

Étude topologique de quelques classes de variétés algébriques réelles en dimension 1 et 2

Guillaume KINEIDER
Sous la direction de Frédéric MANGOLTE
I2M - Aix-Marseille Université

20 juin 2023

Table des matières

1	Introduction	2
2	Préliminaire	3
2.1	Notions de géométrie algébrique réelle utilisées	3
2.2	Catégories d'étude et stratégie de classification	5
3	Classification topologique des courbes algébriques réelles	7
3.1	Classification des surfaces symétriques	7
3.1.1	Définitions et caractéristiques	7
3.1.2	Surfaces à bord et équivalence avec les surfaces symétriques	8
3.1.3	Théorème de classification des surfaces symétriques	10
3.2	Classification topologiques des courbes algébriques réelles	11
3.3	Surfaces symétriques et modèles algébriques	12
3.4	Classification algébrique vs type topologique pour les courbes	13
3.4.1	Cas du genre 0	14
3.4.2	Cas du genre 1	15
3.4.3	Cas du type général (genre > 1)	16
4	Étude topologique des surfaces réelles fibrés en coniques	17
4.1	Transformation birationnelle entre surfaces	17
4.1.1	Entre surfaces complexes	17
4.1.2	Entre surfaces réelles	18
4.2	Structure de fibré en coniques	18
4.3	Lieux réels de fibrés en coniques réels	21
4.4	Équivalences birationnelles de fibrés en coniques	22

1 Introduction

Une variété algébrique sur \mathbf{R} est naturellement munie de deux topologies :

- la topologie de Zariski, très grossière, qui contient de l'information purement algébrique ;
- la topologie euclidienne qui porte une part de l'information géométrique de la variété.

Le but de ce mémoire est d'explorer certaines classes de variétés algébriques réelles, d'étudier leurs structures algébriques, par nature très rigide, et d'en déduire des propriétés sur leurs topologies euclidiennes. Il s'agira notamment de trouver des **invariants topologiques**, c'est-à-dire des propriétés de nature topologique qui restent inchangées par déformations (algébriques) de la variété algébrique. Ces déformations seront par exemple des isomorphismes dans des catégories dont les objets sont certaines classes de variétés algébriques. Pour nous, ce seront soit des bijections bi-régulières, soit des transformations birationnelles, soit des sous-classes de celles-ci.

Nous adopterons ici l'approche de définir une variété algébrique réelle comme le lieu fixe d'une involution anti-régulière sur une variété algébrique complexe (voir section 2.1 pour les définitions). Suivant une stratégie habituelle détaillée en 2.2, nous utiliserons parfois sans rappeler les classifications algébriques des variétés complexes. Dans chaque classe ainsi obtenue, nous regarderons ce que l'on peut dire du lieu réel. Généralement, on commence par chercher des invariants discrets (comme le nombre de composantes connexes ou le genre en dimension complexe 1) que l'on complète si besoin par des invariants continus.

Dans ce mémoire, nous traiterons deux classes de variétés algébriques réelles. Nous commencerons avec celles de dimension (complexe) 1, c'est-à-dire les courbes, que l'on supposera toujours irréductibles, projectives et lisses. Oubliant la structure algébrique pour ne garder que la structure topologique de la courbe complexe, nous verrons que l'on obtient un revêtement double ramifié le long du lieu réel qui permet dans un premier temps d'obtenir des obstructions sur les espaces topologiques réalisables comme lieu réel de telles courbes. En utilisant ensuite la classification topologique des surfaces à bord nous aboutirons à un triplet d'invariants (théorème 3.1.10). Cette classification est très satisfaisante :

- elle s'applique à toutes les courbes algébriques réelles (irréductibles, projectives, lisses, voir le début de la section 3.4 pour le lien avec le cas général)
- elle ne donne pas seulement le type topologique du lieu réel mais son type plongé, *i.e.* la topologie du couple (*lieu complexe, lieu réel*).

Connaissant alors les espaces topologiques potentiellement homéomorphes aux lieux réels de courbes algébriques réelles, se pose alors la question : lesquels sont réellement réalisables ? Des éléments de réponse seront donnés en 3.3.

Après le résultat très satisfaisant obtenu pour les courbes, il est naturel de se tourner vers la dimension 2, c'est-à-dire les surfaces. La situation est alors bien plus complexe et l'obtention d'une classification complète des surfaces algébriques réelles dépasse de très loin l'ambition de ce mémoire. Malgré tout, une telle classification est essentiellement connue aujourd'hui. Nous nous restreindrons à un type de surfaces particulières : les fibrés en coniques. Nous ferons alors usage de la géométrie birationnelle qui donne le bon cadre pour parler de déformations et exhiberons les espaces topologiques réalisables par le lieu réel de telles surfaces. En particulier, nous montrerons qu'il n'est pas possible d'obtenir de composantes orientables de genre $g > 1$ et que s'il y en a une de genre $g = 1$, alors le lieu réel est connexe.

Enfin tout au long de ce mémoire se posera la question de l'information perdue en passant du "monde algébrique" au "monde topologique". Dans le cas des courbes, on observe que plus le genre de la courbe complexe augmente, plus la perte est grande :

- pour le genre 0, la topologie du lieu réel détermine la structure algébrique ;
- pour le genre 1, on montre que l'ensemble des courbes algébriques réelles à isomorphismes près sont en bijection avec $\mathbb{A}^1(\mathbf{R})$, or le triplet d'invariants topologiques obtenu est discret d'où une perte significative d'information ;
- pour le genre $g > 1$, l'ensemble des courbes algébriques réelles à isomorphismes près est en bijection avec $\mathbb{A}^{3g-3}(\mathbf{R})$.

Le cas des surfaces fibrés en coniques est plus complexe, notamment car nous travaillerons avec des invariants à transformations birationnelles près et que celles-ci sont très permissives. Cependant, si l'on se restreint aux transformations qui respectent les structures de fibrés, on obtient une classification selon l'image du lieu réel par la fibration sur $\mathbb{P}^1(\mathbf{R})$ (à action de $\mathbb{PGL}^2(\mathbf{R})$ près).

2 Préliminaire

2.1 Notions de géométrie algébrique réelle utilisées

Cette section n'a pas vocation à être un cours de géométrie algébrique réelle, son but est plutôt de fixer les conventions utilisées et les définitions pour des objets qui peuvent présenter des différences selon les auteurs. Nous suivrons les définitions de [Man20] mais nous changerons parfois la terminologie. Il va sans dire que tous les termes dont la définition n'est pas donnée ici sont définis dans cette référence.

Définition 2.1.1 (Variétés algébriques).

Une **variété algébrique** sur un corps K est un couple (X, \mathcal{O}_X) où X est un espace topologique et \mathcal{O}_X est un sous-faisceau du faisceau des fonctions sur X à valeurs dans K ayant la propriété suivante : il existe un recouvrement fini de X par des ouverts U_i tels que $(U_i, \mathcal{O}|_{U_i})$ est isomorphe en tant qu'espace annelé à un ensemble algébrique sur K^n muni de son faisceau des applications régulières. Le faisceau \mathcal{O}_X est appelé **faisceau des fonctions régulières** de X ou **faisceau structural**.

Définition 2.1.2.

Une variété algébrique (Y, \mathcal{O}_Y) sur un corps K est :

- **affine** si elle est isomorphe comme espace annelé à un ensemble algébrique affine muni de son faisceau des fonctions régulières (voir Définitions 1.2.33 et 1.2.39 dans [Man20] si besoin) ;
- **projective** si elle est isomorphe comme espace annelé à un ensemble algébrique projectif muni de son faisceau des fonctions régulières (Définitions 1.2.34 et 1.2.39 [Man20]) ;
- **quasi-affine** (resp. **quasi-projective**) si Y est un ouvert de Zariski d'une variété affine (resp. projective) X et $\mathcal{O}_Y = (\mathcal{O}_X)|_Y$.

Définition 2.1.3.

Un sous-espace topologique U d'un espace topologique X est **irréductible** si pour tous fermés F_1 et F_2 de X tels que $U \subset F_1 \cup F_2$, alors $U \subset F_1$ ou $U \subset F_2$.

Une variété algébrique (X, \mathcal{O}_X) sera dite **irréductible** si l'espace topologique X l'est. Les fermés irréductibles maximaux contenus dans X sont appelés les **composantes irréductibles** de X .

Proposition 2.1.4.

Tout variété quasi-algébrique non vide X admet une décomposition unique à l'ordre près en un nombre fini de composantes irréductibles.

Démonstration. voir Proposition 1.2.24 [Man20]. □

Notre but sera d'étudier la topologie (euclidienne, voir section 3.2) de certaines variétés algébriques réelles. Le point de vue adopté ici est de définir les variétés algébriques réelles comme étant des variétés algébriques sur \mathbf{C} munies d'une involution anti-régulière. Pour une exposition détaillée de ce point de vue ainsi qu'une comparaison avec d'autres nous renvoyons au chapitre 2 de [Man20].

Définition 2.1.5 (Variété algébrique complexe).

On appelle **variété algébrique complexe** une variété algébrique quasi-projective sur \mathbf{C} .

La conjugaison sur \mathbf{C} sera notée σ et, pour toute fonction f d'un espace topologique dans \mathbf{C} , nous noterons \bar{f} la composée $\sigma \circ f$. Sur $\mathbb{A}^n(\mathbf{C})$ (resp. $\mathbb{P}^n(\mathbf{C})$), on définit l'involution $\sigma_{\mathbb{A}} : (z_1, \dots, z_n) \mapsto (\bar{z}_1, \dots, \bar{z}_n)$ (resp. $\sigma_{\mathbb{P}} : (z_0 : \dots : z_n) \mapsto (\bar{z}_0 : \dots : \bar{z}_n)$).

Définition 2.1.6 (Anti-faisceau).

Soit X un espace topologique et \mathcal{F} un faisceau de fonctions à valeurs dans \mathbf{C} sur X . On appelle **anti-faisceau** de \mathcal{F} le faisceau $\overline{\mathcal{F}}$ donné pour tout ouvert U par

$$\overline{\mathcal{F}}(U) = \{\bar{f} \mid f \in \mathcal{F}(U)\}.$$

Plus généralement, soient X un espace topologique et \mathcal{F} un faisceau de fonctions à valeurs dans \mathbf{C}^n . On définit l'**anti-faisceau** $\overline{\mathcal{F}}$ de \mathcal{F} sur tout ouvert U de X par :

$$\overline{\mathcal{F}}(U) = \{\bar{f} := \sigma_{\mathbb{A}} \circ f \mid f \in \mathcal{F}(U)\}.$$

On rappelle qu'une application régulière φ entre deux variétés algébriques (X, \mathcal{O}_X) et (Y, \mathcal{O}_Y) sur un corps K est une application continue de X dans Y telle que pour toute fonction régulière $f \in \mathcal{O}_Y(V)$ sur un ouvert de Y , $f \circ \varphi \in \mathcal{O}_X(\varphi^{-1}(V))$. Autrement dit, le morphisme induit $f^\# : \mathcal{O}_Y \rightarrow \varphi_* \mathcal{F}_X$ avec \mathcal{F}_X le faisceau des fonctions de X à valeurs dans K a son image contenue dans $\varphi_* \mathcal{O}_X$.

Définition 2.1.7 (Applications anti-régulières).

Soient (X, \mathcal{O}_X) et (Y, \mathcal{O}_Y) deux variétés algébriques. Une application $\varphi : X \rightarrow Y$ est dite **anti-régulière** si elle est continue et si pour tout ouvert $V \subset Y$ et tout $f \in \overline{\mathcal{O}}_Y(V)$, $f \circ \varphi \in \mathcal{O}_X(\varphi^{-1}(V))$.

Définition 2.1.8 (Structure réelle).

Une **structure réelle** sur une variété algébrique complexe est une involution anti-régulière.

Exemples.

- $\sigma_{\mathbb{P}}$ sur \mathbb{P}^n ;
- $\sigma_{\mathbb{A}}$ sur \mathbb{A}^n ;
- $(x : y) \mapsto (-\bar{y} : \bar{x})$ sur $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$.

Définition 2.1.9 (Variété algébrique réelle).

Nous appellerons **variété algébrique réelle** une variété algébrique (quasi-projective) complexe muni d'une structure réelle. Une sous-variété (réelle) d'une telle variété (X, σ) est une sous-variété complexe Y de X munie d'une structure réelle τ telle que $\tau = \sigma|_Y$.

Sur une même variété algébrique complexe il peut donc y avoir plusieurs structures réelles qui définissent donc plusieurs variétés algébriques réelles différentes. Mais il est possible que deux structures réelles soient égales modulo un changement de coordonnées de la variété complexe. Dans ce cas, la topologie du lieu réel (voir ci-dessous) sera la même pour les deux structures.

Définition 2.1.10 (Morphismes de variétés algébriques réelles).

Soient (X, σ_X) et (Y, σ_Y) deux variétés algébriques réelles. Un **morphisme de variétés algébriques réelles** $\varphi : X \rightarrow Y$ est un morphisme pour les structures de variétés algébriques complexes qui commutent avec les structures réelles :

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\varphi} & Y \\ \pi_X \downarrow & & \downarrow \pi_Y \\ X & \xrightarrow{\varphi} & Y \end{array} .$$

Un isomorphisme est un morphisme bijectif, on montre facilement qu'alors la réciproque commute également avec les structures complexes.

Définition 2.1.11 (Structures réelles équivalentes).

Soit X une variété algébrique complexe. Deux structures réelles σ et τ sur X sont **équivalentes** si elles sont conjuguées par un automorphisme de X , autrement dit s'il existe un isomorphisme de variétés algébriques réelles entre (X, σ) et (X, τ) .

Un exemple exhibant deux structures complexes non équivalentes sur une même variété algébrique complexe est donné par l'Exemple 2.1.40 dans [Man20].

Définition 2.1.12 (Lieu réel).

Le **lieu réel** d'une variété algébrique réelle (X, σ) est l'ensemble des points fixes de l'involution σ . On le notera $X(\mathbf{R}) := \text{Fix}(\sigma)$.

Le résultat suivant justifie la terminologie et fait le pont avec d'autres définitions de variété algébrique réelle. Il s'agit du Théorème 2.2.17 et du Corollaire 2.2.18 dans [Man20].

Théorème 2.1.13.

