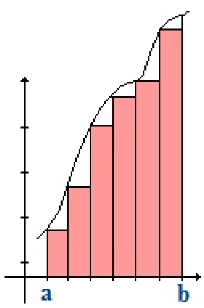
Chapitre 4 : Intégrales et primitives

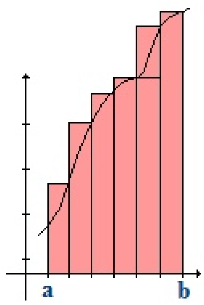
Table des matières

1 Intégrales et primitives

On considère une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}^+$. On cherche à calculer l'aire $\mathscr{A}$ située en dessous du graphe de f noté $\mathscr{C}_f$ et entre les droites d'équations $x = a$, $x = b$ et l'axe des abscisses $\mathscr{O}_x$. Pour ce faire, on peut approcher cette aire par des sommes d'aires de rectangles situés au dessous de la courbe en découpant l'intervalle $[a, b]$ en sous intervalles $[a_n, b_n]$ et on note $\mathscr{A}_n^-$ l'aire obtenue. De la même façon, on peut approcher cette aire par des sommes d'aires de rectangles situés au dessus de la courbe et on note $\mathscr{A}_n^+$ l'aire obtenue.



$\mathscr{A}_n^-$



$\mathscr{A}_n^+$

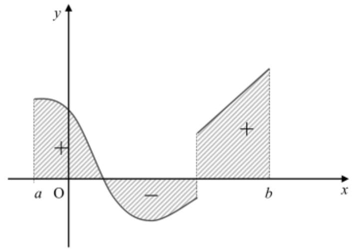
Définition *(Formelle) Si la limite des aires en dessous est égale à la limite des aires au dessus lorsque le pas de subdivision de l'intervalle tend vers* 0 *(càd* $\lim_{n\to+\infty} \mathscr{A}_n^- = \lim_{n\to+\infty} \mathscr{A}_n^+$*), on appelle cette limite commune l'intégrale de* f *sur l'intervalle* $[a, b]$ *et on la note*

$$\mathscr{A} = \int_a^b f(t)dt.$$

On dit alors que f *est intégrable sur* $[a, b]$.

Remarques

a) Si f prend des valeurs positives et négatives, son intégrale sur $[a,b]$ est égale à la somme des aires que forme son graphe avec l'axe des abscisses $\mathcal{O}_x$ selon la règle suivante : si la forme géométrique est située au dessus de l'axe des abscisses, son aire est comptée positivement alors que si elle est au dessous, l'aire est comptée négativement.



b) Si f est une fonction constante égale à $m \in \mathbb{R}$ sur $[a,b]$,alors

$$\int_a^b f(t)dt = m \times (b-a).$$

Propriétés *Soient f et g deux fonctions intégrables sur $[a,b]$.*

1. *La fonction $f+g$ est intégrable et on a*

$$\int_a^b (f+g)(t)dt = \int_a^b f(t)dt + \int_a^b g(t)dt.$$

2. *Pour tout nombre réel λ, la fonction λf est intégrable et on a*

$$\int_a^b \lambda f(t)dt = \lambda \int_a^b f(t)dt.$$

3. *Si $f \geqslant g$ alors*

$$\int_a^b f(t)dt \geqslant \int_a^b g(t)dt.$$

4. *Pour tout $c \in]a,b[$, f est intégrable sur $[a,c]$ et $[c,b]$ et on a*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt.$$

Remarques

- *Deux fonctions qui diffèrent en un nombre fini de points ont la même intégrale.*
- ***Attention :*** $\int_a^b f(t) \times g(t)dt \neq \int_a^b f(t)dt \times \int_a^b g(t)dt.$
- *Pour toute fonction f et tout réel a on pose par convention* $\int_a^a f(t)dt = 0.$
- *Si f est intégrable sur $[a,b]$, on pose* $\int_a^b f(t)dt = -\int_b^a f(t)dt.$
- *Grâce à ces deux conventions, on obtient la formule d'addition, dite relation de Chasles :*

$$\forall x,y,z \in [a,b], \quad \int_x^z f(t)dt = \int_x^y f(t)dt + \int_y^z f(t)dt,$$

quel que soit l'ordre entre x, y et z.

