

SURFACES ELLIPTIQUES RÉELLES ET INÉGALITÉ DE RAGSDALE-VIRO

FRÉDÉRIC MANGOLTE

mangolte@univ-savoie.fr

Fax: (33) 4 79 75 87 42

English title: Real elliptic surfaces
and Ragsdale-Viro inequality

ABSTRACT. On a real regular elliptic surface without multiple fiber, the Betti number h_1 and the Hodge number $h^{1,1}$ are related by $h_1 \leq h^{1,1}$. We will prove that it is always possible to deform such an algebraic surface to obtain $h_1 = h^{1,1}$. Furthermore, we can impose that each homology class can be represented by a real algebraic curve. We use a real version of the modular construction of elliptic surfaces.

RÉSUMÉ. Pour une surface elliptique réelle régulière et sans fibre multiple, le nombre de Betti h_1 et le nombre de Hodge $h^{1,1}$ sont liés par l'inégalité $h_1 \leq h^{1,1}$. On montre qu'on peut toujours déformer une telle surface algébrique pour obtenir $h_1 = h^{1,1}$. De plus, on peut imposer que chaque classe d'homologie soit représentable par une courbe algébrique réelle. On utilise une version adaptée au cas réel de la construction des surfaces elliptiques modulaires.

1. INTRODUCTION

Une variété projective (ou quasi-projective) X est dite réelle ou définie sur \mathbb{R} lorsque X est munie d'une involution anti-holomorphe σ_X appelée structure réelle. Dans ce cas, on appelle partie réelle de X , et on note $X(\mathbb{R})$, l'ensemble des points fixes de σ_X . Par convention, une surface est projective lisse. Une surface est dite elliptique s'il existe une application holomorphe surjective $\pi: X \rightarrow \Delta$ où Δ est une courbe lisse compacte et la fibre générique de π est une courbe de genre 1. Une telle surface est dite elliptique réelle lorsque X et Δ sont définies sur \mathbb{R} et $\pi \circ \sigma_X = \sigma \circ \pi$ où σ est la structure réelle de Δ .

Il est en général assez difficile de construire des surfaces réelles avec un "grand" premier nombre de Betti $h_1(X(\mathbb{R})) (= \text{rg } H_1(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2))$. Par exemple, on ne sait toujours pas s'il existe une surface de degré 5 dans $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ avec un premier nombre de Betti égal à 47 (47 est un majorant connu pour ces surfaces), cf. [IK] et [Ma1].

1991 *Mathematics Subject Classification.* 14J27 14C25 14P25.

Key words and phrases. algebraic cycles, topology of real algebraic surfaces, modular elliptic surfaces.

D'après un résultat de V. Kharlamov, [Kha], une surface elliptique réelle X régulière (i.e. telle que $H^1(X, \mathcal{O}_X) = \{0\}$) et sans fibre multiple, vérifie l'inégalité de Ragsdale-Viro

$$(1.1) \quad h_1(X(\mathbb{R})) \leq h^{1,1}(X)$$

où $h^{1,1}(X) = \dim_{\mathbb{C}} H^1(X, \Omega_X^1)$. Le nombre $h^{1,1}$ est invariant par déformation.

Maintenant, on note $h_1^{\text{alg}}(X(\mathbb{R}))$ le rang du sous-groupe de $H_1(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2)$ engendré par les classes fondamentales de courbes algébriques réelles (voir [BH]). On a par définition $h_1^{\text{alg}}(X(\mathbb{R})) \leq h_1(X(\mathbb{R}))$, en général, $h_1^{\text{alg}}(X(\mathbb{R})) \ll h_1(X(\mathbb{R}))$ et $h_1^{\text{alg}}(X(\mathbb{R})) \ll h^{1,1}(X)$, cf. e.g. [Ma2].

(1.2) Théorème. *Toute surface elliptique régulière sans fibre multiple peut être déformée sur \mathbb{C} en une surface elliptique admettant une structure réelle telle que $h_1^{\text{alg}} = h_1 = h^{1,1}$.*

Remarques. Une surface d'Enriques X est elliptique régulière avec deux fibres multiples. Pour une telle surface, on a $h^{1,1}(X) = 10$, mais il n'existe aucune surface d'Enriques réelle telle que $h_1^{\text{alg}} = h_1 = 10$. En revanche, il existe des surfaces d'Enriques réelles telles que $h_1^{\text{alg}} = 11$ et $h_1 = 12$, cf. [DK] et [MavH].

On ne peut pas espérer une version du théorème 1.2 avec déformation sur \mathbb{R} . En effet, même si $h_1(X(\mathbb{R})) = h^{1,1}(X)$, il peut n'exister aucune déformation sur \mathbb{R} de X telle que $h_1^{\text{alg}} = h^{1,1}$, voir à ce sujet le comportement des surfaces K3, [Ma2].

L'apport principal de ce travail est la construction d'une suite $\{X_k\}_{k \geq 1}$ de surfaces elliptiques réelles qui vérifient $h_1^{\text{alg}}(X_k(\mathbb{R})) = h^{1,1}(X_k)$, cf. théorème 5.3. Le théorème 1.2 se déduit alors de ce résultat par les théorèmes de Kodaira et Kas sur les déformations de surfaces elliptiques, cf. section 5. Dans [Pe], U. Persson prouve de cette manière que toute surface elliptique régulière peut être déformée en une surface de nombre de Picard maximal. Pour cela, il construit des surfaces à partir de revêtements ramifiés de degré k de $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$. Mais en réel, cette méthode donne en général des surfaces de premier nombre de Betti h_1 petit par rapport à $h^{1,1}$.

