

Théorème de fibration d'EHRESMANN

Guillaume Kineider

5 décembre 2022

Table des matières

1 Introduction : fibrations localement triviales.	1
1.1 Définitions et exemples	1
1.2 Fibrations et submersions surjectives	3
2 Partitions de l'unité.	4
3 Champs de vecteurs.	4
3.1 Définition et exemples.	4
3.2 Structure.	5
3.2.1 Structure de \mathbf{R} -espace vectoriel.	5
3.2.2 Structure de $\mathcal{C}^r(M, \mathbf{R})$ -module.	5
3.2.3 Restriction.	5
3.3 Transport d'un champ de vecteurs.	5
3.4 Flot local d'un champs de vecteurs.	6
4 Preuve du théorème de fibration d'Ehresmann.	8
4.1 Première étape : construction des $Y_i \in \Gamma_\infty(\mathbb{T}N)$ tels que $Y_i(y_0) = e_i$	8
4.2 Deuxième étape : construction du difféomorphisme Φ	9
4.3 Troisième étape : construction d'un relevé sur M de $Y \in \Gamma_\infty(\mathbb{T}N)$	9
4.4 Quatrième étape : construction de la trivialisatation locale $\Phi_F : V \times F \rightarrow f^{-1}(V)$	11

Ce document est le support écrit d'un séminaire donné au cours de mon Master 2 de mathématiques fondamentales à l'Université-Aix-Marseille. Son but est de démontrer le théorème de fibration d'EHRESMANN et d'introduire les concepts nécessaires à sa démonstration. Il s'agit essentiellement d'un extrait reformulé et complété de l'excellent cours de géométrie différentielle de Frédéric Paulin [Pau].

1 Introduction : fibrations localement triviales.

Le but de ce séminaire est de prouver le théorème suivant :

Théorème 1.0.1 (fibration d'EHRESMANN).

Soit $r \in \mathbf{N}^* \cup \{\infty\}$. Une submersion surjective propre de classe \mathcal{C}^r est une fibration localement triviale \mathcal{C}^r .

En particulier, on obtient immédiatement le résultat suivant :

Corollaire 1.0.2.

Si $f : M \rightarrow N$ est une submersion surjective de classe \mathcal{C}^r entre deux variétés avec $r \in \mathbf{N}^* \cup \{\infty\}$ et M compacte, alors f est une fibration localement triviale \mathcal{C}^r .

Pour bien comprendre ce que l'on cherche à montrer, faisons quelques rappels sur les fibrations localement triviales.

1.1 Définitions et exemples

Définition 1.1.1 (fibration localement triviale).

Soit E, F et B des variétés de classe \mathcal{C}^r avec $r \in \mathbf{N} \cup \{\infty\}$. Une fibration localement triviale de base B , d'espace

total E et de fibre F est une application $\pi : E \rightarrow B$ de classe \mathcal{C}^r telle que pour tout point de la base $b \in B$, il existe un voisinage ouvert $U \subset B$ de b et un \mathcal{C}^r -difféomorphisme $\psi : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times F$ faisant commuter le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(U) & \xrightarrow[\sim]{\psi} & U \times F \\ \downarrow \pi & \swarrow \text{pr}_1 & \\ U & & \end{array} \quad (1)$$

où $\text{pr}_1 : U \times F \rightarrow U$ est la première projection. Le voisinage U est alors dit *trivialisant* et l'application ψ est une *trivialisat on locale de π au-dessus de U* . Si $b \in B$, on appelle *fibre* de b l'ensemble $E_b = \pi^{-1}(\{b\})$. Pour $r' \leq r$, une *section $\mathcal{C}^{r'}$* est une application $s : B \rightarrow E$ de classe $\mathcal{C}^{r'}$ telle que $\pi \circ s = \text{id}_B$.

$$\begin{array}{ccc} & E & \\ & \uparrow s & \downarrow \pi \\ & B & \end{array}$$

Remarque : nous ne parlerons pas de fibrations plus générales donc nous permettrons de dire simplement "fibration" pour "fibration localement triviale" dans la suite. De façon générale, nous utiliserons les notations de la définition pour toutes les fibrations.

Exemples :

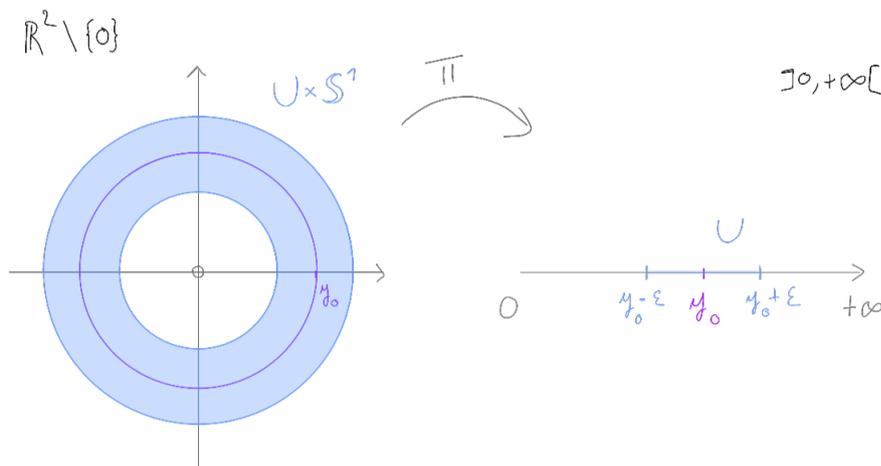
1. Si M et F sont deux variétés \mathcal{C}^r , alors $\text{pr}_1 : M \times F \rightarrow M$ est une fibration dite *triviale*. Une fibration localement triviale est en fait une application qui peut s'identifier localement à une fibration triviale. Pour formaliser cette idée, on utilise la notion d'isomorphisme de fibrés définie plus bas.
2. L'application $\pi : \mathbf{R}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow]0, +\infty[$ définie par

