Chapitre 3 : Développements limités

Table des matières

Dans ce chapitre, pour n'importe quelle fonction, nous allons trouver le polynôme de degré n qui approche le mieux la fonction autour d'un point. Plus précisément, on cherchera à décomposer toute fonction suffisamment régulière f autour d'un point a donné sous la forme :

$$f(x) = T_n(x) + R_n(x),$$

où T_n est un polynôme de degré n et R_n est une fonction qui vérifie $\lim_{x \to a} R_n(x) = 0$.
Décomposer de cette façon une fonction autour d'un point a, c'est faire un développement limité (DL) de cette fonction au point a à l'ordre n. Le polynôme T_n est appelé <u>partie polynomiale du DL</u> et la fonction R_n est appelée <u>le reste du DL</u>.

Notations : Soient $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert[1], $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction et $n \in \mathbb{N}^*$.

— Si f est dérivable et si la fonction $f' : I \to \mathbb{R}$ est aussi dérivable, on note $f'' = (f')'$ la dérivée seconde de f. Plus généralement, on note pour tout n dans $\mathbb{N}$

$$f^{(0)} = f,\ f^{(1)} = f',\ f^{(2)} = f'' \dots \text{ et } f^{(n+1)} = (f^{(n)})'.$$

— f est de classe $\mathscr{C}^0$ sur I si f est continue sur I. On note $f \in \mathscr{C}^0(I)$.
— f est de classe $\mathscr{C}^n$ sur I si f est n fois dérivable sur I et si $f^{(n)}$ est continue sur I. On note $f \in \mathscr{C}^n(I)$.
— f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur I si $\forall n \in \mathbb{N}$, $f \in \mathscr{C}^n(I)$. On note $f \in \mathscr{C}^\infty(I)$. On remarquera que pour tout n dans $\mathbb{N}$, $\mathscr{C}^\infty(I) \subset \mathscr{C}^n(I)$.
— Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, on définit la factorielle de n par $n! = 1 \times 2 \times \dots \times (n-1) \times n$ avec la convention $0! = 1$.

Remarques

1) Pour tout n dans $\mathbb{N}$, on a les inclusions $\mathscr{C}^{n+1}(I) \subset \mathscr{C}^n(I)$ et $\mathscr{C}^\infty(I) \subset \mathscr{C}^n(I)$.

2) Pour tout n dans $\mathbb{N}$, $n! = (n-1)! \times n$.

1 Développement limité

1.1 Définition et existence

Soient I un intervalle ouvert et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction.

Définition *Pour $a \in I$ et $n \in \mathbb{N}$, on dit que f admet un développement limité au point a et à l'ordre n si il existe $(n+1)$ réels $c_0, c_1, \dots, c_n$ et une fonction $\epsilon : I \to \mathbb{R}$ vérifiant $\lim_{x \to a} \epsilon(x) = 0$ tels que pour tout x dans I*

$$f(x) = \underbrace{c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + c_3(x-a)^3 + \dots + c_n(x-a)^n}_{\textit{Partie polynomiale du DL}} + \underbrace{(x-a)^n \epsilon(x)}_{\textit{Reste du DL}}.$$

Proposition *Soient I un intervalle ouvert et $a \in I$. Si f est de classe $\mathscr{C}^n$ sur I alors f admet un DL au point a à l'ordre n, qui provient de la formule suivante dite de Taylor-Young :*

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + (x-a)^n \epsilon(x),$$

où la fonction $\epsilon : I \to \mathbb{R}$ vérifie $\lim_{x \to a} \epsilon(x) = 0$.

Remarque *Le DL d'une fonction f au point 0 à l'ordre n s'écrit de la façon suivante à l'aide de la formule de Taylor-Young :*

$$\boxed{f(x) = f(0) + f'(0)x + f''(0)\frac{x^2}{2!} + \dots + f^{(n)}(0)\frac{x^n}{n!} + x^n \epsilon(x)}$$

où $\lim_{x \to 0} \epsilon(x) = 0$.

1. C'est à dire de la forme $]-\infty, a[$, $]a, b[$ ou $]b, +\infty[$ de $\mathbb{R}$, avec $a, b \in \mathbb{R}, a < b$.

