Notes sur l'algèbre commutative

Guillaume Kineider

14 avril 2024

Ce document est la transcription (complétée et corrigée) d'un séminaire doctorant donné à l'I2M. Le but est de revoir les débuts de l'algèbre commutative (théorie des anneaux, idéaux etc.) avec un nouveau regard. Ceci n'est pas un cours qui répondrait aux questions "quoi ?" ou "comment ?" mais plutôt une annexe d'un cours qui tente de répondre à la question "pourquoi ?". Il n'y a rien dans ces notes de plus "évolué" que la notion d'action de groupe et pourraient tout à fait être lues par un étudiant de L3. Cette vision de l'algèbre commutative s'appuie sur deux principes :

— l'utilisation de treillis pour représenter les choses ;

— l'étude d'un anneau à travers son "action" sur lui même par multiplication (voir section 2).

L'inspiration d'utiliser les treillis vient de ma lecture il y a quelques années du livre *Groupes finis et treillis de leurs sous-groupes* d'Alain Debreil. Je me suis demandé s'il était possible de faire la même chose avec les anneaux. Il se trouve que c'est effectivement possible. C'est quelque chose de connu dans la littérature, mais à mon sens malheureusement pas assez exploité et trop confidentiel. À noter que les anneaux que je considère sont généralement infinis, ce qui rend légèrement moins intéressant le concept de treillis. Cependant, j'ai tout de même adopté cette façon de voir l'algèbre et cette représentation m'est souvent d'une grande aide dans mes recherches. J'espère que le lecteur/la lectrice trouvera ce document inspirant et l'aidera à mieux "voir" l'algèbre commutative.

1 Treillis

1.1 Quésaco ?

Nous allons commencer par nous familiariser avec le concept de treillis. Cette partie est presque entièrement tirée de *Groupes finis et treillis de leurs sous-groupes* d'Alain Debreil. Je ne peux qu'encourager les personnes intéressées par les détails (et les preuves) concernant les propriétés des treillis et leurs liens avec les groupes à se référer à cet ouvrage.

Définition 1.1.1.
Un treillis est un ensemble ordonné $(\mathscr{L}, \leqslant)$ tel que tout couple $(a, b) \in \mathscr{L}^2$ admet

— un plus petit majorant, noté $\sup(a, b)$;

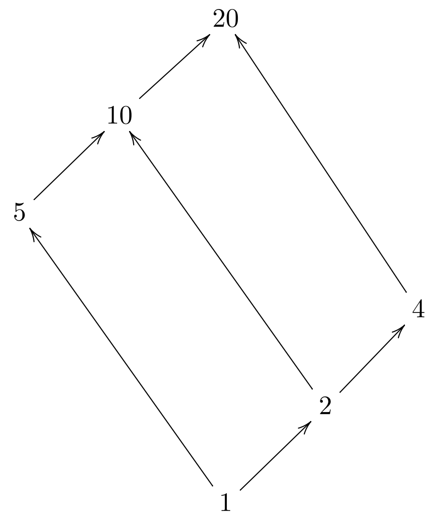
— un plus grand minorant, noté $\inf(a, b)$.

Exemple : $\mathbf{N}^*$ avec la relation "diviseur de".
Le schéma suivant indique que si m et n sont deux entiers non nuls, $\sup(m, n) = \operatorname{ppcm}(m, n)$ et $\inf(m, n) = \operatorname{pgcd}(m, n)$.

$$\begin{tikzcd}
 & \operatorname{ppcm}(m,n) & \\
m \arrow[ur] & & n \arrow[ul] \\
 & \operatorname{pgcd}(m,n) \arrow[ul] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

Définition 1.1.2.
Un sous-ensemble $\mathscr{K}$ d'un treillis $(\mathscr{L}, \leqslant)$ muni de l'ordre induit par $\leqslant$ est un sous-treillis si pour tout couple $(a, b) \in \mathscr{L}^2$, $\sup(a, b)$ et $\inf(a, b)$ sont dans $\mathscr{K}$.

Exemple : L'ensemble des entiers naturels non-nuls divisant 20 est un sous-treillis du treillis $\mathbf{N}^*$ ci-dessus.



Le concept de treillis ne va pas dans ce document me servir à démontrer certains résultats non-triviaux. La seule chose qui m'intéresse c'est de pouvoir dessiner de jolis graphes comme celui juste au-dessus... Nous allons voir que ceux-ci permettent de se représenter graphiquement certaines définitions, propriétés et constructions autrement très abstraites (voire absconses). Ce document ne présente que quelques exemples. J'espère convaincre la lectrice de l'intérêt de cette notion et la rendre capable de se l'approprier pour exprimer d'autres résultats avec ce point de vue.

À partir de maintenant, les orientations des flèches d'un treillis ne seront plus indiquées. La convention est que toute flèche est orientée vers le haut. Dans les treillis que je vais représenter cette convention sera très naturelle.