$$\pi(x_0, \dots, x_n) = x_0^2 + \dots + x_n^2$$

est une fibration localement triviale de fibre \mathbb{S}^n . En effet, si $y_0 \in]0, +\infty[$ est un point de la base, soit $\varepsilon > 0$ suffisamment petit pour que $U :=]y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon[\subset]0, +\infty[$. Alors l'application $\psi : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{S}^n$ définie par

$$\psi(\mathbf{x} = (x_0, \dots, x_n)) = \left(x_0^2 + \dots + x_n^2, \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|} \right)$$

est une trivialisat on analytique. Schéma du cas $n = 1$:



3. Les revêtements sont les fibrations de fibres discrètes.
4. Un *fibré vectoriel réel \mathcal{C}^r* de rang n est une fibration \mathcal{C}^r dont les fibres E_b sont munies d'une structure d'espace vectoriel réel de dimension n et pour laquelle il existe des trivialisat ons locales $\psi : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times F$ telles que pour tout $b \in B$, $\text{pr}_2 \circ \psi|_{E_b} : E_b \rightarrow F$ soit un isomorphisme \mathbf{R} -linéaire.

Définition 1.1.2 (Morphisme de fibration).

Soient $p : E \rightarrow B$ et $p' : E' \rightarrow B'$ des fibrations de classe \mathcal{C}^r . Un *morphisme \mathcal{C}^r de fibration* de p dans p' est un couple d'applications (f, g) de classe \mathcal{C}^r faisant commuter le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{g} & E' \\ p \downarrow & & \downarrow p' \\ B & \xrightarrow{f} & B' \end{array}$$

Ce morphisme est un *isomorphisme* s'il existe un morphisme (f', g') de p' dans p tel que les couples (f, f') et (g, g') soient des bijections réciproques l'une de l'autre.
Lorsque $B = B'$ et $f = \text{id}$, on parle de *morphisme sur la base B*.

1.2 Fibrations et submersions surjectives

Proposition 1.2.1.

Toute fibration \mathcal{C}^r est une submersion surjective. En particulier, les fibres sont des sous-variétés \mathcal{C}^r de l'espace total.

Démonstration.

Avec les notations de la définition, la fibre de n'importe quel point de la base est diffeomorphe à F qui ne peut être vide, d'où la surjectivité.

Ensuite, on remarquera que le fait d'être une submersion est une propriété locale donc on peut restreindre π au-dessus d'un ouvert trivialisant contenant $b := \pi(x)$. Or, notant $\psi(x) = (b, u)$, le foncteur tangent T transforme le diagramme 1 en

$$\begin{array}{ccc} T_x \pi^{-1}(U) & \xrightarrow[\simeq]{T_x \psi} & T_b U \times T_u F \\ T_x \pi \downarrow & \swarrow T_{(b,u)} \text{pr}_1 & \\ T_b U & & \end{array}$$

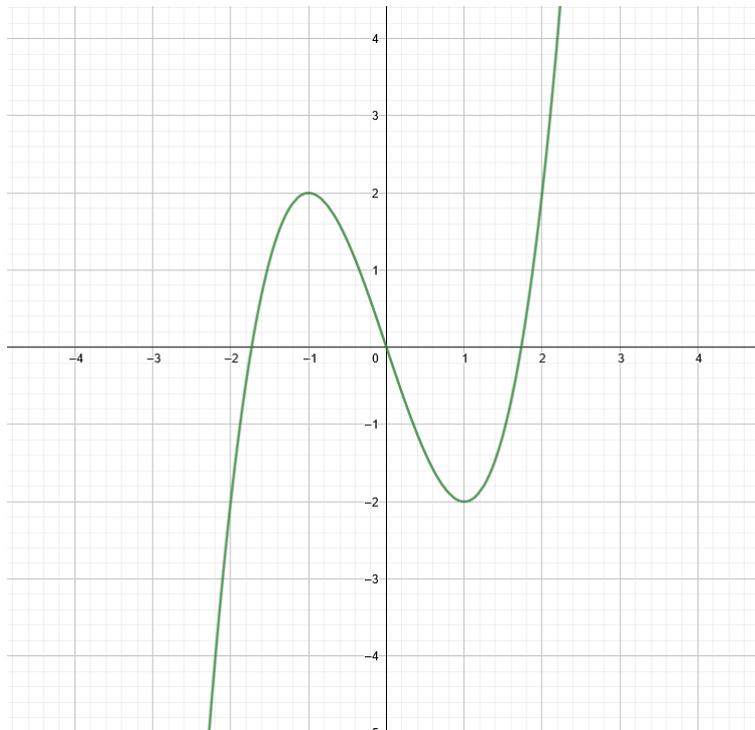
d'où $T_x \pi$ surjective. Le dernier point est classique. □

Pour qu'une application définisse une fibration il est donc nécessaire que ce soit une submersion surjective. Il est naturel de se demander si ces deux propriétés sont suffisantes...