Exemples

1. *Soient $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$ fixés. Donner le DL au point a et à l'ordre n de la fonction $f : x \mapsto e^x$.*

$$f(x) = ... \Rightarrow f(a) = ..., \quad f'(x) = ... \Rightarrow f'(a) = ...,$$

$$f''(x) = ... \Rightarrow f''(a) = ..., \quad f^{(n)}(x) = ... \Rightarrow f^{(n)}(a) = ...$$

$$\forall x \in \mathbb{R},\ e^x = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + (x-a)^n\epsilon(x)$$

$= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

2. *Donner le DL de la fonction $f : x \mapsto \ln(1+x)$ au point 0 et à l'ordre 4.*

$$f(x) = ... \Rightarrow f(0) = ...,$$

$$f'(x) = ... \Rightarrow f'(0) = ...,$$

$$f''(x) = ... \Rightarrow f''(0) = ...,$$

$$f^{(3)}(x) = ... \Rightarrow f^{(3)}(0) = ...,$$

$$f^{(4)}(x) = ... \Rightarrow f^{(4)}(0) = ...$$

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0) + f'(0)x + f''(0)\frac{x^2}{2!} + f^{(3)}(0)\frac{x^3}{3!} + f^{(4)}(0)\frac{x^4}{4!} + x^4\epsilon(x) \\ &= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Les premiers polynômes de Taylor du DL de f en 0 sont :

$T_0(x) = ...$, $T_1(x) = ...$, $T_2(x) = ...$, $T_3(x) = ...$, $T_4(x) = ...$

T_0, T_1, T_2, T_3, T_4 *sont appelés respectivement* *polynômes de Taylor* *d'ordre 0, 1, 2, 3 et 4.*

Notation : Le terme $(x-a)^n\epsilon(x)$ où $\epsilon(x) \xrightarrow[x\to a]{} 0$ est souvent noté $o_a\big((x-a)^n\big)$ (se prononce « petit o_a » de $(x-a)^n$). Cela signifie que $x \mapsto o_a\big((x-a)^n\big)$ est une fonction qui vérifie la propriété :

$$\lim_{x\to a} \frac{o_a\big((x-a)^n\big)}{(x-a)^n} = 0.$$

La notation « petit o_a » simplifie beaucoup les écritures. Lorsque $a = 0$, on écrit « o » plutôt que « o_0 ».

Exemples

1. *Pour tout x dans $\mathbb{R}$, x^3 peut s'écrire $x^3 = o(x^2)$. En effet, $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^3}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0} x = 0$.*
2. *Le reste $x^n\epsilon(x)$ du DL d'une fonction f au point 0 à l'ordre n peut aussi s'écrire $x^n\epsilon(x) = o(x^n)$.*

1.2 Propriétés

Proposition *Si une fonction f admet un DL en un point, alors ce DL est unique.*

Proposition
. Si f est paire alors la partie polynomiale de son DL en 0 ne contient que des monômes de degrés pairs (c'est à dire : $x^0, x^2, x^4, ..., x^{2n}, n \in \mathbb{N}$).
. Si f est impaire alors la partie polynomiale de son DL en 0 ne contient que des monômes de degrés impairs (c'est à dire : $x, x^3, x^5, ...x^{2n+1}, n \in \mathbb{N}$).

Exemple *On considère la fonction $f : x \mapsto \cos(x)$ qui est de classe $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$. Elle admet donc un DL en 0 à l'ordre 5 que nous allons déterminer. Pour tout x proche de 0, on a :*

$$\begin{array}{llllll} f(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots & \Rightarrow & f(0) = \ldots.., & f'(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots & \Rightarrow & f'(0) = \ldots.., \\ f^{(2)}(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots & \Rightarrow & f^{(2)}(0) = \ldots.., & f^{(3)}(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots & \Rightarrow & f^{(3)}(0) = \ldots.., \\ f^{(4)}(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots & \Rightarrow & f^{(4)}(0) = \ldots.., & f^{(5)}(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots & \Rightarrow & f^{(5)}(0) = \ldots.., \end{array}$$

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + f''(0)\frac{x^2}{2!} + f^{(3)}(0)\frac{x^3}{3!} + f^{(4)}(0)\frac{x^4}{4!} + f^{(5)}(0)\frac{x^5}{5!} + x^5\epsilon(x)$$

= ....