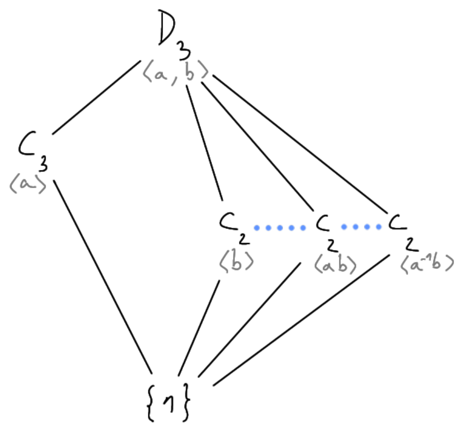
1.2 Treillis de groupes

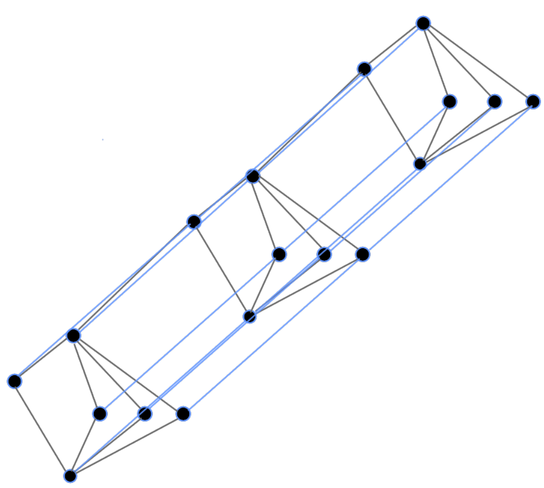
Il est temps de passer à la première utilisation de ces fameux treillis. Celle-ci concerne les groupes. Lorsque l'on est confronté à une structure algébrique, sa compréhension passe par celle de ses sous-structures et leurs configurations. C'est un principe fondamental en algèbre. Ainsi pour comprendre en profondeur un groupe, on s'intéresse à ses sous-groupes. Il se trouve que ceux-ci présentent une structure naturelle de treillis.

Proposition 1.2.1.
L'ensemble des sous-groupes d'un groupe G forme un treillis pour l'inclusion, noté $\mathscr{L}(G)$.
Pour $H, K \leqslant G$, $\sup(H,K) = <H,K> = <H \cup K>$ et $\inf(H,K) = H \cap K$.

Théoriquement, mon treillis est juste un graphe avec des sommets et des arcs. Mais un graphe a la grande qualité de pouvoir être décoré ! Je vais donc faire figurer certaines informations supplémentaires sur mon premier treillis en guise d'exemple.

Exemples : Treillis de $D_3 \simeq \mathfrak{S}_3 \simeq \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_2)$ et $D_3 \times C_{p^2}$ avec p premier.





Les nœuds du premier treillis sont nommés par la classe d'isomorphisme du sous-groupe correspondant (C_n est le groupe cyclique d'ordre n). On y a également fait figurer les générateurs et des points entre les sous-groupes conjugués. Le second treillis est là pour convaincre la lectrice que les treillis encodent bien, au moins en partie, la structure algébrique du groupe. Ici la structure de groupe produit $D_3 \times C_{p^2}$ se traduit par une sorte de produit cartésien des treillis de D_3 et C_{p^2} (qui est une liane avec trois sommets). Avec un peu d'expérience, il est possible de lire beaucoup d'informations dans le treillis d'un groupe. Puisque mon intérêt porte plutôt sur les anneaux, je n'en dirai cependant pas plus là-dessus.

On remarque que nos treillis de groupes ont toujours une "racine" (le sous-groupe trivial) et une "cime" (le groupe tout entier). Ce n'est pas une propriété générale des treillis mais ce sera le cas pour tous ceux qui nous intéresserons.

À ce stade, la lectrice pourrait s'interroger sur l'intérêt du concept de treillis. Ma façon de voir les choses est la suivante. Une première idée pour représenter graphiquement la structure d'un groupe G serait de donner un graphe dont les sommets sont ses sous-groupes et les arêtes représentent les inclusions. Mais il y aurait alors énormément d'arêtes "inutiles". La structure de treillis des sous-groupes permet de représenter la même quantité d'information en donnant un ensemble d'arcs minimal.

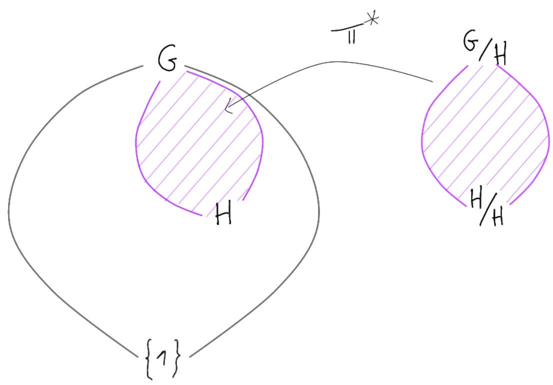
1.3 Théorème de correspondance

Un autre élément de réponse est le théorème de correspondance suivant qui est très lié à la structure de treillis. Nous présentons ici une version pour les groupes et un analogue pour les anneaux sera donné plus loin. Ici, On reconnaît un résultat très important qui est dans tout cours d'introduction de théorie des groupes mais il existe un théorème de correspondance dans beaucoup de situations faisant intervenir des treillis.