La réponse est non, voici un contre-exemple. On considère

$$f : \begin{cases} \mathbf{R} \setminus \{1, -1\} & \rightarrow \mathbf{R} \\ x & \mapsto x^3 - 3x \end{cases}$$

qui est surjective (voir schéma ci-dessous).



Si $x \in \mathbf{R} \setminus \{1, -1\}$, l'application tangente de f en x est :

$$T f_x : \begin{cases} \mathbf{R} & \rightarrow \mathbf{R} \\ v & \mapsto (3x^2 - 3)v \end{cases}$$

qui est non nulle et donc surjective. Mais f n'est pas une fibration car le cardinal des fibres est fini mais non constant, ce qui contredit le fait qu'elles soient diffeomorphes. Le théorème de fibration d'EHRESMANN nous dit qu'une hypothèse supplémentaire suffisante est d'être propre (l'image réciproque de tout compact est compacte). On voit notamment que cette hypothèse n'est pas vérifiée dans l'exemple précédent car par exemple $f^{-1}([-2, 2]) = [-2, 2] \setminus \{-1, 1\}$.

2 Partitions de l'unité.

Le concept de partition de l'unité est l'un des outils les plus efficaces pour passer du local au global. Plus précisément, il permet de définir des objets au voisinage de chaque point puis de les recoller sans perdre leurs propriétés. Cela dit, nous ne souhaitons pas mettre l'accent sur ce point, même si leur existence (théorème suivant) a une importance conceptuelle indéniable. Nous ne donnons que la définition ainsi que le théorème d'existence (qui provient entre autres des propriétés de séparation et de dénombrabilité à l'infini des variétés), sans démonstration.

Définition 2.0.1.

Soit X un espace topologique. Une *partition de l'unité* sur X est une famille $(\varphi_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}}$ de fonctions continues de X dans \mathbf{R} telle que :

- pour tout $\alpha \in \mathcal{A}$, φ_α est à valeurs dans $[0, 1]$;
- la famille des supports est localement finie, *i.e.* tout point x de X admet un voisinage qui ne rencontre qu'un nombre fini de supports des φ_α ;
- $\sum_{\alpha \in \mathcal{A}} \varphi_\alpha = 1$.

Une partition de l'unité *subordonnée à un recouvrement ouvert* $(U_i)_{i \in I}$ de X est une partition de l'unité $(\varphi_i)_{i \in I}$ telle que pour tout $i \in I$, le support de φ_i est inclus dans U_i .

Théorème 2.0.2.

Pour tout recouvrement ouvert d'une variété topologique M , il existe une partition de l'unité qui lui est subordonnée. De plus, si M est de classe \mathcal{C}^r avec $r \in \mathbf{N}^ \cup \{\infty\}$, cette partition de l'unité peut être choisie de classe \mathcal{C}^r .*

3 Champs de vecteurs.

3.1 Définition et exemples.

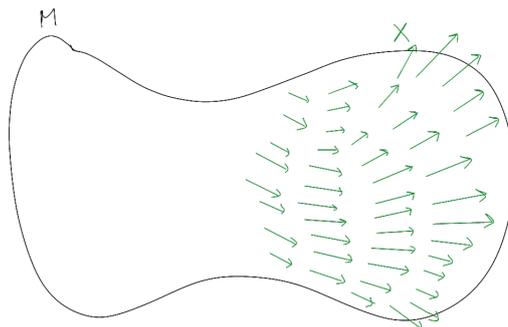
Soit $r \in \mathbf{N} \cup \{\infty\}$ et soit M une variété de classe \mathcal{C}^{r+1} de dimension m .

Définition 3.1.1.

Un champ de vecteurs \mathcal{C}^r sur M est une section de classe \mathcal{C}^r du fibré tangent de M . On note $\Gamma_r(TM)$ l'ensemble des champs de vecteurs \mathcal{C}^r sur M .

Autrement dit, un champ de vecteurs sur M est la donnée en chaque point x de M d'un vecteur tangent en x qui dépend de façon \mathcal{C}^r en x . La complexité de cet objet réside dans l'explicitation de cette régularité \mathcal{C}^r . Nous n'aurons besoin dans ce qui suit que du cas où la variété est un ouvert de \mathbf{R}^n .

La notion de champ de vecteurs peut être imaginée comme un champ de vitesses pour un ensemble de particules. Nous allons nous en servir dans la suite pour définir des directions de transformation pour une variété (voir la section 3.4 sur le flot local).



