Chapitre 5 : Équations différentielles

Table des matières

De nombreux problèmes d'origine physique, économique ou biologique conduisent à chercher une fonction y dépendant d'une variable t sachant qu'il existe une relation entre y, t et éventuellement d'autres dérivées successives de y (y'', ...). Une telle relation est appelée équation différentielle :

$$y^2(t) - (y'(t))^2 = 1$$

$$ty(t)y'(t) = y^2(t) - t^2$$

$$y''(t) + 2y'(t) + 2y(t) = te^{-t}\sin(t).$$

Exemple ***: La cinétique chimique :*** *Il s'agit de trouver l'évolution dans le temps de concentrations, de quantités de matière (nombres de moles) ou encore de pressions partielles. Les réactions d'ordre 1 mènent par exemple à l'équation différentielle suivante :*

$$y'(t) = -ky(t),$$

où k une constante donnée et y représente la concentration d'un composé chimique.

L'objectif de ce cours est d'apprendre à résoudre une classe bien précise d'équations différentielles, c'est à dire trouver l'expression de la fonction inconnue y.

1 Équations différentielles linéaires du premier ordre à coefficients constants

Soient $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle, $a \in \mathbb{R}$ un réel et $g : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue donnée. On s'intéresse à la résolution d'équations différentielles linéaires du 1er ordre qui sont des équations de la forme :

$$y'(t) - ay(t) = g(t) \quad t \in I, \tag{1}$$

où l'inconnue du problème est une fonction dérivable notée $y : I \to \mathbb{R}$ qui dépend de la variable t.

- On dit que cette équation est une équation différentielle car elle fait intervenir des dérivées de l'inconnue du problème y.

- On dit qu'elle est du **1er ordre** car la dérivée d'ordre le plus élevé qu'elle fait intervenir est la dérivée **première** de l'inconnue du problème y.

- On dit qu'elle est à coefficients constants car nous ne considèrerons que des coefficients constants devant les membres y, y' de l'équation.

- On dit qu'elle est linéaire car l'équation homogène associée donnée par

  $$y'(t) - ay(t) = 0 \quad t \in I, \tag{2}$$

  possède la propriété de linéarité suivante :

Propriété *Soient y_1 et y_2 deux solutions de (2), alors pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, la fonction combinaison linéaire de y_1 et y_2 donnée par*

$$\alpha y_1 + \beta y_2$$

est encore solution de (2). En particulier, la fonction identiquement nulle $y \equiv 0$ est toujours solution de (2).

Remarque *Attention, la propriété précédente n'est pas vraie pour les solutions de (1) : si y_1 et y_2 sont deux solutions de (1), en général, $\alpha y_1 + \beta y_2$ n'est pas solution de (1).*

L'objectif de cette première partie est d'apprendre à résoudre les équations (1) et (2).

1.1 Équations homogènes $y'(t) - ay(t) = 0$

On dit qu'une équation différentielle de la forme $y'(t) - ay(t) = g(t)$ est **homogène** lorsque l'on considère comme second membre une fonction g identiquement nulle, ce que l'on note $g \equiv 0$.

Définition *Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $a : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On appelle solution sur I de l'équation*

$$y'(t) - ay(t) = 0, t \in I$$

toute fonction f dérivable sur I et telle que $\forall t \in I$,

$$f'(t) - af(t) = 0.$$

Théorème 1 *Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$ un réel. Toute solution f de l'équation*

$$y'(t) - ay(t) = 0, t \in I \tag{$\star$}$$

est de la forme

$$f(t) = Ce^{at}$$

où $C \in \mathbb{R}$ est une constante.

Preuve. Soient f une solution de l'équation $(\star)$, on pose $\varphi : t \mapsto f(t)e^{-at}$. Alors φ est dérivable et vérifie $\forall t \in I$

$\varphi'(t)$=...

=...

=...

=...

....

....

....