....

....

....

Commentaire : Comme f est paire, la partie polynomiale de son DL ne contient que des monômes de degrés pairs comme annoncé dans la proposition.

1.3 DL des fonctions usuelles en 0 à l'ordre n

$$\begin{aligned}
e^x &= 1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\dots+\frac{x^n}{n!}+o(x^n)=\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}+o(x^n).\\
\ln(1+x) &= x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\dots+(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}+o(x^n)=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\frac{x^k}{k}+o(x^n).\\
\forall\alpha\in\mathbb{R},\ (1+x)^\alpha &= 1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\dots+\frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+o(x^n).\\
\frac{1}{1+x} &= 1-x+x^2-x^3+\dots+(-1)^n x^n+o(x^n)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k x^k+o(x^n).\\
\frac{1}{1-x} &= 1+x+x^2+x^3+\dots+x^n+o(x^n)=\sum_{k=0}^{n}x^k+o(x^n).\\
\sin(x) &= x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\dots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+o(x^{2n+2})=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}+o(x^{2n+2}).\\
\cos(x) &= 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\dots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+o(x^{2n+1})=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!}+o(x^{2n+1}).\\
\tan(x) &= x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}+o(x^6).
\end{aligned}$$

Proposition *Une fonction f admet un DL au voisinage d'un point a si et seulement si la fonction $x\mapsto f(x+a)$ admet un DL au voisinage de 0.*

Exemples
1. Donner le DL de $f: x\mapsto e^x$ en 1 à l'ordre $n\in\mathbb{N}$. La fonction f est de classe $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$, elle admet donc un DL en tout point de $\mathbb{R}$, à tout ordre $n\in\mathbb{N}$. De plus, pour tout x proche de 1, on a

$e^x = e^{x-1+1}$

$= e^1\times e^{x-1}$

$= e\times e^h$ *en posant* $h=$ ...., *si x est proche de 1, alors h est proche de* ......

$= e\times$ ....

....

$=$ ....

....

$=$ ....

....

2. Donner le DL de $g : x \mapsto \sin(x)$ en $\frac{\pi}{2}$. La fonction g est de classe $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$, elle admet donc un DL en tout point de $\mathbb{R}$, à n'importe quel ordre $n \in \mathbb{N}$. De plus, pour tout x proche de $\frac{\pi}{2}$, on a :

$$\sin(x) = \sin\left(x - \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$$

$= \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \cos(h)$ *en posant* $h =$ .... *proche de* ..... *lorsque* x *proche de* ....

= ....

....

= ....

....

2 Opérations sur les développements limités

2.1 Somme et produit

Définition *Soit $n, p \in \mathbb{N}^*$ avec $n < p$. Tronquer un polynôme de degré p à l'ordre n consiste à conserver seulement les monômes de degrés $\leqslant n$.*

Exemples

1. Tronquer le polynôme $P : x \mapsto x^8 + 2x^7 - 3x^5 + 2x^4 - x^3 + x^2 + 1$ à l'ordre 5. On notera T_5 le polynôme obtenu. $T_5(x) =$ . . . .

2. Tronquer le polynôme $(x + 2x + 4x^2)(1 + x + x^3)$ à l'ordre 2. On notera $T_2(x)$ le polynôme obtenu.

$(x + 2x + 4x^2)(1 + x + x^3)$ = ...

= ....

On a donc $T_2(x) =$ ....

Proposition *On considère deux fonctions f et g qui admettent des DL en 0 à l'ordre n :*

$f(x) = c_0 + c_1 x + \ldots + c_n x^n + x^n \epsilon_1(x)$ *et* $g(x) = d_0 + d_1 x + \ldots + d_n x^n + x^n \epsilon_2(x)$, *avec* $\lim_{x \to 0} \epsilon_1(x) = \lim_{x \to 0} \epsilon_2(x) = 0$.

Alors :

. $f + g$ *admet un DL en 0 à l'ordre n qui est donné par :*

$$f(x) + g(x) = (c_0 + d_0) + (c_1 + d_1)x + \ldots + (c_n + d_n)x^n + x^n \epsilon(x),$$

où $\lim_{x \to 0} \epsilon(x) = 0$.