Nous utiliserons dans la suite le critère d'intégrabilité suivant :

Théorème *Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est continue sur $[a,b]$ alors f est intégrable sur $[a,b]$.*

Remarque *(Autre critère) Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est monotone* * *sur $[a,b]$ alors f est intégrable sur $[a,b]$.*

*. Une fonction est dite monotone sur $[a,b]$ si elle est croissante ou décroissante sur $[a,b]$.

Définitions. *Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction.*

. *Si I est un intervalle ouvert[†] , une primitive de f est une fonction $F : I \to \mathbb{R}$ dérivable sur I et telle que $\forall x \in I, F'(x) = f(x)$.*

. *Si $I = [a,b[,]a,b]$ ou $[a,b]$, une primitive de f est une fonction $F : I \to \mathbb{R}$ continue sur I, dérivable sur $]a,b[$ et telle que $\forall x \in]a,b[, F'(x) = f(x)$.*

Remarque *Si F est une primitive de la fonction $f : I \to \mathbb{R}$, toute primitive G de f sur I est de la forme :*

$$\begin{array}{rcl} G : I & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & F(x) + c, \end{array}$$

où c est un réel quelconque. Autrement dit, deux primitives d'une même fonction sont égales à une constante près.

Théorème *Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors, pour tout $a \in I$, la fonction $F : I \to \mathbb{R}$ définie par*

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt, \forall x \in I,$$

est une primitive de f.

Remarque *Ce théorème nous dit que toute fonction continue sur I possède des primitives. De plus, pour tout $a \in I$, la fonction $F : x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ est l'unique primitive de f qui s'annule en a.*

2 Outils et techniques de calcul

2.1 Primitives évidentes

Lorsque l'on cherche la primitive d'une fonction, on commence par regarder si celle-ci ne s'écrit pas sous la forme $u'(x) \times f(u(x))$, avec $f(u(x))$ égale à l'une des expressions suivantes ($\alpha \in \mathbb{R}$) :

$$u^\alpha(x),\ \frac{1}{\sqrt{u(x)}},\ \frac{1}{u(x)},\ e^{u(x)},\ \cos(u(x)),\ \sin(u(x)),\ 1 + \tan^2(u(x)),\ \frac{1}{\cos^2(u(x))},\ \frac{1}{1+u^2(x)},\ \frac{1}{\sqrt{1-u^2(x)}},$$

puis on se réfère au tableau des primitives usuelles en annexe.

Exemples *Donner une primitive des fonctions suivantes :*

1. $f_1(x) = (x+1)^4 = u'(x) \times (u(x))^4$ *avec* $u(x) = x+1$*, a pour primitive*

$$F_1(x) = \frac{1}{5}(u(x))^5 = \frac{1}{5}(x+1)^5.$$

2. $f_2(x) = (4x+1)^2 = \ldots\ldots \times 4(4x+1)^2 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ *avec* $u(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$*, a pour primitive*

$$F_2(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

†. C'est à dire de la forme $]-\infty, a[$, $]a,b[$ ou $]b,+\infty[$, avec $a, b \in \mathbb{R}, a < b$.

3. $f_3(x) = \dfrac{2x}{\sqrt{x^2+3}} = \dfrac{}{}$ *avec* $u(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots$, *a pour primitive*

$$F_3(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

4. $f_4(x) = \dfrac{x}{\sqrt{2x^2+3}} = \ldots\ldots \times \dfrac{4x}{\sqrt{2x^2+3}} = \ldots\ldots \times \dfrac{}{}$ *avec* $u(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots$, *a pour primitive*

$$F_4(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

5. $f_5(x) = (6x+1)e^{3x^2+x} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ *avec* $u(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots$, *a pour primitive*

$$F_5(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

6. $f_6(x) = 3xe^{5x^2} = \ldots\ldots\ldots \times 10xe^{5x^2} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ *avec* $u(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots$, *a pour primitive*

$$F_6(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

7. $f_7(x) = 4x\cos(x^2+3) = \ldots\ldots\ldots\ldots \cos(x^2+3) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ *avec* $u(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots$, *a pour primitive*

