctions régulières, 38
 - des restrictions sur un sous-espace, 421
 - des sections, 422
 - dualisant, 223
 - image directe, 429
 - image réciproque, 429
 - invertible, 431
 - libre, 430
 - localement libre, 430
 - quasi-cohérent, 432, 434
 - restreint, 428
 - restriction, 428
 - structural, 38, 430
 - très ample, 134
- Famille
 - complexe, 242
 - réelle, 242
- Faux plan
 - projectif, 351
 - réel, 352
- Fermat
 - courbe de, 314
- Fibration
 - de Hopf, 413
 - de Seifert, 413
- Fibre
 - d'un espace étalé, 423
 - d'un faisceau, 422
 - d'un préfaisceau, 422
- Fibré
 - K -vectoriel, 424
 - $\mathcal{O}_{\mathbf{P}^n}(d)$, 132
 - associé aux hyperplans, 133
 - ample, 134
 - big, 134
 - \mathbf{C} -vectoriel algébrique, 323
 - canonique, 135, 213, 438
 - des p -formes différentielles
 - holomorphes, 438
 - des formes différentielles
 - holomorphes, 438
 - différentiel, 424
 - en coniques, 228, 239
 - réel, 227
 - en droites, 126
 - en droites associé à un diviseur, 132
 - gros, 134
 - localement trivial, 424
 - nef, 140
 - normal, 476
 - tangent holomorphe, 438
 - tautologique, 133, 475
 - très ample, 134
 - universel, 314
 - vectoriel, 424
 - vectoriel algébrique, 126
- Fonction
 - \wp de Weierstrass, 472

- analytique, 435
- anti-holomorphe, 90
- conjuguée, 87
- de Nash, 393
- holomorphe, 435, 437, 466
- invariante, 100
- lisse, 311
- méromorphe, 469
- polynomiale, 19
- régulière, 21, 38
- rationnelle, 35, 44
- régulue, 333
- semi-algébrique, 392
- Fondamentale
 - classe, 199, 400
- Forme
 - d'intersection, 216
 - de Kähler, 439
 - quadratique, 386
 - quadratique de type I, II, 388
 - quadratique paire, impaire, 388
 - quadratique unimodulaire, 387
 - réelle, 91, 121
 - symplectique, 439
- Formule
 - d'adjonction, 223, 225
 - de Künneth, 404, 405
 - de Lefschetz, 179
 - de Noether, 219
 - de Riemann-Roch, 218
 - du genre, 70
- Fractions
 - anneau des, 380
 - anneau total des, 380
 - corps des, 380
- G -groupe, 154
- Galois
 - groupe de cohomologie de, 156
- Galois-Maximal
 - GM -variété, 190
 - \mathbf{R} -variété \mathbf{Z} -Galois-Maximale, 191
 - \mathbf{R} -variété Galois-Maximale, 190
 - \mathbf{ZGM} -variété, 191
- Genre
 - arithmétique, 224
 - d'une surface topologique, 461
 - formule du, 70
 - géométrique, 213, 224, 448
 - virtuel, 226
- Géométrie, 414
- Géométrie
 - genre, 213, 224, 448
 - structure géométrique modelée, 414
 - variété, 414
- Géométriquement irréductible, 116
- Géométriquement rationnelle
 - \mathbf{R} -variété, 117
 - surface, 246
 - variété, 49, 117
- Germe
 - d'une fonction régulière, 22, 44
 - d'une section, 422
- Gradué
 - anneau, 378
- Grassmannienne, 201
- Groupe
 - cristallographique, 414
 - cyclique, 154
 - de cohomologie de Galois, 156
 - de Cremona, 339
 - de Néron-Severi, 137, 219
 - de Picard, 132
 - dérivé, 395
 - des classes linéaires de diviseurs, 129, 130
 - G -groupe, 154
 - parfait, 342
- Harnack
 - inégalité de, 168
 - théorème de, 143, 168
- Hartogs
 - théorème de, 31
- Hausdorff
 - espace de, 391
- Hauteur
 - d'un idéal, 55
- Hermitienne
 - métrique, 438
- Hilbert
 - XVI^e problème de, 183, 186