. *$f \times g$ admet un DL en 0 à l'ordre n qui est donné par*

$$f(x) \times g(x) = T_n(x) + x^n \epsilon(x),$$

où $\lim_{x \to 0} \epsilon(x) = 0$ et $T_n(x)$ est le polynôme

$$(c_0 + c_1 x + \ldots + c_n x^n) \times (d_0 + d_1 x + \ldots + d_n x^n)$$

***tronqué à l'ordre** n.*

Exemples
1. Calculer le DL en 0 à l'ordre 2 de $f : x \mapsto e^x + \ln(1+x)$. Les fonctions $x \mapsto e^x$ et $x \mapsto \ln(1+x)$ sont de classe $\mathscr{C}^\infty$ au voisinage de 0, on peut donc écrire leur DL en 0 à l'ordre 2 :

e^x = ... *et* $\ln(1+x)$ = ...

$f(x)$ = ... = ...

2. Calculer le DL en 0 à l'ordre 2 de $g : x \mapsto \cos(x) \times \sqrt{1+x}$. Les fonctions $x \mapsto \cos(x)$ et $x \mapsto \sqrt{(1+x)}$ sont de classe $\mathscr{C}^\infty$ au voisinage de 0, on peut donc écrire leur DL en 0 à l'ordre 2 :

$\cos(x)$ = ... *et* $\sqrt{1+x}$ = ...

En notant $C(x)$ et $D(x)$ les parties polynomiales des DL de f et g on a :

$C(x) \times D(x)$ = ... = ...

= ....

En tronquant le produit $C(x) \times D(x)$ à l'ordre 2, on obtient : $g(x)$ =..................................

3. Calculer le DL en 0 à l'ordre 3 de la fonction $h : x \mapsto \sqrt{1+x}\ln(1+x)$.. ....

....

....

....

....

....

....

....

....

2.2 Composition

Proposition *On considère deux fonctions f et g qui admettent des DL en 0 à l'ordre n :*

$$f(x) = \underbrace{c_0 + c_1 x + ... + c_n x^n}_{=C(x)} + x^n \epsilon_1(x) \text{ et } g(x) = \underbrace{d_0 + d_1 x + ... + d_n x^n}_{=D(x)} + x^n \epsilon_2(x),$$

avec $\lim_{x\to 0} \epsilon_1(x) = \lim_{x \to 0} \epsilon_2(x) = 0.$
Si $g(0) = 0$ (c'est à dire $d_0 = 0$) alors la fonction $f \circ g$ admet un DL en 0 à l'ordre n dont la partie polynomiale est le polynôme tronqué à l'ordre n de la composition $C(D(x))$.

Remarque *De façon plus générale, si g admet un DL en 0 à l'ordre n et si f admet un DL en $g(0)$ à l'ordre n alors $f \circ g$ admet un DL en 0 à l'ordre n. Il est obtenu en remplaçant le DL de g dans celui de f et en ne gardant que les termes de degrés inférieurs ou égaux à n.*

Exemple *Calculer le DL en 0 à l'ordre 2 de la fonction $h : x \mapsto \cos(\ln(1+x))$. On pose ici $f : u \mapsto \cos(u)$ et $g : x \mapsto \ln(1+x)$.On a bien*

$$(f \circ g)(x) = \text{.................................} = \text{.................}$$

et $g(0) =$ .... = ..., $f \circ g$ admet donc un DL en 0 à l'ordre 2. On écrit le DL en 0 à l'ordre 2 de f et g :

$f(u) = \cos(u) \;=\;$ .... *et* $g(x) = \ln(1+x) =$ ....

donc les parties polynômiales du DL en 0 à l'ordre 2 de f et g sont respectivement :

$$C(u) = \text{..} \text{ et } D(x) = \text{..}$$

$$C(D(x)) = \text{...} = \text{..}$$

$$= \text{...} = \text{..}$$

Le polynôme tronqué à l'ordre 2 de $C(D(x))$ est donné par $T_2(x) =$ ....et

finalement le DL de h en 0 à l'ordre 2 est donné par $h(x) =$ ....