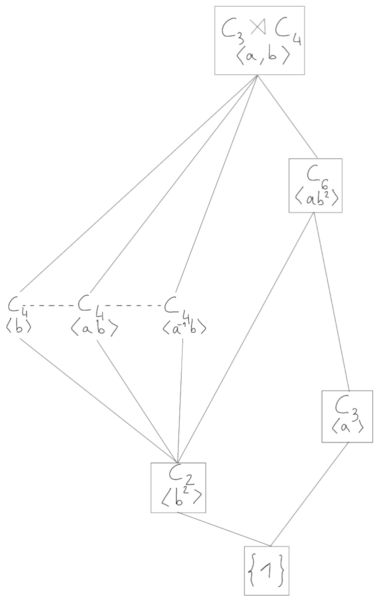
Théorème 1.3.1 (Théorème de correspondance)**.**
Soit H un sous-groupe d'un groupe G. L'ensemble des sous-groupes de G contenant H forme un sous-treillis $\mathscr{L}(H \subset G)$ de $\mathscr{L}(G)$.
Supposons H distingué dans G. Le morphisme canonique $\pi : G \to G/H$ induit un isomorphisme de treillis

$$\pi^* : \mathscr{L}\left({}^{G}\!/\!_{H}\right) \to \mathscr{L}(H \subset G).$$

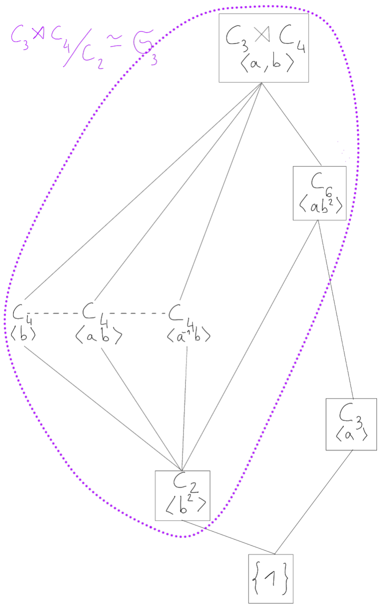
Ce théorème fondamental donne une correspondance de Galois entre les sous-groupes de G contenant H et les sous-groupes de ${}^{G}\!/\!_{H}$. Dans le cas des groupes, on peut montrer que cette correspondance préserve beaucoup de choses (le caractère distingué par exemple).
Ce qui est remarquable, c'est l'élégance avec laquelle les treillis permettent de visualiser ce résultat. Pour s'en rendre compte il est nécessaire de comprendre ce que signifie "isomorphisme de treillis". Je n'ai pas donné la définition parce qu'il s'agit exactement de ce que la lectrice pense : les treillis sont identiques à "relabelisation" des sommets près. La structure d'un groupe quotient est donc obtenue par extraction d'un fragment de la structure du groupe d'origine. On peut aussi remarquer que si on a dessiné le treillis de notre groupe, on a déjà sous les yeux le treillis de n'importe lequel de ses quotients. Il suffit d'en isoler la bonne partie.

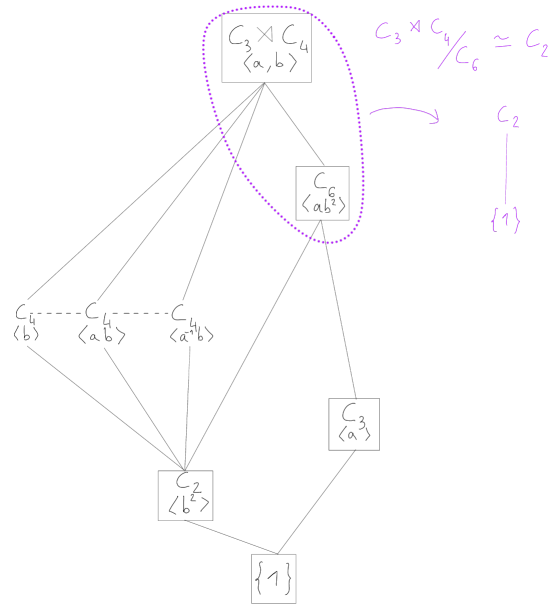


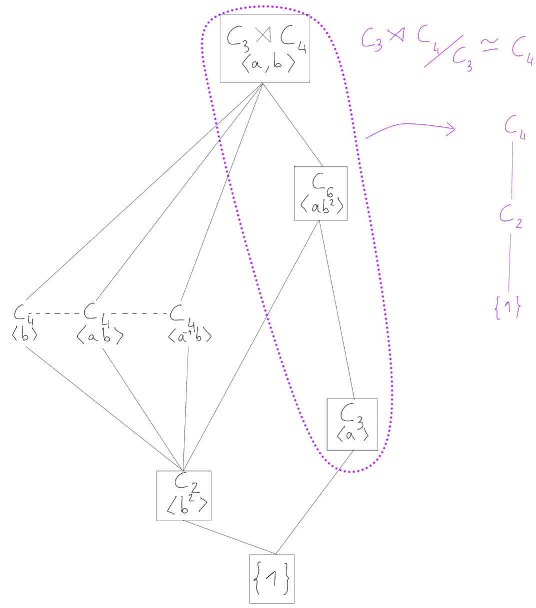
Sur un exemple concret, prenons $G = C_3 \rtimes C_4$. Les nœuds encadrés sont les sous-groupes distingués.