- Nullstellensatz, 385
- théorème des zéros de, 385
- Hirzebruch
 - \mathbf{R} -surface de, 226
 - surface de, 226
- Hodge
 - métrique de, 458
 - nombres de, 213, 448, 449
 - théorème de l'indice de, 220
- Holomorphe
 - application, 437
 - fonction, 435, 437
 - variété, 437
- Homogène
 - idéal, 378
 - variété riemannienne, 414
- Homogénéisé
 - polynôme, 23
- Homologie
 - singulière, 394
- Hopf
 - fibration de, 413
- Hurewicz
 - théorème de, 395
- Hyperbolique
 - variété, 414
- Idéal
 - homogène, 378
 - maximal, 377
 - premier, 377
 - radical, 377
 - réel, 385
- Image, 425
- Immersion
 - fermée, 430
 - ouverte, 430
- Indécomposable
 - variété, 416
- Indice
 - d'une forme quadratique, 173, 388
 - d'une involution, 176
 - de branchement, 468
 - de ramification, 468
- Inductif
 - système, 375
- Inductive
 - limite, 375
- Inégalité
 - de Harnack, 168
 - de Smith-Thom, 168
- Inégalités
 - de Comessatti, 171
 - de Petrovskii, 146, 171
 - de Petrovskii-Oleinik, 171
- Infiniment proche
 - point, 224
- Intégrale
 - clôture, 383
- Intégralement
 - clos, 383
- Intègre
 - anneau, 376
- Intérieur
 - d'un ovale, 146
- Invariant
 - ouvert, 100
- Invariante
 - fonction, 100
- Inversible
 - faisceau, 431
- Involutif
 - module, 154
- Involution
 - anti-linéaire, 388
- Irréductible
 - \mathbf{R} -variété irréductible, 116
 - composante, 18
 - géométriquement irréductible, 116
 - sous-espace, 17
- Irrégularité, 213, 448
- Isomorphisme, 29
 - réel, 108
- Jacobi
 - variété de, 473
- Jacobienne, 473
- K -algèbre, 376
- $K3$
 - surface, 268, 269
- Kähler
 - forme de, 439

- métrique de, 439
 - variété de, 439
- Kählérienne
 - métrique, 439
 - variété, 439
- Klein
 - bouteille de, 159, 167, 175, 230, 232, 248, 256, 281, 286, 288, 319, 322, 335, 463, 479
- Kodaira
 - dimension de, 449
 - théorème de plongement de, 458
 - théorème d'annulation de, 457
- Künneth
 - formule de, 404, 405
- Lagrangienne
 - sous-variété, 364
- Lefschetz
 - formule de, 179
 - théorème sur les $(1, 1)$ -cycles, 458
 - théorème sur les sections hyperplanes, 457
- Lemme
 - de Nakayama, 378
- Lenticulaire
 - espace, 413
- Libre
 - module, 382
- Lieu
 - d'annulation d'une fonction, 16
 - de non annulation d'une fonction, 16
 - réel, 93
 - régulier, 62
 - singulier, 62
- Limite
 - inductive, 375
- Linéaire
 - système, 133
- Lisse
 - application, 311
 - fonction, 311
- Local
 - anneau, 380
 - paramètre, 63
- Localement fini
 - recouvrement, 411
- Localisation, 378
 - propriété universelle, 379
- Localisé, 378
- Maximal
 - $(M - a)$ -courbe, 170
 - $(M - a)$ -variété, 170
 - GM -variété, 190
 - M -courbe, 169
 - M -variété, 169
 - \mathbf{R} -variété \mathbf{Z} -Galois-Maximale, 191
 - \mathbf{R} -variété Galois-Maximale, 190
 - \mathbf{R} -variété maximale, 169
 - \mathbf{ZGM} -variété, 191
 - courbe maximale, 169
 - idéal, 377
- Métrique
 - de Hodge, 458
 - de Kähler, 439
 - hermitienne, 438
 - kählérienne, 439
- Minimale
 - \mathbf{R} -surface, 237
 - surface, 237, 238
- Modèle
 - algébrique réel, 309
 - rationnel, 309
- Module
 - involutif, 154
 - libre, 382
 - localisé, 378
 - plat, 382
 - projectif, 382
 - quadratique, 386
 - quadratique sur \mathbf{Z} , 387
 - \mathbf{Z} -module quadratique, 387
- Morphisme, 29
 - algébrique, 38
 - birationnel, 45
 - d'espaces annelés, 430
 - de \mathbf{R} -variétés, 93
 - de Bockstein, 325
 - de faisceaux, 424
 - de préfaisceaux, 424