Soit (X, σ) une variété algébrique réelle. Si $X(\mathbf{R})$ est dense dans X (pour la topologie de Zariski), alors le faisceau \mathcal{O}_X induit un faisceau $\mathcal{O}_{X(\mathbf{R})}$ de fonctions sur $X(\mathbf{R})$ qui fait de $(X(\mathbf{R}), \mathcal{O}_{X(\mathbf{R})})$ une variété algébrique sur \mathbf{R} . C'est le cas en particulier si X est irréductible, non-singulière et si $X(\mathbf{R}) \neq \emptyset$.

Soit (X, σ) une variété algébrique réelle avec $X(\mathbf{R})$ Zariski-dense dans X . Si la variété complexe X est non-singulière, alors elle induit une variété différentielle de dimension (réelle) paire $2n$ et le lieu réel est soit vide soit une variété algébrique sur \mathbf{R} . $X(\mathbf{R})$ non-singulière qui induit une variété différentielle de dimension (réelle) n .

Pour étudier les variétés algébriques sur \mathbf{R} , nous adoptons la démarche d'étudier les variétés algébriques complexes (pour lesquelles la théorie est plus simple car on peut utiliser le lien entre polynômes et fonctions holomorphes avec tous les résultats qui en découlent et \mathbf{C} est algébriquement clos) et l'action des structures réelles sur celles-ci. Pour cela, il conviendrait d'étudier en quelque sorte la réciproque du théorème précédent : partant d'une variété algébrique sur \mathbf{R} Y , est-il possible de construire une variété algébrique complexe X munie d'une structure réelle σ telle que $X(\mathbf{R})$ soit isomorphe à Y ? Pour l'étude de cette question, nous renvoyons à la Section 2.3 de [Man20].

Théorème 2.1.14 (Plongement réel d'une variété algébrique réelle quasi-projective).

Soit (X, σ) une variété algébrique réelle. Si X est projective (resp. quasi-projective), alors il existe un ensemble algébrique projectif (resp. quasi-projectif) $F \subset \mathbb{P}^n(\mathbf{C})$ tel que $\sigma_{\mathbb{P}}(F) = F$ et (X, σ) est isomorphe à $(F, \sigma_{\mathbb{P}}|_F)$.

2.2 Catégories d'étude et stratégie de classification

Dans ce mémoire nous allons souvent naviguer entre différentes catégories. Pour garder les idées claires, voici celles qui nous intéressent a priori :

Catégorie	Objets	Flèches
Alg	variétés algébriques irréductibles sur \mathbf{C}	applications régulières (aussi appelées morphismes)
Rat	variétés algébriques irréductibles sur \mathbf{C}	applications rationnelles dominantes
Top	variétés topologiques	applications continues
Alg_R	variétés algébriques réelles géométriquement irréductibles	applications régulières commutant avec les structures réelles (appelées dans la suite morphismes réels)
Rat_R	variétés algébriques réelles géométriquement irréductibles	applications rationnelles dominantes commutant avec les structures réelles (appelées dans la suite applications rationnelles réelles)
$\widetilde{\mathbf{Sym}}$	variétés topologiques munies d'une involution renversant l'orientation lorsque la dimension est paire et la conservant sinon	applications continues qui commutent avec l'involution

On précèdera ce nom d'un entier pour la sous-catégorie correspondante des variétés dont la dimension est cette entier, par exemple 1-Alg pour les courbes algébriques irréductibles sur \mathbf{C} . Un morphisme étant une application birationnelle, il y a des foncteurs naturels $\mathbf{Alg} \rightarrow \mathbf{Rat}$, $\mathbf{Alg}_R \rightarrow \mathbf{Rat}_R$ ainsi que $\mathbf{Alg}_R \rightarrow \mathbf{Alg}$ et $\mathbf{Rat}_R \rightarrow \mathbf{Rat}$ qui consistent à oublier les structures réelles. Ces foncteurs font commuter le carré suivant :

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Alg}_R & \longrightarrow & \mathbf{Rat}_R \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbf{Alg} & \longrightarrow & \mathbf{Rat} \end{array}$$

Dans l'optique d'une classification topologique, on aimerait avoir des foncteurs naturels des catégories \mathbf{Alg} ou \mathbf{Rat} vers \mathbf{Top} et \mathbf{Alg}_R ou \mathbf{Rat}_R vers $\widetilde{\mathbf{Sym}}$. Nous verrons qu'il en existe de \mathbf{Alg} vers \mathbf{Top} et de \mathbf{Alg}_R vers $\widetilde{\mathbf{Sym}}$ si on restreint au départ aux variétés algébriques non-singulières (voir la section 3.2). Or on peut montrer que toute classe birationnelle (*i.e.* toute classe d'isomorphisme dans \mathbf{Rat}) possède un modèle projectif et non-singulier. Pour la dimension 1, on pourra par exemple en trouver une démonstration dans la Section I.6 de [Har08]. Il s'agit d'un cas très particulier car il y a unicité de ce modèle (à isomorphisme près dans \mathbf{Alg} !). On peut donc étendre les invariants topologiques à n'importe quelle courbe comme étant ceux de la courbe projective non-singulière birationnellement équivalente. À partir de la dimension 2, l'existence est donnée par le théorème d'Hironaka (en caractéristique 0) mais l'unicité ne tient plus. Pour des exemples de surfaces projectives lisses birationnellement équivalentes mais pas isomorphes, nous renvoyons à [Sha13], Chapitre 2 Section 4.5.

Toutes ces considérations justifient que nous considérerons souvent nos variétés algébriques (réelles) projectives et non-singulières. Si on restreint les catégories \mathbf{Alg} et \mathbf{Alg}_R à de telles variétés, les foncteurs d'oubli introduits plus haut font commuter le carré suivant :

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Alg}_R & \longrightarrow & \widetilde{\mathbf{Sym}} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbf{Alg} & \longrightarrow & \mathbf{Top} \end{array}$$

De plus, les variétés topologiques obtenues à partir de ces foncteurs sont alors connexes, fermées (compacts et sans bord) et orientables. Pour cette raison, les surfaces symétriques en 3.1 seront les objets de 2-Sym vérifiant ces propriétés.

Le diagramme précédent donne une stratégie intuitive pour établir une classification topologique des variétés algébriques réelles projectives et non-singulières. On commence par trouver des invariants, mêmes grossiers (souvent discrets), dans \mathbf{Top} à travers le foncteur d'oubli $\mathbf{Alg} \rightarrow \mathbf{Top}$ pour diviser une première fois la catégorie \mathbf{Alg} en classes d'objets partageant des propriétés topologiques proches. Ensuite pour chacune de ces classes, on essaye de trouver des invariants classifiant les types topologiques dans \mathbf{Alg}_R au-dessus de ce sous-ensemble au travers du foncteur d'oubli $\mathbf{Alg}_R \rightarrow \widetilde{\mathbf{Sym}}$.

Donnons un exemple très rudimentaire de cette démarche. On considère comme première classification dans \mathbf{Top} l'invariant le plus simple et le plus important : la dimension. On subdivise donc les objets de \mathbf{Alg} en des classes paramétrées par les entiers naturels. Au dessus de chacune de celles-ci, on peut par exemple considérer le nombre de composantes du lieu réel : on obtient une subdivision de \mathbf{Alg}_R en classes paramétrées par une paire d'entiers naturels ! Évidemment, dans cet exemple on obtient des classes qui ne contiennent aucun objet, on peut penser par exemple à la borne de Harnack pour les courbes (*cf.* 3.1.8) et la classification obtenue est très loin d'être complète.

3 Classification topologique des courbes algébriques réelles

3.1 Classification des surfaces symétriques

3.1.1 Définitions et caractéristiques

Définition 3.1.1 (Surface symétrique).

Une **surface symétrique** (X, σ) est une surface X topologique fermée, connexe et orientable munie d'une involution continue σ qui renverse l'orientation.

Remarque 3.1.2. Puisque toute variété topologique de dimension 2 possède une unique structure différentielle et que toute fonction continue peut être approchée par une fonction différentiable (voir par exemple [Hir76]), nous pouvons supposer dans la suite σ différentiable.

Définition 3.1.3 (Morphisme de surfaces symétriques).

Soient (X, σ_X) et (Y, σ_Y) deux surfaces symétriques. Une application $f : X \rightarrow Y$ est un **morphisme de surfaces symétriques** si elle est continue et équivariante sous les actions de $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ données par les involutions, *i.e.* faisant commuter :

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \sigma_X \downarrow & & \downarrow \sigma_Y \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array} .$$

Un **isomorphisme de surfaces symétriques** est un morphisme bijectif bicontinu (sa réciproque est alors aussi un morphisme).

Les surfaces symétriques et leurs morphismes définissent donc une sous-catégorie de $2\text{-}\widetilde{\mathbf{Sym}}$ définie en 2.2. Il s'agit en fait de la sous-catégorie obtenue en restreignant les objets à ceux qui sont l'image par le foncteur d'oubli $2\text{-}\mathbf{Alg}_{\mathbf{R}} \rightarrow \widetilde{\mathbf{Sym}}$ d'une surface projective et non-singulière. Dans la suite de cette section, nous renommerons **Sym** cette sous-catégorie.

Le but de cette section est de classifier les surfaces symétriques à isomorphismes près. Pour cela, nous allons construire une injection des classes d'isomorphismes de surfaces symétriques dans les classes d'homéomorphismes de surfaces à bord (au sens large, le bord pouvant être vide), c'est le théorème 3.1.7. La classification viendra alors de celle des surfaces à bord, une fois établis les liens topologiques entre les surfaces précédemment mises en correspondance (liens qui sont regroupés dans la proposition 3.1.8).

Proposition 3.1.4.

Si (X, σ) est une surface symétrique, alors $\text{Fix}(\sigma)$ est une sous-variété de X homéomorphe à une union disjointe de cercles.

Démonstration. Comme $\text{Fix}(\sigma) = \{x \in X \mid \sigma(x) = x\}$ avec σ continue et X séparé, $\text{Fix}(\sigma)$ est fermé dans le compact X donc est compact. Soit $x \in \text{Fix}(\sigma)$ et (U, ϕ) une carte de X centrée en $x : \phi : \mathbf{R}^2 \rightarrow U \subset X$ homéomorphisme vérifiant $\phi(0) = x$. Puisque σ est un homéomorphisme, $\sigma(U)$ est ouvert et comme $\sigma(x) = x$, on a $U \cap \sigma(U) \neq \emptyset$. On réduit alors U à $U \cap \sigma(U)$. Notons $\sigma_\phi : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ l'application $\sigma|_U$ écrite dans cette carte.

L'ensemble $\text{Fix}(\sigma) \cap U$ est difféomorphe par ϕ à $\{t \in \mathbf{R}^2 \mid \sigma_\phi(t) - t = 0\}$. Or, on a $\sigma_\phi^2 = \text{id}$ donc pour tout $t \in \mathbf{R}^2$ l'application linéaire $d_t \sigma_\phi$ est diagonalisable avec des valeurs propres dans $\{-1, 1\}$. Puisqu'elle renverse l'orientation, on peut trouver une base de \mathbf{R}^2 dans laquelle sa matrice est

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

et alors celle de $d_t(\sigma_\phi - \text{id})$ est

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

de rang constant égal à 1. Par le théorème du rang constant, il existe un changement de carte de \mathbf{R}^2 telle que l'expression de $\sigma_\phi - \text{id}$ dans cette nouvelle carte est $(t_1, t_2) \mapsto t_1$ donc $\text{Fix}(\sigma)$ est une sous-variété de X de dimension 1. La conclusion vient du fait que les seules variétés (sans bord) compactes de dimension 1 sont les unions disjointes de cercles (à homéomorphisme près). \square

Définition 3.1.5 (Surface symétrique séparante).

Une surface symétrique (X, σ) est dite **séparante** (ce que l'on notera $a(X) = 0$) si $X \setminus \text{Fix}(\sigma)$ est non connexe et **non-séparante** ($a(X) = 1$) sinon.

Remarque 3.1.6. Si $r = g + 1$, alors X est nécessairement séparante par définition de Riemann du genre.

On dispose donc de trois invariants sur les surfaces symétriques : le genre noté g , le nombre de composantes fixes de l'involution, noté r et l'alternative séparante ou non, notée a .

3.1.2 Surfaces à bord et équivalence avec les surfaces symétriques.

Dans toute la suite, nous dirons qu'une variété à bord est **orientable** si l'intérieur de cette variété l'est. Nous cherchons dans un premier temps à généraliser la notion de revêtement d'orientation pour une variété à bord compacte et connexe. Il s'agit de la construction clé de cette section qui aboutit au théorème 3.1.7.

Soit donc Y une variété à bord de dimension $n \geq 1$ compacte et connexe. Chaque point de l'intérieur de Y possède deux orientations locales. Notons \tilde{Y} l'ensemble

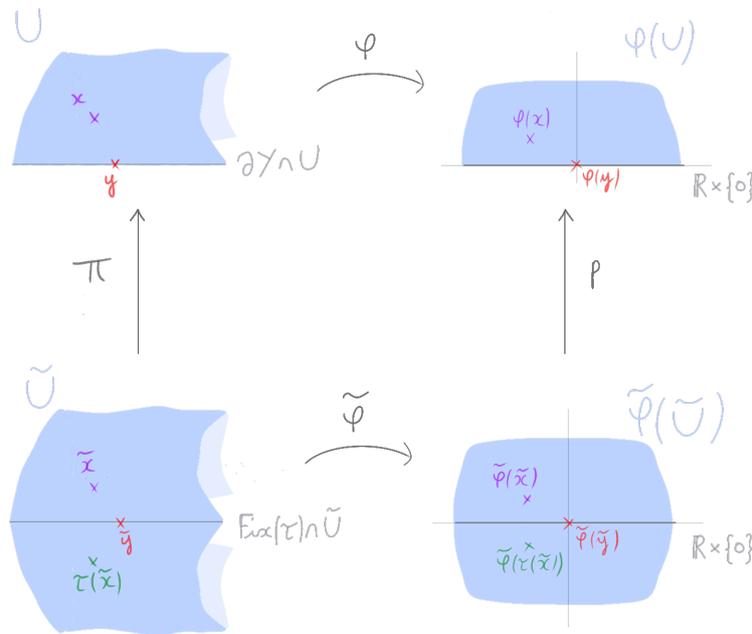
$$\tilde{Y} = \{(y, o(y)) \text{ pour } y \text{ dans l'intérieur de } Y \text{ et } o(Y) \text{ une orientation locale en } y\} \cup \partial Y.$$

Il existe une projection surjective naturelle sur Y qui consiste à oublier l'éventuelle orientation locale, notons la π . On munit \tilde{Y} de la topologie engendrée par la réunion :

- d'une base d'ouverts de $\tilde{Y} \setminus \pi^{-1}(\partial Y)$ faisant de la restriction de π le revêtement d'orientation de $Y \setminus \partial Y$;
- des ouverts de la forme $\pi^{-1}(U)$ pour U ouvert contenant un point de ∂Y .