La méthode utilisée ici pour construire les surfaces X_k utilise des groupes fuchsien arithmétiques, cf. section 4. Les surfaces X_k sont des surfaces elliptiques modulaires au sens de T. Shioda [Sho] dont on a adapté les constructions au cas réel. Jusqu'à présent, les surfaces elliptiques modulaires ne semblent pas avoir été utilisées en géométrie algébrique réelle.

Cet article est organisé de la manière suivante : la section 2 est consacrée aux préliminaires sur les courbes de genre 1 réelles, les références sont [Si3] et [Sil]. Dans la section 3, on montre comment utiliser les constructions analytiques de K. Kodaira [Ko] en réel. Grâce à la classification des fibres singulières des pincesaux réels de courbes elliptiques due à R. Silhol [Si1], on réduit alors le problème à la construction de surfaces elliptiques avec fibres singulières données a priori. La section 4 est consacrée aux surfaces elliptiques modulaires réelles. On adapte les travaux de T. Shioda [Sho] et M. Nori [No] pour réduire le problème à la recherche de groupes fuchsien arithmétiques particuliers. Enfin, en section 5, on donne les domaines fondamentaux d'une suite de groupes Γ_k qui servent de base à la construction des surfaces X_k .

Je tiens à remercier V. Kharlamov pour m'avoir indiqué le résultat (1.1) et P. Schmutz Schaller pour son aide dans la construction des domaines fondamentaux de la section 5.

2. PRÉLIMINAIRES : COURBES DE GENRE 1 RÉELLES

On note $\mathcal{H} = \{z \in \mathbb{C} / \Im(z) > 0\}$ le demi-plan supérieur. L'action du groupe $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R}) = \mathrm{SL}(2, \mathbb{R}) / \{\pm 1\}$ sur \mathcal{H} est notée $z \mapsto A.z$ où $A.z = \frac{az+b}{cz+d}$ si A est représenté par $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $ad - bc = 1$. L'involution $\sigma_{\mathcal{H}} : z \mapsto -\bar{z}$ de \mathcal{H} est anti-holomorphe. On note $S : \mathrm{SL}(2, \mathbb{R}) \rightarrow \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$, $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a & -b \\ -c & d \end{pmatrix}$, clairement S induit une involution sur $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ que l'on notera encore S . Soit $z \in \mathcal{H}$, et soit $A \in \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$, alors $\sigma_{\mathcal{H}}(A.\sigma_{\mathcal{H}}(z)) = S(A).z$.

Soit Γ un groupe fuchsien (i.e. un sous-groupe discret de $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$), $\sigma_{\mathcal{H}}$ induit une structure réelle sur le quotient \mathcal{H}/Γ si et seulement si $\sigma_{\mathcal{H}}\Gamma = \Gamma\sigma_{\mathcal{H}}$, i.e. si et seulement si Γ est stable par S . Dans toute la suite, ce sont les sous-groupes d'indice fini du groupe modulaire $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z}) \subset \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ qui vont nous intéresser.

Soit C une courbe projective lisse de genre 1, alors il existe $\tau \in \mathcal{H}$ tel que $C = \mathbb{C}/(\mathbb{Z} + \tau\mathbb{Z})$. Réciproquement, soit $\tau \in \mathcal{H}$, on note $C(\tau)$ la courbe quotient $\mathbb{C}/(\mathbb{Z} + \tau\mathbb{Z})$. La fonction modulaire elliptique est notée $j : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C}$. Le signe \cong signifie isomorphe sur \mathbb{C} . La proposition suivante est classique.

(2.1) Proposition. *Soit $(\tau, \tau') \in \mathcal{H} \times \mathcal{H}$, les trois assertions suivantes sont équivalentes.*

- (1) $C(\tau) \cong C(\tau')$;
- (2) $j(\tau) = j(\tau')$;
- (3) *il existe $A \in \mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z})$, tel que $A.\tau = \tau'$.*

On note donc $j(C) = j(\tau)$ pour τ quelconque tel que $C(\tau) \cong C$. La fonction $j : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C}$ est définie sur \mathbb{R} , c'est-à-dire que $\forall \tau \in \mathcal{H}$, $\overline{j(\tau)} = j(\sigma_{\mathcal{H}}(\tau))$.

(2.2) Proposition. *Soit C une courbe projective lisse de genre 1, les trois assertions suivantes sont équivalentes.*

- (1) C peut être définie sur \mathbb{R} ;
- (2) $j(C) \in \mathbb{R}$;
- (3) $\exists \tau \in \mathcal{H} / C(\tau) \cong C$ et $2\Re(\tau) \in \mathbb{Z}$.

Soit $\tau \in \mathcal{H}$ vérifiant $2\Re(\tau) \in \mathbb{Z}$, la structure réelle induite sur $C(\tau) = \mathbb{C}/(\mathbb{Z} + \tau\mathbb{Z})$ par la conjugaison complexe de \mathbb{C} est telle que $C(\tau)(\mathbb{R}) \neq \emptyset$.

(2.3) Proposition. *Lorsque C est munie d'une structure réelle, on a*

si $\#C(\mathbb{R}) = 2$, alors $j(C) \geq 1$ et $\exists \tau \in \mathcal{H} / C(\tau) \cong C$ et $\Re(\tau) \in \mathbb{Z}$

si $\#C(\mathbb{R}) = 1$, alors $j(C) \leq 1$ et $\exists \tau \in \mathcal{H} / C(\tau) \cong C$ et $2\Re(\tau)$ est un entier impair.