- entier, 383
- fini, 383
- réel, 107
- Morse
 - simplification de, 243
- Multiplicité, 68, 468
 - d'intersection, 69, 215
 - d'un diviseur en un diviseur
 - premier, 128, 131
 - d'une fonction rationnelle en un diviseur premier, 129
- Nakai-Moishezon
 - critère de, 140
- Nakayama
 - lemme de, 378
- Nash
 - application de, 393
 - conjecture de, 8, 355
 - difféomorphisme de, 393
 - fonction de, 393
- Nef
 - diviseur, 140
 - fibré, 140
- Néron-Severi
 - groupe de, 137, 219
 - théorème de, 137
- Nilradical, 377
- Noethérien
 - anneau, 381
 - espace topologique, 18
- Noether
 - formule de, 219
- Nombre
 - d'auto-intersection, 216
 - d'intersection, 70, 143, 215, 216
 - de Betti, 167
 - de Chern, 448
 - de Hodge, 213, 448, 449
 - de Picard, 137, 219
 - de Picard réel, 137, 219
- Non singulier
 - point, 59
- Normal
 - espace, 411
 - point, 62
- Normale
 - variété, 62
- Normalisation, 62
- Normalisée, 62
- Noyau, 425
- Nullstellensatz, 385
 - réel, 385
- Ordinaire
 - point multiple, 224
- Orientable, 399, 464
 - non orientable, 399, 464
- Orientation, 399
- Ouvert
 - affine, 38
 - invariant, 100
 - principal, 31, 41
 - trivialisant, 430
- Ovale, 144
 - contenu dans un, 146
 - emboitement, 146
 - impair, 146
 - intérieur d'un, 146
 - négatif, 146
 - pair, 146
 - positif, 146
 - vide, 146
- \mathcal{O}_X -module, 430
- Paire
 - simpliciale, 393
- Paracompact
 - espace, 411
- Paramètre
 - local, 63
- Parapluie cornu, 74
- Parfait
 - groupe, 342
- Partie
 - entière, 228
 - entière inférieure, 228
 - entière supérieure, 228
 - multiplicative, 378
 - réelle, 93
- Petrovskii
 - inégalités de, 146, 171
 - théorème de, 146

- Petrovskii-Oleinik
 inégalité de, 171
- Picard
 nombre de, 137, 219
 variété de, 137, 453
- Plat
 module, 382
- Plongement, 41
 de Segre, 41
 de Veronese, 43, 78
- Plurigène, 214, 449
- Poincaré
 dualité de, 406
- Point
 double rationnel, 259, 260
 infiniment proche, 224
 multiple ordinaire, 224
 non singulier, 59
 normal, 62
 régulier, 62
 singulier, 62
- Polyèdre, 393
- Polynôme
 homogénéisé, 23
 réciproque, 228
- Préfaisceau, 419
- Premier
 idéal, 377
- Principal
 ouvert, 31, 41
- Produit
 cap-, 406
 cup-, 404
 tensoriel, 381
 de \mathcal{O}_X -modules, 430
 propriété universelle, 381
- Projectif
 module, 382
- Projection stéréographique, 248, 317
- Projective
 variété, 40
- Propriété universelle
 de l'éclatement, 478
 de la localisation, 379
 du produit tensoriel, 381
- Pseudo-droite, 144
- Quadratique
 forme, 386
 module, 386
 réseau, 387
 \mathbf{Z} -module, 387
- Quadrique, 33
- Quasi-cohérent
 faisceau, 432, 434
- Quasi-compact, 392
- Quintique numérique, 293
- Quotient
 topologique, 165
- \mathbf{R} -Fibré en coniques, 239
- \mathbf{R} -contraction, 234
- \mathbf{R} -faisceau, 100, 122
- \mathbf{R} -sous-variété, 91
- \mathbf{R} -surface
 de Hirzebruch, 226
- \mathbf{R} -variété, 90
 irréductible, 116
 algébrique, 90
 analytique, 90
 géométriquement rationnelle, 117
 rationnelle, 117
- Radical
 idéal, 377
- Ragsdale
 conjecture de, 147
- Ramanujam
 surface de, 353
- Rang, 430
- Rationnelle
 application, 44
 fonction, 35, 44
 \mathbf{R} -variété, 117
 surface, 246
 variété, 7, 49, 117
- Rationnellement connexe
 variété, 368
- Recouvrement
 affine, 38
 localement fini, 411
- Réductible
 sous-espace, 17

