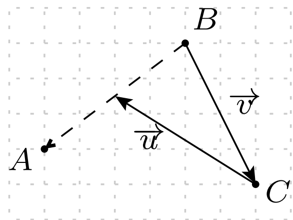
Université d'Aix–Marseille
Licence Physique, Chimie, Sciences de l'ingénieur
UE Mathématiques 1

Année universitaire 2019/2020
Portail Curie – S1
Module SPO1P2

Partiel 1 : corrigé

Exercice 1

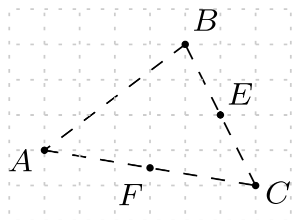
a)



Le vecteur $\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}$ correspond à la diagonale du parallélogramme construit sur les vecteurs $\overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{CB}$. Le vecteur $\overrightarrow{u} := \frac{1}{2}(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB})$ correspond donc à la demi-diagonale, c'est-à-dire au vecteur reliant C au milieu du segment $[AB]$.

Concernant le second vecteur, on a $\overrightarrow{v} := \overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BC}$.

b)



On a $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB} = 2.\overrightarrow{FC}+2.\overrightarrow{CE} = 2.(\overrightarrow{FC}+\overrightarrow{CE}) = 2.\overrightarrow{FE} = 0.\overrightarrow{AE}-2.\overrightarrow{EF}$. On en déduit que les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ dans la base $(\overrightarrow{AE},\overrightarrow{EF})$ sont $(0,-2)$.

On a $\overrightarrow{AC} = 2.\overrightarrow{AF} = 2.(\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EF}) = 2.\overrightarrow{AE}+2.\overrightarrow{EF}$. On en déduit que les coordonnées de $\overrightarrow{AC}$ dans la base $(\overrightarrow{AE},\overrightarrow{EF})$ sont $(2,2)$.

Exercice 2

a) Pour que $ABCD$ soit un paralélogramme, il faut que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, c'est-à-dire que

$$\begin{cases} x_B - x_A = x_C - x_D \\ y_B - y_A = y_C - y_D \\ z_B - z_A = z_C - z_D \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2-1 = x_C - 3 \\ 5-2 = y_C - 5 \\ 5-1 = z_C - 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_C = 4 \\ y_C = 8 \\ z_C = 7 \end{cases}.$$

On en déduit que les coordonnées de D sont $(4,8,7)$.

b) On peut considérer le vecteur $\overrightarrow{u} := \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD}$ qui, par propriété du produit vectoriel sera simultanément perpendiculaire aux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$, et donc au plan contenant A, B et D. Or $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2-1 \\ 5-2 \\ 5-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 3-1 \\ 5-2 \\ 3-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$. Par calcul direct, on obtient donc

$$\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.2-4.3 \\ 4.2-1.2 \\ 1.3-3.2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

c) L'aire du parallélogramme $ABCD$ est égal à la norme du vecteur $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{u}$. D'après la question précédente, on a donc

$$\text{Aire}(ABCD) = \left\| \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{(-6)^2 + 6^2 + (-3)^2} = \sqrt{36+36+9} = \sqrt{81} = 9.$$

Exercice 3

Les vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ forment une base si et seulement si leur produit mixte est non nul. Or

$$\begin{aligned}\left[\begin{pmatrix} 1 \\ t \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \right] &= \left(\begin{pmatrix} 1 \\ t \\ 3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ t \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t^2-9 \\ 6-t \\ 3-2t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= 3(t^2-9) + 4(6-t) + (3-2t) = 3t^2 - 6t = 3t(t-2).\end{aligned}$$

ne s'annule que pour $t = 0$ et $t = 2$. On en déduit que les vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ forment une base si et seulement si $t \in \mathbb{R} \setminus \{0, 2\}$.