(2.4) Remarque. Le cas $j(C) = 1$ correspond aux courbes $y^2 = x^3 + x$ et $y^2 = x^3 - x$ qui sont isomorphes sur \mathbb{C} par $(x, y) \mapsto (ix, \zeta y)$, où $\zeta^2 = -1$. La première courbe possède une partie réelle connexe, la partie réelle de la seconde courbe possède deux composantes connexes.

3. SURFACES ELLIPTIQUES RÉELLES

On considère une surface elliptique réelle $\pi: X \rightarrow \Delta$. On suppose que π possède au moins une fibre singulière, est sans fibre multiple et qu'aucune courbe exceptionnelle n'est contenue dans une fibre.

Par hypothèse, Δ est munie d'une involution anti-holomorphe σ . On note $C_u = \pi^{-1}\{u\}$ la fibre au-dessus de $u \in \Delta$. On considère un ensemble fini $\Sigma \subset \Delta$ stable par σ tel que C_u est lisse pour tout $u \in \Delta' = \Delta \setminus \Sigma$. Comme Σ est stable par σ , Δ' munie de la restriction de σ est encore réelle.

L'invariant fonctionnel de π est la fonction méromorphe $J: \Delta' \rightarrow \mathbb{C}$, $u \mapsto j(C_u)$ (cf. section 2). Par construction, J est définie sur \mathbb{R} , i.e. $J \circ \sigma = \bar{J}$. On peut prolonger J en une fonction holomorphe $J: \Delta \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ qui vérifie $J \circ \sigma = \text{conj} \circ J$ où conj est la conjugaison complexe sur $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$.

Maintenant $X|_{\Delta'} = \pi^{-1}(\Delta') \rightarrow \Delta'$ est un fibré différentiel en tores, les groupes d'homologie des fibres $\{H_1(C_u(\mathbb{C}), \mathbb{Z})\}_{u \in \Delta'}$ forment donc un faisceau localement constant au-dessus de Δ' . On peut étendre ce faisceau à Δ , [Ko, §7]. Ce faisceau étendu G est l'invariant homologique de π . De même que J , G est défini sur \mathbb{R} .

Si J est non constante, on peut étendre l'ensemble fini Σ , avec $\sigma(\Sigma) = \Sigma$, pour obtenir $\forall u \in \Delta'$, $J(u) \notin \{0, 1, \infty\}$. On note $\rho': \pi_1(\Delta') \rightarrow \text{SL}(2, \mathbb{Z})$ l'homomorphisme de monodromie associé. Le morphisme ρ' est une représentation de $\pi_1(\Delta')$ qui détermine et est déterminée par le faisceau G . Comme π est réelle, pour tout $\alpha \in \pi_1(\Delta')$, on a $\rho'(\sigma_*(\alpha)) = S(\rho'(\alpha))$ où σ^* est l'involution induite par σ sur $\pi_1(\Delta')$ et S est définie au début de la section 2.

Soit $u \in \Sigma$ et soit $\alpha \in \pi_1(\Delta')$ l'élément représenté par un lacet simple tournant dans le sens positif autour de u . Le point u est un pôle de J si et seulement si l'ordre de $\rho'(\alpha)$ est infini. Dans ce cas, $\rho'(\alpha)$ est conjuguée dans $\text{SL}(2, \mathbb{Z})$ à une matrice d'une des formes

$$(3.1) \quad \begin{pmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} -1 & -m \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ avec } m > 0$$

cf. [Ko §9]. Dans le premier cas, on dit que la fibre C_u est du type I_m et dans le second cas, du type I_m^* .

Si u est un pôle de J appartenant à $\Delta(\mathbb{R})$, la fibre C_u est réelle et les types réels possibles de $C_u(\mathbb{R})$ sont classifiés par la table 3.2 ci-dessous, extraite de [Si2, Th. VII(1.5)]. On suppose que π admet une section réelle, soit u' un point de $\Delta'(\mathbb{R})$ voisin de u . En conséquence, la fibre $C_{u'}$ est lisse et sa partie réelle $C_{u'}(\mathbb{R})$ possède une ou deux composantes connexes. Dans la deuxième colonne de la table, on a indiqué le nombre de composantes connexes de $C_{u'}(\mathbb{R})$ s'il reste constant lorsque u' varie au voisinage de u dans $\Delta'(\mathbb{R})$. On a indiqué "*" si $\#C_{u'}(\mathbb{R})$ change au voisinage de u . Les colonnes 3 et 4 donnent la caractéristique d'Euler topologique de $C_u(\mathbb{R})$ et C_u . La dernière colonne donne le nombre $\xi(C_u) - 1$ de composantes irréductibles de C_u qui ne rencontrent pas la section.

(3.2)

Type complexe	$\#C_{u'}(\mathbb{R})$	$\chi(C_u(\mathbb{R}))$	$\chi(C_u)$	$\xi(C_u) - 1$
I_m^*, m pair	2	$-m - 4$	$m + 6$	$m + 4$
	1	$-m - 2$		
I_m^*, m impair	*	$-m - 4$	m	$m - 1$
	*	$-m - 2$		
I_m, m pair	2	$-m$	m	$m - 1$
	2	0		
	1	$-m$		
	1	0		
I_m, m impair	*	$-m$	m	$m - 1$
	*	1		

Pour simplifier, et comme cela suffira pour la suite, on a laissé de côté les fibres singulières qui pourraient apparaître en dehors des pôles de J . Remarquons que $\deg(J) = \sum_{l=1}^t m_l$ où t est le nombre de pôles de J . Pour une surface elliptique, la caractéristique d'Euler topologique vaut 12 fois la caractéristique d'Euler holomorphe $\chi(\mathcal{O}_X)$. Si toutes les fibres singulières de π sont de type I ou I^* , on tire de l'avant-dernière colonne de la table 3.2 :

$$(3.3) \quad 12\chi(\mathcal{O}_X) = \mu + 6\nu(I^*)$$

où $\mu = \deg(J)$ et $\nu(I^*)$ est le nombre de fibres du type I^* .