Champs de vecteurs sur un ouvert de \mathbf{R}^n . Soit U un ouvert de \mathbf{R}^n . L'atlas de la variété U est l'atlas maximal contenant la carte globale (U, id) . Cet atlas munit le fibré tangent TU de l'atlas maximal contenant la carte globale $\psi : TU \rightarrow U \times \mathbf{R}^n \subset \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$ définie par

$$[U, \text{id}, x, v] \mapsto (x, v).$$

Une application $U \rightarrow TU$ est de classe \mathcal{C}^r si et seulement si elle l'est dans les cartes respectives... mais ces cartes sont toutes incluses dans (U, id) et (TU, ψ) respectivement. Donc une section $s : U \rightarrow TU$ est de classe \mathcal{C}^r si et seulement

si l'application \tilde{s} faisant commuter le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{T}U & \xrightarrow[\simeq]{\psi} & U \times \mathbf{R}^n \\ \uparrow s & & \uparrow \tilde{s} \\ U & \xlongequal{\quad} & U \subset \mathbf{R}^n \end{array}$$

l'est. De plus, à gauche l'application p de projection du fibré $\mathrm{T}U \rightarrow U$ s'identifie à droite à pr_1 :

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{T}U & \xrightarrow[\simeq]{\psi} & U \times \mathbf{R}^n \\ \pi \downarrow & & \downarrow \mathrm{pr}_1 \\ U & \xlongequal{\quad} & U \subset \mathbf{R}^n \end{array}$$

donc une section s de classe \mathcal{C}^r s'identifie à une application $x \mapsto (x, X(x))$ avec $X : U \rightarrow \mathbf{R}^n$ de classe \mathcal{C}^r au sens habituel du calcul différentiel. D'où $\Gamma_r(\mathrm{T}U) \simeq \mathcal{C}^r(U, \mathbf{R}^n)$. Dit autrement, les espaces tangents en chaque point peuvent être identifiés au même espace \mathbf{R}^n , ce qui permet de se ramener à la notion habituelle de proximité pour des vecteurs.

3.2 Structure.

3.2.1 Structure de \mathbf{R} -espace vectoriel.

L'espace tangent en chaque point étant un \mathbf{R} -espace vectoriel, on peut munir $\Gamma_r(\mathrm{T}M)$ d'une structure de \mathbf{R} -espace vectoriel par

- l'addition point par point : si $X, Y \in \Gamma_r(\mathrm{T}M)$, pour tout $x \in M$, $(X + Y)(x) = X(x) + Y(x)$.
- la multiplication externe point par point : si $X \in \Gamma_r(\mathrm{T}M)$ et $\lambda \in \mathbf{R}$, pour tout $x \in M$, $(\lambda X)(x) = \lambda X(x)$.

3.2.2 Structure de $\mathcal{C}^r(M, \mathbf{R})$ -module.

On peut aller plus loin en munissant $\Gamma_r(\mathrm{T}M)$ d'une structure de $\mathcal{C}^r(M, \mathbf{R})$ -module, par la multiplication point par point : pour tout $f \in \mathcal{C}^r(M, \mathbf{R})$ et tout $X \in \Gamma_r(\mathrm{T}M)$,

$$\forall x \in M, \quad (fX)(x) = f(x)X(x)$$

Autrement dit, la multiplication par un coefficient scalaire s'étend à des coefficients qui dépendent de manière \mathcal{C}^r de x .

Par exemple, si U est un ouvert de \mathbf{R}^n et si (e_1, \dots, e_n) est la base canonique de \mathbf{R}^n , alors avec l'identification $\Gamma_r(\mathrm{T}U) \simeq \mathcal{C}^r(U, \mathbf{R}^n)$ donnée à la section précédente, on peut définir les champs de vecteurs constants $\vec{e}_i : x \mapsto e_i$ et ceux-ci forment une base du $\mathcal{C}^r(U, \mathbf{R})$ -module $\Gamma_r(\mathrm{T}U)$. Tout champ de vecteurs sur U s'écrit de manière unique :

$$X = \sum_{i=1}^n f_i \vec{e}_i$$

où les f_i sont dans $\mathcal{C}^r(U, \mathbf{R})$.

3.2.3 Restriction.

Si U est un ouvert de M et si $\iota : U \hookrightarrow M$ est l'inclusion, on identifie $\mathrm{T}U$ avec l'image de $\mathrm{T}\iota$. Si X est un champ de vecteurs de \mathcal{C}^r sur M , on peut restreindre X à U pour obtenir un champ de vecteurs \mathcal{C}^r sur U .

3.3 Transport d'un champ de vecteurs.

Soient M, N deux variétés de classe \mathcal{C}^{r+1} , Y un champ de vecteurs \mathcal{C}^r sur N et $f : M \rightarrow N$ de classe \mathcal{C}^{r+1} . On souhaiterait tirer en arrière Y pour obtenir un champ de vecteurs X sur M à partir de Y et de f . La façon la plus naturelle de faire est la suivante : si $x \in M$, on commence par l'envoyer dans N par f puis on considère le vecteur $Y(y)$ au-dessus de y et on aimerait le ramener dans $\mathrm{T}_x M$ par une application ϕ de sorte à ce que $\phi \circ Y \circ f(x) \in \mathrm{T}_x M \subset \mathrm{T}M$. Remarquons que cela revient à faire commuter le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{T}M & \xleftarrow{\phi} & \mathrm{T}N \\ \pi_M \downarrow & & \uparrow Y \\ M & \xrightarrow{f} & N \end{array}$$

C'est notamment possible lorsque f est un morphisme étal, *i.e.* un \mathcal{C}^{r+1} -difféomorphisme local. On peut alors définir ϕ sur chaque $T_x M$ par $\phi|_{T_x M} = (T_x f)^{-1} : T_{f(x)} N \rightarrow T_x M$ car $T_x f$ est un isomorphisme linéaire.