Puisque Y est séparée, on vérifie facilement que cette topologie l'est également. Il est aussi facile de montrer que π est bien continue. L'ensemble \tilde{Y} est muni d'une involution naturelle τ qui échange $(x, o(x))$ et $(x, -o(x))$ pour $x \in Y \setminus \partial Y$ et qui fixe $\pi^{-1}(\partial Y)$ point par point. En considérant les images réciproques des deux types d'ouverts précédents, on voit que cette involution est continue.

Définissons maintenant un atlas sur l'espace topologique \tilde{Y} pour en faire une variété. Au-dessus de $Y \setminus \partial Y$, π est le revêtement d'orientation habituel qui possède une classe d'atlas maximaux \mathcal{A} définissant une variété. Nous allons compléter ces atlas avec des cartes centrées aux points de $\text{Fix}(\tau) = \pi^{-1}(\partial Y)$ compatibles avec les cartes précédentes. Soit donc $y \in \partial Y$. Par définition de bord, on peut trouver une carte (U, φ) de Y en y qui envoie U sur un ouvert $\varphi(U)$ de $\{(t_1, \dots, t_n) \in \mathbf{R}^n \mid t_n \geq 0\}$ et $\partial Y \cap U$ dans l'hyperplan $\mathbf{R}^{n-1} \times \{0\}$. Notons $\tilde{y} = \pi^{-1}(y)$ et $\tilde{U} = \pi^{-1}(U)$ qui est ouvert par définition de la topologie de \tilde{Y} . Puisque Y est compacte, on peut supposer $U \setminus (U \cap \partial Y)$ orientable (quitte à réduire), on fixe alors une orientation o sur cet ouvert. Si $x \in U \setminus (U \cap \partial Y)$, $\pi^{-1}(x)$ contient les deux éléments $(x, o(x))$ et $(x, -o(x))$. On construit une application $\tilde{\varphi} : \tilde{U} \rightarrow \tilde{\varphi}(\tilde{U}) \subset \mathbf{R}^n$ qui coïncide sur tous les points de $\text{Fix}(\tau)$ et les $(x, o(x))$ avec φ et qui envoie les points de la forme $(x, -o(x))$ sur $r(\varphi(x))$ où r est la réflexion par rapport à l'hyperplan $\{t_n = 0\}$. On note p l'application naturelle $p : \tilde{\varphi}(\tilde{U}) \rightarrow \varphi(U)$ qui replie $\tilde{\varphi}(\tilde{U})$ sur $\varphi(U)$ le long de l'hyperplan $\{t_n = 0\}$. Tout ceci est résumé par le schéma suivant dans le cas $n = 2$ (le carré étant commutatif).



Par construction, $\tilde{\varphi} : \tilde{U} \rightarrow \tilde{\varphi}(\tilde{U})$ est bijective. Elle est également continue car si O est un ouvert de $\tilde{\varphi}(\tilde{U})$, p étant ouverte, son image réciproque par $\tilde{\varphi}$ coïncide avec l'image réciproque d'un ouvert de U par π . On vérifie aussi facilement qu'elle est ouverte donc c'est un homéomorphisme. La compatibilité de la carte précédente avec celles de \mathcal{A} ne pose pas de problème donc on munit \tilde{Y} de l'atlas engendré par toutes les cartes de \mathcal{A} ainsi que toutes les cartes précédemment construites pour les $y \in \partial Y$. Cet atlas munit \tilde{Y} d'une structure de variété topologique (et même lisse si Y l'est).

Cette variété est compacte car un recouvrement ouvert fini de Y se relève en un recouvrement ouvert minimal de \tilde{Y} ayant au plus le double d'ouverts. Pour l'orientabilité de \tilde{Y} , nous allons montrer que les changements de cartes préservent l'orientation.

- Lorsque les deux cartes ont leur domaine dans $\tilde{Y} \setminus \text{Fix}(\tau)$, cela provient de l'orientabilité du revêtement d'orientation habituel.
- Lorsque les deux cartes sont du type représenté par le schéma ci-dessus, c'est également clair car pour un point au-dessus de $\{t_n = 0\}$, cela revient à faire un changement de carte dans Y inclus dans un domaine supposé orientable et pour un point en-dessous on fait de même en composant au début et à la fin par la réflexion r (on renverse donc deux fois l'orientation).
- Lorsque les deux cartes sont des deux types différents, leur intersection est contenue dans un ensemble sur lequel π induit un homéomorphisme et est donc entièrement contenue dans une seule des composantes de $\tilde{U} \setminus (\text{Fix } \tau) \cap \tilde{U}$ où \tilde{U} est une carte symétrique telle que représentée ci-dessus. On en déduit de même qu'au dessus que le changement de carte est le même que celui de son image par π dans Y modulo une éventuelle conjugaison par une réflexion.

Évidemment les cartes montrent que \tilde{Y} est sans bord. Si Y est non-orientable, alors \tilde{Y} est connexe. Si Y est orientable $\tilde{Y} \setminus \text{Fix}(\tau)$ possède deux composantes connexes, mais si $\text{Fix}(\tau)$ n'est pas vide, alors prenant une carte en un de ses points on voit que l'on peut relier un $\tilde{x} \in \tilde{Y} \setminus \text{Fix}(\tau)$ et $\sigma(\tilde{x})$. Puisque σ renverse l'orientation, on en déduit que $\text{Fix}(\tau)$ relie les deux composantes connexes. Ainsi, \tilde{Y} est connexe sauf si Y est orientable et ∂Y est vide.

En conclusion, lorsque Y est une surface à bord compacte et connexe supposée non-orientable si $\partial Y = \emptyset$, son revêtement d'orientation généralisé \tilde{Y} est muni d'une involution notée τ_Y (τ dans les paragraphes précédents) qui définit une surface symétrique (\tilde{Y}, τ_Y) .

Théorème 3.1.7.

Les applications $Y \mapsto (\tilde{Y}, \tau_Y)$ et $(X, \sigma) \mapsto X/\sigma$ définissent une correspondance entre les surfaces à bord compactes, connexes et non-orientables si le bord est vide et les surfaces symétriques à isomorphismes dans les catégories correspondantes près. De plus, cette correspondance est fonctorielle. Deux telles surfaces qui se correspondent seront dites associées.

Ainsi, la relation d'association donne une bijection entre les classes d'isomorphismes de surfaces symétriques et les classes d'homéomorphismes de variétés à bord connexes, compactes et non-orientables lorsque de bord vide.

Démonstration. • Si on part d'une surface symétrique (X, σ) , on montre d'abord que le quotient $Y = X/\sigma$ est une surface à bord compacte et connexe. L'action du groupe engendré par σ sur $X \setminus \text{Fix}(\sigma)$ est libre, propre et continue donc munit le quotient d'un atlas qui en fait une variété. De plus, puisque $T_x \sigma$ en un point x de $\text{Fix}(\sigma)$ s'identifie à une réflexion de \mathbf{R}^2 , on peut construire une carte en l'image de x dans le quotient de la forme $\{(u, v) \in \mathbf{R}^2 \mid u \geq 0\}$.

Maintenant, montrons que la surface symétrique (\tilde{Y}, τ_Y) est isomorphe à (X, σ) . Choisissons une orientation globale de X . L'application quotient π restreinte $\pi| : X \setminus \text{Fix}(\sigma) \rightarrow Y \setminus \partial Y$ définit un homéomorphisme local donc transporte l'orientation locale en un point x sur $\pi(x)$. Ainsi elle se relève en une application $X \rightarrow \tilde{Y}$ continue envoyant x sur $\pi(x)$ muni de l'orientation locale précédente. On remarque ensuite que la restriction de π à $\text{Fix}(\sigma)$ se relève aussi en une application continue de $\text{Fix}(\sigma) \rightarrow \text{Fix}(\tau)$. On en déduit un relevé de π toute entière, qui est facilement continue et bijective. Puisque X est compact et Y séparé, ce relevé est un homéomorphisme et il est équivariant car σ renverse l'orientation.

On déduit du point précédent que si Y a un bord vide, alors elle est non-orientable. En effet si ce n'était pas le cas, son revêtement d'orientation aurait deux composantes connexes tout en étant homéomorphe à la surface symétrique X supposée connexe, ce qui est impossible.

- Maintenant partons d'une surface à bord Y connexe, compacte et non-orientable dans le cas où $\partial Y = \emptyset$. La construction du revêtement d'orientation précédente montre que (\tilde{Y}, τ_Y) est une surface symétrique. Il reste à montrer que \tilde{Y}/τ est homéomorphe à Y . Or la projection $\tilde{Y} \rightarrow Y$ passe trivialement au quotient en une bijection continue, d'un compact dans un séparé d'où l'homéomorphisme recherché. □

La propriété suivante détaille les relations topologique entre deux surfaces associées par le théorème précédent.

Proposition 3.1.8.

Soient (X, σ) une surface symétrique et Y une variété à bord associée. Notons g le genre de X et r le nombre de composantes de $\text{Fix}(\sigma)$. Alors, on a :

1. $\chi(X) = 2\chi(Y)$;
2. $X \setminus \text{Fix}(\sigma)$ a au plus deux composantes connexes et si elle en a deux, notées C_1 et C_2 , on a $\overline{C_i} = C_i \cup \text{Fix}(\sigma) \simeq Y$ pour $i = 1, 2$.

3. X est séparante si et seulement si Y est orientable ;
4. $r \leq g + 1$ (Borne de HARNACK).

Démonstration. 1. Remarquons que $Y = (Y \setminus \partial Y) \sqcup \partial Y$, donc $\chi(Y) = \chi(Y \setminus \partial Y) + \chi(\partial Y)$. Or la caractéristique d'Euler d'un cercle est nulle donc $\chi(\partial Y) = 0$ et $\chi(Y) = \chi(Y \setminus \partial Y)$. De plus, $X \setminus \text{Fix}(\sigma)$ est isomorphe au revêtement d'orientation de $Y \setminus \partial Y$ donc si T est une triangulation de $Y \setminus \partial Y$, on peut relever chaque cellule dans $X \setminus \text{Fix}(\sigma)$ en deux nouvelles cellules disjointes. Et puisque $\text{Fix}(\sigma)$ est une union de cercles, $\chi(\text{Fix}(\sigma)) = 0$ d'où $\chi(X) = 2\chi(Y)$.

2. Remarquons tout d'abord que si V est une variété à bord connexe, alors pour tout $S \subset \partial V$, $V \setminus S$ est encore connexe. Autrement dit, enlever une partie du bord à une variété connexe à bord ne la déconnecte pas. En effet $V \setminus \partial V$ est connexe par arcs, donc il reste à voir que l'on peut connecter n'importe quel point p du bord de V avec un point à l'intérieur, mais c'est évident en considérant une carte en p .

Maintenant, puisque $X \setminus \text{Fix}(\sigma)$ est le revêtement d'orientation de $Y \setminus \partial Y$ qui est connexe par le point précédent (Y étant connexe), $X \setminus \text{Fix}(\sigma)$ est une variété (sans bord) a au plus deux composantes connexes. Il reste à voir que rajouter $\text{Fix}(\sigma)$ n'augmente pas le nombre de composantes. Mais si $x \in \text{Fix}(\sigma)$, on peut considérer une carte en x (U, ϕ) telle que $\phi(\mathbf{R}^2) = U$ et $\phi(\mathbf{R} \times \{0\}) = \text{Fix}(\sigma) \cap U$. On voit facilement qu'il existe un arc joignant x à un point de $X \setminus \text{Fix}(\sigma)$ donc X a au plus deux composantes connexes.

Supposons maintenant qu'elle en a deux, notées C_1 et C_2 . Alors $\pi_1 : C_1 \cup \text{Fix}(\sigma) \rightarrow Y$ est une bijection continue avec Y séparé et $C_1 \cup \text{Fix}(\sigma)$ compact car fermé (son complémentaire est C_2 qui est ouvert) dans X compact. Il vient donc $C_1 \cup \text{Fix}(\sigma) \simeq Y$. Or $C_1 \simeq Y \setminus \partial Y$ et $Y \setminus \partial Y = Y$ donc $C_1 \cup \text{Fix}(\sigma) \subset \overline{C_1}$ et cette inclusion est en fait une égalité car $C_1 \cup \text{Fix}(\sigma)$ est fermé. On peut faire de même avec C_2 .

3. Si X est séparante, alors par le point précédent Y s'identifie à l'adhérence d'une des composantes connexes et donc se plonge dans X qui est orientable donc est elle-même orientable. Réciproquement, si Y est orientable, alors $Y \setminus \partial Y$ aussi et $X \setminus \text{Fix}(\sigma)$ possède deux composantes connexes donc X est séparante.
4. Supposons par l'absurde que $r > g + 1$. Alors choisissons $g + 1$ cercles distincts de $\text{Fix}(\sigma)$ parmi les r et notons \tilde{X} la variété X privée de ces $g + 1$ cercles. Par l'hypothèse faite, il reste au moins un cercle de $\text{Fix}(\sigma)$ dans \tilde{X} . Montrons que X est toujours connexe, ce qui contredit la notion de genre au sens de Riemann.

- Si X est séparante, alors $X \setminus \text{Fix}(\sigma)$ a deux composantes connexes et, par le point 2, le reste de $\text{Fix}(\sigma)$ dans \tilde{X} soude les deux composantes connexes.
- Si X est non séparante, alors $X \setminus \text{Fix}(\sigma)$ est connexe par arcs et prenant une carte en un point $x \in \text{Fix}(\sigma)$, on voit que x peut être relié par un arc à $X \setminus \text{Fix}(\sigma)$ d'où \tilde{X} connexe. □

3.1.3 Théorème de classification des surfaces symétriques

Maintenant que le lien entre surface symétrique et surface à bord a été établi, la classification bien connue de ces dernières permet d'obtenir les deux résultats suivants :

Proposition 3.1.9 (Congruence de KLEIN).

