Licence MPCI, 2e année
Algèbre Générale

Devoir Surveillé
12 Avril 2019

Durée 2h

Les exercices sont indépendants. Les questions notées (***) sont un peu plus difficiles et sont hors barème.

Questions de Cours

Soient G, G' deux groupes.

A - Donner la définition de l'ordre d'un élément $x \in G$.

B - Soit $f : G \to G'$ un isomorphisme. Montrer que sa réciproque f^{-1} est également un isomorphisme.

C - Soit H un sous-groupe de G. Montrer que la relation $\underset{H}{\sim}$ définie sur G par

$$\forall x, y \in G, \quad x \underset{H}{\sim} y \Leftrightarrow x^{-1}y \in H$$

est une relation d'équivalence.

Exercices

Exercice 1 (Groupe Affine)**.**

Pour tout $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$, on note $f_{a,b}$ l'application suivante :

$$\begin{aligned} f_{a,b} : \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto az + b \end{aligned}$$

On considère l'ensemble $\mathcal{A} = \left\{ f_{a,b} \,\middle|\, a \in \mathbb{C}^*, b \in \mathbb{C} \right\}$

(1) Montrer que $(\mathcal{A}, \circ)$ est un groupe (où $\circ$ désigne la composition des applications).

(2) Déterminer l'ordre de $f_{i,1}$ dans $\mathcal{A}$.

(3) Soient les applications suivantes :

$$\begin{array}{rl} t : \mathcal{A} & \longrightarrow \mathbb{C}^* \\ f & \longmapsto f(1) - f(0) \end{array}, \qquad \begin{array}{rl} h : \mathbb{C}^* & \longrightarrow \mathcal{A} \\ a & \longmapsto f_{a,0} \end{array}$$

Montrer t et h sont des morphismes.

(4) On note $T = \ker(\mathrm{t})$ et $H = \mathrm{Im}(\mathrm{h})$. Montrer que T est isomorphe à $\mathbb{C}$, et que H est isomorphe à $\mathbb{C}^*$.

(5) Montrer que pour tout élement de $f \in \mathcal{A}$ il existe un unique couple $(h, t) \in H \times T$ tel que $g = h \circ t$.

(6) (***) Est-ce que $\mathcal{A}$ est isomorphe au groupe produit $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$? (Justifier votre réponse)

Exercice 2 (Matrices à coefficients entiers)**.**

On considère l'ensemble des matrices **à coefficients entiers** de déterminant 1 :

$$\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z}) = \left\{ M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} | a,b,c,d \in \mathbb{Z}, \det(M) = 1 \right\}$$

On considère également les deux matrices.

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad R = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(1) Montrer que $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ est un sous-groupe de $\mathrm{GL}(2,\mathbb{R})$.

(2) Soit $\mathcal{P} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid n \in \mathbb{Z} \right\}$. Justifier que $\mathcal{P} = \langle T \rangle$

(3) Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$. Montrer que si $a = 0$ alors $RM \in \mathcal{P}$ ou $R^{-1}M \in \mathcal{P}$.

(4) On suppose que $a \neq 0$. Montrer qu'il existe des entiers $q, r, d' \in \mathbb{Z}$ tels que

$$0 \leq r < |a|, \quad \text{et} \quad M = \begin{pmatrix} r & -a \\ d' & -c \end{pmatrix} R^{-1} T^q$$

(*indication : q et r sont le quotient et le reste d'une division euclidienne*)

(5) (***) Montrer que $\langle R, T \rangle = \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$.

Exercice 3 (Exposant d'un groupe)**.**

Soit G un groupe fini d'ordre $n \geq 2$.

(1) On considère l'ensemble

$$E = \{k \in \mathbb{Z} \mid \forall g \in G, g^k = e\}$$

Montrer que E est un sous-groupe de $\mathbb{Z}$ non trivial (c'est à dire $E \neq \{0\}$).

(2) On appelle exposant de G, et on le note exp(G), le plus petit entier positif non-nul de E. Montrer que exp(G) divise n.

(3) Montrer que exp(G) est le PPCM de l'ensemble des ordres des élements de G. (On rappelle que le PPCM d'un ensemble de nombre $\{k_1, \dots, k_n\}$, est le plus petit entier positif qui soit un multiple de chacun des k_i)

(4) Soit p un nombre premier et $a \geq 1$. Montrer que si p^a divise exp(G) alors il existe un élement $g \in G$ d'ordre p^a.

(5) Soient $g, h \in G$ tels que $gh = hg$. Montrer que si g et h sont d'ordre respectifs m et n, et que $m \wedge n = 1$, alors gh est d'ordre mn.

(6) (***) En déduire que si G est commutatif, il existe un élément dont l'ordre est égal à exp(G).