.... ∎

Exemple *Résoudre l'équation différentielle*

$$y'(t) - 3y(t) = 0.$$

L'équation est bien homogène linéaire du premier ordre à coefficients constants, avec $a =$ .... *. Ainsi toute solution est définie sur* $\mathbb{R}$ *et est de la forme*

$$f(t) = \text{.................................}$$

1.2 Équations non homogènes $y'(t) - ay(t) = g(t)$

Définition *Soit* I *un intervalle de* $\mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ *et* $g : I \to \mathbb{R}$ *une fonction continue. On appelle solution sur* I *de l'équation*

$$y'(t) - ay(t) = g(t), t \in I$$

toute fonction f *dérivable sur* I *et telle que* $\forall t \in I$,

$$f'(t) - af(t) = g(t).$$

Théorème 2 *Soient* I *un intervalle de* $\mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ *et* $g : I \to \mathbb{R}$ *une fonction continue. Si* f_p *est une solution particulière de l'équation*

$$y'(t) - ay(t) = g(t), t \in I \qquad (\star)$$

alors toute solution de l'équation $(\star)$ *s'écrit sous la forme*

$$f(t) = Ce^{at} + f_p(t), \forall t \in I,$$

où $C \in \mathbb{R}$ *est une constante.*

Preuve. Soient f et f_p deux solutions de l'équation $(\star)$, on pose $\varphi = f - f_p$. Alors φ est dérivable et vérifie $\forall t \in I$

$\varphi'(t) - a\varphi(t)$=...

=...

=..

=..

....

....

....

.... ■

Remarque *Ce théorème nous dit que toute solution de l'équation* $(\star)$ *se décompose comme somme d'une solution particulière de* $(\star)$ *et d'une solution de l'équation homogène associée à* $(\star)$.

Exemple *On considère l'équation différentielle sur* $\mathbb{R}$

$$y'(t) + 2y(t) = 4. \qquad (\star)$$

Chercher une solution particulière f_p *sous la forme* $f_p(t) = \lambda, \lambda \in \mathbb{R}$ *puis résoudre l'équation* $(\star)$. .....

....

....

....

Cherchons une solution de l'équation homogène. Cette dernière vaut

....

On identifie $a = ...$ *Toute solution* f_h *de l'équation homogène est donc de la forme*

$$f_h(t) = ...$$

Finalement, toute solution de l'équation $(\star)$ *est définie sur* $\mathbb{R}$ *et est de la forme*

$$f(t) = f_h(t) + f_p(t) = ...$$

1.3 Recherche de solutions particulières pour $y'(t) - ay(t) = g(t)$

1.3.1 Cas particuliers

Selon la forme du second membre g, on peut chercher des solutions particulières spécifiques.

- Si g est un polynôme de degré n, on cherche une solution particulière sous la forme $f_p(t) = P(t)$ où

$$P \text{ est un polynôme de degré } \begin{cases} n \text{ si } a \neq 0 \\ \\ n+1 \text{ si } a = 0. \end{cases}$$

- Si $g(t) = e^{\lambda t}Q(t), \forall t \in I$, où $\lambda \in \mathbb{R}$ et Q est un polynôme de degré n, on cherche une solution particulière sous la forme $f_p(t) = e^{\lambda t}P(t)$ où

$$P \text{ est un polynôme de degré } \begin{cases} n \text{ si } a \neq \lambda \\ \\ n+1 \text{ si } a = \lambda. \end{cases}$$

- Si $g(t) = e^{\lambda t}(\alpha\cos(\omega t) + \beta\sin(\omega t))$, avec $\alpha, \beta, \lambda, \omega \in \mathbb{R}$, on cherche une solution particulière sous la même forme, *i.e*
$$f_p(t) = e^{\lambda t}(A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)),$$
avec $A, B \in \mathbb{R}$ à déterminer.

Exemple *Résoudre l'équation différentielle*

$$y'(t) + 3y(t) = 2e^{-t}. \qquad (\star)$$

On commence par résoudre l'équation homogène associée, c'est-à-dire :

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

On identifie $a = \dots\dots$ *Toute solution de l'équation homogène s'écrit donc*

$$f_h(t) = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

La fonction $g : t \mapsto \dots\dots\dots\dots$ *est continue sur* $I = \dots\dots\dots\dots$.