Définition 3.3.1.

Le champ de vecteurs $\mathcal{C}^r f^*Y$ sur M ainsi obtenu par :

$$f^*Y : x \mapsto (T_x f)^{-1}(Y(f(x)))$$

est appelé *image réciproque* de Y par f . Pour tout x dans M , il fait commuter le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} T_x M & \xrightarrow[T_x f]{\simeq} & T_{f(x)} N \\ f^*Y \uparrow & & \uparrow Y \\ \{x\} & \xrightarrow{f} & \{f(x)\} \end{array}$$

Remarques :

1. Cette construction est fonctorielle (contravariante) : si P est une variété de classe \mathcal{C}^{r+1} , si $g : N \rightarrow P$ est un \mathcal{C}^{r+1} -difféomorphisme local et si $Z \in \Gamma_r(TP)$, alors

$$(g \circ f)^*Z = f^*(g^*Z) \quad \text{et} \quad \text{id}_P^*Z = Z.$$

2. Si U est un ouvert de M et $\iota : U \hookrightarrow M$ est l'inclusion, alors c'est un morphisme étal et

$$\forall X \in \Gamma_r(TM), \quad \iota^*X = X|_U.$$

3. On peut se demander comment se comporte l'image réciproque vis-à-vis de la structure de $\Gamma_r(TN)$.

(a) L'application $Y \rightarrow f^*Y$ est \mathbf{R} -linéaire.

(b) Si $u \in \mathcal{C}^r(N, \mathbf{R})$, pour tout $Y \in \Gamma_r(TN)$, $f^*(uY) = (u \circ f)f^*Y$.

4. Lorsque f est un difféomorphisme global, on peut tirer en avant des champs de vecteurs en utilisant l'image réciproque par f^{-1} . Soit donc $f : M \rightarrow N$ un \mathcal{C}^{r+1} -difféomorphisme entre deux variétés \mathcal{C}^{r+1} et $X \in \Gamma_r(TN)$, on définit l'*image directe de X par f* par

$$f_*X = (f^{-1})^*X \in \Gamma_r(TM)$$

Il faut donc retenir qu'un difféomorphisme local permet de tirer en arrière un champ de vecteurs, et ce de façon canonique (aucun choix n'est nécessaire) tandis qu'un difféomorphisme global permet également de tirer en avant un champ de vecteurs (de manière toute aussi canonique). Nous verrons qu'un argument fondamental de la preuve du théorème de fibration d'EHRESMANN est que l'hypothèse de submersion est en fait suffisante pour définir une image réciproque d'un champ. Cette construction n'est toutefois pas canonique, elle dépend d'un choix.

3.4 Flot local d'un champs de vecteurs.

Soit X un champ de vecteurs \mathcal{C}^r ($r \geq 1$) sur une variété M . Pour bien comprendre la notion de flot local, adoptons l'image mentale de particules dans un champ de vitesses. La variété M représente alors le domaine de ce champ et X peut être interprété comme le champ de vitesses, qui attribue à chaque point de M un vecteur indiquant l'amplitude et la direction de la vitesse d'une particule située en ce point.

Un premier point de vue est de s'intéresser, pour chaque point, à la trajectoire d'une particule située en ce point au temps initial $t = 0$. Si x_0 est un point de M , on souhaiterait donc construire un arc tracé sur M passant par x_0 et dont le vecteur vitesse est donné en chaque instant par X , *i.e.* un arc $\gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\rightarrow M$ vérifiant

$$\gamma(0) = x_0 \quad \text{et} \quad \forall s \in]-\varepsilon, \varepsilon[, \quad \frac{d\gamma}{dt}|_{t=s} = X(\gamma(s))$$

L'arc γ doit alors être de classe \mathcal{C}^r et a fortiori continue, donc quitte à restreindre son ensemble de définition, on peut supposer que l'image de cet arc sera contenue dans une carte locale en x_0 et on peut identifier localement M à un ouvert de \mathbf{R}^n . Le théorème de CAUCHY-LIPSCHITZ assure alors l'existence d'un unique arc tracé maximal γ_{x_0} solution sur cette carte, défini sur un intervalle de temps ouvert $]-\varepsilon_{x_0}, \varepsilon_{x_0}[$. On a le résultat d'unicité plus fort suivant qui permet de sortir d'une carte.

Proposition 3.4.1.

Soient γ_1 et γ_2 deux arcs tracés sur M en x_0 , *i.e.* $\gamma_1 : I_1 \rightarrow M$ et $\gamma_2 : I_2 \rightarrow M$ avec I_1, I_2 deux intervalles ouverts contenant 0 et $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = x_0$. Alors $\gamma_1 = \gamma_2$ sur l'intersection $I = I_1 \cap I_2$.

Démonstration.