$$F_7(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

8. $f_8(x) = (2x-3)\sin(x^2-3x+1) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ *avec* $u(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$, *a pour primitive*

$$F_8(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

9. $f_9(x) = \dfrac{12x+2}{\cos^2(3x^2+x+\frac{1}{12})} = \ldots\times\dfrac{}{\cos^2(3x^2+x+\frac{1}{12})} = \ldots\times\dfrac{}{}$ *avec* $u(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$, *a pour primitive*

$$F_9(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

10. $f_{10}(x) = \dfrac{3}{1+4x^2} = \ldots \times \dfrac{1}{1+(\ldots)^2} = \ldots \times \dfrac{2}{1+(\ldots)^2} = \ldots \times \dfrac{}{}$ *avec* $u(x) = \ldots\ldots$, *a pour primitive*

$$F_{10}(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

11. $f_{11}(x) = \dfrac{6x^2+8x+9}{2x^3+4x^2+9x-3} = \dfrac{}{}$ *avec* $u(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$, *a pour primitive*

$$F_{11}(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

12. $f_{12}(x) = \dfrac{3x+6}{x^2+4x} = \ldots \times \dfrac{x+2}{x^2+4x} = \ldots \times \dfrac{2x+4}{x^2+4x} = \ldots \times \dfrac{}{}$ *avec* $u(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots$, *a pour primitive*

$$F_{12}(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

13. $f_{13}(x) = \dfrac{5}{\sqrt{1-9x^2}} = \dfrac{5}{\sqrt{1-(.....)^2}} = ... \times \dfrac{}{\sqrt{1-(.....)^2}} = ... \times \dfrac{}{\sqrt{\quad}}$ ***avec*** $u(x) = ...$***, a pour primitive***

$F_{13}(x) = ...$

14. $f_{14}(x) = \dfrac{2}{\sqrt{-x^2+6x-8}} = \dfrac{2}{\sqrt{\quad}} = \dfrac{2}{\sqrt{\quad}} = \dfrac{2}{\sqrt{\quad}}$

$= 2 \times \dfrac{}{\sqrt{\quad}}$ ***avec*** $u(x) = ...$***, a pour primitive***

$F_{14}(x) = ...$

15. $f_{15}(x) = \dfrac{5x}{\sqrt{-4x^4+20x^2-24}} = \dfrac{5x}{\sqrt{\quad}} = \dfrac{5x}{\sqrt{\quad}} = ...\times\dfrac{....}{\sqrt{\quad}}$

$= .... \times \dfrac{}{\sqrt{\quad}}$ ***avec*** $u(x) = ...$***, a pour primitive***

$F_{15}(x) = ...$

16. $f_{16}(x) = \dfrac{7}{9x^2+12x+5} = \dfrac{7}{\quad} = \dfrac{7}{\quad} = ... \times \dfrac{.....}{\quad}$

$= ..... \times \dfrac{}{\quad}$ ***avec*** $u(x) = ...$***, a pour primitive***

$F_{16}(x) = ...$

17. $f_{17}(x) = \dfrac{5x}{x^4+6x^2+10} = \dfrac{5x}{\quad} = \dfrac{5x}{\quad} = ... \times \dfrac{.....}{\quad}$

$= ..... \times \dfrac{}{\quad}$ ***avec*** $u(x) = ...$***, a pour primitive***

$F_{17}(x) = ...$

18. $f_{18}(x) = \dfrac{x^3+3x}{x^4+6x^2+10} = ...\times\dfrac{4x^3+12x}{x^4+6x^2+10} = ...\times\dfrac{}{\quad}$ ***avec*** $u(x) = ...$***, a pour primitive***

$F_{18}(x) = ...$

19. $f_{19}(x) = \dfrac{5x}{9x^4-12x^2+5} = \dfrac{5x}{\quad} = \dfrac{5x}{\quad} = ... \times \dfrac{}{\quad}$