On cherche une solution particulière, au vu de g*, on va la chercher sous la forme* $f_\lambda(t) = \lambda e^{-t}$ *avec* $\lambda \in \mathbb{R}$. *On a pour tout* t *dans* I

$$f'_\lambda(t) + 3f_\lambda(t) = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

et donc
$$f'_\lambda(t) + 3f_\lambda(t) = 2e^{-t} \Leftrightarrow \lambda = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
. *On en déduit que* $f_p(t) = \dots\dots\dots\dots$ *est une solution particulière. Finalement, toute solution de* $(\star)$ *est définie sur* $\mathbb{R}$ *et s'écrit sous la forme*

$$f(t) = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

1.3.2 Méthode générale : variation de la constante

On considère I un intervalle de $\mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ et $g : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On appelle « méthode de variation de la constante » la méthode qui consiste à chercher une solution particulière f_p de l'équation sur I
$$y'(t) - ay(t) = g(t). \qquad (\star)$$

L'idée de la méthode est la suivante : on sait que les solutions de l'équation homogène

$$y'(t) - ay(t) = 0$$

s'écrivent sous la forme
$$f_h(t) = Ce^{at}, \forall t \in I$$
où $C \in \mathbb{R}$ est une constante, et on va chercher une solution particulière f_p de l'équation $(\star)$ sous la forme
$$f_p(t) = \varphi(t)e^{at}$$

où φ est une fonction dérivable sur I à déterminer. La constante C est remplacée par la fonction φ, d'où le nom de « variation de la constante ». On a alors

$\forall t \in I, f_p'(t) - af_p(t) = g(t) \quad \Leftrightarrow \quad$ ....

$\Leftrightarrow \quad$ ....

$\Leftrightarrow \quad$ ....

$\Leftrightarrow \quad$ ....

....

On peut résumer cela dans le résultat suivant :

Théorème 3 *Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ et $g : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Toute solution f de l'équation*

$$y'(t) - ay(t) = g(t), t \in I$$

est de la forme

$$f(t) = e^{at}(B(t) + C),$$

où $C \in \mathbb{R}$ est une constante et $B : I \to \mathbb{R}$ est une primitive sur I de la fonction $t \mapsto g(t)e^{-at}$.

Remarque *Avant de se lancer dans les calculs de la méthode de la variation de la constante, on commence par regarder s'il n'existe pas des solutions particulières évidentes à notre équation. Par exemple si on considère l'équation suivante*

$$y'(t) - 2y(t) = 2,$$

sur $I =$ ...., on voit bien qu'une solution particulière de cette équation est donnée par la fonction constante $f_p(t) =$ ...., $\forall t \in \mathbb{R}$. Ainsi toute solution de cette équation sera de la forme

$$f(t) = \text{..}$$

Exemple *Résoudre sur $I = \mathbb{R}$ l'équation différentielle*

$$(1 + t^2)y'(t) + 2(1 + t^2)y(t) - e^{-2t} = 0. \qquad (\star)$$

Ici, les coefficients de $y'(t)$ et $y(t)$ ne sont pas constants, mais on peut remarquer qu'un même facteur dépendant de t apparait. De plus, ce facteur ne s'annule jamais, on a en effet, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $t^2 \geq$ ..... et donc $1 + t^2 \geq$ ..... $>$ ...... On peut donc diviser par ce facteur, ce qui permet de réécrire $(\star)$ sous la forme : $\forall t \in I, y'(t) - ay(t) = g(t)$ avec $a =$ .... et $g : t \mapsto$ ...., qui est bien une fonction continue sur I. On sait que toute solution f_h de l'équation homogène est de la forme :

$$f_h(t) = \text{.....................................}$$

Il ne nous reste donc plus qu'à trouver une solution particulière de l'équation $(\star)$: d'après la méthode de la variation de la constante, on la cherche sous la forme

$$f_p(t) = \text{...............................}$$

Alors

$$\forall t \in I, f_p'(t) = \text{...}$$

et donc

$$f_p'(t) + 2f_p(t) = \frac{e^{-2t}}{1+t^2} \quad \Leftrightarrow \quad \text{..}$$

$$\Leftrightarrow \quad \text{..}$$

$$\Leftrightarrow \quad \text{..}$$

Ainsi, en prenant $B(t) =$ ...., $f_p(t) =$ .... *convient. Les solutions de* $(\star)$ *sur* I *sont donc de la forme*

$$f(t) = \text{...}$$

1.4 Équations avec conditions initiales

Il s'agit d'équations de la forme

$$\begin{cases} y'(t) - ay(t) = g(t) \\ \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

où $y_0 \in \mathbb{R}$ est une constante donnée. Cette information y_0 sur la valeur de la solution y en $t = 0$ nous permet d'identifier les constantes $C \in \mathbb{R}$ apparaissant dans la forme des solutions de l'équation.