Au vu de la table 3.2, on n'a pas de formule aussi générale pour les invariants réels (voir l'exemple 4.6 et la preuve du théorème 5.3).

4. SURFACES ELLIPTIQUES MODULAIRES RÉELLES

Soit $\Gamma \subset \mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z})$ un sous-groupe d'indice fini, en particulier Γ est un groupe fuchsien arithmétique. Comme Γ opère sur $\mathbb{P}^1(\mathbb{Q})$, le quotient

$$\Delta_\Gamma = (\mathcal{H} \cup \mathbb{P}^1(\mathbb{Q}))/\Gamma$$

est bien défini. Par hypothèse, le nombre de classes de conjugaisons paraboliques de Γ est fini, Δ_Γ est donc une courbe projective lisse (cf. [Shm, §1.3 et §1.5]). Si $\Gamma \subset \Gamma'$ est un sous-groupe, l'application canonique de \mathcal{H}/Γ sur \mathcal{H}/Γ' s'étend alors en une application holomorphe de Δ_Γ sur $\Delta_{\Gamma'}$. On a en particulier, une application holomorphe

$$J_\Gamma: \Delta_\Gamma \rightarrow \mathbb{P}^1$$

en prenant $\Gamma' = \mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z})$ et en identifiant $\Delta_{\Gamma'}$ avec \mathbb{P}^1 via la fonction j (cf. section 2). Si l'on suppose de plus que Γ est stable par S , Δ_Γ et J_Γ sont naturellement définis sur \mathbb{R} .

L'application J_Γ est ramifiée seulement au-dessus des trois points 0, 1 et ∞ (cf. [No, prop. 2.1]). De plus, le degré de J_Γ est égal à l'indice de Γ dans $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z})$

$$\deg J_\Gamma = [\mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z}) : \Gamma]$$

Notons $\Delta' = \Delta_\Gamma \setminus J_\Gamma^{-1}\{0, 1, \infty\}$ et $p: \mathcal{H} \rightarrow \Delta'$ le revêtement universel. Par construction, il existe un morphisme $w: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}^* = \mathcal{H} \setminus j^{-1}\{0, 1\}$ qui fait commuter le diagramme

$$(4.1) \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{H} & \xrightarrow{w} & \mathcal{H}^* \\ p \downarrow & & j \downarrow \\ \Delta' & \xrightarrow{J_\Gamma} & \mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\} \end{array}$$

et qui vérifie $w \circ \sigma_{\mathcal{H}} = \sigma_{\mathcal{H}^*} \circ w$. De là, il existe une unique représentation

$$\rho: \pi_1(\Delta') \rightarrow \Gamma \subset \mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z}) .$$

telle que $\forall \alpha \in \pi_1(\Delta'), \forall \tilde{u} \in \mathcal{H}, \rho(\alpha).w(\tilde{u}) = w(\alpha.\tilde{u})$ et $\rho(\sigma_*(\alpha)) = S(\rho(\alpha))$. Maintenant, chaque relèvement $\rho': \pi_1(\Delta') \rightarrow \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$ de ρ vérifie encore $\rho'(\sigma_*(\alpha)) = S(\rho(\alpha))$. Il est alors facile d'adapter au cas réel la construction de Kodaira [Ko, p. 578], pour montrer qu'il existe une surface elliptique

$$\pi: X \rightarrow \Delta_\Gamma$$

définie sur \mathbb{R} et possédant une section réelle ayant pour invariants J_Γ et ρ' .

(4.2) Définition. Si $-1 \notin \rho'(\pi_1(\Delta'))$, une telle surface $\pi: X \rightarrow \Delta_\Gamma$ est appelée surface elliptique modulaire réelle.

Pour simplifier – et ceci correspond à la restriction sur les types de fibres singulières déjà faite en section 3 – on se restreint au cas où Δ_Γ est sans point elliptique, i.e. Γ est sans torsion ; on a alors (cf. [Shm] ou [Sho (4.6)])

$$(4.3) \quad 2g - 2 + t = \frac{1}{6}\mu$$

où g est le genre de Δ_Γ , t est le nombre de cusps et $\mu = [\mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z}) : \Gamma]$.

On note $\{u_l\} = J_\Gamma^{-1}\{0, 1, \infty\}$ avec pour $1 \leq l \leq t$, $J(u_l) = \infty$. Alors les fibres singulières de $\pi: X \rightarrow \Delta_\Gamma$ sont les t fibres $C_{u_l} = \pi^{-1}\{u_l\}$, $l \leq t$ (cf. [Sho]) et le type de la fibre C_{u_l} est déterminé par $\rho'(\alpha_l)$ où $\alpha_l \in \pi_1(\Delta')$ est l'élément représenté par un lacet simple tournant dans le sens positif autour de u_l . Soit $l \leq t$, choisissons un point $z \in \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ représentant u_l . Comme u_l est un cusp, le générateur du stabilisateur de z dans Γ est conjugué dans $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z})$ à $\begin{pmatrix} 1 & m_l \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \pmod{\{\pm 1\}}$, $m_l > 0$ et la fibre C_{u_l} est du type I_{m_l} ou $I_{m_l}^*$. Les invariants numériques de X sont alors donnés par

$$(4.4) \quad \begin{aligned} q(X) &= g(\Delta_\Gamma) \\ 12\chi(\mathcal{O}_X) &= \mu + 6\nu(I^*) \end{aligned}$$

Sachant que $\mu = \sum_{l=1}^t m_l$ et $\nu(I^*)$ est le nombre de fibre de type I^* .