Exercice 4

Par propriétés des fonctions trigonométriques, on a

$$\begin{aligned}\cos(2x) = \sin(x) \quad &\Leftrightarrow \quad \cos(2x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 2x = \frac{\pi}{2} - x + 2k\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z} \\ \text{ou} \\ 2x = x - \frac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} 3x = \frac{(4k+1)\pi}{2} \text{ avec } k \in \mathbb{Z} \\ \text{ou} \\ x = \frac{(4k-1)\pi}{2} \text{ avec } k \in \mathbb{Z} \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = \frac{(4k+1)\pi}{6} \text{ avec } k \in \mathbb{Z} \\ \text{ou} \\ x = \frac{(4k-1)\pi}{2} \text{ avec } k \in \mathbb{Z} \end{cases}.\end{aligned}$$

On en déduit que l'ensemble des solutions est $\left\{\frac{(4k+1)\pi}{6} \mid k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{(4k-1)\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Exercice 5

La fonction f est la composé de la fonction $\ln$, définie sur $\mathbb{R}_+^*$, et de l'application polynomiale $(x \mapsto x^2 + 3x)$, laquelle est définie sur $\mathbb{R}$. La seule condition à vérifier est donc $x^2 + 3x = x(x+3) > 0$. Il s'agit d'une inéquation polynomiale de degré 2, dont les racines valent 0 et -3 et dont le coefficient dominant est positif. On en déduit que le domaine de définition maximale de f est $]-\infty, -3[\cup]0, +\infty[$.

Par calcul direct, on a

$$f'(x) = \frac{2x+3}{x^2+3x} = \frac{2x+3}{x(x+3)}.$$

La fonction g est le quotient (générant la condition i. ci-dessous) de

- la fonction racine, définie sur $\mathbb{R}_+$ (générant la condition ii. ci-dessous)
- par la fonction $\left(x \mapsto 2 + \sin\left(\sqrt{1+x^2}\right)\right)$, elle-même somme de
  - la fonction constante égale à 2, définie sur $\mathbb{R}$
  - et de la fonction $\left(x \mapsto \sin\left(\sqrt{1+x^2}\right)\right)$, elle-même composé de
    - la fonction sinus, définie sur $\mathbb{R}$
    - et de la fonction $\left(x \mapsto \sqrt{1+x^2}\right)$, elle-même composé de

- la fonction racine, définie sur $\mathbb{R}_+$ (générant la condition iii. ci-dessous)
- par la fonction polynomiale $(x \mapsto 1 + x^2)$, définie sur $\mathbb{R}$.

Au final, les conditions à vérifier sont

i. $2+\sin\left(\sqrt{1+x^2}\right) \neq 0$, or $-1 \leq \sin\left(\sqrt{1+x^2}\right) \leq 1$ et donc $2+\sin\left(\sqrt{1+x^2}\right) \in [1,3]$ ne s'annule jamais ;

ii. $x \geq 0$;

iii. $1 + x^2 \geq 0$, ce qui est toujours vérifié car $x^2 \geq 0$ et donc $1 + x^2 \geq 1 > 0$.

On en déduit que le domaine de définition maximal de g est $\mathbb{R}_+$.

Par calcul direct, on a

$$g'(x) = \frac{\frac{\left(2+\sin\left(\sqrt{1+x^2}\right)\right)}{2\sqrt{x}} - \sqrt{x}\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}\cos\left(\sqrt{1+x^2}\right)}{\left(2+\sin\left(\sqrt{1+x^2}\right)\right)^2} = \frac{\sqrt{1+x^2}\left(2+\sin\left(\sqrt{1+x^2}\right)\right) - 2x^2\cos\left(\sqrt{1+x^2}\right)}{2\sqrt{x+x^3}\left(2+\sin\left(\sqrt{1+x^2}\right)\right)^2}.$$

Exercice 6

Pour tout $x > 0$, on a

$$\frac{x(1+2x)^2}{5x^3+x+1} = \frac{x^3\left(2+\frac{1}{x}\right)^2}{x^3\left(5+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)} = \frac{\left(2+\frac{1}{x}\right)^2}{5+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}}.$$

Or $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2+\dfrac{1}{x}\right)^2 = 2^2 = 4$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} 5+\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x^3} = 5$. On en déduit que $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x(1+2x)^2}{5x^3+x+1} = \dfrac{4}{5}$.

On a $\lim\limits_{x\to1}\sin(\pi x) = \lim\limits_{x\to1}\ln(x) = 0$, la seconde limite est donc une forme indéterminée, mais pour laquelle on peut appliquer le théorème de L'Hospital. En posant $f : x \mapsto \sin(\pi x)$ et $g : x \mapsto \ln(x)$, on a alors

$$\lim_{x\to1}\frac{\sin(\pi x}{\ln(x)} = \lim_{x\to1}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to1}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to1}\frac{\pi\cos(\pi x)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to1} x\pi\cos(\pi x) = \pi\cos(\pi) = -\pi.$$