Feuille de TD 1 : Structure de Groupe

Exercice 4 (♠ Sous-groupes classiques)**.**
Montrer que les exemples suivants sont des groupes :

(1) Les racines 5-iemes de l'unité $\mathbb{U}_5 = \{z \in \mathbb{C} | z^5 = 1\}$ muni de la multiplication.
(2) Soit $u \in \mathbb{R}^2$ fixé. Soit $E_u = \{f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \,|\, f \text{ bijective et } f(u) = u\}$ muni de la composition usuelle $\circ$.

On montre que E_u est un sous-groupe de $\mathrm{Bij}(\mathbb{R}^2)$.
- L'application identité $\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}$ est dans E_u car id est bijective et $\mathrm{id}(u) = u$.
- Soient $f, g \in E_u$, alors $f \circ g$ est bijective et $f \circ g(u) = f(g(u)) = f(u) = u$. Donc $f \circ g \in E_u$.
- L'application f^{-1} est également bijective, et de plus $f^{-1}(u) = f^{-1}(f(u)) = u$, donc $f^{-1} \in E_u$.

(3) L'ensemble $\mathrm{SL_n}(\mathbb{C})$ des matrices complèxes de taille n et de determinant 1, muni de la multiplication usuelle $\times$.

On montre que $\mathrm{SL_n}(\mathbb{C})$ est un sous-groupe de $\mathrm{GL_n}(\mathbb{C})$.
- La matrice I_n est dans $\mathrm{SL_n}(\mathbb{C})$ puisque $\det(I_n) = 1$.
- Si $A, B \in \mathrm{SL_n}(\mathbb{C})$, alors $\det(AB^{-1}) = \det(A)\det(B^{-1}) = \dfrac{\det(A)}{\det(B)} = \dfrac{1}{1} = 1$. Donc $AB^{-1} \in \mathrm{SL_n}(\mathbb{C})$.

(4) Les fonctions polynômiales : $\{f(x) = a_n x^n + \cdots + a_0 \,,\, n \in \mathbb{N}, a_i \in \mathbb{R}\}$ muni de l'addition usuelle.

On montre que $\mathcal{P}$ est un sousgroupe de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
- L'application identiquement nulle est dans $\mathcal{P}$. (pour $n = 0$ et $a_0 = 0$).
- Si $f, g \in \mathcal{P}$. avec $f(x) = a_n x^n + \cdots + a_0$ et $g(x) = b_m x^m + \cdots + b_0$. Alors on peut supposer sans perte de généralité que $n \geq m$. Dans ce cas, pour tout $m < k \leq n$ on définit $b_k = 0$, et on peut alors écrire $g(x) = b_n x^n + \cdots + b_0$. On en déduit alors
$$\begin{aligned}(f + (-g))(x) &= f(x) - g(x) \\ &= (a_n x^n + \cdots + a_0) - (b_n x^n + \cdots + b_0) \\ &= (a_n - b_n)x^n + \cdots + (a_0 - b_0)\end{aligned}$$
Donc $f + (-g) \in \mathcal{P}$.

Exercice 6 (★ Tous les éléments sont réguliers)**.**
Soit E un ensemble **fini** muni d'une loi de composition interne $\star$ associative. On suppose que tous les éléments de E sont réguliers. Soit $a \in E$ fixé.
(Un élément x est dit *régulier* pour la loi $\star$ si $\forall y, z \in E, [(x \star y = x \star z) \Rightarrow (y = z)]$ et $[(y \star x = z \star x) \Rightarrow (y = z)]$).

(1) Montrer que l'application $\phi(x) = a \star x$ est une bijection de E dans E. En déduire qu'il existe $e \in E$ tel que $a \star e = a$.

L'application ϕ est injective. En effet, si $\phi(x) = \phi(y)$ alors $a \star x = a \star y$ et par régularité, on a $x = y$. Une application injective d'un ensemble fini dans lui-même est bijective.
Donc l'application est surjective, et il existe $e \in E$ tel que $\phi(e) = a$.

(2) Démontrer que, pour tout $x \in E$, on a $e \star x = x$.

Soit $x \in E$.

$$a \star (e \star x) = (a \star e) \star x = a \star x$$

Donc par régularité, on en déduit que $e \star x = x$.

(3) Démontrer que, pour tout $x \in E$, on a $x \star e = x$.

On a $(x \star e) \star x = x \star (e \star x) = x \star x$. Donc par régularité (à droite), on obtient $x \star e = x$. (*Remarque* : La régularité à droite est bien nécéssaire. On peut construire un exemple simple d'une loi associative sur un ensemble fini, où tous les éléments sont réguliers à droite, mais il n'y a pas d'élément neutre.)

(4) Démontrer que $(E, \star)$ est un groupe.

On vient de montrer dans les deux questions précédentes qu'il existe un élément neutre e. Il reste à montrer que tout élément est inversible.
L'application ϕ est bijective, donc il existe $b \in E$ tel que $\phi(b) = e$, c'est à dire $a \star b = e$. Par un raisonnement similaire, il existe $c \in E$ tel que $c \star a = e$. (on utilise encore la régularité à droite ici)
Or $c = c \star e = c \star (a \star b) = (c \star a) \star b = e \star b = b$. Donc $b = c$ et a est bien inversible.

(5) Le résultat subsiste-t-il si E n'est pas fini ?

Non. Il suffit de considérer $(\mathbb{N}, +)$. Tous les éléments sont réguliers, mais ce n'est pas un groupe.

Exercice 7 (★ Translations surjectives)**.**
Soit $(E, *)$ un ensemble non-vide muni d'une loi de composition interne associative telle que :

$$\forall a, b \in E, \exists x, y \in E\,, a = x * b = b * y$$

Montrer que E est un groupe.
(Indication : On peut suivre à peu près mêmes étapes que l'exercice précédent)

Soit $a \in E$.

- Il existe $e, f \in E$ tel que $a = e * a = a * f$
- Soit $b \in E$. Il existe x tel que $b = a * x$. Alors $e * b = e * (a * x) = (e * a) * x = a * x = b$. Donc e est un élément neutre à gauche.
- Par un raisonnement similaire, f est élément neutre à droite.
- On a $e = e * f = f$. Donc $e = f$ est l'élément neutre de E.
- Pour tout b il existe x, y tel que $e = x * b = b * y$. Alors on a $x = x * b * y = y$. Donc b est inversible.
- E est bien un groupe.