- Réduit
 - anneau, 377
- Réel
 - lieu, 93
 - nombre de Picard, 137, 219
- Réelle
 - forme, 91, 121
 - partie, 93
 - structure, 90
 - variété, 39, 49
- Régulier
 - lieu, 62
 - point, 62
- Régulière
 - application, 29, 38
 - fonction, 21
- Régulue
 - application, 333
 - fonction, 333
- Réseau
 - quadratique, 387
- Résiduel
 - corps, 380
- Résolution des singularités, 65
- Restriction, 420
- Revêtement, 424
 - double, 296, 449
 - ramifié, 296, 449
- Riemann-Hurwitz
 - théorème de, 469
- Riemann-Roch
 - formule de, 218
 - théorème de, 218, 472
- σ -représentable, 195
- Séparé, 391
 - variété algébrique séparée, 391
- Saphir, 367
- Section, 422
 - continue, 422
 - d'un faisceau, 420
 - globale, 420
 - hyperplane, 134
- Segre
 - plongement de, 41
- Seifert
 - fibration de, 413
 - géométrie des variété de, 371
 - variété de, 413
- Semi-algébrique
 - application, 392
 - ensemble, 392
 - fonction, 392
- Séparante
 - courbe, 184
- Serre
 - dualité de, 218, 437
 - théorème d'annulation de, 457
- Signature
 - d'une forme quadratique, 173, 388
- Simplexe, 393
- Simplicial
 - complexe, 393
- Simpliciale
 - application, 393
 - paire, 393
- Simplification de Morse topologique, 243
- Singularités
 - résolution des, 65
- Singulier
 - lieu, 62
 - point, 59, 62
- Singulière
 - cohomologie, 404
 - homologie, 394
- Smith-Thom
 - inégalité de, 168
- Sol**
 - variété, 367, 415
- Somme
 - directe
 - de \mathcal{O}_X -modules, 430
- Somme connexe, 401
- Sous-variété
 - algébrique, 39
 - fermée, 39
 - ouverte, 39
 - lagrangienne, 364
- Sphérique
 - variété, 414

- Stiefel-Whitney
 classe de, 160
- Stone-Weierstrass
 théorème d'approximation de, 311
- Structure
 équivalence de structures réelles, 97
 de variété réelle sous-jacente, 121
 réelle, 90
- Subdivision barycentrique, 394
- Suite exacte de l'exponentielle, 426, 452
- Support
 d'un diviseur, 128
- Support compact
 cohomologie à, 405
- Surface, 63, 463, 464
 abélienne, 268, 278
 bielliptique, 268, 280
 cubique, 159
 d'irrégularité nulle, 285
 de del Pezzo, 229
 de Hirzebruch, 226
 de \mathbf{P}^3 , 159, 182, 188, 448
 de Ramanujam, 353
 de Riemann, 464
 de type général, 215
 de type spécial, 215
 éclatée, 221
 elliptique, 283, 284
 jacobienne, 285
 propre, 284
 régulière, 285
 d'Enriques, 268, 274
 géométriquement rationnelle, 246
 K3, 268, 269
 minimale, 238
 \mathbf{Q} -acyclique, 352
 quintique numérique, 293
 rationnelle, 246
 régulière, 285
 relativement minimale, 238
 topologique, 230, 461
 uniréglée, 244, 246
- Symétrique
 algèbre, 383
- Symplectique
 forme, 439
 variété, 439
- Système
 de coordonnées analytiques, 64
 de paramètres locaux, 63
 inductif, 375
 linéaire, 133
- Tautologique
 fibré, 475
- Tensoriel
 produit, 381, 430
- Tensorielle
 algèbre, 383
- Théorème
 d'Abel-Jacobi, 474
 d'annulation de Kodaira, 457
 d'annulation de Serre, 457
 d'approximation de Weierstrass, 310
 de Bézout, 70, 143
 de Bertini, 457
 de Chow, 451
 de Comessatti, 253
 de fibration d'Ehresmann, 242
 de finitude de Cartan-Serre, 436
 de Harnack, 143, 168
 de Hartogs, 31
 de Hurewicz, 395
 de l'indice de Hodge, 220
 de Lefschetz
 sur les $(1, 1)$ -cycles, 458
 sur les sections hyperplanes, 457
 de Néron-Severi, 137
 de Petrovskii, 146
 de plongement de Kodaira, 458
 de Riemann-Hurwitz, 469
 de Riemann-Roch, 218, 472
 de Stone-Weierstrass, 311
 des coefficients universels, 396
 des zéros, 385
 des zéros réels, 385
- Topologie
 \mathcal{C}^∞ , 311
 compacte-ouverte, 403