Voici trois exemples de quotients de ce groupe :







2 Anneaux et idéaux

Pour moi, un anneau, ça sera un ensemble muni de deux opérations $(A, +, \times)$ telles que :

— $(A, +)$ est un groupe abélien ;

— $\times$ est commutative et admet une unité.

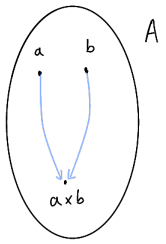
Suivant le principe précédent, l'étude de la structure d'un anneau A passe par l'étude de ses sous-structures. Cependant il y a un hic. Il existe bien un concept de sous-anneaux, mais étudier les sous-anneaux de A n'apporte en général pas grand chose... Tous les cours que j'ai eu entre les mains expliquent qu'à la place on regarde les idéaux de A. Cependant ces cours ne m'ont jamais donné d'explication pour cette bizarrerie (je ne considère pas le fait que le noyau d'un morphisme d'anneau est un idéal comme une *explication*). Cette partie a pour seule but de donner la mienne.

Soit A un anneau. Comparons les définitions de sous-anneau et d'idéal :

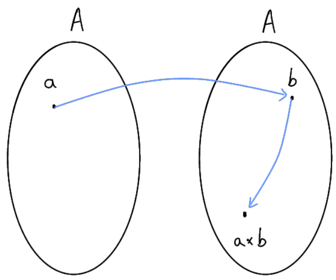
Sous-anneau B : $(B, +)$ sous-groupe de $(A, +)$ tel que $\forall a \in B, \forall b \in B,\ ab \in B$ et $1 \in B$.
Idéal $\mathcal{I}$: $(\mathcal{I}, +)$ sous-groupe de $(A, +)$ tel que $\forall a \in A, \forall b \in \mathcal{I},\ ab \in \mathcal{I}$.

Il y a deux différences. La première est qu'un sous-anneau doit toujours contenir 1. C'est un point qui n'a pas tant d'importance en réalité et que je ne vais pas discuter. La seconde différence, beaucoup plus intéressante est que la condition de stabilité est asymétrique dans le cas d'un idéal et symétrique pour un sous-anneau.

La raison profonde est qu'il y a deux façons de penser la multiplication dans un anneau. La première, reflétée par l'écriture $\times : A^2 \to A$, est celle d'une loi de composition interne : les trois copies de A en jeu sont les mêmes.



Dans cette conception les deux facteurs A au départ jouent le même rôle et sont sur un pied d'égalité. La sous-structure naturelle est alors le sous-anneau dans lequel on conserve cette symétrie.
La deuxième façon de voir les choses est de différencier deux copies de A, de voir $\times$ comme un produit externe de A sur A.



En fait, c'est exactement la même différence de point de vue que l'on fait pour les groupes entre la loi de groupe comme loi de composition interne ou comme action de G sur lui-même par translation à gauche. Ce point de vue est celui qui consiste à voir A en tant que A-module. En ce sens, on peut dire qu'un anneau $(A, +, \times)$ est un ensemble qui admet deux structures

- le groupe abélien $(A, +)$;
- le semi-groupe $(A, \times)$ commutatif et ayant une unité

et pour lequel il existe une "action de semi-groupe" $(A, \times) \curvearrowright (A, +)$ vérifiant certaines propriétés. La sous-structure naturelle est alors le sous-groupe de $(A, +)$ stable par l'action de $(A, \times)$. C'est précisément la notion d'idéal (ou de sous-A-module) et c'est de là que vient l'asymétrie qui pouvait surprendre au départ.

Maintenant une constatation s'impose : en algèbre commutative, les sous-anneaux apparaissent pratiquement nulle part tandis que les idéaux sont omniprésents. Pour cette raison, j'estime qu'il est important de réaliser qu'en général lorsqu'on étudie un anneau A, ce qu'on étudie est en fait sa structure de A-module et non sa structure d'anneau. Pour cette raison, il est fondamentalement plus pertinent de penser à la multiplication comme une "action".

3 Treillis et anneaux

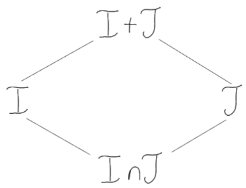
3.1 Treillis des idéaux d'un anneau

Le but est d'imiter ce qui a été fait avec les groupes. Comme précédemment, le point clé est le suivant.