(4.5) Lemme. Si Γ est sans torsion et $g(\Delta_\Gamma) = 0$, il existe exactement $t - 1$ relèvements distincts $\rho': \pi_1(\Delta') \rightarrow \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$ de $\rho: \pi_1(\Delta') \rightarrow \mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z})$ qui vérifient

$$\rho'(\alpha_l) = 1 \quad \text{si} \quad \rho(\alpha_l) = 1$$

où t est le nombre de cusps de Δ_Γ .

C'est un cas particulier de [No, prop. 2.3].

(4.6) **Exemple.** On considère le groupe de congruence

$$\Gamma(2) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z}) / a \equiv d \equiv 1 \pmod{2}, b \equiv c \equiv 0 \pmod{2} \right\} / \{\pm 1\}$$

d'indice $\mu = 6$ dans $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z})$ (cf. e.g. [Kat, chap. V]).

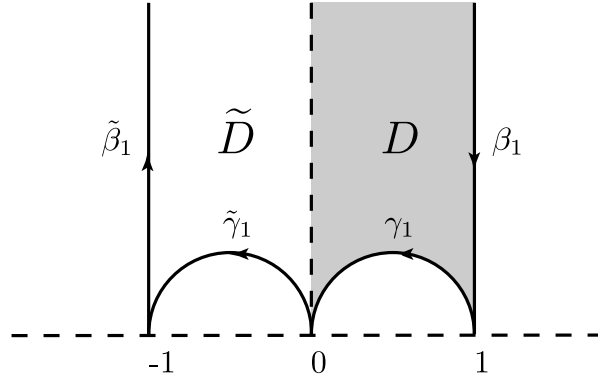


Fig. 1

On a représenté sur la figure 1 un domaine fondamental pour $\Gamma(2)$. Il est limité par les géodésiques $\beta_1, \gamma_1, \tilde{\gamma}_1, \tilde{\beta}_1$, avec les identifications $l \sim \tilde{l}$ pour une géodésique l . Ce domaine est stable par $\sigma_{\mathcal{H}}$. De là, la courbe quotient $\Delta = (\mathcal{H} \cup \mathbb{P}^1(\mathbb{Q})) / \Gamma(2)$ est munie de la structure réelle quotient et sa partie réelle $\Delta(\mathbb{R})$ est représentée dans \mathcal{H} par la réunion des géodésiques $\beta_1 \cup \gamma_1$ et du demi-axe imaginaire. En particulier, les trois cusps u_1, u_2, u_3 de Δ , représentés par $0, 1$ et ∞ appartiennent à $\Delta(\mathbb{R})$.

Remarquons au vu des identifications que $g(\Delta) = 0$ i.e. $\Delta \cong \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$.

Considérons une surface modulaire $\pi: X \rightarrow \Delta$ associée à un relèvement, cf.(4.1),

$$\rho': \pi_1(\Delta \setminus \{u_i\}) \rightarrow \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$$

La fibration π possède exactement trois fibres singulières du type I_m ou I_m^* et d'après (4.4), on a :

$$(4.7) \quad \begin{aligned} q(X) &= 0 \\ 12\chi(\mathcal{O}_X) &= 6 + 6\nu(I^*) \end{aligned}$$

Ceci impose que le nombre de fibres de type I^* est impair donc égal à 1 ou 3. Dans le premier cas, les trois fibres sont I_2, I_2, I_2^* . Alors $\chi(\mathcal{O}_X) = 1$ et X est une surface rationnelle réelle telle que $h_1^{\mathrm{alg}}(X(\mathbb{R})) = h_1(X(\mathbb{R})) = h^{1,1}(X) = 10$. Dans le second cas, les fibres singulières sont trois I_2^* , $\chi(\mathcal{O}_X) = 2$ et X est une surface K3 réelle telle que $h_1^{\mathrm{alg}}(X(\mathbb{R})) = h_1(X(\mathbb{R})) = h^{1,1}(X) = 20$.

5. CONSTRUCTION DE SURFACES EXTRÉMALES

Pour une surface elliptique X régulière, on a

$$(5.1) \quad h^{1,1}(X) = 10\chi(\mathcal{O}_X) .$$

En effet, d'après le théorème de décomposition de Hodge,

$$h^{1,1}(X) = \dim_{\mathbb{C}} H^2(X, \mathbb{C}) - 2 \dim_{\mathbb{C}} H^2(X, \mathcal{O}_X) .$$

L'hypothèse de régularité nous donne $\dim_{\mathbb{C}} H^2(X, \mathbb{C}) = 12\chi(\mathcal{O}_X) - 2$ (voir aussi (3.3)) et $\dim_{\mathbb{C}} H^2(X, \mathcal{O}_X) = \chi(\mathcal{O}_X) - 1$ d'où le résultat.

(5.2) Définition. Une surface elliptique régulière $\pi: X \rightarrow \mathbb{P}^1$ est dite normalisée si et seulement si

- (1) aucune courbe exceptionnelle n'est contenue dans une fibre ;
- (2) π est sans fibre multiple.