- complexe, 50
- de Whitney, 403
- de Zariski, 13, 14, 38
- euclidienne, 50
- faible, 403
- fine, 403
- forte, 403
- transcendante, 50
- Topologique
 - variété, 398
- Tor, 395
- Tore, 138, 149, 159, 167, 170, 175, 193, 230, 248, 251, 256, 283, 294, 320, 322, 346, 347, 366, 401, 405, 463, 466
 - complexe, 91, 99, 138, 170, 232, 278, 346, 440, 453, 469, 473
 - solide, 357, 412
- Transcendance
 - degré de, 54
 - degré de, 384
- Transcendante
 - topologie, 50
- Transformation élémentaire, 241
- Transformée
 - birationnelle, 478
 - stricte, 478
- Transitive
 - action de groupe n -, 336
 - action de groupe infiniment, 336
 - action de groupe très, 336
- Transversalement, 215
- Transverse, 215
- Triangulable, 393
- Triangulation des ensembles algébriques, 393
- Type
 - topologique, 243
 - extrémal, 243
- Type général
 - surface de, 215
 - variété de, 136, 450
- Type spécial
 - surface de, 215
 - variété de, 450
- Une variété algébrique réelle
 - projective est affine, 32
- Unimodulaire
 - réseau quadratique, 387
 - \mathbf{Z} -module quadratique, 387
- Uniréglée
 - surface, 244, 246
 - variété, 360
- Universel
 - fibré, 314
- Variété
 - \mathbf{R} -, 90
 - \mathbf{R} -sous-, 91
 - \mathbf{Sol} , 367, 415
 - affine, 40
 - algébrique réelle sous-jacente, 121
 - algébrique, 38
 - algébrique abstraite, 38
 - algébrique complexe, 39, 49
 - algébrique réelle, 39, 49
 - analytique complexe, 437
 - complexe, 39, 49
 - conjuguée, 89, 110
 - d'Albanese, 455
 - de Jacobi, 473
 - de Kähler, 439
 - de Picard, 137, 453
 - de Seifert, 413
 - de type général, 136, 450
 - de type spécial, 450
 - différentielle exotique, 352
 - eclatée, 477, 478
 - euclidienne, 414
 - géométrique, 414
 - géométriquement rationnelle, 49, 117
 - holomorphe, 437
 - hyperbolique, 414
 - jacobienne, 473
 - kählérienne, 439
 - lagrangienne, 364
 - normale, 62
 - projective, 40
 - quasi-affine, 40
 - quasi-projective, 40

- rationnelle, 7, 49, 117
- rationnellement connexe, 368
- réelle, 39, 49
- riemannienne homogène, 414
- sous-, 39
- sphérique, 414
- spinorielle, 402
- symplectique, 439
- topologique, 398
- totale algébrique, 201
- uniréglée, 360
- Veronese
 - plongement de, 43, 78
- Vide
 - ovale, 146
- Virtual
 - genre, 226
- Voisinage tubulaire, 476
- Weierstrass
 - fonction \wp de, 472
 - théorème d'approximation de, 310
- Whitney
 - topologie de, 403
- X , $X(\mathbf{R})$, $X(\mathbf{C})$, $X_{\mathbf{C}}$, $X_{\mathbf{R}}$, 121
- XVI^e problème de Hilbert, 183, 186
- Zariski
 - espace tangent de, 58
 - topologie de, 13, 14, 38

LISTE D'EXEMPLES

- $\text{Div}(X)^G / \text{Div}^0(X)^G \neq \text{NS}(X)^G$, 194
- $\text{Div}(X)^G / \mathcal{P}(X)^G \neq \text{Pic}(X)^G$, 137
- \mathbf{R} -plongement du tore produit, 138
- $\mathcal{Z}(x^2 + y^2)$
 - densité des points réels, 102
 - dimension, 56, 86, 378
 - irréductibilité, 117
- Application tordante, 336
- Applications régulières
 - homotopes \neq approchées, 314
 - rareté, 312
- Bouteille de Klein non totalement algébrique, 319
- Classification des coniques, 33
- Classification des surfaces de $\mathbf{P}^3(\mathbf{R})$, 159
- Courbes sans structure réelle, 92
- Cubique
 - M et $(M - 1)$, 170
 - formes réelles, 94, 98
 - nodale, 57
 - normalisation d'une cubique nodale, 63
- Densité des points réels, 102, 104, 105
- Difféomorphisme birationnel, 336, 339, 341
- Difféomorphisme de Nash \neq difféomorphisme birationnel, 343
- Éclatement d'un point du plan affine, 221
- Éclatement d'un point du plan projectif, 221
- Ensemble constructible, 30
- Ensemble quasi-affine non affine, 31
- Faux plan réel, surface de Ramanujam, 353
- Fibré algébrique réel non engendré par ses sections globales, 125
- Homologie des espaces projectifs réels, 397
- Homologie des surfaces affines rationnelles, 412