$= ..... \times \dfrac{}{\quad}$ ***avec*** $u(x) = ...$***, a pour primitive***

$F_{19}(x) = ...$

2.2 Intégration par parties

On considère u et v deux fonctions dérivables sur un même intervalle $[a,b]$ et telles que u' et v' soient continues sur $[a,b]$. On sait que $(uv)' = u'v + uv'$, en intégrant ceci sur $[a,b]$, on obtient

$$\left[u(x)v(x)\right]_a^b = \int_a^b (uv)'(x)dx = \int_a^b u'(x)v(x)dx + \int_a^b u(x)v'(x)dx,$$

où on a utilisé la notation $\left[f(x)\right]_a^b = f(b) - f(a)$. On en déduit alors la formule dite « d'intégration par parties » :

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx$$

ou, pour une intégrale indéfinie (c'est à dire sans bornes définies) :

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)dx.$$

Exemples

1. *Calculer* $\int_0^1 xe^x dx$. *On pose* $u(x) = x$ *et* $v'(x) = e^x$*, de cette façon,* $u'(x) = 1$ *et* $v(x) = e^x$*. Les fonctions* u *et* v *ainsi définies sont dérivables sur* $[0,1]$*,* u' *et* v' *sont continues et la formule d'intégration par parties donne alors*

$$\begin{aligned}\int_0^1 xe^x dx &= \left[u(x)v(x)\right]_0^1 - \int_0^1 u'(x)v(x)dx \\ &= \left[xe^x\right]_0^1 - \int_0^1 1 \times e^x dx \\ &= \left[xe^x\right]_0^1 - \left[e^x\right]_0^1 \\ &= e - 0 - (e-1) \\ &= 1.\end{aligned}$$

2. *Calculer* $\int_1^e x\ln(x)dx$. *On pose* $u(x) = \ln(x)$ *et* $v'(x) = x$*, alors* $u'(x) =$ ...... *et* $v(x) =$ .... *Les fonctions* u *et* v *ainsi définies sont dérivables sur* $[1,e]$*,* u' *et* v' *sont continues et la formule d'intégration par parties donne alors*

$$\begin{aligned}\int_1^e x\ln(x)dx &= \text{..} \\ &= \text{..} \\ &= \text{..} \\ &= \text{..} \\ &= \text{..}\end{aligned}$$

3. *Calculer* $\int \arcsin(x)dx$. *On pose* $u(x) = \arcsin(x)$ *et* $v'(x) = 1$*, alors* $u'(x) = \overline{}$ *et* $v(x) =$ ....

   Les fonctions u *et* v *ainsi définies sont dérivables sur* $]-1,1[$*,* u' *et* v' *sont continues et la* *formule d'intégration par parties donne alors*

$$\begin{aligned}\int \arcsin(x)dx &= \dotfill \\ &= \dotfill \\ &= \dotfill \\ &= \dotfill \\ &= \dotfill\end{aligned}$$

4. *Donner une primitive de $f : x \mapsto x^2e^x$ sur $\mathbb{R}$. On pose $u(x) = x^2$ et $v'(x) = e^x$, de cette façon, $u'(x) =$ .... et $v(x) =$ .... On a*

$$\int x^2e^xdx = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

L'astuce pour calculer cette intégrale qui contient une exponentielle consiste à refaire une intégration par parties pour calculer $\int xe^xdx$. On pose $\bar{u}(x) = x$ et $\bar{v}'(x) = e^x$ et on obtient

$$\begin{aligned}\int xe^xdx &= \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &= \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\end{aligned}$$

d'où

$$\int x^2e^xdx = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Une primitive de f sur $\mathbb{R}$ est donc $F : x \mapsto$ ....

2.3 Changement de variables

Théorème *Soient I, J deux intervalles, $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue et $\varphi : J \to I$ une fonction bijective, dérivable et telle que φ' soit continue. Pour tout $a, b \in J$, on a en posant $t = \varphi(x)$*

$$\int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)dt.$$

Voici en pratique comment on applique ce théorème :

Exemples 1. *Calculer $\int_1^2 \frac{x}{1+x^4}dx$ en posant $t = x^2$. L'application $x \mapsto x^2$ est une bijection continue de $[1,2]$ vers $[1,4]$ et sa dérivée $x \mapsto 2x$ est continue sur $[1,2]$, ce changement de variables est donc admissible. On procède par étapes :*