2.3 Quotient

On considère deux fonctions f et g qui admettent des DL en 0 à l'ordre n :
$f(x) = c_0 + c_1 x + ... + c_n x^n + x^n \epsilon_1(x)$ et $g(x) = d_0 + d_1 x + ... + d_n x^n + x^n \epsilon_2(x),$ avec $\lim_{x\to 0} \epsilon_1(x) = \lim_{x\to 0} \epsilon_2(x) = 0.$

Pour calculer le DL du quotient $\frac{f}{g}$ nous allons utiliser le DL de

$$\frac{1}{1+u} = 1 - u + u^2 - u^3 + ... + (-1)^n u^n + o(u^n)$$

et la formule pour la composition de DL. On a 3 cas possibles :

Cas 1 : Si $d_0 = 1$, on pose $u = d_1 x + ... + d_n x^n + x^n \epsilon_2(x)$ et le quotient s'écrit $\dfrac{f}{g} = f \times \dfrac{1}{1+u}$.

Cas 2 : Si $d_0 \neq 0$ et $d_0 \neq 1$, alors on se ramène au cas précédent en écrivant

$$\frac{1}{g(x)} = \frac{1}{d_0} \times \frac{1}{1 + \frac{d_1}{d_0} x + ... + \frac{d_n}{d_0} x^n + \frac{x^n \epsilon_2(x)}{d_0}}.$$

Cas 3 : Si $d_0 = 0$ alors on factorise par x^k (pour un certain k) afin de se ramener à l'un des cas précédents.

Exemples *1. Calculer le DL de $h : x \mapsto \tan(x)$ en 0 à l'ordre 3. On pose $f(x) = \sin(x)$ et $g(x) = \cos(x)$. On écrit le DL de f et g en 0 à l'ordre 3 :*

$f(x) = \sin(x) \quad = \quad$ .... $= B(x) + o(x^3)$ *et* $g(x) = \cos(x) =$ ....

$$\frac{1}{\cos(x)} = \frac{1}{\qquad\qquad\qquad\qquad}$$

$= \dfrac{1}{1+u}$ *en posant* $u =$ .... *dont la partie polynomiale est* $D(x) =$ ....

$=$ .... $= C(u) + o(.........)$

$C(D(x)) =$ .... $=$ ....

En tronquant $C(D(x))$ à l'ordre 3 on obtient le polynôme $T_3(x)$ donné par $T_3(x) =$ ....

$\dfrac{1}{\cos(x)} = T_3(x) + o(x^3) =$ ....

$B(x) \times T_3(x) =$ .... $=$ ....

En tronquant $B(x) \times T_3(x)$ à l'ordre 3 on obtient le polynôme $\tilde{T}_3(x)$ donné par

$\tilde{T}_3(x) =$ .... *et finalement* $h(x) = \tilde{T}_3(x) + o(x^3) =$ ....

2. Calculer le DL de $h : x \mapsto \dfrac{1+x}{2+x}$ en 0 à l'ordre 4. On pose pour tout x dans $\mathbb{R}$ $f(x) = 1 + x$ et $g(x) = 2 + x$. f et g sont des polynômes de degré .... et on a :

$$\frac{1}{2+x} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{1+\frac{x}{2}}$$

$= \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{1+u}$ *en posant* $u =$ .... *lorsque x est proche de 0, u est proche de ....*

$\dfrac{1}{1+u} =$ ....

On remplace à présent u dans la partie polynomiale par .... et le reste $o(u^4)$ par $o(......)$:

$\dfrac{1}{2+x} =$ ....

comme on veut un DL à l'ordre .... on ne garde que les termes de degrés $\leqslant$ ......

$=$ ....

Finalement

$h(x) =$ ....

$=$ ....

$=$ ....

3. Calculer le DL de $h : x \mapsto \dfrac{\sin(x)}{\mathrm{sh}(x)}$ en 0 à l'ordre 3. On a

$\sin(x) =$ .... $= c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + x^4\epsilon_1(x)$

$\mathrm{sh}(x) =$ .... $= d_0 + d_1x + d_2x^2 + d_3x^3 + x^4\epsilon_2(x)$

Comme $d_0 =$ .... et $c_1, d_1 \neq 0$ on va faire un DL de $\sin(x)$ et $\mathrm{sh}(x)$ à l'ordre $3 + 1 = 4$. En effet, Le premier terme du DL de $\mathrm{sh}(x)$ est de degré 1, on a donc factorisé le dénominateur par x^1. Comme on vise un DL d'ordre 3, on fait un DL d'ordre $3 + 1$ car on sait que l'on va diviser par x et perdre un ordre.

