Licence MPCI, 2e année
Algèbre Générale

Devoir Maison
A rendre pour le Mardi 16 février 2021

Les deux exercices sont indépendants. On apportera un soin particulier à la présentation et à la rédaction.

Exercice 1 (Matrices à coefficients entiers)**.**

On note $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ l'ensemble des matrices carrées de taille 2 à coefficients **entiers**. On considère l'ensemble :

$$G = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z}) \mid \det(M) = 1\}$$

(1) Montrer que $(G, \times)$ est un groupe (Pour la multiplication usuelle des matrices), et qu'il n'est pas monogène.

(2) Soit l'ensemble $\mathcal{P}$ suivant :

$$\mathcal{P} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z}) \, , \, n \in \mathbb{Z} \right\}$$

Montrer que $\mathcal{P}$ est un sous-groupe de G qui est monogène.

(3) On désigne par A et B les deux matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

On note $\mathcal{R} = \langle A, B \rangle$, le sous-groupe engendré par A et B. Montrer que $\mathcal{P} < \mathcal{R}$.

(4) Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in G$ et $n \in \mathbb{Z}$. Calculer les matrices AM puis $(BA)^n M$.

Montrer que si $a \neq 0$, alors il existe $C \in \mathcal{R}$, tel que $CM = \begin{pmatrix} a & b \\ r & d' \end{pmatrix}$ avec $r, d' \in \mathbb{Z}$ et $0 \leq r < |a|$.

(5) En déduire qu'il existe $D \in \mathcal{R}$ tel que $DM \in \mathcal{P}$. Conclure que $\{A, B\}$ est une partie génératrice de G.

(6) Ecrire la matrice $\begin{pmatrix} 10 & 7 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}$ en fonction des générateurs A et B. (Et expliquer comment vous êtes arrivés au résultat)

.

Exercice 2 (Projection et Projecteurs)**.**
Soit G un groupe, et soient A et B deux sous-groupes de G. On note :

$$AB = \{ab \; | a \in A, b \in B\}$$

On dit que A et B *commutent*, lorsque pour tout $a \in A$ et tout $b \in B$, on a $ab = ba$.

(1) Montrer que si A et B commutent, alors AB est un sous-groupe de G.
(2) On considère le groupe produit $A \times B$ muni de la loi produit usuelle.
Soit l'application :

$$\begin{aligned} \phi : A \times B &\longrightarrow G \\ (a, b) &\longmapsto ab \end{aligned}$$

Montrer que A et B commutent, si et seulement si ϕ est un morphisme.

Soit p un endomorphisme de G tel que $p \circ p = p$ (on dit que p est un projecteur). On note $K = \mathrm{Ker}(p)$ et $H = \mathrm{Im}(p)$,

(3) Montrer que $K \cap H = \{e\}$ et que $G = KH$.
(4) Montrer que si K et H commutent, alors G est isomorphe au groupe produit $K \times H$.
(5) Trouver un exemple de groupe G et d'application p telle que $p \circ p = p$, et telle que G n'est pas isomorphe à $K \times H$.