- *Les bornes de l'intégrale : si $x = 1$, alors $t = 1^2 = 1$ et si $x = 2$ alors $t = 2^2 = 4$.*
- *La variable d'intégration : comme $t = x^2$, par dérivation, $dt = (x^2)'dx = 2xdx$.*

. *L'intégrale :*

$$\int_1^2 \frac{x}{1+x^4}dx = \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{2x}{1+\left(x^2\right)^2}dx = \frac{1}{2}\int_1^4 \frac{1}{1+t^2}dt = \frac{1}{2}\Big[\arctan(t)\Big]_1^4 = \frac{1}{2}(\arctan(4)-\arctan(1)).$$

2. *Calculer* $\int_0^1 \frac{2}{e^x+e^{-x}}dx$ *en posant* $t = e^x$. *L'application* $x \mapsto e^x$ *est une bijection continue de .... vers .... et sa dérivée* $x \mapsto$ *........... est continue sur ...., ce changement de variable est donc admissible.*

   . *Les bornes de l'intégrale : si* $x = 0$, *alors* $t = ...$ *et si* $x = 1$ *alors* $t = ...$

   . *La variable d'intégration : comme* $t = e^x$, *par dérivation,* $dt = ...$

   . *L'intégrale : on a*

$$\int_0^1 \frac{2}{e^x+e^{-x}}dx = \int_0^1 \frac{2e^x}{e^x\left(e^x+e^{-x}\right)}dx = 2\int_0^1 \frac{.........}{\left(......\right)^2+1} = 2\int_{...}^{...} \frac{...}{\quad} = ...$$

$= ....$

3. *Calculer* $\int_3^8 \frac{1}{x\sqrt{1+x}}dx$ *en posant* $t = \sqrt{1+x}$. *L'application* $x \mapsto \sqrt{1+x}$ *est une bijection continue de .... vers .... et sa dérivée* $x \mapsto$ *................... est continue sur ...., ce changement de variable est donc admissible.*

   . *Les bornes de l'intégrale : si* $x = 3$, *alors* $t = ...$ *et si* $x = 8$ *alors* $t = ...$

   . *La variable d'intégration : comme* $t = \sqrt{1+x}$, *par dérivation,* $dt = ...$

   . *Comme* $t = \sqrt{1+x}$, *on a* $x = ...$

   . *L'intégrale : on a*

$$\int_3^8 \frac{1}{x\sqrt{1+x}}dx = ...\int_3^8 \frac{1}{x}\times\frac{1}{2\sqrt{1+x}}dx = ...\int_{....}^{....} \frac{\quad}{\quad} = ...\int_{....}^{....} \frac{\quad}{\quad}.$$

Pour calculer cette intégrale, on va décomposer $\frac{1}{(t-1)(t+1)}$ *en éléments simples : on cherche* $a, b \in \mathbb{R}$ *tels que*

$$\frac{1}{(t-1)(t+1)} = \frac{a}{t-1} + \frac{b}{t+1} = \frac{\quad}{(t-1)(t+1)} = \frac{\quad}{(t-1)(t+1)},$$

ce qui amène à $\left\{\begin{array}{rcl} a+b & = & .... \\ a-b & = & .... \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} a & = & .... \\ b & = & .... \end{array}\right.$

Finalement

$$\begin{aligned} 2\int_2^3 \frac{1}{(t-1)(t+1)}dt &= 2\int_2^3 \frac{1}{....(t-1)}dt - 2\int_2^3 \frac{1}{....(t+1)}dt \\ &= .... \\ &= .... \\ &= .... \end{aligned}$$

4. *Calculer* $\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{\cos(x)}{2-\cos^2(x)}dx$ *en posant* $t = \sin(x)$. *L'application* $x \mapsto \sin(x)$ *est une bijection continue de* .... *vers* .... *et sa dérivée* $x \mapsto$ .... *est continue sur* ...., *ce changement de variable est donc admissible.*

   . *Les bornes de l'intégrale : si* $x = -\pi/4$, *alors* $t =$ .... *et si* $x = \pi/4$ *alors* $t =$ ....

   . *La variable d'intégration : comme* $t = \sin(x)$, *on a* $dt =$ ....