$\dfrac{\sin(x)}{\mathrm{sh}(x)} =$ .... $=$ ....

$=$ .... $=$ .... *en posant* $u =$ ....

$$\frac{1}{1+u} = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$= \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\frac{\sin(x)}{\mathrm{sh}(x)} = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$= \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

3 Applications des développements limités

3.1 Calcul de limites

On cherche à calculer $\lim_{x\to a} f(x)$. Si f admet un DL en a à l'ordre n, alors

$$f(x) = c_0 + c_1(x-a) + \dots + c_n(x-a)^n + (x-a)^n\epsilon(x)$$

et donc

$$\begin{aligned} \lim_{x\to a} f(x) &= \lim_{x\to a}\big(c_0 + c_1(x-a) + \dots + c_n(x-a)^n + (x-a)^n\epsilon(x)\big) \\ &= c_0. \end{aligned}$$

Exemple *Calculer* $\lim_{x\to 0} \dfrac{\arctan(x) - x}{\sin(x) - x}$. *On a*

$$\frac{\arctan(x) - x}{\sin(x) - x} = \frac{}{} = \frac{}{} = \frac{}{} \xrightarrow[x\to 0]{} \dots\dots\dots$$

3.2 Position d'une courbe par rapport à sa tangente

Proposition *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction admettant un DL en un point $a \in I$*

$$f(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_k(x-a)^k + (x-a)^k\epsilon(x),$$

où k est le plus petit entier $\geqslant 2$ tel que le coefficient c_k soit non nul. Alors une équation de la tangente à la courbe de f (notée $\mathscr{C}_f$) en a est

$$y = c_0 + c_1(x-a)$$

et la position de $\mathscr{C}_f$ par rapport à la tangente pour x proche de a est donnée par le signe de $f(x) - y$:

- *Si $c_k(x-a)^k > 0$ alors $\mathscr{C}_f$ est au dessus de sa tangente.*
- *Si $c_k(x-a)^k < 0$ alors $\mathscr{C}_f$ est en dessous de sa tangente.*
- *Si le signe de $c_k(x-a)^k$ change lorsque l'on passe de $x < a$ à $x > a$, alors la tangente traverse $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse a. On dit que a est un point d'inflexion.*

Exemple *On considère $f : x \mapsto x^4 - 2x^3 + 1$. Déterminer l'équation de la tangente de f au point d'abscisse $\frac{1}{2}$ et donner la position de la courbe de f par rapport à sa tangente. On a*

$$f'(x) = \text{..........................}, \quad f''(x) = \text{...........................}, \quad \textit{donc } f''(\frac{1}{2}) = \text{.................. et } k = \text{......}$$

On en déduit le DL de f en $1/2$ par la formule de Taylor-Young :

$$\begin{aligned} f(x) &= \text{..} \\ &\quad \text{..} \\ &= \text{..} \end{aligned}$$

La tangente en $\frac{1}{2}$ a donc pour équation $y =$ ....

La position du graphe de f par rapport à y est donnée par le signe de ....

donc $\mathscr{C}_f$ est .... de y.

4 Développement asymptotique

Définition *Soit f une fonction définie sur un intervalle $I =]x_0, +\infty[$. On dit que f admet un DL en $+\infty$ à l'ordre n s'il existe $n+1$ réels $c_0, c_1, ..., c_n$ avec $c_n \neq 0$ et une fonction $\epsilon : I \to \mathbb{R}$ tels que*

$$f(x) = c_0 + \frac{c_1}{x} + \frac{c_2}{x^2} + ... + \frac{c_n}{x^n} + \frac{1}{x^n}\epsilon(\frac{1}{x})$$

où $\lim\limits_{x \to +\infty} \epsilon(\frac{1}{x}) = 0$.