Exemple *Résoudre l'équation différentielle*

$$\begin{cases} y'(t) + 3y(t) &= 2e^{-t} \qquad (\star) \\ y(0) &= 0, \end{cases}$$

Nous avons vu que toute solution de l'équation $(\star)$ *est de la forme*

$$f(t) = \text{...}$$

Parmi ces fonctions, la seule qui s'annule en 0 *est*

$$f_0(t) = \text{...}$$

C'est donc l'unique solution de l'équation avec condition initiale.

Remarque *Il arrivera que la condition initiale ne porte pas sur la valeur de la solution en* $t = 0$ *mais en d'autres valeurs de* $t \in I$*, par exemple : l'équation différentielle*

$$\begin{cases} y'(t) + 3y(t) &= 2e^{-t} \qquad (\star) \\ y(1) &= 0, \end{cases}$$

admet une unique solution. En effet, comme précédemment, $f(t) = Ce^{-3t} + e^{-t}, C \in \mathbb{R}$ *sont solutions de* $(\star)$ *et* ....

....

....

2 Équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants

Soient $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle, $a, b \in \mathbb{R}$ et $g : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On s'intéresse à la résolution d'équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants qui sont des équations de la forme :

$$y''(t) + ay'(t) + by(t) = g(t) \quad t \in I. \tag{3}$$

- On dit que cette équation est du **second ordre** car la dérivée d'ordre le plus élevé qu'elle fait intervenir est la dérivée **seconde** de l'inconnue du problème y.

- On dit qu'elle est à coefficients constants car nous ne considèrerons que des coefficients constants devant les membres y, y' y'' de l'équation.

Nous allons voir comment résoudre cette équation (3) : dans le cas homogène *i.e* lorsque $g = 0$ puis dans le cas non homogène lorsque $g : I \to \mathbb{R}$ est une fonction continue non-identiquement nulle.

2.1 Quelques rappels

Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. On considère dans la suite le polynôme de degré 2 suivant : $P(z) = az^2 + bz + c$.
On dit que z_0 est une racine de P si on a $P(z_0) = 0$ c'est à dire si $az_0^2 + bz_0 + c = 0$.
On a le résultat suivant :

Théorème *Soient* $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. *Le polynôme de degré 2 défini par :* $P(z) = az^2 + bz + c$, *possède au plus deux racines données par*
. *Si* $\Delta = 0$, *on a une racine double réelle* $x = \dfrac{-b}{2a}$.
. *Si* $\Delta > 0$ *on a deux racines réelles distinctes*

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

. *Si* $\Delta < 0$, *on a deux racines complexes* ***conjuguées*** *:*

$$z_1 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a} \text{ et } z_2 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}.$$

La factorisation du polynôme est donnée par la formule, en notant z_1, z_2 *les racines du polynôme*

$$az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2).$$

2.2 Équations homogènes du 2nd ordre $y''(t) + ay'(t) + by(t) = 0$, $a, b \in \mathbb{R}$

Définition *Soient* I *un intervalle de* $\mathbb{R}$ *et* $a, b \in \mathbb{R}$. *On appelle solution de l'équation*

$$y''(t) + ay'(t) + by(t) = 0$$

toute fonction f *deux fois dérivable sur* I *et telle que* $\forall t \in I$

$$f''(t) + af'(t) + bf(t) = 0$$

Définition *Soient $a, b \in \mathbb{R}$. On appelle polynôme caractéristique associé à l'équation*

$$y''(t) + ay'(t) + by(t) = 0,$$

le polynôme $P_c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ défini pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $P_c(x) = x^2 + ax + b$.