   . *L'intégrale : on a* $f(x) = \frac{\cos(x)}{2-\cos^2(x)} = \frac{\cos(x)}{\qquad\qquad} = \frac{\cos(x)}{\qquad\qquad}$, *et donc*

   $$\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{\cos(x)}{2-\cos^2(x)}dx = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{\cos(x)}{\qquad\qquad}dx = \int \frac{\qquad}{\qquad} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

   ....

5. *Calculer* $\int_0^{1/2} \frac{x}{(1-x^2)^{3/2}}dx$ *en posant* $t = 1 - x^2$. *L'application* $x \mapsto 1 - x^2$ *est une bijection continue de* .... *vers* .... *et sa dérivée* $x \mapsto$ .... *est continue sur* ...., *ce changement de variable est donc admissible.*

   . *Les bornes de l'intégrale : si* $x = 0$, *alors* $t =$ .... *et si* $x = 1/2$ *alors* $t =$ ....

   . *La variable d'intégration : comme* $t = 1 - x^2$, *on a* $dt =$ ....

   . *L'intégrale : on a* $\int_0^{1/2} \frac{x}{(1-x^2)^{3/2}}dx = \ldots\ldots \int_0^{1/2} \frac{-2x}{(1-x^2)^{3/2}}dx = \ldots \int_{\ldots}^{\ldots} \frac{\qquad}{\qquad}dt =$.........

   ....

   ....

   ....

6. *Calculer* $\int \cos(x)\sin^3(x)dx$ *en posant* $t = \cos(x)$. ....

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

7. ***Calculer*** $\int \frac{\cos^3(x)}{\sin^4(x)}dx$ ***en posant*** $t = \sin(x)$. . . . .

A Primitives usuelles

Fonction	**Primitive**	**Domaine de validité**
a (réel donné)	ax	$\mathbb{R}$
$x^n, n \in \mathbb{N}$	$\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$	$\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{x^n}, n \in \mathbb{N}^* \setminus \{-1\}$	$\dfrac{-1}{(n-1)x^{n-1}}$	$\mathbb{R}^*$
$\dfrac{1}{\sqrt{x}},$	$2\sqrt{x}$	$\mathbb{R}_+^*$
$x^\alpha, \alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$	$\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	$\mathbb{R}_+^*$
$\dfrac{1}{x}$	$\ln(\lvert x\rvert)$	$\mathbb{R}^*$
e^x	e^x	$\mathbb{R}$
$\cos(x)$	$\sin(x)$	$\mathbb{R}$
$\sin(x)$	$-\cos(x)$	$\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$	$\tan(x)$	$\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$
$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\arctan(x)$	$\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin(x)$	$]-1,1[$
$\dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arccos(x)$	$]-1,1[$
$a^x, a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$	$\dfrac{a^x}{\ln(a)}$	$\mathbb{R}$

Fonction	**Primitive**
$u'u^\alpha,\ \alpha \in \mathbb{R}$	$\dfrac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1}$
$\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}$
$\dfrac{u'}{u}$	$\ln(\lvert u\rvert)$
$u'e^u$	e^u
$u'\cos(u)$	$\sin(u)$
$u'\sin(u)$	$-\cos(u)$
$\dfrac{u'}{\cos^2(u)} = u'\big(1 + \tan^2(u)\big)$	$\tan(u)$
$\dfrac{u'}{1+u^2}$	$\arctan(u)$
$\dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$	$\arcsin(u)$

B Exercices

Exercice 1. On considère la fonction $h :]-1,1[\to \mathbb{R}$ définie par $h(x) = \dfrac{1}{1-x^2}, \forall x \in]-1,1[$.

1. Chercher $A, B \in \mathbb{R}$ tels que $\forall x \in]-1,1[$, $h(x) = \dfrac{A}{1-x} + \dfrac{B}{1+x}$.
2. En déduire une primitive de la fonction h sur $]-1,1[$.