Exemple *On considère la fonction $f : x \mapsto \ln\left(2 + \frac{1}{x}\right)$. Admet-elle un DL en $+\infty$? On remarque que*

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln(2) + \ln\left(1 + \frac{1}{2x}\right) \\ &= \ln(2) + \ln(1+u) \textit{ en posant } u = \text{......... quand x est proche de .... alors u est proche de ....} \\ &= \ln(2) + \text{..} \\ &= \ln(2) + \text{..} \\ &= \ln(2) + \text{..} \end{aligned}$$

Le DL en $+\infty$ d'une fonction nous permet d'avoir une idée du comportement de celle-ci au voisinage de $+\infty$. Lorsque $x \to +\infty$ on a $f(x) = \ln(2) + \ln\left(1 + \frac{1}{2x}\right) \to \ln(2)$. Comme le premier terme non nul après $\ln(2)$ dans le DL de f est positif pour x grand, on en déduit que la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de f est au dessus de son asymptote horizontale $y = \ln(2)$.

Remarques

1. *Un DL en* $+\infty$ *s'appelle aussi un développement asymptotique.*
2. *Dire qu'une fonction* $x \mapsto f(x)$ *admet un DL en* $+\infty$ *à l'ordre* n *est équivalent à dire que la fonction* $h \mapsto f(\frac{1}{h})$ *admet un DL en* 0^+ *à l'ordre* n.

Proposition *On suppose que la fonction* $x \mapsto \dfrac{f(x)}{x}$ *admet un DL en* $+\infty$ *(ou en* $-\infty$*) donné par*

$$\frac{f(x)}{x} = a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_k}{x^k} + \frac{1}{x^k}\epsilon\left(\frac{1}{x}\right)$$

où k *est le plus petit entier* $\geqslant 2$ *tel que le coefficient* $\dfrac{1}{x^k}$ *soit non nul.*

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) - (a_0 x + a_1) = 0 \text{ et } \lim_{x\to-\infty} f(x) - (a_0 x + a_1) = 0.$$

La droite d'équation $y = a_0 x + a_1$ *est une asymptote à la courbe* $\mathscr{C}_f$ *en* $+\infty$ *et en* $-\infty$*. La position de* $\mathscr{C}_f$ *par rapport à son asymptote est donnée par le signe du terme* $\dfrac{a_k}{x^{k-1}}$.

A Exercices

Exercice 1. A l'aide de la formule de Taylor-Young, calculer :

1. le DL en 2 à l'ordre 2 de $f_1 : x \mapsto \sqrt{x}$;
2. le DL en -1 à l'ordre 7 du polynôme $f_2 : x \mapsto x^4 - 1$;
3. le DL en $\frac{\pi}{4}$ à l'ordre 4 de $f_3 : x \mapsto \cos(x)$;
4. le DL en 1 á l'ordre 3 de $f_4 : x \mapsto e^{x^2}$;
5. le DL en 0 á l'ordre 3 de $f_5 : x \mapsto \arctan\left(\frac{1}{1-x}\right)$;
6. le DL en 0 à l'ordre 3 de la fonction $f_6 : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1+x}}$;
7. le DL en 0 à l'ordre 3 de $f_7 : x \mapsto \sqrt[3]{1+x}$.

Exercice 2. A l'aide de la formule de Taylor-Young, calculer :

1. le DL en 0 à l'ordre 4 des fonctions suivantes $f_1 :\ x \mapsto \exp(-x)$;
2. le DL en 0 à l'ordre 4 des fonctions suivantes $f_2 : x \mapsto \frac{e^x - e^{-x}}{2}$;
3. le DL en 1 à l'ordre 2 de la fonction $f_3 : x \mapsto e^x \sin(x)$;
4. les DL en 0 et en 1 à l'ordre 3 de $f_4 : x \mapsto e^{2x-x^2}$;
5. le DL en 1 à l'ordre 2 de la fonction $f_5 : x \mapsto x^3 - 9\sqrt{x} + 14x + 3$.

Exercice 3. A l'aide des opérations sur les DL, recalculer les DL de l'exercice précédent.