Si (X, σ) est une surface séparante, alors $r \equiv g + 1 \pmod{2}$.

Démonstration. La surface à bord Y associée à X est orientable et possède r composantes de bord. Notons p le genre de Y . Alors Y est obtenue par excision de r disques disjoints à une surface fermée et orientable Y^* de genre p . Puisqu'un disque est de caractéristique d'Euler 1, $\chi(Y) = \chi(Y^*) - r = 2 - 2p - r$ et par le premier point de la proposition précédente, on a $\chi(X) = 2(2 - 2p - r)$ soit, X étant elle aussi une surface fermée et orientable, $2 - 2g = 2(2 - 2p - r)$ d'où $r \equiv g + 1 \pmod{2}$. □

Théorème 3.1.10 (KLEIN-WEICHOLD).

Deux surfaces symétriques sont isomorphes si et seulement si elles ont les mêmes invariants (g, r, a) .

Démonstration. Soient (X_1, σ_1) et (X_2, σ_2) deux surfaces symétriques. D'après le théorème 3.1.7, ces deux surfaces sont isomorphes si et seulement si les surfaces à bord $Y_1 = X_1/\sigma_1$ et $Y_2 = X_2/\sigma_2$ sont homéomorphes. Par théorème de classification des variétés à bord et par les premier et troisième points de la proposition 3.1.8, on a donc

$$(X_1, \sigma_1) \text{ et } (X_2, \sigma_2) \text{ sont isomorphes } \iff g(Y_1) = g(Y_2), r_1 = r_2 \text{ et } a(X_1) = a(X_2).$$

Or le nombre de composantes de bord dans Y_i est égal au nombre de composantes connexes de $\text{Fix}(\sigma_i)$ dans X_i , ce qui conclut. □

Remarquons que cette classification donne une injection de l'ensemble des classes d'isomorphisme de surfaces symétriques dans $\mathbf{N} \times \mathbf{N} \times \{0, 1\}$, en particulier cet ensemble est dénombrable. La borne d'Harnack et la congruence de Klein donnent des précisions sur l'image de l'injection précédente.

3.2 Classification topologiques des courbes algébriques réelles

Dans la suite, conformément aux définitions données au début du mémoire, nous appellerons **variété algébrique réelle** une variété algébrique sur \mathbf{C} munie d'une involution anti-régulière (au sens de la Définition 2.1.8 dans [Man20]). Il s'agit des \mathbf{R} -variétés dans cette même référence. Dans toute la suite de ce chapitre, les variétés algébriques réelles seront supposées géométriquement irréductibles. Une telle variété sera appelée **courbe algébrique réelle** si sa dimension est 1 (sur \mathbf{C}).

Un **morphisme de variétés algébriques réelles** $\varphi : (X, \sigma) \rightarrow (Y, \tau)$ est un morphisme de variétés algébriques complexes $X \rightarrow Y$ commutant avec les involutions : $\varphi \circ \sigma = \tau \circ \varphi$. Le but de cette section est de voir comment le théorème de classification des surfaces symétriques précédent permet d'obtenir des invariants pour les courbes algébriques réelles projectives lisses.

Soit (X, σ) une courbe algébrique réelle projective. Bien que nous n'en aurons pas explicitement besoin, le théorème 2.1.14 nous dit qu'il existe alors un entier n et un ensemble algébrique projectif $F \subset \mathbb{P}^n(\mathbf{C})$ stable par $\sigma_{\mathbb{P}}$, l'involution anti-régulière de $\mathbb{P}^n(\mathbf{C})$ définie par $\sigma_{\mathbb{P}}(z_0 : \dots : z_n) = (\bar{z}_0 : \dots : \bar{z}_n)$ tel que

$$(X, \sigma) \simeq (F, \sigma_{\mathbb{P}}|_F)$$

dans $\mathbf{Alg}_{\mathbf{R}}$ (voir Théorème 2.1.33 [Man20]). On peut alors montrer que F peut être défini comme zéros de polynômes homogènes à coefficients réels.

Si, de plus, X est lisse, alors elle définit (pour la topologie euclidienne) une variété analytique complexe de dimension 1 fermée et orientée dont σ est un difféomorphisme qui renverse l'orientation (voir la Proposition 2.2.28 dans [Man20]). Enfin, puisque X est supposée par définition irréductible comme courbe algébrique complexe, on montre que la courbe analytique sous-jacente est connexe (Théorème 1.4.5 toujours dans [Man20]) et en particulier on obtient une surface de Riemann compacte.

Tout ceci montre qu'à toute courbe algébrique réelle projective lisse (X, σ) est associée une surface symétrique (définition 3.1.1). Cette association est en fait fonctorielle comme annoncée en 2.2. En effet, notons $\mathbf{Alg}_{\mathbf{R}}$ la catégorie des courbes algébriques réelles projectives lisses et \mathbf{Sym} celle des surfaces symétriques. On définit alors tautologiquement un foncteur $\mathcal{F} : \mathbf{Alg}_{\mathbf{R}} \rightarrow \mathbf{Sym}$ par

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Alg}_{\mathbf{R}} & \rightarrow & \mathbf{Sym} \\ (X, \sigma) & \mapsto & (X, \sigma) \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_{\mathbf{Alg}_{\mathbf{R}}}((X, \sigma), (Y, \tau)) & \rightarrow & \mathrm{Hom}_{\mathbf{Sym}}((X, \sigma), (Y, \tau)) \\ f & \mapsto & f \end{array} .$$

Pour justifier sa bonne définition, il suffit de montrer qu'un morphisme dans $\mathbf{Alg}_{\mathbf{R}}$, *i.e.* une application régulière commutant avec les structures réelles induit un morphisme de surfaces symétriques, *i.e.* une application continue pour la topologie euclidienne commutant avec les involutions. Le second point étant évident, le résultat provient de la proposition suivante :

Proposition 3.2.1 (Régulière \implies continue).

Soit $f : X \rightarrow Y$ un morphisme entre deux variétés algébriques complexes. Alors f est continue pour les topologies euclidiennes sur X et Y .

Démonstration. La topologie euclidienne sur X est engendrée par les ouverts de la forme

$$V(U; g_1, \dots, g_r; \varepsilon) := \{x \in U \mid |g_l(x)| < \varepsilon, \text{ pour } l = 1, \dots, r\}$$

avec U un ouvert de Zariski de X , r un entier naturel, g_1, \dots, g_r des fonctions régulières sur X à valeurs complexes et $\varepsilon > 0$ un nombre réel. De même pour Y . Soit donc $O = V(U; g_1, \dots, g_r; \varepsilon) \subset Y$ un ouvert de cette forme. Alors,

$$f^{-1}(O) = \{x \in f^{-1}(U) \mid |g_l \circ f(x)| < \varepsilon, \text{ pour } l = 1, \dots, r\}.$$

Or f est une application régulière et en particulier continue pour les topologies de Zariski donc $f^{-1}(U)$ est un ouvert de Zariski de X et, par définition d'application régulière, chaque composée $g_l \circ f$ est une fonction régulière sur X . Ainsi l'image réciproque d'un ouvert de la base pour la topologie euclidienne de Y est un ouvert pour la topologie euclidienne de X . \square

Théorème 3.2.2 (Classification du type topologique des courbes algébriques réelles).

*Si deux courbes algébriques réelles projectives lisses (X, σ) et (Y, τ) sont isomorphes, alors les surfaces symétriques associées sont isomorphes également, *i.e.* vérifient par 3.1.10 :*

$$(g(X), r(X), a(X)) = (g(Y), r(Y), a(Y)).$$

Remarquons que le foncteur considéré est un foncteur d'oubli de la structure algébrique. Il est donc raisonnable de penser qu'il ne constitue pas une équivalence de catégories. En particulier le triplet formé par le genre, le nombre de composantes du lieu réel et l'alternative séparante ou non n'est pas un invariant total : deux courbes algébriques de $\mathbf{Alg}_{\mathbf{R}}$ peuvent avoir les deux mêmes triplets sans être isomorphes. Dans la section 3.4, nous détaillerons un peu plus le lien entre type topologique et classe d'isomorphisme algébrique pour les courbes réelles. En revanche, puisque la classification des surfaces symétriques obtenue à la section précédente est complète, le triplet d'invariants donné par le théorème décrit intégralement le type topologique d'une courbe algébrique réelle (projective et lisse). En particulier l'ensemble de ces types topologiques est dénombrable.

La fin de cette section a pour objectif d'analyser plus profondément le triplet d'invariants (g, r, a) . La discussion qui précède le théorème 3.2.2 montre que deux courbes algébriques réelles de $\mathbf{Alg}_{\mathbf{R}}$ isomorphes ont leurs surfaces de Riemann associées isomorphes. Mais puisque la topologie euclidienne sur le lieu réel est induite par la topologie euclidienne de cette surface de Riemann et qu'un isomorphisme dans $\mathbf{Alg}_{\mathbf{R}}$ commute avec les involutions, on en déduit la proposition suivante.

Proposition 3.2.3.

Un isomorphisme de variétés algébriques réelles $f : (X, \sigma) \rightarrow (Y, \tau)$ induit un homéomorphisme entre les lieux réels $X(\mathbf{R})$ et $Y(\mathbf{R})$ pour la topologie euclidienne.

Ainsi, si (X, σ) et (Y, τ) sont isomorphes dans $\mathbf{Alg}_{\mathbf{R}}$, on a X homéomorphe à Y et $X(\mathbf{R})$ homéomorphe à $Y(\mathbf{R})$. Or X est une surface fermée orientable donc son type topologique est entièrement déterminé par son genre (ou sa caractéristique d'Euler). De même le lieu réel $X(\mathbf{R})$ est une courbe algébrique projective sur \mathbf{R} , lisse et compacte donc définit une variété analytique réelle de dimension 1. Étant compacte, il s'agit d'un nombre fini de cercles disjoints dont le type topologique est entièrement déterminé par le nombre de composantes. Ainsi dans le triplet d'invariant du théorème 3.2.2, le premier nombre donne le type topologique de la variété complexe, le second celui du lieu réel et seul le caractère séparant ou non dépend de la configuration du lieu réel dans la variété complexe et mêle "les deux mondes" réels et complexes.

Par exemple, si σ et σ' sont deux involutions anti-régulières sur X tels que (X, σ) n'est pas isomorphe dans $\mathbf{Alg}_{\mathbf{R}}$ à (X, σ') , on dit alors que ces deux structures réelles ne sont pas équivalentes, le genre de la variété complexe sous-jacente sera évidemment le même mais le nombre de composantes du lieu réel peut être différent (voir Exemple 2.1.29 dans [Man20]).

3.3 Surfaces symétriques et modèles algébriques

Jusque-là nous nous sommes posé les questions suivantes :

- si je me donne deux surfaces symétriques, comment savoir si elles sont isomorphes ?
- si je me donne deux courbes algébriques réelles projectives et lisses, comment savoir si les surfaces symétriques sous-jacentes sont isomorphes ?

Felix Klein s'est posé la question annexe de l'existence de modèle algébrique pour les surfaces symétriques. Autrement dit, est-ce que l'image du foncteur $\mathbf{Alg}_{\mathbf{R}} \rightarrow \mathbf{Sym}$ contient toutes les surfaces symétriques ? Et il a démontré que la réponse est oui !

Théorème 3.3.1 (Klein).

Toute surface symétrique possède un modèle comme action de Galois sur une courbe algébrique projective réelle lisse.

Une démonstration de ce résultat (qui n'est pas celle de Klein mais qui utilise les outils précédemment introduits) peut être trouvée dans [Gab00]. Nous n'évoquerons ici que l'idée de la démonstration et renvoyons à cet article pour les détails.

La première étape de l'étude consiste à remarquer que toutes les valeurs du triplet d'invariants (g, r, a) ne sont pas atteints par les surfaces symétriques. Il y a déjà l'inégalité de Harnack et la congruence de Klein ! En fait, tous les triplets admissibles sont produits à partir de deux familles de modèles initiaux réalisant les triplets $(g = n, r = 0, a = 1)$ et $(g = 2n, r = 1, a = 0)$ pour $n \in \mathbf{N}$ ainsi que d'une opération topologique transformant une surface symétrique du type (g, r, a) en une surface $(g + 1, r + 1, a)$. Nous noterons S_g la classe d'isomorphisme de surfaces symétriques associée à $(g, 0, 1)$ et Σ_g celle associée à $(g, 1, 0)$ pour g pair.

Pour démontrer le théorème de Klein, il suffit de trouver des modèles dans S_g et Σ_g obtenus par des courbes algébriques projectives réelles lisses et de réaliser de façon "algébrique" la transformation $(g, r, a) \rightarrow (g + 1, r + 1, a)$. Dans ce qui suit, nous avons besoin de la notion de genre pour une courbe non nécessairement projective ou lisse. Pour cela, on pourra se reporter au début de la section précédente

Pour les modèles minimaux :

1. on choisit une courbe hyperelliptique réelle $y^2 = f(x)$ avec f de degré $2g + 2$ ayant des racines distinctes ;
2. on considère \mathcal{C}_g la courbe projective plane associée, la formule du genre assure que \mathcal{C}_g est de genre g ;
3. on normalise \mathcal{C}_g en $\widetilde{\mathcal{C}}_g \in \mathbf{Alg}_{\mathbf{R}}$ (attention $\widetilde{\mathcal{C}}_g$ n'est plus plane!);

Pour un modèle de S_g , il suffit de choisir f telle que $\forall x \in \mathbf{R}, f(x) < 0$. Alors évidemment il n'y a pas de composante réelle et est donc non-séparante. Pour un modèle de Σ_g , on montre facilement qu'il suffit de choisir f telle que $\forall x \in \mathbf{R}, f(x) > 0$.

Maintenant si $\mathcal{C}_g \in \mathbf{Alg}_{\mathbf{R}}$, il existe un modèle birationnel plan de \mathcal{C}_g n'ayant pour singularités que des points doubles transverses, notons le Γ . L'idée est de couper Γ par une droite transverse passant par des points imaginaires lisses et de résoudre les intersections obtenues avec le théorème de Brusotti (cf. la Section 3 de [Gab00] pour un énoncé précis). On normalise la nouvelle courbe et on montre que cette opération effectue l'opération topologique recherchée.