Exercice 2. On considère la fonction $f : \mathbb{R} \setminus \{2,3\} \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 5x + 6}, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{2,3\}.$$

1. Chercher $A, B \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{2,3\}, f(x) = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-3}.$$

2. En déduire la valeur de $I = \displaystyle\int_0^1 f(x)dx$.

Exercice 3. On considère la fonction $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \frac{1}{x(x^2+1)}, \forall x \in \mathbb{R}^*.$$

1. Chercher $A, B, C \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, f(x) = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2+1}.$$

2. En déduire la valeur de $I = \displaystyle\int_1^2 f(x)dx$.

Exercice 4. Calculer les intégrales suivantes :

$$I_1 = \int_0^1 \frac{2x+1}{x^2+x+1}dx \; ; \qquad I_6 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4(x)\cos(x)dx \; ;$$

$$I_2 = \int_1^e \frac{\ln^2(x)}{x}dx \; ; \qquad I_7 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin(x)}{\cos^2(x)}dx \; ;$$

$$I_3 = \int_1^2 x\sqrt{1+x^2}dx \; ; \qquad I_8 = \int_0^1 \frac{e^{2x}}{1+e^{2x}}dx \; ;$$

$$I_4 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)\cos^3(x)dx \; ; \qquad I_9 = \int_1^2 \frac{1}{x^2\sqrt{1+\frac{1}{x}}}dx \; ;$$

$$I_5 = \int_1^{e^{\frac{\pi}{4}}} \frac{\left(1+\tan^2\left(\ln(x)\right)\right)}{x}dx \; ; \qquad I_{10} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan(x)dx.$$

Exercice 5. À l'aide d'une intégration par parties, calculer une primitive pour chacune des fonctions suivantes :

$$
\begin{aligned}
f_1(x) &= x^2 e^x \ ; & f_6(x) &= x\arctan(x) \ ;\\
f_2(x) &= x\cos(x) \ ; & f_7(x) &= (2x+1)e^x \ ;\\
f_3(x) &= \ln(x) \ ; & f_8(x) &= \arcsin^2(x) \ ;\\
f_4(x) &= x^2\ln(x) \ ; & f_9(x) &= (x+1)e^{-x} \ ;\\
f_5(x) &= \arcsin(x) \ ; & f_{10}(x) &= \frac{\ln(x)}{x^2}.
\end{aligned}
$$

Exercice 6. À l'aide de deux intégrations par parties successives, calculer une primitive sur $\mathbb{R}$ pour chacune des fonctions suivantes :

$\bullet f_1(x) = e^x\cos(x)$, $\bullet f_2(x) = x^2\sin(2x)$ $\bullet f_3(x) = e^x\sin(x)$ $f_4(x) = \sin(x)\dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ $\bullet f_5(x) = (x+1)^2 e^{-x}$.

Exercice 7.

1. À l'aide du changement de variables $t = \sqrt{x}$, calculer l'intégrale suivante :

$$I = \int_0^4 \frac{1}{1+\sqrt{x}}dx.$$

2. À l'aide du changement de variables $t = \sin(x)$, calculer l'intégrale suivante :

$$J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3(x)dx.$$

Exercice 8.

1. (a) Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\dfrac{t^4}{1+t^2} = t^2 - 1 + \dfrac{1}{1+t^2}$.

   (b) En posant le changement de variables $t = \tan(x)$, en déduire la valeur de $I = \displaystyle\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \tan^4(x)dx$.

2. (a) Chercher $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $\forall t \in \mathbb{R}^*$, $\dfrac{t+1}{t(t^2+t+1)} = \dfrac{a}{t} + \dfrac{bt+c}{t^2+t+1}$.

   (b) En posant le changement de variables $t = e^x$, en déduire la valeur de $J = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^x+1}{e^{2x}+e^x+1}dx$.

Exercice 9.

1. Montrer que pour tout x dans $\mathbb{R}$, $\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1$.
2. En déduire que pour tout x dans $\mathbb{R}$, $\sin(3x) = \sin(x)(4\cos^2(x) - 1)$.
3. Chercher $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $\forall t \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right\}$, $\dfrac{1}{(2t-1)(2t+1)} = \dfrac{a}{2t-1} + \dfrac{b}{2t+1}$.
4. En posant le changement de variable $t = \cos(x)$, calculer l'intégrale suivante

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1-\cos(2x)}{\sin(3x)}dx.$$