Notons que $I = I_1 \cap I_2$ est un intervalle ouvert contenant 0. On considère $J = \{t \in I \mid \gamma_1(t) = \gamma_2(t)\} \subset I$. Le but est de montrer que $J = I$ en utilisant la connexité de I . On a déjà que J est fermé car M est séparé. Ensuite, si $t \in I$, prenant une carte au voisinage de $\gamma_1(t) = \gamma_2(t)$, l'unicité dans le théorème de CAUCHY-LIPSCHITZ assure que $\gamma_1 = \gamma_2$ sur ce voisinage donc qu'il est inclus dans J . Ainsi J est ouvert, fermé et non-vide car il contient 0, d'où $J = I$ par connexité. \square

L'arc tracé maximal (ou par extension son image) $t \rightarrow \gamma_{x_0}(t)$ est appelée la *courbe intégrale* de X passant par x_0 .

On obtient un premier résultat : la donnée d'un champ de vecteurs permet de définir des arcs tracés dont le vecteur vitesse est donné par ce champ. La fonction $x \mapsto \gamma_x$ attribue donc à chaque point de l'espace une fonction du temps. Ce point de vue met en avant le comportement de chaque particule individuellement.

Le principe du flot local est de renverser le rôle du temps et de l'espace de sorte qu'à chaque instant t on associe la transformation de la variété

$$\phi_t : \begin{cases} M & \rightarrow & M \\ x & \mapsto & \phi_t(x) = \gamma_x(t) \end{cases}$$

où γ_x est la courbe intégrale de X passant par x . Ici on s'intéresse aux déplacements simultanés de toutes les particules en fonction du temps. Ainsi ϕ_t décrit la transformation de la variété obtenue après avoir fait transiter toutes les particules le long de leur courbe intégrale pendant un temps t . A priori cette application n'est pas bien définie car pour tout $t \neq 0$, il peut y avoir $x \in M$ tel que $t \notin]-\varepsilon_x, \varepsilon_x[$ et alors $\gamma_x(t)$ n'existe pas... Le théorème suivant affirme néanmoins les choses suivantes :

1. localement autour d'un point $x_0 \in M$, on peut minorer l'intervalle de définition des courbes intégrales et donc définir le flot local ;
2. le flot local est de classe \mathcal{C}^r (si deux points proches de M appartiennent à des courbes intégrales, puisque X est \mathcal{C}^r , les directions de ces courbes sont localement proches autour de ces points et donc les courbes ne s'éloignent pas trop rapidement) ;
3. il y a unicité sur l'ensemble de définition (utile pour montrer une égalité avec le flot).

Théorème 3.4.2.

Pour tout point x_0 de M , il existe un triplet (U, I, ϕ) formé d'un voisinage ouvert U de x_0 , d'un intervalle ouvert I contenant 0, et d'une application $\phi : I \times U \rightarrow M$ de classe \mathcal{C}^r , notée $(t, x) \mapsto \phi_t(x)$, vérifiant pour tous s dans I et x dans U :

$$\begin{cases} \frac{d\phi_t(x)}{dt} \Big|_{t=s} = X(\phi_s(x)) \\ \phi_0(x) = x \end{cases}$$

Et si (U', I', ϕ') est un autre tel triplet, alors ϕ et ϕ' coïncident sur $(I \times U) \cap (I' \times U')$.

Ce théorème est local et ne constitue donc pas vraiment un résultat de géométrie différentielle car on se ramène à un ouvert de \mathbf{R}^n . Il s'agit alors d'un résultat classique d'équations différentielles que j'admets. Même chose pour la proposition suivante qui donne les principales propriétés du flot.

Proposition 3.4.3.

Avec les notations du théorème précédent, pour tous $t, s \in I$, et tout $x \in U$:

- si $\phi_s(x) \in U$ et $t + s \in I$, alors $\phi_t \circ \phi_s(x) = \phi_{t+s}(x)$;
- ϕ_t est un \mathcal{C}^r -difféomorphisme local ;
- ce \mathcal{C}^r -difféomorphisme local préserve le champ de vecteurs X , i.e. $\phi_t^* X = X$ ou encore

$$T_x \phi_t(X(x)) = X(\phi_t(x))$$

Avec l'image précédente des particules plongées dans un champ de vitesses, la première propriété est totalement naturelle : il revient au même de faire transiter les particules pendant un temps t puis un temps s ou directement un temps $t + s$. Le deuxième point justifie l'intérêt du flot : donner un champ de vecteurs définit toute une famille de difféomorphismes locaux de la variété sur elle-même. Par la section précédente, on sait que ces difféomorphismes locaux permettent de tirer en arrière un champ de vecteurs. La variété au départ et celle à l'arrivée étant identique, ces transformations permettent d'altérer les champs de vecteurs sur M . Le dernier point répond alors à la question naturelle : comment est modifié le champ X par les ϕ_t qu'il induit ? Sans surprise, la réponse est qu'il n'est pas modifié. Dans notre simulation, les particules bougent avec le temps mais le champ de vitesses reste inchangé.

Définition 3.4.4.

Un champ de vecteurs X de classe \mathcal{C}^r avec $r \geq 1$ sur M tel que son flot est défini sur $\mathbf{R} \times M$ est dit *complet*.

Un argument important pour le théorème de fibration d'EHRESMANN est que le caractère propre de la fonction permet d'assurer la complétude des champs relevés à travers f . On utilise le théorème suivant, démontré par exemple dans [AMR88].

