Partiel 2 : corrigé

Exercice 1
Si f est une fonction réelle n fois dérivable en 0, alors

$$f(x) = f(0) + f'(0).x + \frac{f''(0)}{2}.x^2 + \cdots + \frac{f^{(k)}(0)}{k!}.x^k \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}.x^n + o(x^n).$$

Exercice 2

a) Par calcul direct, on a

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(-x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right).\left(1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} + o(x^3)\right) \\ &= -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{4} + \frac{x^3}{8} + o(x^3) \\ &= -x - x^2 - \frac{11}{24}x^3 + o(x^3). \end{aligned}$$

b) Par dérivation directe, on a

$$\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}, \qquad \arctan''(x) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2},$$

$$\arctan^{(3)}(x) = -\frac{2(1+x^2)^2 - 8x^2(1+x^2)}{(1+x^2)^4} = \frac{6x^2-2}{(1+x^2)^3},$$

et donc

$$\arctan(0) = 0, \qquad \arctan'(0) = 1, \qquad \arctan''(0) = 0, \qquad \arctan^{(3)}(0) = -2.$$

En appliquant la formule de Taylor–Young, on obtient donc

$$\arctan(x) = x - \frac{2}{6}x^3 + o(x^3) = x - \frac{1}{3}x^3 + o(x^3).$$

c) On a, en utilisant d'abord le développement limité de sinus en 0, puis celui de arctan,

$$\begin{aligned} h(x) &= \arctan\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) \\ &= \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) - \frac{1}{3}\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)^3 + o(x^3) \\ &= x - \frac{x^3}{6} - \frac{1}{3}x^3 + o(x^3) \;=\; x - \frac{1}{2}x^3 + o(x^3). \end{aligned}$$

Exercice 3

Par quotient des fonctions $(x \mapsto 1)$ et $\big(x \mapsto \ln(x)\big)$, continues sur $\mathbb{R}_+^*$, f est continue sur $\mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$; la fonction n'est par contre pas définie en 1 puisque $\ln$ s'y annule, mais ceci est clairement une erreur des enseignants et nous ignorerons donc ce point.

Par composé des fonctions $\left(x \mapsto \frac{1}{x}\right)$, continue sur $\mathbb{R}_-^*$, et $(x \mapsto e^x)$, continue sur $\mathbb{R}$, f est continue sur $\mathbb{R}_-^*$.

Enfin, on a $\lim_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty$, donc $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$; ainsi que $\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$ et $\lim_{x\to -\infty} e^x = 0$, donc $\lim_{x\to 0^-} f(x) = 0$. On en déduit que f continue en 0, c'est-à-dire $f(0) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} (x)$, si et seulement si $c = 0$.

On en conclut que f est continue partout si et seulement si $c = 0$.

Exercice 4

a) Par définition, la dérivée de g en a vaut

$$g'(a) := \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

b) Pour tout $x > 0$, on a

$$\frac{g(x) - g(0)}{x} = \frac{\frac{\sin(x)}{x} - 1}{x} = \frac{\sin(x) - x}{x^2} = \frac{x + o(x^2) - x}{x^2} = \frac{o(x^2)}{x^2} = o(1) \xrightarrow[x\to 0]{} 0 \ ;$$

et pour tout $x < 0$, on a

$$\frac{g(x) - g(0)}{x} = \frac{\cos(x) - 1}{x} = \frac{1 + o(x) - 1}{x} = \frac{o(x)}{x} = o(1) \xrightarrow[x\to 0]{} 0.$$

Au final, on a donc

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{g(x) - g(x)}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{g(x) - g(x)}{x} = 0.$$

On en déduit que g est dérivable en 0, avec $g'(0) = 0$.

Exercice 5

On reconnait une fonction de la forme $\frac{u'}{u}$, avec $u(x) = 2 + \sin(x^2)$. De plus, on a $2 + \sin(x^2) \geq 2 - 1 = 1 > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. On en déduit que la fonction $H(x) := \ln\big(2 + \sin(x^2)\big)$ est une primitive de h.

Exercice 6

Comme primitive de k, on peut considérer $\widetilde{K}(x) = \int_1^x t\ln(t)dt$. En faisant une intégration par parties avec $u'(t) = t$ et $v(t) = \ln(t)$, et donc $u(t) = \frac{t^2}{2}$ et $v'(t) = \frac{1}{t}$, on obtient

$$\begin{aligned}
\widetilde{K}(x) &= \int_1^x u'(t).v(t)dt = \big[u(t).v(t)\big]_1^x - \int_1^t u(t).v'(t)dt \\
&= \Big[\frac{t^2}{2}\ln(t)\Big]_1^x - \int_1^x \frac{t}{2}dt = \frac{x^2}{2}\ln(x) - \frac{1}{2}\Big[\frac{t^2}{2}\Big]_1^x \\
&= \frac{x^2}{2}\ln(x) - \frac{x^2}{4} + \frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

En enlevant la constante par souci de simplicité, on en déduit que

$$K(x) := \frac{2x^2\ln(x) - x^2}{4} = \frac{x^2\big(\ln(x^2) - 1\big)}{4}$$

est une primitive de k.

Exercice 7

Par calcul direct, on a $\frac{A}{x}+\frac{B}{x+1}=\frac{A(x+1)+Bx}{x(x+1)}=\frac{(A+B)x+A}{x^2+x}$. Pour que cela soit toujours égal à $\frac{x-1}{x^2+x}$, il suffit d'avoir $\begin{cases} A+B=1 \\ A=-1 \end{cases}$, c'est-à-dire $A=-1$ et $B=2$. On en déduit que $\frac{x-1}{x^2+x}=\frac{2}{x+1}-\frac{1}{x}$ pour tout $x\in\mathbb{R}\setminus\{-1,0\}$. Dès lors, on peut calculer

$$\int_1^2 \frac{x-1}{x^2+x}dx=\int_1^2\left(\frac{2}{x+1}-\frac{1}{x}\right)dx=\left[2\ln(x+1)-\ln(x)\right]_1^2=\left[\ln\left(\frac{(x+1)^2}{x}\right)\right]_1^2=\ln\left(\frac{9}{2}\right)-\ln(4)=\ln\left(\frac{9}{8}\right).$$

NB : On pourra remarquer que, dans l'énoncé, il manquait un *dx* à la fin de l'intégrale...