(5.3) Théorème. *Pour tout entier $k > 0$, il existe une surface elliptique réelle normalisée $\pi: X_k \rightarrow \mathbb{P}^1$ qui vérifie*

$$\chi(\mathcal{O}_{X_k}) = k \quad \text{et} \quad h_1^{\text{alg}}(X_k(\mathbb{R})) = 10k$$

Avant de prouver le théorème 5.3, on montre comment on peut déduire de ce résultat le théorème 1.2 de l'introduction.

(5.4) Théorème (Kodaira). *Toute surface elliptique régulière X provient d'une surface elliptique normalisée Y par une succession de η éclatements de points et de δ transformations logarithmiques d'ordres respectifs $n_1 \dots, n_\delta$.*

Deux surfaces elliptiques régulières X et X' sont déformations l'une de l'autre si et seulement si

- (1) Y et Y' sont déformations l'une de l'autre
- (2) $\eta = \eta'$
- (3) $\delta = \delta'$ et $n_l = n'_l, \forall l \in \{1, \dots, \delta\}$

Cet énoncé est tiré de [Pe, p. 306]. Le théorème suivant se trouve en première page de [Kas].

(5.5) Théorème (Kas). *Deux surfaces elliptiques normalisées Y et Y' sont déformations l'une de l'autre si et seulement si*

$$\chi(\mathcal{O}_Y) = \chi(\mathcal{O}_{Y'})$$

Preuve du théorème 1.2. Soit V une surface réelle et $W \rightarrow V$ un éclatement centré en un point de $V(\mathbb{R})$, alors W est une surface réelle et

$$\begin{aligned} h^{1,1}(W) &= h^{1,1}(V) + 1, \\ h_1^{\text{alg}}(W(\mathbb{R})) &= h_1^{\text{alg}}(V(\mathbb{R})) + 1 . \end{aligned}$$

Soit X une surface elliptique régulière, d'après (5.4), X provient d'une surface normalisée Y par une suite de η éclatements et δ transformations logarithmiques. Si

de plus X est sans fibre multiple, on a $\delta = 0$. Posons $k = \chi(\mathcal{O}_Y)$, et considérons une surface X_k vérifiant les hypothèses du théorème 5.3, alors $h_1^{\text{alg}}(X_k(\mathbb{R})) = h^{1,1}(Y)$ et d'après le théorème de Kas (5.5), X_k est déformation de Y . Notons X' la surface obtenue à partir de X_k après éclatement de η points de $X_k(\mathbb{R})$. Alors X' est une déformation de X par (5.4) et $h_1^{\text{alg}}(X'(\mathbb{R})) = h^{1,1}(X')$. D'après (1.1), comme X' est une surface elliptique réelle régulière et sans fibre multiple, on a

$$h_1^{\text{alg}}(X'(\mathbb{R})) \leq h_1(X'(\mathbb{R})) \leq h^{1,1}(X')$$

d'où le résultat.

Preuve du théorème 5.3.

Le cas $k = 1$ est traité dans l'exemple 4.6. Soit $k \geq 2$, à partir du domaine fondamental $D \cup \tilde{D}$ de $\Gamma(2)$ (cf. Fig. 1), on construit un nouveau domaine obtenu en adjoignant au triangle $D \cup \tilde{D}$ $k - 2$ translatés de D à droite et leurs symétriques par rapport au demi-axe imaginaire. Le nouveau domaine est bordé par les géodésiques $\beta_{k-1}, \gamma_{k-1}, \gamma_{k-2}, \dots, \gamma_1, \tilde{\gamma}_1, \dots, \tilde{\gamma}_{k-1}, \tilde{\beta}_{k-1}$ identifiées deux à deux par $l \sim \tilde{l}$.

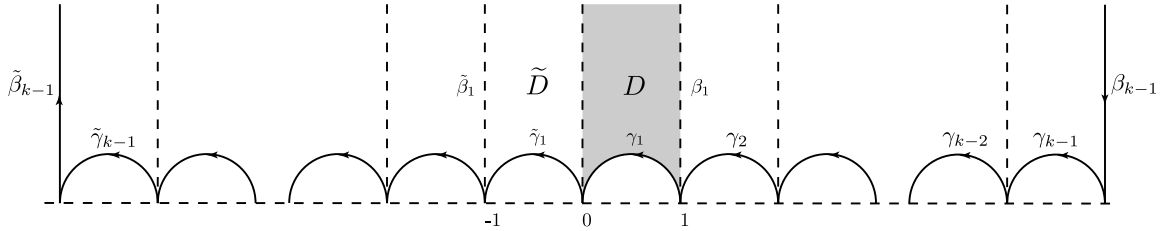


Fig. 2

C'est le domaine fondamental d'un sous-groupe $\Gamma_k \subset \Gamma(2)$ d'indice fini dans $\text{PSL}(2, \mathbb{Z})$, cf. e.g. [DR]. Par construction, la courbe quotient $\Delta_k = (\mathcal{H} \cup \mathbb{P}^1(\mathbb{Q})) / \Gamma_k$ est sans point elliptique et possède $k + 1$ cusps.

Le domaine fondamental est stable par $\sigma_{\mathcal{H}}$ et la courbe Δ_k est munie de la structure réelle quotient. Sa partie réelle $\Delta_k(\mathbb{R})$ est représentée dans \mathcal{H} par la réunion des géodésiques $\beta_{k-1} \cup \gamma_{k-1} \cup \gamma_{k-2} \cup \dots \cup \gamma_1$ et du demi-axe imaginaire.