Proposition 3.1.1.
L'ensemble des idéaux de A forme un treillis pour l'inclusion, noté $\mathscr{L}(A)$. Pour $\mathcal{I}$, $\mathcal{J}$ idéaux de A, on a alors

$$\sup(\mathcal{I}, \mathcal{J}) = < \mathcal{I} \cup \mathcal{J} > = \mathcal{I} + \mathcal{J}, \qquad \inf(\mathcal{I}, \mathcal{J}) = \mathcal{I} \cap \mathcal{J}$$

On remarque une petite différence avec le cas des groupes. Ici, il existe une description algébriques simple de $< \mathcal{I} \cup \mathcal{J} >$, l'idéal engendré par les éléments de $\mathcal{I}$ et $\mathcal{J}$.



Les dessins de treillis donnés précédemment étaient finis. Cependant, les anneaux sont bien souvent infinis, de même que l'ensemble de leurs idéaux. Et malheureusement dessiner un graphe infini, c'est long... Il s'agit là d'un vrai problème. Nous sommes donc forcés de nous restreindre à des fragments de treillis. C'est souvent suffisant pour représenter et comprendre ce que l'on souhaite. Mais il faut faire attention car un tel fragment ne constitue que très rarement un treillis en lui-même.
Dans la suite, nous noterons par un trait plein les arcs correspondant vraiment à une opération de treillis (inf ou sup) et par un trait en pointillés une simple inclusion.

Conformément au principe énoncé dans la partie précédente, nous devons regarder l'action de A sur lui même par multiplication et celle induite sur le treillis. Si $a \in A$, on note φ_a l'application de multiplication par a :

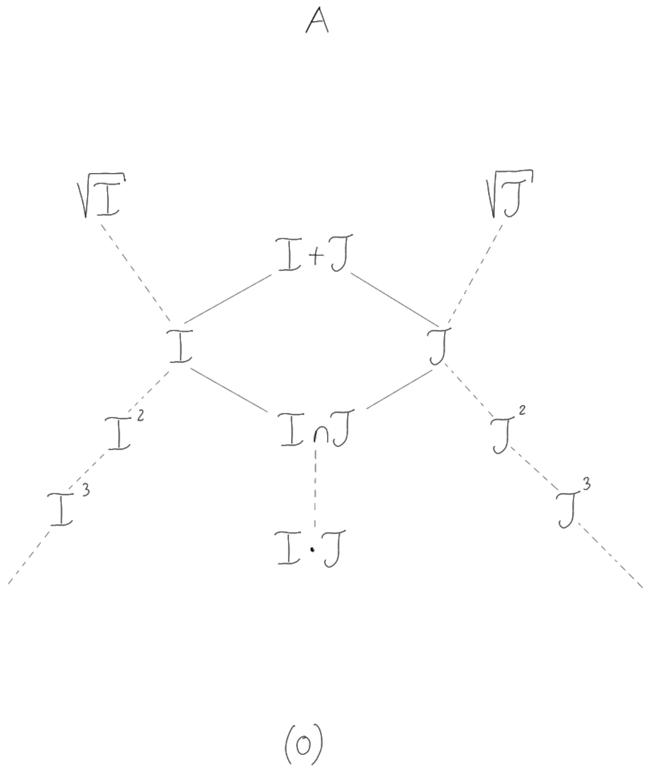
$$\varphi_a : \left| \begin{array}{ccc} A & \to & A \\ x & \mapsto & ax \end{array} \right. .$$

Par définition $\varphi_a(\mathcal{I}) \subset \mathcal{I}$ pour tout idéal $\mathcal{I}$. En fait, $\varphi_a(\mathcal{I})$ est un idéal. Mieux, si a est inversible $\varphi_a(\mathcal{I}) = \mathcal{I}$, sinon il est strictement plus petit et se situe donc plus bas dans le treillis de A. Ce constat est aussi vrai au niveau des éléments. Considérons un autre élément $x \in A$. Je dirai que x vit dans $\mathcal{I}$ si $x \in \mathcal{I}$ et si x n'est dans aucun idéal $\mathcal{J} \subset \mathcal{I}$. C'est une autre façon de dire que $\mathcal{I} = (x)$. Alors si x vit dans $\mathcal{I}$, ax vit dans un idéal plus petit (strictement si et seulement si a est inversible). L'action de A définit en quelque sorte une dynamique "descendante" qui à tendance à tasser les éléments en bas du treillis.
Plus généralement, on peut faire agir un ensemble d'éléments de A sur un de ces idéaux. En général, on n'obtient pas un idéal mais on peut alors considérer l'idéal engendré par ces éléments. Prenant l'action d'un idéal sur un autre, on montre que l'idéal obtenu possède une description algébrique simple et on retrouve la définition usuelle suivante.

Définition 3.1.2.
Si $\mathcal{I}$, $\mathcal{J}$ sont des idéaux de A, on définit l'idéal suivant

$$\mathcal{I} \cdot \mathcal{J} = \left\{ \sum_{i,j} a_i b_j \ ; \ a_i \in \mathcal{I}, \ b_j \in \mathcal{J} \right\}.$$

Où l'ajouter dans notre treillis ? La discussion au-dessus montre que ce nouvel idéal est inclus dans $\mathcal{I}$ et $\mathcal{J}$ donc dans $\mathcal{I} \cap \mathcal{J}$. D'ailleurs, dans bien des cas ces idéaux sont égaux. Considérant les actions répétées de $\mathcal{I}$ (resp. $\mathcal{J}$) sur lui-même, on obtient $\mathcal{I}^2$, $\mathcal{I}^3$, etc. (respc $\mathcal{J}^2$, $\mathcal{J}^3$, etc.). Tout ceci est représenté dans le schéma suivant. On a également ajouté la racine (0), la cime A ainsi que les radicaux de $\mathcal{I}$ et $\mathcal{J}$. Je ne parlerai pas de cette dernière notion mais pour ceux qui la connaissent, cela permet de voir où elle se situe.