- Invariants numériques d'un plan double, 449
- Invariants numériques d'une surface de \mathbf{P}^3 , 448
- Matrice d'intersection de la bouteille de Klein, 175
- Modèle affine de $\mathbf{P}^n(\mathbf{R})$, 312
- Modèles algébriques réels des surfaces compactes, 231
- Modèles algébriques réels des surfaces compactes orientables, 309
- Modèles rationnels réels singuliers des surfaces compactes orientables, 356
- Parapluie cornu, 335
- Plongement de Veronese de la droite projective, 43
- Point singulier « fantôme », 53, 60
- Quadrique
 - M et $(M - 1)$, 170
- Résolution de point double sur une surface, 294
- Somme connexe $M\#(\mathbf{S}^2 \times \mathbf{S}^1)$, 480
- Structures réelles sur le tore complexe, 99
- Surface non Galois-maximale
 - $b_1(X) = 0$, 193
 - $b_1(X) \neq 0$, 193
- Surface quartique de \mathbf{P}^3 telle que $b_{\text{alg}}^1 = 0$, 272
- Surface quintique réelle telle que $b_1^{\text{alg}} = b_1$, 299
- Topologie des fibrés en coniques, 228

LISTE DES FIGURES

1.1 $y^2 - x(x - 1)(x - 2) = 0$	51
1.2 $y^3 + 2x^2y - x^4 = 0$	53
1.3 $y^2 - x^2(x - 2) = 0$	57
1.4 Parapluie de Whitney.....	72
1.5 Parapluie de Cartan.....	73
1.6 Parapluie de Kollár.....	74
1.7 Parapluie cuspidal.....	74
1.8 Parapluie cornu.....	75
1.9 Coniques complexes projectives.....	80
1.10 Coniques complexes affines.....	81
1.11 Coniques réelles projectives.....	82
1.12 Coniques réelles affines.....	83
2.1 $C : y^2 = x(x - 1)(x + 1)$	95
2.2 $C' : y^2 = x(x - i)(x + i)$	96
2.3 $V(\mathbf{R}) = \{y^2 - x^2(x - 2) = 0\} \subset \mathbf{A}^2(\mathbf{R})$	105
3.1 Construction d'une \mathbf{R} -quartique maximale.....	188
3.2 Construction d'une \mathbf{R} -quartique maximale (suite).....	189
3.3 Construction d'une \mathbf{R} -quartique maximale (suite et fin).....	190
4.1 Éclatement.....	222
4.2 Sphère quadrique \mathbf{S}^2	232
4.3 Hyperboloïde de \mathbf{R}^3	232

4.4 Surface de del Pezzo de degré 2.....	234
4.5 A_n^+ , $x^2 + y^2 - z^{n+1} = 0$, $n \geq 1$	261
4.6 A_n^- , $x^2 - y^2 - z^{n+1} = 0$, $n \geq 1$	261
4.7 $A_1^+ \simeq A_1^-$	261
4.8 M et \overline{M} au voisinage d'un point singulier A_n^\pm avec n impair.....	263
4.9 6 points A_1	267
4.10 4 points A_1 , 1 point A_2	268
4.11 Types topologiques des surfaces K3.....	270
4.12 Types topologiques des surfaces elliptiques jacobiniennes réelles.....	287
4.13 Domaine fondamental du groupe Γ_k	291
4.14 Projection de $\mathcal{P}(\mathbf{R})$ sur \mathbf{P}^2	302
4.15 La courbe \tilde{C} sur \tilde{W}	304
5.1 Surface de del Pezzo de degré 2.....	330
5.2 Parapluie cornu.....	335
5.3 La sphere \mathbf{S}^2 munie de deux ensembles de parallèles.....	338
5.4 Image de \mathbf{R} par $f: t \mapsto (t^2 + 1, t(t^2 + 1))$	345
5.5 Lieu réel de l'image de \mathbf{C} par $f: t \mapsto (t^2 + 1, t(t^2 + 1))$	346
5.6 Le cas $g = 2$	349
5.7 Surface de Ramanujam.....	353
D.1 Diamant de Hodge.....	447