Ainsi dans cette démonstration, on se ramène à des courbes planes pour travailler dans le plan mais on est forcé de quitter le monde des courbes planes pour obtenir des courbes non-singulières. Klein s'était demandé ce qu'il se passait si on imposait de rester dans l'ensemble des courbes planes lisses. Une réponse avec démonstration est également donnée dans [Gab00]. À nouveau, nous n'évoquerons que quelques idées et nous renvoyons à cet article pour une preuve complète.

Dans la fin de cette section, pour éviter d'alourdir nos propos nous dirons simplement courbe plane pour une courbe projective réelle plane lisse et nous dirons qu'une courbe plane \mathcal{C} est dans S_g ou dans Σ_g lorsque sa surface symétrique sous-jacente l'est. Rappelons qu'à une telle courbe plane est associé un unique polynôme homogène de $\mathbf{R}[X, Y]$ à multiplication par un scalaire $\lambda \in \mathbf{R}^*$ près. On définit alors le degré de la courbe plane comme étant le degré de ce polynôme. La formule du genre relie ce degré avec le genre de la surface topologique sous-jacente :

$$g = \frac{(d-1)(d-2)}{2}.$$

On obtient donc visiblement une première obstruction : on ne peut pas construire une courbe plane ayant n'importe quel genre. Il est donc impossible de réaliser tous les modèles initiaux S_g et Σ_g . Voici un tableau résumant les premiers termes donnés par la formule du genre :

degré	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
genre	0	0	1	3	6	10	15	21	28	36

Et même lorsque un genre g est bien réalisable par une courbe plane, il n'est pas assuré qu'on puisse construire l'un des deux modèles initiaux. On se rend vite compte d'une deuxième obstruction lorsque $g = (d-1)(d-2)/2$ avec d impair, il n'est pas possible de construire une courbe plane dans Σ_g car un polynôme à coefficients réels de degré impair admet toujours une racine réelle donc la surface correspondante a toujours une composante réelle. On voit que c'est par exemple le cas pour $g = 6$: il n'a pas de courbe plane dans Σ_6 .

Une autre impossibilité a été exhibée par Gross et Harris : lorsque $g = (d-1)(d-2)/2$ avec $d \equiv 5 \pmod{8}$ (g est alors pair), aucune courbe plane n'est dans S_g . C'est le cas par exemple pour $g = 6$: aucune courbe plane n'est dans S_6 . En réalité il y a une contrainte plus forte démontrée par Rohlin : si \mathcal{C} est une courbe plane de degré d , alors $r \geq \lfloor \frac{d+1}{2} \rfloor$. On peut alors montrer que ces restrictions sont les seules.

Théorème 3.3.2 (Klein pour les courbes planes).

Pour tout triplet (g, r, a) avec $g = \frac{(d-1)(d-2)}{2}$ tel que si $d \equiv 1 \pmod{2}$ alors $r \geq 1$ et si $a = 0$ alors $r \geq \lfloor \frac{d+1}{2} \rfloor$, il existe une courbe projective réelle plane lisse et irréductible dont la surface symétrique sous-jacente est du type (g, r, a) .

3.4 Classification algébrique vs type topologique pour les courbes

Commençons par rappeler un résultat important pour les courbes sur un corps algébriquement clos : dans toute classe d'équivalence birationnelle de courbes quasi-projectives il existe une unique courbe projective non-singulière à isomorphisme près. Une démonstration de ce point est donné en Section I.6 de [Har08]. En conséquence, nous obtenons le corollaire (6.12 dans cette même référence) suivant :

Théorème 3.4.1.

Pour k un corps algébriquement clos, les trois catégories suivantes sont équivalentes :

1. les courbes projectives non-singulières avec les morphismes dominants ;
2. les courbes quasi-projectives avec les applications rationnelles dominantes ;
3. les corps de fonctions de dimension 1 sur k avec les k -homomorphismes.

Jusqu'à la fin de ce chapitre nous suivrons les notations de [Har08]. Pour le moment, nous avons défini le genre $g(X)$ d'une courbe projective et non-singulière X comme le genre de la surface topologique qu'elle engendre. Nous

définissons maintenant le genre géométrique $p_g(X)$ comme le nombre de formes rationnelles globales sur X linéairement indépendantes : $p_g(X) := \dim_{\mathbf{C}} \Gamma(X, \omega_X)$ où ω_X est le diviseur canonique de X . Remarquons que par dualité de Serre, on a aussi $p_g(X) = \dim_k H^1(X, \mathcal{O}_X)$. Le théorème de Riemann-Hurwitz montre alors que ces deux notions coïncident. Ainsi, pour une courbe projective non-singulière X , on a :

$$g(X) = p_g(X) = \dim_{\mathbf{C}} \Gamma(X, \omega_X) = \dim_k H^1(X, \mathcal{O}_X)$$

Pour une courbe quasi-projective générale, il n'y a pas de notion naturelle de genre topologique, mais on définit son genre géométrique p_g comme celui de la courbe projective non-singulière birationnellement équivalente. Autrement dit, on étend la définition précédente par équivalence birationnelle.

Pour un diviseur D , nous noterons $|D|$ le système linéaire complet de D , i.e. l'ensemble de tous les diviseurs effectifs linéairement équivalents à D . Cet ensemble est en bijection avec l'espace vectoriel :

$$(H^0(X, \mathcal{L}(D)) - \{0\}) / \mathbf{C}^*$$

où $\mathcal{L}(D)$ est le faisceau canoniquement associé au diviseur D (voir II, 7.7 [Har08]). La dimension de $H^0(X, \mathcal{L}(D))$ est notée $l(D)$ de sorte que la dimension de $|D|$ est $l(D) - 1$. Ce nombre est fini (II, 5.19 [Har08]). Un diviseur de la classe d'équivalence linéaire associée au faisceau inversible ω_X est noté K . Nous aurons besoin dans la suite du théorème de Riemann-Roch qui dans ce contexte s'énonce comme suit :

Théorème 3.4.2 (Riemann-Roch pour les courbes).

Soit D un diviseur d'une courbe projective non-singulière X de genre g . Alors

$$l(D) - l(K - D) = \deg D + 1 - g$$

Corollaire 3.4.3.

Le diviseur canonique K d'une courbe de genre g est de degré $2g - 2$.

Démonstration. On applique Riemann-Roch au diviseur $D = K$. On a $l(K) = \dim_{\mathbf{C}} H^0(X, \omega_X) = p_g(X) = g$ et $l(0) = \dim_{\mathbf{C}} H^0(X, \mathcal{O}_X) = \dim_{\mathbf{C}} \mathbf{C} = 1$ d'où

$$g - 1 = \deg K + 1 - g$$

ou encore $\deg K = 2g - 2$. □

3.4.1 Cas du genre 0

Définition 3.4.4.

Une variété algébrique X de dimension n sur \mathbf{C} est dite **rationnelle** si son corps des fonctions $\mathbf{K}(X)$ est isomorphe à $\mathbf{C}(X_1, \dots, X_n)$ en tant que k -algèbre.

On peut alors montrer que cette notion a une interprétation géométrique (voir la Proposition 1.3.32 dans [Man20]).

Proposition 3.4.5.

Une variété algébrique X de dimension n sur \mathbf{C} est rationnelle si et seulement si elle est birationnelle à $\mathbb{P}^n(\mathbf{C})$.

On commence par énoncer un corollaire immédiat de l'existence d'un unique modèle projectif non-singulier à isomorphismes près dans chaque classe birationnelle de courbes quasi-projectives. Notons qu'on utilise ici le fait que \mathbf{C} est algébriquement clos.

Théorème 3.4.6.

Une courbe algébrique projective lisse est rationnelle si et seulement si elle est isomorphe à $\mathbb{P}^1(\mathbf{C})$.

Ce résultat permet d'observer un phénomène spécifique aux courbes de genre 0 : il n'y a qu'un seul type algébrique (à isomorphismes près ou à équivalence birationnelles près) de telles courbes. Autrement dit, un invariant topologique suffit pour décrire complètement la structure algébrique. Nous verrons que dès le genre 1, ce n'est plus vrai.

Théorème 3.4.7.

Une courbe algébrique projective lisse est rationnelle si et seulement si elle est de genre 0.

Démonstration. Soit X une courbe projective lisse rationnelle. Alors, par le théorème précédent, X est isomorphe à $\mathbb{P}^1(\mathbf{C})$ et donc homéomorphe en tant que variété topologique de dimension 2. Puisque $\mathbb{P}^1(\mathbf{C})$ est de genre 0, X aussi. Réciproquement, supposons X de genre 0. Soit P, Q deux points distincts de X et considérons le diviseur $D = P - Q$. Puisque $\deg(K - D) = \deg(K) - \deg(D) = -2$, le faisceau $\mathcal{L}(K - D)$ n'admet pas de section globale et donc $l(K - D) = 0$. Le théorème de Riemann-Roch donne donc $l(D) = \deg D + 1 - g = 1$. Ainsi D est linéairement équivalent à un diviseur effectif de degré 0, mais il n'y a qu'un seul tel diviseur : le diviseur nul. Donc $D \sim 0$, soit $P \sim Q$. Le résultat vient alors du lemme suivant. □

Lemme 3.4.8.

Une courbe algébrique projective lisse X est rationnelle si et seulement s'il existe deux points distincts $P, Q \in X$ tels que $P \sim Q$.

Démonstration. Supposons X rationnelle. Par le théorème 3.4.6, X est donc isomorphe à $\mathbb{P}^1(\mathbf{C})$. Or, sur $\mathbb{P}^1(\mathbf{C})$ deux points distincts constituent deux diviseurs de degré 1 qui sont donc linéairement équivalents car $\text{deg} : \text{Cl } \mathbb{P}^1(\mathbf{C}) \rightarrow \mathbf{Z}$ est un isomorphisme. On en déduit le sens direct.

Réciproquement, soit X une courbe et P, Q deux points distincts de X tels que $P \sim Q$. Alors il y a une fonction rationnelle $f \in K(X)$ dont le diviseur associé est $(f) = P - Q$. Puisque f est non constante, elle définit un \mathbf{C} -homomorphisme de corps injectif $\mathbf{C}(f) \hookrightarrow K(X)$. En vertu du théorème 3.4.1, $\mathbf{C}(f)$ étant isomorphe au corps des fonctions de $\mathbb{P}^1(\mathbf{C})$, la flèche $\mathbf{C}(f) \rightarrow K(X)$ induit un morphisme dominant $\varphi : X \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbf{C})$. On peut alors montrer que ce morphisme est fini (Proposition 6.8 dans [Har08]). De plus l'image réciproque du diviseur $\{0\}$ de $\mathbb{P}^1(\mathbf{C})$ par φ est $\varphi^*(\{0\}) = P$. Donc ce morphisme doit être de degré 1 car $\text{deg } P = \text{deg } \varphi \cdot \text{deg } \{0\}$, autrement dit $\mathbf{C}(f) \simeq K(X)$ donc X et $\mathbb{P}^1(\mathbf{C})$ sont birationnellement équivalentes. \square

Corollaire 3.4.9 (Classification des courbes complexes de genre 0).

Deux courbes algébriques projectives lisses de genre 0 sont isomorphes.

Maintenant, il reste à voir ce qu'il se passe pour les courbes réelles, c'est-à-dire lorsqu'on ajoute une structure réelle. Considérons une courbe projective réelle géométriquement irréductible (X, σ) de genre 0 (*i.e.* dont la courbe complexe X est de genre 0). Alors il existe un isomorphisme φ de X vers $\mathbb{P}^1(\mathbf{C})$ dans \mathbf{Alg} . Celui-ci transporte aussi la structure réelle de X vers $\mathbb{P}^1(\mathbf{C})$. Or $\mathbb{P}^1(\mathbf{C})$ n'a que deux structures réelles (à action près de $\mathbb{P}\text{GL}_2(\mathbf{C})$) :

- la conjugaison complexe sur \mathbb{P}^1 habituelle, $\sigma_{\mathbb{P}} : (z_1 : z_2) \mapsto (\bar{z}_1 : \bar{z}_2)$, dont le lieu fixe est connexe et isomorphe à $\mathbb{P}^1(\mathbf{R})$;
- l'application antipodale $\sigma_{AP} : (z_1 : z_2) \mapsto (-\bar{z}_2 : \bar{z}_1)$ dont le lieu fixe est vide.

Remarquons que la borne d'Harnack ne permet d'ailleurs que ces deux possibilités pour le nombre de composantes connexes. De plus, φ induit une bijection de $X(\mathbf{R})$ sur le lieu réel de $\mathbb{P}^1(\mathbf{C})$ pour cette structure. Puisque ces deux structures réelles sont caractérisées par le nombre de composantes connexes (0 ou 1), il en est de même pour les structures réelles sur les courbes projectives lisses de genre 0. D'où à nouveau un résultat exceptionnel, pour des courbes projectives réelles lisses de genre 0, le type algébrique (dans $\mathbf{Alg}_{\mathbf{R}}$) est entièrement déterminé par des invariants topologiques (définis sur \mathbf{Sym}).

Théorème 3.4.10 (Classification des courbes réelles de genre 0).

Deux courbes algébriques réelles projectives lisses de genre 0 sont isomorphes si et seulement si elles ont le même nombre de composantes connexes (qui peut être 0 ou 1).

3.4.2 Cas du genre 1

Le phénomène particulier de la section précédente ne se produit plus à partir du genre 1. Il existe déjà une infinité continue de types différents de courbes projectives lisses de genre 1 sans même considérer de structure réelle dessus. Ce qui suit est inspirée de la Section IV.4 de [Har08] dans laquelle on pourra trouver tous les détails manquants.

Soit X une courbe projective lisse de genre 1. L'idée est de définir un invariant à isomorphisme près $j \in \mathbf{A}_{\mathbf{C}}^1$ et de montrer qu'il caractérise la classe de X . Puisque pour n'importe quel j dans $\mathbf{A}_{\mathbf{C}}^1$ il sera possible de trouver une courbe dont la valeur de cet invariant est j , cela montrera que les classes d'isomorphismes de telles courbes dans \mathbf{Alg} sont en bijection avec $\mathbf{A}_{\mathbf{C}}^1$.