3.2 Inversibles, corps et idéaux maximaux

Soit x un élément de A. Nous avons regardé ce que donnait l'action d'un élément sur un idéal. Changeons de point de vue, regardons l'orbite de x par A. De façon générale, cette orbite est l'idéal (x). Ainsi toute orbite contient 0. La seule orbite ne contenant que 0 est celle de $x = 0$. À l'opposé, l'orbite de x est A tout entier si et seulement si x est inversible. Comme un idéal est une réunion d'orbites, les inversibles ne peuvent vivre dans aucun idéal différent de A. Les inversibles sont tous rassemblés à la cime du treillis. Puisque A agit transitivement sur l'orbite de chaque élément inversible (c'est A...), ceux-ci ne sont pas "intéressants" dans la structure de A-module et jouent un rôle quasi-nul. Pour illustrer ce principe, on a par exemple le résultat suivant :

Proposition 3.2.1.
Soit A un anneau.

$$\begin{aligned} A \textit{ est un corps} &\iff \textit{les seuls idéaux de } A \textit{ sont } (0) \textit{ et } A \\ &\iff \textit{le treillis de } A \textit{ est :} \end{aligned}$$

Les corps sont ceux dont la structure de module est la plus simple. Si on se donne un anneau A, sa structure encode un certain nombre de corps. Pour le voir, il faut se souvenir du théorème de correspondance qui possède bien sûr sa version pour les anneaux :

Théorème 3.2.2 (Théorème de correspondance)**.**
Soit $\mathcal{I}$ un idéal d'un anneau A. Les idéaux de A contenant $\mathcal{I}$ forment un sous-treillis $\mathscr{L}(\mathcal{I} \subset A)$ de $\mathscr{L}(A)$.
Le morphisme canonique $\pi : A \to A/\mathcal{I}$ induit un isomorphisme de treillis

$$\pi^* : \mathscr{L}\left(A/\mathcal{I}\right) \to \mathscr{L}(\mathcal{I} \subset A).$$

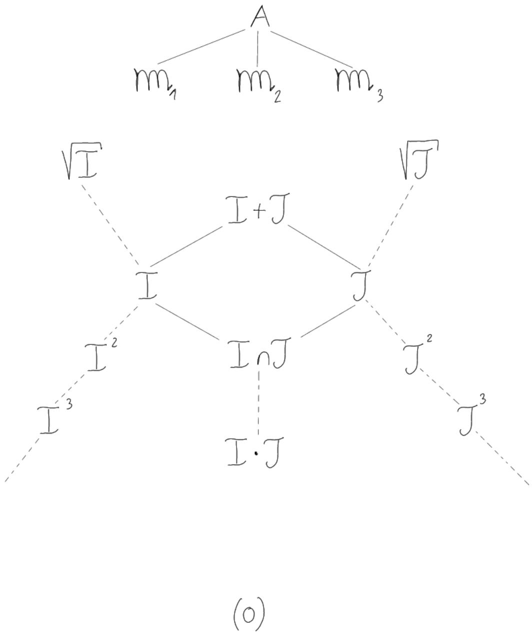
On cherche donc les sous-treillis $\mathscr{L}(\mathcal{I} \subset A)$ qui sont ceux d'un corps. Ils sont donnés par les idéaux qui sont directement reliés à A, au sens où leur sup avec n'importe quel idéal qu'ils ne contiennent pas est A.

Définition 3.2.3.
Un idéal $\mathfrak{m} \subset A$ vérifiant

$$\mathfrak{m} \subset \mathcal{J} \subset A \implies \mathcal{J} = \mathfrak{m} \text{ ou } \mathcal{J} = A$$

est dit maximal.

La phrase précédant la définition justifie qu'on les représente liés par un trait plein à A dans le treillis.



Visuellement, le théorème de correspondance donne le résultat bien connu :

Proposition 3.2.4.
Un idéal $\mathcal{I} \subset A$ est maximal si et seulement si $A/_{\mathcal{I}}$ est un corps.

3.3 Idéaux premiers

Maintenant, je vais chercher à justifier l'intérêt du concept d'idéal premier de façon purement algébrique. Reprenons l'application de multiplication par a, notée φ_a. Il s'agit d'un endomorphisme de groupe $(A, +)$. Nous avons précédemment relié sa surjectivité à l'inversibilité de a. Regardons maintenant son injectivité. Le noyau de φ_a est l'idéal :

$$\operatorname{Ker}\varphi_a = \{x \in A \; ; \; ax = 0\} .$$

Définition 3.3.1.
Un élément $a \in A$ est dit

— régulier si $\operatorname{Ker}\varphi_a = (0)$ et

— diviseur de zéro sinon.