Théorème 4 *Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $a, b \in \mathbb{R}$. On considère P_c le polynôme caractéristique associé à l'équation*

$$y''(t) + ay'(t) + by(t) = 0. \qquad (\star)$$

• *Si P_c admet une racine réelle double $\alpha \in \mathbb{R}$ alors toutes les solutions de l'équation $(\star)$ sont de la forme*

$$f(t) = (At + B)e^{\alpha t}, \text{ avec } A, B \in \mathbb{R}.$$

• *Si P_c admet deux racines réelles distinctes $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ alors toutes les solutions de l'équation $(\star)$ sont de la forme*

$$f(t) = Ae^{\alpha_1 t} + Be^{\alpha_2 t}, \text{ avec } A, B \in \mathbb{R}.$$

• *Si P_c admet deux racines complexes distinctes $z_1 = \alpha + i\beta$ et $z_2 = \alpha - i\beta$, alors toutes les solutions de l'équation $(\star)$ sont de la forme*

$$f(t) = e^{\alpha t}(A\cos(\beta t) + B\sin(\beta t)), \text{ avec } A, B \in \mathbb{R}.$$

Remarque *Lorsque P_c a deux racines complexes distinctes z_1 et z_2, les solutions de $(\star)$ peuvent aussi s'écrire sous la forme*

$$f(t) = K_1 e^{z_1 t} + K_2 e^{z_2 t}$$

avec $K_1, K_2 \in \mathbb{C}$ en utilisant la formule

$$e^{\alpha + i\beta} = e^{\alpha} e^{i\beta} = e^{\alpha}(\cos(\beta) + i\sin(\beta)).$$

2.3 Équations non homogènes du 2nd ordre $y''(t) + ay'(t) + by(t) = g(t)$, $a, b \in \mathbb{R}$

Définition *Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $a, b \in \mathbb{R}$ et $g : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On appelle solution sur I de l'équation*

$$y''(t) + ay'(t) + by(t) = g(t), \quad t \in I$$

toute fonction f deux fois dérivable sur I telle que $\forall t \in I$, $f''(t) + af'(t) + bf(t) = g(t)$.

Théorème 5 *Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $a, b \in \mathbb{R}$ et $g : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On considère P_c le polynôme caractéristique associé à l'équation $y''(t) + ay'(t) + by(t) = 0$ et f_p une solution particulière de l'équation*

$$y''(t) + ay'(t) + by(t) = g(t). \qquad (\star)$$

• *Si P_c a une racine double $\alpha \in \mathbb{R}$, toutes les solutions de l'équation $(\star)$ sont de la forme*

$$f(t) = (At + b)e^{\alpha t} + f_p(t), \forall t \in I \text{ avec } A, B \in \mathbb{R} \text{ deux constantes.}$$

• *Si P_c a deux racines réelles distinctes $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$, toutes les solutions de l'équation $(\star)$ sont de la* *forme*

$$f(t) = Ae^{\alpha_1 t} + Be^{\alpha_2 t} + f_p(t), \forall t \in I \text{ avec } A, B \in \mathbb{R} \text{ deux constantes.}$$

• *Si P_c a deux racines complexes distinctes $z_1 = \alpha + i\beta \in \mathbb{C}$, $z_2 = \alpha - i\beta \in \mathbb{C}$ ($\alpha, \beta \in \mathbb{R}$), toutes les solutions de l'équation $(\star)$ sont de la forme*

$$f(t) = e^{\alpha t}(A\cos(\beta t) + B\sin(\beta t)) + f_p(t), \forall t \in I \text{ avec } A, B \in \mathbb{R} \text{ deux constantes.}$$

A Exercices

A.1 Équations différentielles linéaires du premier ordre

Exercice 1. Résoudre les équations différentielles suivantes sur $\mathbb{R}$:

1. $y'(x) - 3y(x) = 0$;
2. $y'(x) + y(x) = 0$;
3. $3y'(x) + 2y(x) = 0$.

Exercice 2. Résoudre les équations différentielles suivantes sur $\mathbb{R}$:

1. $y'(x) + y(x) = \cos(x)$;
2. $y'(x) + 3y(x) = 2e^{-x}$;
3. $y'(x) + 3y(x) = x^3$;
4. $3y'(x) - 2y(x) = (x+1)e^x$;
5. $y'(x) + y(x) = 2xe^{-x}$;
6. $2y'(x) + 3y(x) = e^x \sin(x)$.

Exercice 3. Résoudre les équations différentielles suivantes sur $\mathbb{R}$:

1. $y'(x) + y(x) = \sin(2x)$ et $y(0) = 1$;
2. $y'(x) + 2y(x) = 2e^{-2x}$ et $y(1) = 0$;
3. $y'(x) - 3y(x) = e^{3x}\cos(x)$ et $y(0) = 2$.