Soit $P_0 \in X$ un point et considérons le diviseur $2P_0$ de degré 2. Par le corollaire 3.4.3, un diviseur canonique K de X est de degré 0 donc $\text{deg}(K - 2P_0) = -2$ et $l(K - 2P_0) = 0$. Par Riemann-Roch, on a alors :

$$l(2P_0) = \text{deg } 2P_0 + 1 - 1 = 2$$

donc le système linéaire associé à $2P_0$ est de dimension 1. De plus, il n'a pas de point base car X est non-singulière et donc il est possible de trouver pour n'importe quel diviseur un diviseur linéairement équivalent évitant un nombre fini de points (voir le Théorème 3.1 de III.1.3 dans [Sha13]). Cela définit un morphisme $\varphi : X \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbf{C})$ qui doit être de degré 2. Le théorème d'Hurwitz (voir III.2 dans [Har08] ci besoin) impose que f ait 4 points de ramification. L'action du groupe $\mathbb{P}\text{GL}_2(\mathbf{C})$ sur $\mathbb{P}^1(\mathbf{C})$ étant 3-transitive, il est possible de fixer l'image de trois des points de ramification à 0, 1 et ∞ . L'image du dernier point est noté λ . À ce stade, on observe qu'il n'y a donc qu'un seul degré de liberté, ce qui donne déjà l'intuition d'un espace de modules de dimension 1. Remarquons que le scalaire λ ne peut prétendre à être un invariant car il dépend notamment du choix d'association des points de ramification sur 0, 1 et ∞ . Mais on peut

voir sans difficulté que les différents choix n'engendrent que 6 valeurs différentes au maximum (c'est une propriété élémentaire du birapport). On définit alors

$$j(X) = j(\lambda) = \frac{(\lambda^2 - \lambda + 1)^3}{\lambda^2(\lambda - 1)^2}$$

qui est une quantité indépendante du choix précédent. On peut alors démontrer le résultat suivant

Théorème 3.4.11 (Classification des courbes complexes de genre 1).

1. La quantité j définie ci-dessus ne dépend que de X .
2. Deux courbes projectives lisses X et X' de genre 1 sont isomorphes si et seulement si $j(X) = j(X')$.
3. Pour tout $k \in \mathbf{A}_{\mathbf{C}}^1$, il existe une courbe projective lisse X de genre 1 telle que $j(X) = k$.

Corollaire 3.4.12.

Il y a une bijection entre les classes d'isomorphismes de courbes projectives lisses de genre 1 et $\mathbf{A}_{\mathbf{C}}^1$.

Démonstration. Voir la démonstration du Théorème 4.1 dans la Section III.4 de [Har08]. □

Ce résultat marque une différence profonde entre la classification topologique et la classification des courbes algébriques. Alors que l'ensemble des types topologiques pour les courbes (complexes ou réelles) est dénombrable, l'ensemble des types algébriques ne l'est pas, même pour des courbes complexes et en ne considérant que les courbes de genre 1.

Nous ne discuterons pas ici de la classification des courbes algébriques réelles de genre 1.

3.4.3 Cas du type général (genre > 1)

Il est possible de construire une classification proche de celle de la section précédente pour les courbes de genre > 1 . On observe alors que le genre ajoute de nouveaux degrés de liberté et on peut montrer que l'espace des modules est de dimension complexe $3g - 3$. Cependant une preuve de ce résultat ne sera pas donnée ici.

4 Étude topologique des surfaces réelles fibrés en coniques

Dans cette partie, nous allons nous intéresser à la topologie du lieu réel de variétés algébriques réelles de dimension complexe 2. Le but est donc le même que dans la précédente partie. Il y aura toutefois une différence notable dans la donnée topologique que nous regarderons. En effet, dans le cas d'une courbe algébrique réelle (projective et lisse) C , nous avons considéré la topologie du couple $(C(\mathbf{C}), C(\mathbf{R}))$. Ici nous ne regarderons que la topologie de la variété différentielle $X(\mathbf{R})$ induite par une surface algébrique réelle projective lisse (X, σ) . L'ensemble de ces surfaces étant extrêmement riche, nous nous restreindrons à une famille particulière : celles qui admettent une structure de fibré en coniques réel.

Notre étude reposera en grande partie sur le théorème de factorisation forte pour les transformations birationnelles entre surfaces algébriques lisses, nous commençons donc par quelques rappels sur ces transformations. Ensuite, nous présenterons la structure de fibré en coniques réel avant de donner la liste exhaustive de tous les lieux réels (à homéomorphismes près) réalisés par des surfaces projectives réelles lisses qui admettent une telle structure. En dernière section, nous regarderons les transformations qui préservent la structure de fibré et aboutirons à une classification des fibrés en coniques réels.

4.1 Transformation birationnelle entre surfaces

Les résultats de cette partie sont exposés et démontrés dans [Bea78]. La présentation suivra celle du mémoire de Mohamed Benzerga.

4.1.1 Entre surfaces complexes

Rappelons qu'une application rationnelle entre surfaces projectives lisses complexes a son lieu d'indétermination égal à un ensemble fini de points. Utilisant des éclatements dont la propriété universelle est rappelée ci-dessous, on peut montrer le théorème de factorisation forte des transformations birationnelles.

Théorème 4.1.1 (Propriété universelle de l'éclatement).

Soit $f : X \rightarrow S$ un morphisme birationnel de surfaces projectives complexes lisses. Si f^{-1} n'est pas défini en $p \in S$, alors il existe un morphisme birationnel $g : X \rightarrow Bl_p^S$ tel que $f = \epsilon \circ g$ où Bl_p^S est l'éclaté en p de S et ϵ est la projection canonique.

$$\begin{array}{ccc} & & Bl_p^S \\ & \nearrow g & \downarrow \epsilon \\ X & \xrightarrow{f} & S \end{array}$$

Théorème 4.1.2 (Factorisation forte des transformations birationnelles).

Soit $\varphi : X \rightarrow Y$ une application birationnelle entre deux surfaces projectives complexes lisses. Il existe une surface S et deux morphismes f et g composés d'éclatements et d'isomorphismes faisant commuter le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} & S & \\ f \swarrow & & \searrow g \\ X & \overset{\varphi}{\dashrightarrow} & Y \end{array}$$

Définition 4.1.3 (Surface minimale).

Une surface projective complexe lisse X est dite **minimale** si tout morphisme birationnel de X vers une surface projective complexe lisse Y est un isomorphisme.

Définition 4.1.4 ((-1)-courbes).

Soit X une surface projective complexe lisse. Une courbe C dans X est appelée **(-1)-courbe** si :

1. $C \simeq \mathbb{P}^1(\mathbf{C})$;
2. son auto-intersection est $C^2 = -1$.

Théorème 4.1.5 (Castelnuovo).

Soit X une surface projective complexe lisse. Soit C une courbe de X . Alors C est le diviseur exceptionnel d'un certain éclatement $X \rightarrow S$ si et seulement si c'est (-1)-courbe.

Le théorème de Castelnuovo permet de donner une caractérisation pratique des surfaces minimales.

Corollaire 4.1.6 (Caractérisation des surfaces minimales).

Soit X une surface projective complexe lisse. Alors X est minimale si et seulement si elle ne contient aucune (-1)-courbe.

4.1.2 Entre surfaces réelles

On a un équivalent intégral de la théorie précédente lorsque l'on munit les surfaces de structures réelles et que l'on demande aux transformations birationnelles de commuter avec celles-ci.

Définition 4.1.7 (Transformation birationnelle réelle).

Soient (X, σ) et (Y, τ) deux surfaces algébriques réelles projectives lisses. Une **transformation birationnelle réelle** $\varphi : X \rightarrow Y$ est une transformation birationnelle entre les surfaces complexes X et Y commutant avec les structures réelles.

Pour pouvoir transposer les résultats du cas complexe au cas réel, il est naturel de voir comment se comporte les éclatements et les contractions réels.

Proposition 4.1.8 (Éclatements réels).

Soit (X, σ) une surface projective lisse réelle.

1. L'éclatement $\pi : \widehat{X} \rightarrow X$ d'un point réel de X ou d'une paire de points non-réels conjugués de X permet de munir \widehat{X} d'une structure réelle telle que π soit réelle.
2. L'éclatement d'un point est réel si et seulement si ce point est réel. L'éclatement d'une paire (p_1, p_2) de points non-réels est réel si et seulement si $\sigma(p_1) = p_2$.

Proposition 4.1.9 (Contractions réelles).

Soit (X, σ) une surface projective lisse réelle.

1. Si D est un diviseur sur X tel que :
 - $D = \sigma^*D$ avec $D^2 = -1$ et D isomorphe à $\mathbb{P}^1(\mathbf{C})$;
 - ou $D = E + \sigma^*E$ avec $(E.\sigma^*E) = 0$, $E^2 = -1$ et E isomorphe à $\mathbb{P}^1(\mathbf{C})$,
alors il existe une structure réelle naturelle sur $\pi(X)$, image de X par la contraction π de D , telle que π soit réelle.
2. Si $D = E + \sigma^*E$ avec $(E.\sigma^*E) \neq 0$, alors on ne peut pas contracter D .

On en déduit facilement le théorème de factorisation forte pour les transformations birationnelles réelles.

Théorème 4.1.10 (Factorisation forte pour des transformations birationnelles réelles).

Une transformation birationnelle réelle entre surfaces projectives lisses réelles se factorise en des éclatements et des contractions réels.

Le théorème précédent montre que si l'on s'intéresse à la topologie du lieu réel de surfaces réelles, il est suffisant de regarder l'action des éclatements.

Proposition 4.1.11.

Soit (X, σ) une surface réelle projective non-singulière.

- Soit \widehat{X} une surface réelle obtenue par éclatement d'une paire de points conjugués de X . Alors $\widehat{X}(\mathbf{R}) \approx X(\mathbf{R})$.
- Soit $p \in X(\mathbf{R})$, alors le lieu réel de l'éclaté de X en p , noté Bl_p^X , est obtenu par somme connexe de $X(\mathbf{R})$ avec $\mathbb{R}\mathbb{P}^2 : Bl_p^X(\mathbf{R}) = X(\mathbf{R}) \# \mathbb{R}\mathbb{P}^2$.

Démonstration. Le premier point est évident puisque les (-1) -courbes ajoutées ne contiennent pas de point réel et que les éclatements constituent des isomorphismes au voisinage de $X(\mathbf{R})$.

Pour le second point, l'opération topologique revient à enlever un point (ou un disque à homéomorphisme près) et à recoller un plan projectif réel $\mathbb{R}\mathbb{P}^2$ privé d'un disque le long des cercles produits. \square

Corollaire 4.1.12.

Deux surfaces réelles projectives non-singulières birationnellement équivalentes sur \mathbf{R} ont le même nombre de composantes connexes.

4.2 Structure de fibré en coniques

Définition 4.2.1 (Fibré en coniques).

Soit X une surface algébrique complexe projective lisse. Une **structure de fibré en coniques** sur X est un morphisme surjectif $\pi : X \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbf{C})$ dont les fibres sont isomorphes à des coniques planes projectives (pouvant être singulières ou non, réduites ou non).

Si (X, σ) est une surface algébrique réelle projective non-singulière, une **structure de fibré en coniques réel** est un

morphisme surjectif $\pi : X \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbf{C})$ (où $\mathbb{P}^1(\mathbf{C})$ est muni de la structure réelle donnée par $\sigma_{\mathbb{P}}$) définissant une structure de fibré en coniques commutant avec les structures réelles :

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\sigma} & X \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ \mathbb{P}^1(\mathbf{C}) & \xrightarrow{\sigma_{\mathbb{P}}} & \mathbb{P}^1(\mathbf{C}) \end{array}$$

Dans la suite nous dirons simplement "fibré en coniques (réel)" pour "une surface algébrique complexe (réelle) projective non-singulière munie d'une structure de fibré en coniques (réel)".

Notre objectif dans un premier temps est d'établir les lieux réels possibles pour une surface réelle munie d'une structure de fibré en coniques réel. Cette étude utilise les outils de la géométrie birationnelle et notamment le théorème de factorisation forte qui nous dit qu'une transformation birationnelle réelle ne peut modifier le lieu réel que par des briques élémentaires homéomorphes à $\mathbb{R}\mathbb{P}^2$.

Nous allons évidemment avoir besoin de la classification des coniques projectives planes dont on pourra par exemple retrouver une preuve sous la forme d'un exercice corrigé dans [Man20] (Exercice 1.2.68). Rappelons le résultat.

Théorème 4.2.2 (Classification des coniques projectives planes).

Soit $P \in \mathbf{C}[x, y, z]$ un polynôme homogène définissant une conique plane projective complexe. Alors à un changement de variables linéaires près, P est l'un des trois polynômes suivant :

- x^2 (droite projective double) ;
- $x^2 + y^2$ (deux droites projectives s'intersectant en un point) ;
- $x^2 + y^2 + z^2$ (conique projective irréductible isomorphe à $\mathbb{P}^1(\mathbf{C})$).

Si, de plus, P est à coefficients réels, alors P définit une conique réelle plane projective et à un changement de variables linéaire (réel) près, P est l'un des cinq polynômes à coefficients réels suivant :

- x^2 (droite réelle projective double) ;
- $x^2 + y^2$ (deux droites projectives imaginaires se croisant en un point réel) ;
- $x^2 - y^2$ (deux droites projectives réelles se croisant en un point) ;
- $x^2 + y^2 + z^2$ (conique projective irréductible sans point réel) ;
- $x^2 + y^2 - z^2$ (conique projective irréductible avec un cercle de points réels).

Considérons une surface projective lisse X munie d'une structure de fibré en coniques $\pi : X \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbf{C})$. On peut alors montrer qu'aucune fibre ne peut correspondre à une droite projective double car cela contredirait le caractère lisse de X . Les fibres singulières de $X \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbf{C})$ sont donc composées de deux droites s'intersectant en un point. On montre aussi qu'il ne peut y avoir qu'un nombre fini d'entre elles. En particulier, il y a au moins une fibre non-singulière et isomorphe à $\mathbb{P}^1(\mathbf{C})$ donc le théorème de Noëther-Enriques (cf. [Bea78]) montre que X est réglée sur $\mathbb{P}^1(\mathbf{C})$: X est birationnellement équivalente à $\mathbb{P}^1(\mathbf{C}) \times \mathbb{P}^1(\mathbf{C})$. Puisque $\mathbb{P}^1(\mathbf{C}) \times \mathbb{P}^1(\mathbf{C})$ est elle-même birationnellement équivalente à $\mathbb{P}^2(\mathbf{C})$, on en déduit que X est rationnelle.