Au vu des identifications, on a $g(\Delta_k) = 0$ et d'après (4.3)

$$\mu(\Gamma_k) = 6(k - 1) .$$

Suivant la section 4, on a une application $J_{\Gamma_k} : \Delta_k \rightarrow \mathbb{P}^1$ et on note $\Delta'_k = \Delta_k \setminus J_{\Gamma_k}^{-1}\{0, 1, \infty\}$. On peut construire pour chaque relèvement

$$\rho' : \pi_1(\Delta'_k) \rightarrow \text{SL}(2, \mathbb{Z})$$

de $\rho : \pi_1(\Delta'_k) \rightarrow \Gamma_k \subset \text{PSL}(2, \mathbb{Z})$ une surface elliptique modulaire réelle avec section réelle

$$\pi : X \rightarrow \mathbb{P}^1$$

d'invariants (J_{Γ_k}, ρ') . Par construction, X possède exactement $k + 1$ fibres singulières et ces fibres sont de type I_m ou I_m^* .

D'après les formules (4.4), la surface X vérifie

$$\begin{aligned} q(X) &= 0 \\ 12\chi(\mathcal{O}_X) &= 6k - 6 + 6\nu(I^*) \end{aligned}$$

où $\nu(I^*)$ est le nombre de fibres de type I_m^* . En particulier, quel que soit le choix de ρ' , X est une surface elliptique régulière et $h^{1,1}(X) = 10\chi(\mathcal{O}_X)$.

Si k est impair, le nombre de fibres singulières est pair et d'après le lemme 4.5, il existe un relèvement ρ' tel que toutes les fibres singulières sont de type I^* .

Si k est pair, $6k - 6$ n'est pas divisible par 12 et nécessairement l'une des fibres singulière est de type I^* . Il existe donc encore un relèvement de ρ tel que toutes les fibres singulières sont de type I^* . On peut donc obtenir pour tout $k \geq 2$ une surface notée X_k dont la liste des fibres singulières est $I_{m_1}^*, \dots, I_{m_{k+1}}^*$ avec $\sum_l m_l = 6k - 6$. On a alors

$$\chi(\mathcal{O}_{X_k}) = k, \quad h^{1,1}(X_k) = 10k$$

Par construction, les $k + 1$ cusps appartiennent à $\Delta_k(\mathbb{R})$, les $k + 1$ fibres de type $I_{m_l}^*$ sont donc réelles. Comme $\Gamma_k \subset \Gamma(2)$, les cusps sont chacun conjugué (dans $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z})$) à un cusp $\begin{pmatrix} 1 & m_l \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ avec m_l pair.

On déduit alors de la table 3.2 que le nombre de composantes connexes de la partie réelle d'une fibre réelle de π est constant au voisinage de chaque fibre singulière. Toutes les fibres lisses de $X_k(\mathbb{R})$ ont donc le même nombre de composantes connexes. Par ailleurs, si l'on note Ω l'image du demi-axe imaginaire par l'application canonique $\mathcal{H} \rightarrow \Delta_k = (\mathcal{H} \cup \mathbb{P}^1(\mathbb{Q}))/\Gamma_k$, on a $\Omega \subset \Delta_k(\mathbb{R})$. D'après les propositions 2.2 et 2.3, on a $J(u) > 1$ pour presque tous les points u de Ω donc $\#C_u(\mathbb{R}) = 2$. D'après ce qui précède, on a plus généralement $\#C_u(\mathbb{R}) = 2$ pour toutes les fibres réelles lisses de π .

Par construction, $X_k(\mathbb{R})$ est connexe et $h_1(X_k(\mathbb{R})) = 2 - \sum_l \chi(C_{u_l}(\mathbb{R}))$. De nouveau à partir de la table 3.2 et maintenant qu'on connaît le nombre de composantes au voisinage de chaque cusp u_l , on déduit $\chi(C_{u_l}(\mathbb{R})) = -m_l - 4$. De plus, d'après [Si2, VII.1], les composantes irréductibles réelles d'une fibre de type I^* qui ne rencontrent pas la section sont indépendantes. De là

$$-\chi(C_{u_l}(\mathbb{R})) = \xi(C_{u_l}) - 1$$

et

$$h_1^{\mathrm{alg}}(X_k(\mathbb{R})) = 2 + \sum_l m_l + 4(k + 1) = 10k.$$

La proposition suivante sert à déterminer le type topologique des surfaces $X_k(\mathbb{R})$.

(5.6) Proposition. *Soit $X \rightarrow \mathbb{P}^1$ une surface elliptique réelle normalisée, si $\chi(\mathcal{O}_X)$ est pair et $X(\mathbb{R}) \neq \emptyset$, alors*

$$X(\mathbb{R}) \text{ est orientable.}$$

si $\chi(\mathcal{O}_X)$ est impair et X admet une section définie sur \mathbb{R} , alors

$$X(\mathbb{R}) \neq \emptyset \text{ et } X(\mathbb{R}) \text{ est non orientable.}$$

Preuve. Selon les hypothèses considérées, un diviseur canonique de X est donné par (cf. e.g. [BPV, p. 162]) :

$$K_X = (\chi(\mathcal{O}_X) - 2)F$$

où F est une fibre quelconque. La classe $w_1(X(\mathbb{R})) \in H_1(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2)$, duale de Poincaré de la première classe de Stiefel-Whitney, est représentée par $K_X(\mathbb{R})$ et pour tout diviseur réel D de X , on a

$$(5.7) \quad D.K_X \equiv D(\mathbb{R}) \cap K_X(\mathbb{R}) \pmod{2}.$$

Dans le cas où $\chi(\mathcal{O}_X)$ est pair, $K_X \equiv 0 \pmod{2}$ d'où $w_1(X(\mathbb{R})) = 0$ et $X(\mathbb{R})$ est orientable. Maintenant, supposons que $\chi(\mathcal{O}_X)$ est impair et notons S la courbe image dans X d'une section définie sur \mathbb{R} ; on a

$$S.K_X \equiv 1 \pmod{2}$$

donc $X(\mathbb{R}) \neq \emptyset$ car nécessairement il existe un point de $S \cap K_X$ dans $X(\mathbb{R})$. On a alors $w_1(X(\mathbb{R})) \neq 0$ d'après (5.7) et $X(\mathbb{R})$ est non-orientable.