Exercice 4. Résoudre les équations différentielles suivantes sur $\mathbb{R}$:

1. $y'(x) + y(x) = \frac{1}{1+e^x}$ et $y(0) = 1$;
2. $y'(x) - 3y(x) = xe^{x(x+3)}$ et $y(0) = -1$;
3. $y'(x) - 2y(x) = e^{2x}.\arctan(x)$ et $y(1) = 0$.

A.2 Équations différentielles linéaires du second ordre

Exercice 5. Résoudre les équations différentielles suivantes sur $\mathbb{R}$:

1. $y''(t) - 3y'(t) - 4y(t) = 0$;
2. $y''(t) + y'(t) + 2y(t) = 0$;
3. $y''(x) - 4y(x) = 0$;
4. $9y''(x) - 6y'(x) = 0$;
5. $y''(x) - y'(x) - 2y(x) = 0$ avec $y(0) = 1 = y'(0) = 1$;
6. $4y''(t) + 4y'(t) + y(t) = 0$;
7. $2y''(x) - y'(x) + 2y(x) = 0$ avec $y(0) = 1$ et $y'(0) = -1$;
8. $9y''(x) - 6y'(x) + y(x) = 0$ avec $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$.

Exercice 6. Résoudre les équations différentielles suivantes sur $\mathbb{R}$:

1. $y''(x) + y'(x) + y(x) = x^2 + 1$;
2. $y''(x) - y(x) = e^{2x}$ avec $y(0) = y'(0) = 0$;
3. $y''(x) + y(x) = x + \cos(x)$;
4. $y''(x) + y'(x) + y(x) = \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$ sachant que $y(0) = y'(0) = 1$;
5. $y''(x) - 4y'(x) + 4y(x) = xe^{4x}$ avec $y(0) = y'(0) = 0$. *(Indication : on pourra chercher une solution particulière sous la forme $y(x) = (Ax+B)e^{4x}$ où A, B sont des constantes)* ;

6. $y''(x) + y'(x) - 2y(x) = x^2e^{-2x}$. *(Indication : on pourra chercher une solution particulière sous la forme $y(x) = P(x)e^{-2x}$ où P est un polynôme de degré 3).*

Exercice 7.

1. Résoudre l'équation différentielle :

$$y''(x) + y'(x) = 1 + x^2 \qquad (E_1)$$

   en cherchant une solution particulière qui soit un polynôme du troisième degré.

2. On considère l'équation différentielle :

$$y''(x) + 3y'(x) + 2y(x) = (x^2+1)e^{-x}. \qquad (E_2).$$

   Montrer que f est solution de (E_2) si et seulement si g est solution de (E_1) où g est défini par $g(x) = e^x f(x)$ pour tout x. Puis résoudre (E_2).

A.3 Modélisation et équations différentielles non linéaires

Exercice 8. L'intensité $I(t)$ qui parcourt un circuit constitué d'une résistance R (ohms) et d'une auto-inductance L (henrys) vérifie l'équation différentielle $LI'(t) + RI(t) = E(t)$ où $E(t)$ désigne la *f.é.m* appliquée aux extrémités. Résoudre l'équation différentielle lorsque $E(t) = E_0$ constante, puis lorsque $E(t) = E_0\sin(wt)$.

Exercice 9. On sait que l'accroissement d'une population donnée est proportionnelle à cette population. On sait de plus que cette population double tous les 50 ans. En combien de temps triple-t-elle ?

Exercice 10. On a observé, dans une région donnée, l'évolution d'une population de rongeurs soumis aux attaques d'un prédateur. On note $N(t)$ le nombre de centaines de rongeurs dans cette région à un instant t, exprimé en années. Pour un certain modèle, on peut montrer que la fonction N vérifie l'équation différentielle suivante :

$$N'(t) = 2N(t) - \frac{3}{2}\big(N(t)\big)^2,$$

avec, comme condition initiale, $N(0) = 1$.

1. Trouver une équation différentielle simple vérifiée par $h = \frac{1}{N}$.
2. Déterminer h puis N.
3. Comme se comporte la taille de la population de rongeurs lorsqu'on attend très longtemps ?