Donc si A ne possède aucun diviseur de zéro, son action sur lui-même est libre. Cette action étant toujours transitive, elle est alors simplement transitive. Il est naturel de penser qu'un tel anneau est plus simple à étudier, ce qui justifie de donner un nom à cette propriété :

Définition 3.3.2.
Un anneau A est intègre si $A \curvearrowright A$ est libre (et donc simplement transitive).

Il est aussi possible de voir le caractère intègre comme une propriété de localité.

Définition 3.3.3.
Un anneau A est intègre si $\forall a, b \notin (0),\ ab \notin (0)$.

Il s'agit d'une écriture de la contraposée de la définition la plus classique. Cette écriture souligne le fait qu'un anneau intègre est divisé en deux parties qui ne communiquent pas : (0) et $A \setminus \{0\}$. Cette définition a aussi l'avantage de faire apparaître le caractère intègre d'un anneau comme une propriété de son idéal nul. Celle-ci a du sens pour n'importe quel idéal, donnons lui un nom :

Définition 3.3.4.
Un idéal $\mathfrak{p}$ tel que $a, b \notin \mathfrak{p} \implies ab \notin \mathfrak{p}$ est dit premier.

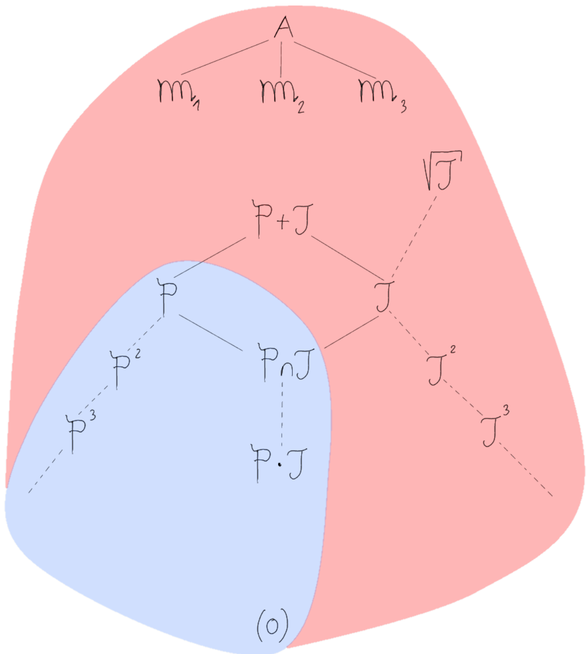
Ainsi, on peut réécrire la définition d'anneau intègre.

Définition 3.3.5.
Un anneau est intègre si son idéal nul est premier.

Maintenant si $\mathcal{I}$ est un idéal de A, le théorème de correspondance dit qu'il joue le rôle de l'idéal nul dans l'anneau $A/\mathcal{I}$. D'où :

Proposition 3.3.6.
Un idéal $\mathcal{I}$ est premier si et seulement si $A/\mathcal{I}$ est intègre.

Un idéal premier $\mathfrak{p}$ divise l'anneau en deux parties qui ne communiquent pas, de même que notre treillis.



Cette propriété est utilisée en théorie des schémas. Les points d'un schéma sont choisis comme étant les idéaux premiers car ce sont ceux qui permettent d'assurer des propriétés géométriques locales claires. On peut voir le paragraphe suivant comme le pendant algébrique de ce fait.

3.4 Localisation

En théorie des groupes ou en algèbre linéaire, quand on a des éléments qui ne jouent aucun rôle dans le problème qui nous intéresse, on aime bien les faire disparaître pour ne garder moralement que les éléments qui véhiculent de l'information. Pour cela, on a le passage au quotient.

On peut bien entendu faire la même chose dans les anneaux, et les éléments ainsi tués sont envoyés tout en bas de notre nouveau treillis, dans l'idéal (0). Mais dans les anneaux, il existe une autre façon de "tuer" les éléments : les rendre inversibles, ce qui les propulse tout en haut du treillis. Ce procédé s'appelle la localisation. Nous allons voir (avec les yeux !) grâce aux treillis que la localisation constitue en quelque sorte l'inverse d'un passage au quotient.

Soit $S \subset A$ un ensemble d'éléments que l'on souhaite rendre inversibles. On remarque tout d'abord que si $s, t \in S$, les rendre inversibles rendra inévitablement st inversible aussi. Quand on tue des éléments de cette façon, tous leurs produits mourront également... Cela dit, le même phénomène de dégâts collatéraux existe avec le quotient : si on veut tuer certains éléments par un passage au quotient, on doit tuer tout l'idéal qu'ils engendrent. Tout ceci explique qu'on peut supposer dès le départ que S est stable par multiplication.