Utilisant la classification des surfaces rationnelles complexes, on peut même exprimer le nombre de fibres singulières de $X \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbf{C})$ en fonction du diviseur canonique K_X de X .

Proposition 4.2.3.

Le nombre de fibres singulières d'un fibré en coniques X est $8 - K_X^2$.

Démonstration. Voir Exercice 4.3.15 dans [Man20]. □

Considérons maintenant une surface algébrique projective non-singulière (X, σ) munie d'une structure de fibré en coniques **réel**. Pour éviter toute ambiguïté, nous adopterons les terminologies suivantes.

Définition 4.2.4 (Géométriquement rationnelle).

Une variété algébrique réelle (X, σ) est dite **géométriquement rationnelle** si la variété algébrique complexe X est rationnelle.

Définition 4.2.5 (Géométriquement irréductible).

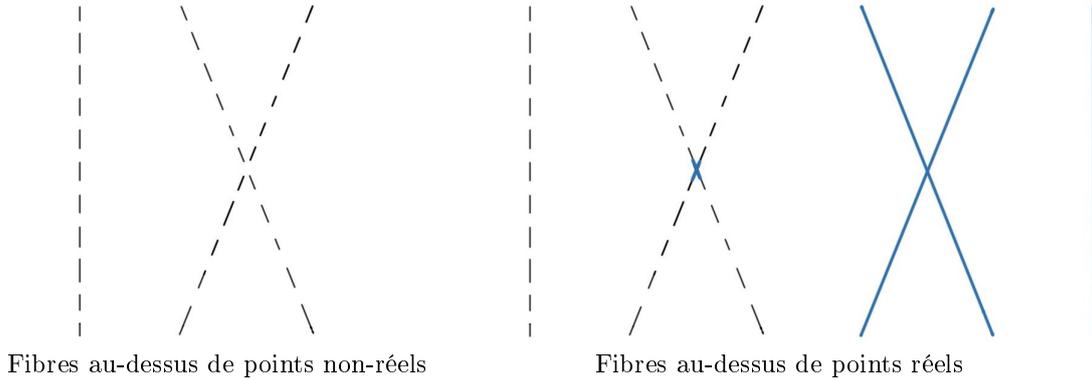
Une variété algébrique réelle (X, σ) sera dite **géométriquement irréductible** lorsque X est une variété algébrique complexe irréductible.

Ainsi la surface algébrique réelle (X, σ) est supposée géométriquement irréductible et ce qui précède montre que la structure de fibré en coniques lui impose d'être géométriquement rationnelle.

La commutation des involutions avec le morphisme $\pi : X \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbf{C})$ a pour conséquence que seules les fibres au-dessus de points réels $\mathbb{P}^1(\mathbf{R}) \subset \mathbb{P}^1(\mathbf{C})$ peuvent contenir des points réels. La classification des coniques donnée par le théorème 4.2.2 et les possibilités précédemment exclues donnent les fibres possibles suivantes pour π .

- Au-dessus d'un point $b \in \mathbb{P}^1(\mathbf{C})$ non réel la fibre est soit
 - lisse, c'est alors une droite projective complexe sans point réel ;
 - singulière, c'est alors une paire de droites projectives complexes sans point réel et s'intersectant en un point.
- Au-dessus d'un point $b \in \mathbb{P}^1(\mathbf{R})$ la fibre est soit
 - une droite projective complexe sans point réel ;
 - une paire de droites projectives complexes D_1, D_2 s'intersectant en leur unique point réel ;
 - une paire de droites projectives complexes D_1, D_2 contenant chacune une droite projective réelle $D_{i,\mathbf{R}}$ telle que $D_1 \cap D_2 = D_{1,\mathbf{R}} \cap D_{2,\mathbf{R}}$ est un point réel de X ;
 - une droite projective complexe contenant une droite projective réelle de points réels.

Dans les schémas suivants, les pointillés représentent les points complexes et les points réels sont représentés en bleu. Lorsqu'une composante irréductible contient une droite réelle, on la représente simplement par une droite bleue.



Exemple fondamental. Soit (F, σ_F) une surface réelle lisse projective ayant un ouvert affine U isomorphe à l'ensemble algébrique de $\mathbb{A}^3(\mathbf{C})$ défini par l'équation

$$x^2 + y^2 = \pm \prod_{i=1}^{2m} (z - a_i)$$

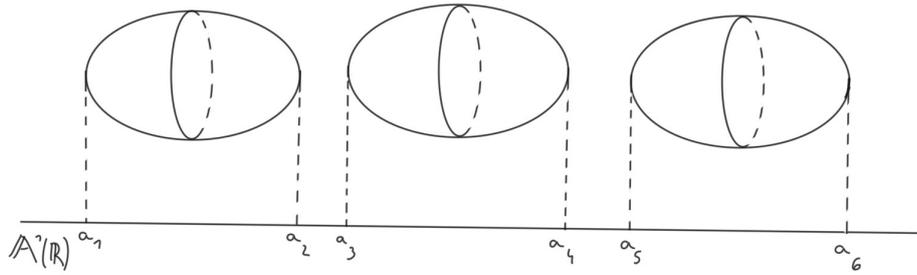
où les a_i sont des nombres réels distincts et $m \geq 1$. On suppose que F admet une structure de fibré en coniques réel qui, sur U et à travers l'isomorphisme précédent, coïncide avec l'application $(x, y, z) \mapsto z \in \mathbb{A}^1(\mathbf{C}) \subset \mathbb{P}^1(\mathbf{C})$. Dans la suite, $\mathbb{A}^1(\mathbf{C})$ désigne l'ouvert affine de $\mathbb{P}^1(\mathbf{C})$ obtenue comme image de l'application précédente. On supposera aussi qu'au dessus de $\mathbb{A}^1(\mathbf{C})$, tous les points réels de F sont dans l'ouvert affine U et que la fibre au-dessus de l'infini $\mathbb{P}^1(\mathbf{C}) \setminus \mathbb{A}^1(\mathbf{C})$ est non-singulière. On admettra l'existence de cette surface. Cette définition peut sembler vague mais ce ne sera pas problématique car on ne s'y ramènera qu'à travers des transformations birationnelles donc la décrire seulement sur un ouvert affine nous suffit. Décrivons maintenant le lieu réel de cette surface.

Les seules fibres singulières sont celles au-dessus des $a_i \in \mathbb{A}^1(\mathbf{R})$. S'il n'y a pas de fibres singulières, autrement dit $m = 0$, alors il y a deux possibilités :

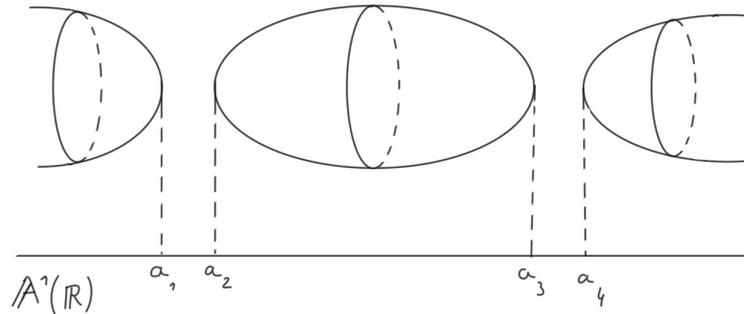
- aucune des fibres au dessus de $\mathbb{A}^1(\mathbf{R})$ ne contient de point réel (cas de l'équation $x^2 + y^2 = -1$), alors la fibre au-dessus de l'infini ne peut pas non plus contenir de point réel car cela donnerait une variété algébrique sur \mathbf{R} de dimension au plus 1. Donc $F(\mathbf{R}) = \emptyset$.
- toutes les fibres au-dessus de $\mathbb{A}^1(\mathbf{R})$ contiennent un cercle de point réel. Cela doit alors aussi être le cas au-dessus de l'infini car $F(\mathbf{R})$ est soit vide soit compact et donc $\pi_F(F(\mathbf{R}))$ est soit vide soit un compact de $\mathbb{P}^1(\mathbf{R})$. Ainsi, le lieu réel de F forme un fibré en cercles au dessus de $\mathbb{P}^1(\mathbf{R}) \approx \mathbb{S}^1$ donc est homéomorphe soit à un tore, soit à une bouteille de Klein.

S'il y a $2m$ fibres singulières avec $m \geq 1$, alors montrons que le lieu réel est homéomorphe à l'union disjointe de m sphères. Le polynôme $P(z) = \pm \prod_{i=1}^{2m} (z - a_i)$ est pair donc de même signe au voisinage de $-\infty$ et de $+\infty$, autrement dit de signe constant au voisinage de l'infini dans $\mathbb{P}^1(\mathbf{R})$.

- Si $P < 0$ au voisinage de l'infini, alors l'image $\pi_F(F(\mathbf{R})) \subset \mathbb{P}^1(\mathbf{R})$ est une union finie d'intervalles fermés inclus dans $\mathbb{A}^1(\mathbf{R})$ et dont les bornes sont les a_i . Au-dessus d'un tel intervalle, le lieu réel est homéomorphe à la suspension topologique d'un cercle, *i.e.* à une sphère.



2. Si $P > 0$ au voisinage de l'infini, pour la même raison qu'au point ii) précédent, le lieu réel au-dessus de l'infini doit être homéomorphe à un cercle (il doit contenir un point réel et on a supposé cette fibre non-singulière). Appliquant un automorphisme réel de $\mathbb{P}^1(\mathbf{C})$ échangeant l'un des points $z \in \mathbb{A}^1(\mathbf{R})$ tel que $P(z) < 0$ avec l'infini, on se ramène au cas précédent.



Le théorème 4.4.3 justifiera pleinement l'importance de cet exemple.

4.3 Lieux réels de fibrés en coniques réels

L'exemple fondamental permet de construire des fibrés en coniques réels ayant pour lieu réel (à homéomorphisme près, on ne le précisera plus dans la suite) :

1. l'ensemble vide \emptyset ;
2. un tore $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$;
3. une union disjointe d'un nombre quelconque de sphères \mathbb{S}^2 .

On remarque que le tore et la sphère sont orientables donc ne peuvent être obtenus comme somme connexe de $\mathbb{R}\mathbb{P}^2$ et d'une surface topologique (car une telle somme connexe contiendrait un ruban de Möbius). Il n'est donc pas possible de contracter de courbe réelle dans des surfaces présentant de tels lieux réels.

À partir de fibrés en coniques dont le lieu réel est homéomorphe soit à un tore, soit à une union disjointe de sphères, il est naturel de voir quel lieu réel peut être obtenu après une transformation birationnelle réelle quelconque. Les théorèmes 4.1.10 et 4.1.11 donnent la réponse : ce sont les surfaces précédentes dont on prend la somme connexe avec un nombre quelconque de facteurs $\mathbb{R}\mathbb{P}^2$. En particulier, une observation intéressante est qu'il est impossible d'obtenir de cette façon une surface orientable avec un genre $g > 1$.

Et qu'en est-il si l'on se restreint aux fibrés en coniques ? Autrement dit, à partir d'un fibré en coniques réel (X, σ) , quels éclatements est-il possible de faire tout en restant un fibré en coniques réels ?

Cette question est en fait assez subtile et sera discutée plus en détail à la section suivante. Nous allons tout de même apporter un premier élément de réponse. Supposons que l'on veuille réaliser l'une des configurations topologiques précédentes comme lieu réel d'un fibré en coniques. Si c'est un tore, il suffit de prendre $\mathbb{P}^1(\mathbf{C}) \times \mathbb{P}^1(\mathbf{C})$ et l'une des deux structures (symétriques) de fibré en coniques réel. Sinon, puisque $(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1) \# \mathbb{R}\mathbb{P}^2 = \#3\mathbb{R}\mathbb{P}^2$ et $\#0\mathbb{R}\mathbb{P}^2 = \mathbb{S}^2$, on cherche à réaliser un espace du type $\#n_1\mathbb{R}\mathbb{P}^2 \sqcup \dots \sqcup \#n_l\mathbb{R}\mathbb{P}^2$. On commence alors par choisir un fibré en coniques (X, σ) dont le lieu réel est l'union disjointe de l sphères. Il est clair qu'on peut en fait supposer $l = 1$ car les éclatements sont des isomorphismes locaux, ce qui revient à traiter chaque composante connexe du lieu réel séparément. L'éclatement d'un point réel x contenu dans une fibre non-singulière est une surface réelle (Bl_x^X, σ_x) (voir 4.1.8) qui est naturellement munie d'une fibration sur $\mathbb{P}^1(\mathbf{C})$ dont toutes les fibres sont isomorphes à celles de X sauf celle au-dessus de $\pi_X(x)$ qui

est l'union de deux droites projectives réelles.

$$\begin{array}{c} Bl_x^X \\ \downarrow \varepsilon \\ X \\ \downarrow \pi_X \\ \mathbb{P}^1(\mathbf{C}) \end{array} \quad .$$

$\pi_X \circ \varepsilon$ (courbe courbée à gauche)

Ainsi Bl_x^X est munie d'une structure de fibré en coniques réel. Il suffit alors d'itérer le procédé (en changeant donc de fibre pour chaque éclatement) pour chaque facteur $\mathbb{R}\mathbb{P}^2$. On obtient la première affirmation du théorème suivant, la seconde étant obtenue de la même façon en utilisant une version faible de 4.4.3 qui dit que tout fibré en coniques réel est birationnellement équivalent sur \mathbf{R} à une surface donnée par l'exemple fondamental.

Théorème 4.3.1 (Lieux réels des fibrés en coniques réels).

1. Il existe une surface projective non-singulière réelle (X, σ) munie d'une structure de fibré en coniques réel $\pi : X \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbf{C})$ dont le lieu réel est soit vide soit homéomorphe à l'un des espaces topologiques suivants :
 - un tore $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$;
 - une union disjointe de sphères \mathbb{S}^2 et de surfaces compactes non orientables de genre $g \geq 1$.
2. Toute surface projective non-singulière réelle birationnellement équivalente sur \mathbf{R} à un fibré en coniques réel a son lieu réel soit vide soit homéomorphe à l'un des espaces topologiques précédents.