Exercice 4. Calculer :

1. le DL en 0 à l'ordre 3 de $f_1 : x \mapsto \sqrt{1 + 2\cos(x)}$;
2. le DL en 0 à l'ordre 3 de $f_2 : x \mapsto \exp(\sqrt{1 + 2\cos(x)})$;
3. le DL en 0 à l'ordre 3 de $f_3 : x \mapsto \ln(1 + \sin(x))$;
4. le DL en 0 à l'ordre 3 de $f_4 : x \mapsto \dfrac{e^x}{1+x}$;
5. le DL en 0 à l'ordre 6 de $f_5 : x \mapsto (\ln(1 + x^2))^2$;
6. le DL en 0 à l'ordre 3 de $f_6 : x \mapsto \dfrac{x\ln(1+x^2)}{x^2 + \tan(2x^3)}$;
7. le DL en 0 à l'ordre 5 de $f_7 : x \mapsto \dfrac{\ln(1+x^3)}{x^3}$;
8. le DL en 0 à l'ordre 4 de $f_8 : x \mapsto \cos(\sin(x))$;
9. le DL en 0 à l'ordre 5 de $f_9 : x \mapsto \dfrac{\sin(2x) - 2\tan(x)}{x}$.

Exercice 5. Pour chacune des fonctions suivantes :

$$f_1 : x \mapsto \exp(x) - \frac{1}{1+x}, \quad f_2 : x \mapsto x\cos(2x) \ \text{ et } \ f_3 : x \mapsto \cos(x)\sin(2x),$$

donner une équation de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_{f_i}$ en 0 puis déterminer la position de la tangente par rapport à $\mathscr{C}_{f_i}$ au voisinage de 0.

Exercice 6. Calculer les limites suivantes :

$$\bullet \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2} \quad \bullet \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x) - x}{x} \quad \bullet \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin(x)}{1-\cos(x)} \quad \bullet \lim_{x\to 0^-} \frac{\sin(x) - x\cos(x)}{x^2}$$

$$\bullet \lim_{x\to 0} \frac{2\tan(x) - \tan(2x)}{x\sin^2(x)} \quad \bullet \lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2} - \cos x}{x^2} \quad \bullet \lim_{x\to 0} \frac{1}{\tan^2(x)} - \frac{1}{x^2} \quad \bullet \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x\sin(x)}$$

Exercice 7. A l'aide d'un DL, calculer ;

1. la limite de $\dfrac{\sqrt{x}-1}{\ln(x)}$ lorsque x tend vers 1 ;
2. la limite de $\dfrac{\ln(\sin(x))}{(\pi-2x)^2}$ lorsque x tend vers $\frac{\pi}{2}$.

Exercice 8. Calculer :

1. le développement asymptotique en $+\infty$ à l'ordre 5 de $f_1 : x \mapsto \dfrac{x}{x^2-1}$;
2. le développement asymptotique en $+\infty$ à l'ordre 2 de $f_2 : x \mapsto (1+\frac{1}{x})^x$;
3. le développement asymptotique en $+\infty$ à l'ordre 6 de $f_3 : x \mapsto \sqrt{\dfrac{x^4}{x^2+1}}$.

Exercice 9. A l'aide d'un développement asymptotique, calculer les limites suivantes :

$$\bullet \lim_{x\to +\infty} \sqrt{x^2+2x+2} - x \quad \bullet \lim_{x\to +\infty} x^2\left(e^{\frac{1}{x}} - e^{\frac{1}{x+1}}\right) \quad \bullet \lim_{x\to +\infty} \left(\frac{x+1}{x}\right)^x \quad \bullet \lim_{x\to +\infty} x^{\frac{1}{x}}$$

Exercice 10. Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer une équation de leurs asymptotes en $\pm\infty$ et préciser la position de leurs graphes par rapport à ces asymptotes.

$$\bullet f_1 : x \mapsto \sqrt{\frac{x^3+1}{x+1}} \quad \bullet f_2 : x \mapsto \sqrt{x^2-2x+2} \quad \bullet f_3 : x \mapsto \sqrt{\frac{x^3}{x+2}} \quad \bullet f_4 : x \mapsto x^2\arctan\left(\frac{1}{1+x}\right)$$

$$\bullet f_5 : x \mapsto (x+2)^{\frac{1}{x}} \quad \bullet f_6 : x \mapsto \sqrt[3]{x^3-x^2} \quad \bullet f_7 : x \mapsto \frac{1}{x+x^2} + 2\arctan(x)$$