Ensuite l'idée est de rajouter à A autant d'élément X_s que d'éléments $s \in S$. Puis on force les relations qui font des X_s les inverses des $s \in S$. Concrètement, cela donne l'anneau suivant :

$$S^{-1}A := {}^{A[X_{s_1},\dots]}\!\big/_{(X_{s_1}s_1 - 1,\dots)}.$$

En général, il faut faire attention quand on rajoute des nouvelles relations dans un anneau. Celles-ci ne doivent pas être contradictoires avec d'autres relations qu'il y avait déjà dedans. Ici tout se passe bien sauf si S possède des diviseurs de zéros. Auquel cas, si $sx = 0$ avec $s \in S$ et $x \neq 0$, une fois rendu s inversible, on a $s^{-1}sx = x = 0$, ce qui est problématique... Dans ce cas, on commence par quotienter A par l'idéal $\{x \in A\ ;\ \exists s \in S,\ sx = 0\}$. L'image de S dans ce nouvel anneau ne contient plus de diviseurs de zéro et on applique la construction précédente.

Il est toutefois important de se rappeler que lors de la localisation un élément a de A suit l'un des trois destins suivants :

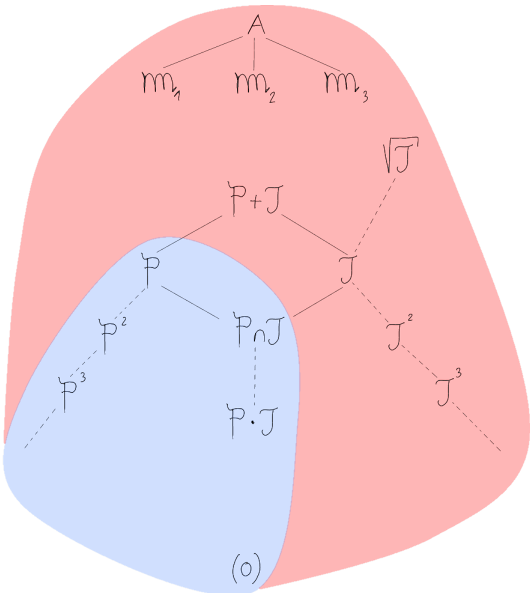
— s'il existe $s \in S$ tel que $as = 0$, alors a est envoyé sur 0 ;

— s'il est dans S (mais pas dans la catégorie précédente !), a devient inversible ;

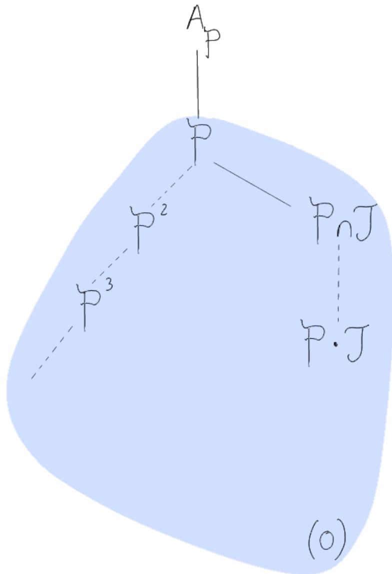
— sinon a est "inchangé" (il est inversible si et suelement s'il l'était déjà dans A et est envoyé sur 0 si et seulement si $a = 0$ dans A).

Je suppose pour simplifier dans la suite que A est intègre. Dans ce cas, l'application naturelle $A \to S^{-1}A$ est une injection (mais pas un morphisme a priori). Nous allons regarder l'une des localisations les plus utiles.

Si $\mathfrak{p}$ est un idéal premier, comme dit précédemment, son complémentaire $S := A \setminus \mathfrak{p}$ est stable par multiplication. On note souvent $A_{\mathfrak{p}} := S^{-1}A$ la localisation par un tel ensemble. L'application $A \to A_{\mathfrak{p}}$ est une injection. Si on regarde la construction de $A_{\mathfrak{p}}$, on se rend compte que les relations que l'on ajoute ne font intervenir aucun élément de $\mathfrak{p}$. Ainsi, les relations mettant en jeu uniquement des éléments contenus dans $\mathfrak{p}$ sont les mêmes que celles dans A. On en déduit que que le sous-treillis entre (0) et $\mathfrak{p}$ est inchangé dans le localisé. En revanche, considérons un idéal $\mathcal{I}$ de $A_{\mathfrak{p}}$ qui n'est pas contenu dans l'image de $\mathfrak{p}$. Cela signifie qu'il contient soit l'image d'un élément de S, soit un des éléments rajoutés à A par la localisation. Dans les deux cas, il s'agit d'un élément inversible et donc $\mathcal{I} = A$.
Par conséquent, on obtient le treillis suivant pour le localisé $A_{\mathfrak{p}}$.



Treillis de A



Treillis du localisé $A_{\mathfrak{p}}$

Il est intéressant de faire le parallèle avec le treillis du quotient par $\mathfrak{p}$ donné par le théorème de correspondance. On remarque aussi que dans l'anneau localisé $A_{\mathfrak{p}}$, l'idéal $A_{\mathfrak{p}}$ a été promu de premier à maximal et qu'il est de plus le seul idéal maximal : on dit que $A_{\mathfrak{p}}$ est un anneau local.