4.4 Équivalences birationnelles de fibrés en coniques

Commençons par revenir sur la question posée au début de la section précédente. Soit (X, σ) un fibré en coniques réel. Une transformation birationnelle réelle $\varphi : X \dashrightarrow Y$ avec (Y, τ) surface projective réelle lisse se décompose en éclatements et contractions réels

$$X = \mathcal{S}_0 \dashrightarrow \mathcal{S}_1 \dashrightarrow \dots \dashrightarrow \mathcal{S}_l = Y .$$

Or, les théorèmes 4.1.8 et 4.1.9 montrent que les \mathcal{S}_i possèdent une structure réelle naturelle qui rend ces transformations réelles. On voit aussi facilement, comme détaillé à la section précédente, qu'elles sont munies chacune d'une fibration $\mathcal{S}_i \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbf{C})$ respectée par les éclatements et les contractions. Si ces fibrations munissent les \mathcal{S}_i d'une structure de fibré en coniques, alors les éclatements et les contractions $\mathcal{S}_i \dashrightarrow \mathcal{S}_{i+1}$ ($i = 0, \dots, l-1$) sont des équivalences birationnelles réelles de fibrés en coniques comme dans la définition suivante.

Définition 4.4.1 (Équivalence birationnelle de fibré en coniques).

Deux fibrés en coniques X et Y sont dits **birationnellement équivalents** s'il existe une application birationnelle $\varphi : X \dashrightarrow Y$ et un automorphisme ϕ de $\mathbb{P}^1(\mathbf{C})$ faisant commuter le diagramme

$$\begin{array}{ccc} X & \dashrightarrow \varphi & Y \\ \pi_X \downarrow & & \downarrow \pi_Y \\ \mathbb{P}^1(\mathbf{C}) & \xrightarrow[\sim]{\phi} & \mathbb{P}^1(\mathbf{C}) \end{array} .$$

Si ces deux fibrés sont supposés réels, cette équivalence est dite **réelle** ou **sur \mathbf{R}** lorsque les applications φ et ϕ commutent avec les structures réelles.

Ainsi, si chaque \mathcal{S}_i est munie de sa structure réelle et de sa fibration naturelle, si $Y = \mathcal{S}_l$ est un fibré en coniques réel pour ces structures, alors φ est une équivalence birationnelle de fibré en coniques.

Mais il est a priori possible d'avoir une transformation birationnelle réelle $\varphi : X \dashrightarrow Y$ entre deux fibrés en coniques réels qui ne respectent pas les structures de fibrés, autrement dit la structure de Y n'est pas celle induite par la structure de X à travers les éclatements et les contractions réels décomposant φ . Dans cette section, nous allons classer les fibrés en coniques réels à équivalences birationnelles réelles près.

Soit (X, σ) un fibré en coniques réels. Le lieu réel de X étant compact et le morphisme π_X étant régulier donc continue pour la topologie euclidienne, l'ensemble $I(X) := \pi_X(X(\mathbf{R}))$ est un compact de $\mathbb{P}^1(\mathbf{R}) \approx \mathbb{S}^1$. Puisque $X(\mathbf{R})$ est de dimension 2, et qu'une fibre ne peut contenir de variété constituée de points réels de dimension > 1 , $I(X)$ ne peut contenir de singleton et doit donc être une union finie d'intervalles fermés. De plus, les bornes de ces intervalles sont des points de fibres singulières et ces points découpent $\mathbb{P}^1(\mathbf{R})$ en des intervalles ouverts alternativement inclus dans $I(X)$ ou dans $\mathbb{P}^1(\mathbf{R}) \setminus I(X)$. On en déduit que le nombre de fibres singulières est nécessairement pair.

Théorème 4.4.2.

S'il existe une équivalence birationnelle réelle de fibrés en coniques entre $\pi_X : X \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbf{C})$ et $\pi_Y : Y \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbf{C})$, alors il existe un automorphisme $\tau : \mathbb{P}^1(\mathbf{C}) \cong \mathbb{P}^1(\mathbf{C})$ tel que $\tau(I(X)) = I(Y)$.

Démonstration. Soient $\varphi : X \rightarrow Y$ et $\tau : \mathbb{P}^1(\mathbf{C}) \cong \mathbb{P}^1(\mathbf{C})$ donnant une équivalence birationnelle réelle de fibrés en coniques entre X et Y . Alors le domaine de φ^{-1} est Y privé d'un nombre fini de points (car on est en dimension 2!) et en particulier il n'y a qu'un nombre fini de fibres sur lesquelles $Y(\mathbf{R})$ et $\varphi(X(\mathbf{R}))$ diffèrent. Ainsi $I(Y)$ et $\tau(I(X))$ ne diffèrent au plus que de quelques points, mais ce sont des unions d'intervalles fermés d'où en réalité $\tau(I(X)) = I(Y)$. □

La réciproque du théorème précédent est en fait vraie. Sa démonstration repose sur le théorème crucial qui suit dont une preuve pourra être trouvée dans [Sil89] (Corollaire 3.1 Chapitre VI) ou dans [Kol97] (Théorème 4.6).

Théorème 4.4.3 (Comessatti).

Soit (X, σ) un fibré en coniques réel. Alors il existe une équivalence birationnelle réelle de fibré en coniques entre (X, σ) et une surface (F, σ_F) comme donnée dans l'exemple fondamental plus haut. En particulier (X, σ) contient un ouvert affine isomorphe à un ensemble affine de $\mathbb{A}^3(\mathbf{C})$ défini par une équation de la forme

$$x^2 + y^2 = \pm \prod_{i=1}^{2m} (z - a_i)$$

où $m \in \mathbf{N}$, les a_i sont des réels distincts et la fibration en coniques est donnée à travers cet isomorphisme par $(x, y, z) \mapsto z$.

Corollaire 4.4.4.

Si deux fibrés en coniques réels $\pi_X : X \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbf{C})$ et $\pi_Y : Y \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbf{C})$ sont tels qu'il existe $\tau : \mathbb{P}^1(\mathbf{C}) \cong \mathbb{P}^1(\mathbf{C})$ vérifiant $\tau(I(X)) = I(Y)$, alors ces deux fibrés en coniques réels sont birationnellement équivalents sur \mathbf{R} .

Démonstration. Par le théorème 4.4.3, on peut supposer que X et Y sont les ensembles algébriques de $\mathbb{A}^3(\mathbf{R})$ donnés par les équations respectives

$$x^2 + y^2 = \pm \prod_{i=1}^{2m} (z - a_i) \quad \text{et} \quad x^2 + y^2 = \pm \prod_{i=1}^{2n} (z - b_i)$$

avec les a_i (resp. les b_i) réels distincts. Alors les fibres singulières de X (resp. de Y) sont celles au-dessus des a_i (resp. des b_i). Donc $m = n$ et l'automorphisme τ envoie les a_i sur les b_i . Appliquant l'automorphisme τ à la base $\mathbb{P}_{z,t}^1(\mathbf{C})$, X est donnée sur un ouvert affine par l'équation

$$x^2 + y^2 = \pm \prod_{i=1}^{2n} (\tau(z) - b_i).$$

Enfin le signe doit correspondre à celui de l'équation de Y par l'hypothèse. □

Définition 4.4.5 (Fibré relativement minimal).

Un fibré en coniques $\pi : X \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbf{C})$ est **relativement minimal** si tout morphisme $X \rightarrow Y$ vers un fibré en coniques $\pi_Y : Y \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbf{C})$ induisant une équivalence birationnelle de fibrés en coniques est un isomorphisme.

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & Y \\ \pi_X \downarrow & & \downarrow \pi_Y \\ \mathbb{P}^1(\mathbf{C}) & \xrightarrow{\sim} & \mathbb{P}^1(\mathbf{C}) \end{array} .$$

Un fibré en coniques réel $\pi : X \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbf{C})$ est **relativement \mathbf{R} -minimal** si tout morphisme $X \rightarrow Y$ vers un fibré en coniques réel $\pi_Y : Y \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbf{C})$ induisant une équivalence birationnelle réelle de fibrés en coniques est un isomorphisme.

$$\begin{array}{ccc} \begin{array}{c} \sigma_X \\ \downarrow \\ X \end{array} & \longrightarrow & \begin{array}{c} \sigma_Y \\ \downarrow \\ Y \end{array} \\ \pi_X \downarrow & & \downarrow \pi_Y \\ \mathbb{P}^1(\mathbf{C}) & \xrightarrow{\sim} & \mathbb{P}^1(\mathbf{C}) \\ \sigma_{\mathbb{P}} \uparrow & & \uparrow \sigma_{\mathbb{P}} \end{array}$$

Par le théorème de Castelnuovo, il est facile de donner une définition équivalente de fibré relativement (**R**-)minimal.

Proposition 4.4.6.

Un fibré en coniques $\pi : X \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbf{C})$ est relativement minimal si et seulement si toutes ses fibres sont non-singulières.

Un fibré en coniques réel (X, σ) est relativement **R**-minimal si et seulement si les seules fibres singulières sont au-dessus de points réels et sont constituées de deux (-1) -courbes conjuguées.

Démonstration. Soient $\pi_X : X \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbf{C})$ et $\pi_Y : Y \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbf{C})$ deux fibrés en coniques. Supposons que $\varphi : X \rightarrow Y$ est un morphisme induisant une équivalence birationnelle réelle de fibrés en coniques : il existe ϕ automorphisme de $\mathbb{P}^1(\mathbf{C})$ faisant commuter

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\varphi} & Y \\ \pi_X \downarrow & & \downarrow \pi_Y \\ \mathbb{P}^1(\mathbf{C}) & \xrightarrow[\sim]{\phi} & \mathbb{P}^1(\mathbf{C}) \end{array} .$$

Notons p un point de X , Bl_p^X l'éclaté de X en p et ε la projection canonique. Comme vu précédemment, on a une fibration $\pi_X \circ \varepsilon$ qui raffine naturellement π_X au sens où ses fibres sont toutes isomorphes à celles de π_X sauf celle au-dessus de $\pi_X(p)$ qui contient le diviseur exceptionnel.

$$\begin{array}{c} Bl_p(X) . \\ \downarrow \varepsilon \\ X \\ \downarrow \pi_X \\ \mathbb{P}^1(\mathbf{C}) \end{array} \quad \begin{array}{c} \swarrow \pi_X \circ \varepsilon \\ \searrow \end{array}$$

De la propriété universelle de l'éclatement 4.1.1, il suit que le fibré $\pi_X : X \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbf{C})$ est relativement minimal si et seulement s'il n'admet aucune courbe exceptionnelle (*i.e.* qui est le diviseur exceptionnel d'un certain éclatement) contenue dans une fibre. Par le théorème de Castelnuovo, cela équivaut à n'avoir aucune (-1) -courbe entièrement contenue dans une fibre.

Enfin, puisqu'une fibre F doit vérifier $F^2 = 0$ et utilisant la classification des différentes fibres d'un fibré en coniques réalisée précédemment :

- si F est une fibre lisse, elle est irréductible, isomorphe à $\mathbb{P}^1(\mathbf{C})$ et vérifie $F^2 = 0$;
- si F est singulière, elle est donnée par $F = F_1 \cup F_2$ avec F_1, F_2 irréductibles isomorphes à $\mathbb{P}^1(\mathbf{C})$ et vérifiant $\#(F_1 \cap F_2) = 1$. D'où $(F_1, F_2) = 1$ et $0 = F^2 = (F_1 + F_2)^2 = F_1^2 + 2(F_1, F_2) + F_2^2 = 2 + F_1^2 + F_2^2$. Et par symétrie $F_1^2 = F_2^2$ donc $F_1^2 = F_2^2 = -1$.

On en déduit le premier énoncé.

Dans le cas d'un fibré réel, il reste à voir quelles contractions sont réelles. Le résultat découle donc de la proposition 4.1.9. □

On en déduit que le modèle du théorème 4.4.3 est relativement **R**-minimal.

Références

- [Bea78] Arnaud BEAUVILLE. *Surfaces Algébriques Complexes*. Astérisque, No. 54. Avec une sommaire en anglais. Société Mathématique de France, Paris, 1978. iii+172. URL : <https://mathscinet.ams.org/mathscinet-getitem?mr=0485887> (visité le 23/05/2023).
- [Gab00] Alexandre GABARD. “Topologie Des Courbes Algébriques Réelles : Une Question de Felix Klein”. In : (1^{er} jan. 2000). DOI : 10.5169/seals-64798.
- [Har08] Robin HARTSHORNE. *Algebraic Geometry*. 14^e éd. Graduate Texts in Mathematics 52. Literaturverz. S. 459 - 469. New York, NY : Springer, 2008. 496 p. ISBN : 978-0-387-90244-9.
- [Hir76] Morris W. HIRSCH. *Differential Topology*. T. 33. Graduate Texts in Mathematics. New York, NY : Springer, 1976. ISBN : 978-1-4684-9451-8 978-1-4684-9449-5. DOI : 10.1007/978-1-4684-9449-5. URL : <http://link.springer.com/10.1007/978-1-4684-9449-5> (visité le 10/05/2023).
- [Kol97] János KOLLÁR. *Real Algebraic Surfaces*. Comment: LATEX2e, 27 pages. 2 déc. 1997. DOI : 10.48550/arXiv.alg-geom/9712003. arXiv : alg-geom/9712003. URL : <http://arxiv.org/abs/alg-geom/9712003> (visité le 25/05/2023). preprint.
- [Man20] Frédéric MANGOLTE. *Real Algebraic Varieties*. Springer Monographs in Mathematics. Cham : Springer International Publishing, 2020. ISBN : 978-3-030-43103-7 978-3-030-43104-4. DOI : 10.1007/978-3-030-43104-4. URL : <http://link.springer.com/10.1007/978-3-030-43104-4> (visité le 19/04/2023).
- [Sha13] I. R. SHAFAREVICH. *Basic Algebraic Geometry 1: Varieties in Projective Space*. 3rd edition. New York : Springer, 2013. ISBN : 978-3-642-37955-0.
- [Sil89] Robert SILHOL. *Real Algebraic Surfaces*. T. 1392. Lecture Notes in Mathematics. Berlin, Heidelberg : Springer, 1989. ISBN : 978-3-540-51563-0 978-3-540-70649-6. DOI : 10.1007/BFb0088815. URL : <http://link.springer.com/10.1007/BFb0088815> (visité le 25/05/2023).