Proposition 3.4.5.

Soit $X \in \Gamma_r(TM)$ avec $r \geq 1$. Soit $\gamma : I \rightarrow M$ une courbe intégrale de X telle que pour tout intervalle ouvert $]a, b[\subset I$, l'image $\gamma(]a, b[)$ est contenu dans un compact de M . Alors γ est défini en temps tout, autrement dit $I = \mathbf{R}$.

Remarquons qu'on obtient immédiatement le corollaire suivant.

Corollaire 3.4.6.

Si M est compacte, alors tout champ de vecteurs sur M est complet.

Les propriétés d'un champ complet sont résumés dans la proposition ci-dessous.

Proposition 3.4.7.

Soit X un champ de vecteurs \mathcal{C}^r complet sur M . Alors, $(\phi_t)_{t \in \mathbf{R}}$ est un groupe à un paramètre \mathcal{C}^r de \mathcal{C}^r -difféomorphismes préservant X , c'est-à-dire :

- $\phi_0 = \text{id}_M$ et pour tous $s, t \in \mathbf{R}$, $\phi_{t+s} = \phi_s \circ \phi_t$;
- l'application $(t, x) \mapsto \phi_t(x)$ de $\mathbf{R} \times M$ dans M est \mathcal{C}^r ;
- pour tout $t \in \mathbf{R}$, ϕ_t est un \mathcal{C}^r -difféomorphisme global de M dans lui-même ;
- pour tout $t \in \mathbf{R}$, $\phi_t^* X = X$.

4 Preuve du théorème de fibration d'Ehresmann.

Pour simplifier, je vais démontrer le théorème dans le cas \mathcal{C}^∞ .

Théorème 4.0.1 (fibration d'EHRESMANN).

Soit M et N deux variétés \mathcal{C}^∞ de dimensions respectives m et n . Toute submersion surjective propre $f : M \rightarrow N$ de classe \mathcal{C}^∞ est une fibration localement triviale \mathcal{C}^∞ .

Démonstration.

Fixons pour toute la preuve $y_0 \in N$ et notons $F := f^{-1}(\{y_0\})$. Voici le principe de la démonstration :

1. Pour (e_1, \dots, e_n) base de $T_{y_0} N$, on montre l'existence de champs de vecteurs Y_i valant e_i en y_0 pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$. Ces champs de vecteurs seront choisis à support compact et donc complets.
2. On construit un difféomorphisme local $\Phi : W \rightarrow V$ avec W voisinage de 0 dans \mathbf{R}^n et V voisinage de y_0 dans N en utilisant seulement les flots locaux des Y_i . Géométriquement, ce V sera notre voisinage trivialisant et Φ indiquera comment pousser y_0 sur n'importe quel point de V .
3. On montre que l'hypothèse de submersion permet de choisir (non canoniquement) un relevé sur M par f de tout champ de vecteurs Y sur N qui vérifie le même diagramme commutatif qu'une image réciproque. Si Y est supposé à support compact, alors le relevé sera complet par propriété de f .
4. On considère un tel relevé X_i pour chaque Y_i . On peut alors relever Φ en un difféomorphisme $W \times F \rightarrow f^{-1}(V)$ qui indique comment pousser toute la fibre F sur les fibres au dessus de V . Utilisant finalement $\Phi : W \simeq V$, on en déduit une trivialisatation locale $\Phi_F : V \times F \rightarrow f^{-1}(V)$.

4.1 Première étape : construction des $Y_i \in \Gamma_\infty(TN)$ tels que $Y_i(y_0) = e_i$.

Soit (e_1, \dots, e_n) une base de $T_{y_0} N$ et soit (V, ψ) une carte locale en y_0 de N avec $\psi(y_0) = 0$. Alors ψ est un \mathcal{C}^∞ -difféomorphisme de $V \subset N$ sur $\psi(V) \subset \mathbf{R}^n$ faisant commuter :

$$\begin{array}{ccc} T_{y_0} V & \xrightarrow[\simeq]{T_{y_0} \psi} & T_0 \psi(V) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \{y_0\} & \xrightarrow{\psi} & \{0\} \end{array}$$

Une base de $T_0 \psi(V)$ est alors donnée par $(T_{y_0} \psi(e_1), \dots, T_{y_0} \psi(e_n))$. Puisque $\psi(V)$ est un ouvert de \mathbf{R}^n , on a vu à la section 3.2.2 qu'on peut définir les champs de vecteurs constants $Z_i : v \mapsto T_{y_0} \psi(e_i)$. L'idée est alors de tirer en

arrière ces champs Z_i par ψ et de prolonger en dehors de V par 0 mais sans perdre la régularité. Pour cela, considérons une fonction plateau $u \in \mathcal{C}^\infty(\psi(V), [0, 1])$ valant 1 sur un voisinage de 0 et dont le support est inclus dans une boule autour de 0 ne rencontrant pas $\partial\psi(V)$. On définit alors pour $i \in \{1, \dots, n\}$,

$$Y_i := \psi^*(uZ_i) \text{ prolongé en dehors de } V \text{ par } 0.$$

On vérifie alors bien que

$$Y_i(y_0) = (T_{y_0} \psi)^{-1}((uZ_i)(\psi(y_0))) = u(0)(T_{y_0} \psi)^{-1}(Z_i(0)) = (T_{y_0} \psi)^{-1} \circ T_{y_0} \psi(e_i) = e_i.$$

De plus, les Y_i ainsi construits sont à support compacts donc par la proposition 3.4.5, ce sont des champs complets.