On note S_g la surface (topologique) orientable de genre g et $V_q = \#^q \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ la surface non-orientable de caractéristique d'Euler $2 - q$.

(5.8) Corollaire. *Soit X_k une surface vérifiant les hypothèses du théorème 5.3, alors si k est pair, $X_k(\mathbb{R}) = S_{5k}$ et si k est impair, $X_k(\mathbb{R}) = V_{10k}$.*

Par hypothèse, on a $h_1(X_k(\mathbb{R})) = 10k$ et l'orientabilité est donnée par la proposition 5.6. Il reste à montrer que la surface $X_k(\mathbb{R})$ est connexe. C'est une conséquence de l'inégalité de Comessatti

$$2\#X(\mathbb{R}) - h_1(X(\mathbb{R})) \leq h^{1,1}(X) - 2(r(X) - 1)$$

valable pour une surface réelle X quelconque où $r(X)$ désigne le nombre de classes réelles indépendantes dans le groupe de Néron-Severi de X . Comme X_k est normalisée, on a $h_1^{\text{alg}}(X_k(\mathbb{R})) \leq r(X_k) \leq h^{1,1}(X_k)$, voir par exemple [Si2, III(1.10)], donc $\#X_k(\mathbb{R}) = 1$.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [BPV] W. Barth, C. Peters, A. Van de Ven, *Compact complex surfaces*, Ergebnisse der Mathematik, Springer, Berlin Heidelberg, 1984.
- [BH] E. Borel, A. Haefliger, *La classe d'homologie fondamentale d'un espace analytique*, Bul. Soc. Math. France **83** (1961), 461–513.
- [DK] A. Degtyarev, V. Kharlamov, *Topological classification of real Enriques surfaces*, Topology **35** (1996), no. 3, 711–730.
- [DR] G. de Rham, *Sur les polygones générateurs de groupes fuchsien*, L'ens. Math. **17** (1971), no. 1, 49–61.
- [IK] I. Itenberg, V. M. Kharlamov, *Towards the maximal number of components of a non-singular surface of Degree 5 in RP^3* , Topology of real algebraic varieties and related topics, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, vol. 173, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1996, pp. 111–118.
- [Kas] A. Kas, *On the deformation types of regular elliptic surfaces*, Complex analysis and algebraic geometry (W. Baily, T. Shioda, eds.), Cambridge University Press, Cambridge London New York, 1977.
- [Kat] S. Katok, *Fuchsian groups*, Chicago Lectures in Mathematics, The University of Chicago Press, Chicago, 1992.
- [Kha] V. Kharlamov, *Communication privée* (1997).
- [Ko] K. Kodaira, *On compact analytic surfaces: II & III*, Ann. of Math. **77 & 78** (1963), 563–626 & 1–40.

- [Ma1] F. Mangolte, *Une surface réelle de degré 5 dont l'homologie est entièrement engendrée par des cycles algébriques*, C. R. Acad. Sc. **318** (1994), Paris, 343–346.
- [Ma2] F. Mangolte, *Cycles algébriques sur les surfaces K3 réelles*, Math. Z. **225** (1997), no. 4, 559–576.
- [MavH] F. Mangolte, J. van Hamel, *Algebraic cycles and topology of real Enriques surfaces*, Compos. Math. **110** (1998), no. 2, 215–237.
- [No] M. Nori, *On certain elliptic surfaces with maximal Picard number*, Topology **24** (1984), 175–186.
- [Pe] U. Persson, *Horikawa surfaces with maximal Picard number*, Math. Ann. **259** (1982), 287–312.
- [Shm] G. Shimura, *Introduction to the arithmetic theory of automorphic functions*, Princeton University Press, 1971.
- [Sho] T. Shioda, *On elliptic modular surfaces*, J. Math. Soc. Japan **24** (1972), 20–59.
- [Si1] R. Silhol, *Real algebraic surfaces with rational or elliptic fiberings*, Math. Z. **186** (1984), 465–499.
- [Si2] R. Silhol, *Real algebraic surfaces*, Lectures notes in Math., vol. 1392, Springer, Berlin Heidelberg New York, 1989.
- [Si3] R. Silhol, *Compactifications of moduli spaces in real algebraic geometry*, Invent. Math. **107** (1992), 151–202.
- [Sil] J. H. Silverman, *The arithmetic of elliptic curves*, Graduate Texts in Math., vol. 106, Springer-Verlag, New York, 1986.

LABORATOIRE DE MATHÉMATIQUES, UNIVERSITÉ DE SAVOIE, F-73 376 LE BOURGET DU LAC
CEDEX, FRANCE, TEL: (33) 4 79 75 86 60, FAX: (33) 4 79 75 87 42

E-mail address: mangolte@univ-savoie.fr