4.2 Deuxième étape : construction du difféomorphisme Φ .

Pour tout i , notons $(t, y) \mapsto \phi_t^{Y_i}(y)$ le flot de Y_i . L'idée est de considérer

$$\Phi : \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^n & \rightarrow & N \\ \mathbf{t} = (t_1, \dots, t_n) & \mapsto & \phi_{t_1}^{Y_1} \circ \dots \circ \phi_{t_n}^{Y_n}(y_0) \end{array}$$

Lorsque \mathbf{t} varie, le point y_0 est déplacé sur N de sorte à couvrir une boules de dimension n en suivant les directions données par les vecteurs tangents e_i . Cette application traduit donc comment pousser le point y_0 sur n'importe quel point d'un de ses voisinages.

Il reste à montrer que cette application est bien un difféomorphisme local au voisinage de $0_{\mathbf{R}^n}$. Pour cela, utilisons le théorème d'inversion locale donc montrons que la différentielle en $\mathbf{t} = (0, \dots, 0)$ de Φ est inversible. Or $\phi_0^{Y_i} = \text{id}$ pour $i \in \{1, \dots, n\}$ donc la i -ème dérivée partielle de Φ en $\mathbf{t} = 0_{\mathbf{R}^n}$ est

$$\frac{d}{dt} [\phi_0^{Y_1} \circ \dots \circ \phi_t^{Y_i} \circ \dots \circ \phi_0^{Y_n}(y_0)]_{|t=0} = \frac{d\phi_t^{Y_i}(y_0)}{dt} \Big|_{t=0} = Y_i(\phi_0^{Y_i}(y_0)) = Y_i(y_0) = e_i.$$

Ainsi la matrice de $T_0 \Phi : \mathbf{R}^n \rightarrow T_{y_0} N$ avec la base canonique au départ et la base (e_1, \dots, e_n) à l'arrivée est l'identité, ce qui conclut cette étape. On note W un voisinage de 0 dans \mathbf{R}^n sur lequel Φ est un \mathcal{C}^∞ -difféomorphisme sur son image et $V = \Phi(W) \subset N$ qui est un voisinage de y_0 .

À ce stade, on peut se demander pourquoi ce résultat est intéressant. Après tout on peut trouver facilement un difféomorphisme d'un voisinage de n'importe quel point de N sur un ouvert de \mathbf{R}^n ... Il suffit de choisir une carte en ce point. L'intérêt de ce difféomorphisme est qu'il a été construit uniquement à partir des flots associés aux Y_i . Or la suite va montrer que l'on peut transposer ces champs de vecteurs Y_i sur M et donc le difféomorphisme Φ aussi. L'idée va être non plus de pousser des points mais des fibres entières les unes sur les autres.

4.3 Troisième étape : construction d'un relevé sur M de $Y \in \Gamma_\infty(TN)$.

Il s'agit du point clé de la preuve. Notons que $m \geq n$ car f est une submersion. Le but est de trouver pour tout champ de vecteurs Y sur N , un champ X sur M faisant commuter le diagramme

$$\begin{array}{ccc} T_x M & \xrightarrow{T_x f} & T_{f(x)} N \\ X_i \uparrow & & \uparrow Y_i \\ \{x\} & \xrightarrow{f} & \{f(x)\} \end{array}$$

pour tous $x \in M$. Il s'agit du même diagramme commutatif que celui vérifié par f^*Y lorsque f est supposée étale. Nous allons procéder en trois étapes et nous verrons que nous serons amenés à faire certains choix arbitraires, c'est pourquoi cette construction n'est pas canonique.

Traisons tout d'abord le cas où $M = \mathbf{R}^m$, $N = \mathbf{R}^n$ et $f = \pi$ est la submersion standard $(x_1, \dots, x_m) \mapsto (x_1, \dots, x_n)$. Soit Z un champ de vecteurs sur \mathbf{R}^n . Notre but est de le tirer en arrière sur \mathbf{R}^m . On sait que Z est donné par

$$Z(y_1, \dots, y_n) = \sum_{i=1}^n Z_i(y_1, \dots, y_n) \vec{e}_i,$$

où les Z_i sont dans $\mathcal{C}^\infty(N, \mathbf{R})$. On peut donc considérer le champ de vecteurs \tilde{Z} sur M défini par

$$\tilde{Z}(x_1, \dots, x_m) = Z(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n Z_i(x_1, \dots, x_n) \vec{e}_i.$$

Ce champ de vecteurs est de classe \mathcal{C}^∞ et, puisque π est linéaire, son application tangente en un point est aussi la surjection canonique, d'où pour tout $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^m$,

$$T_{\mathbf{x}} \pi(\tilde{Z}(\mathbf{x})) = Z(\pi(\mathbf{x})).$$

Ainsi l'application $Z \in \Gamma_\infty(T\mathbf{R}^n) \mapsto \tilde{Z} \in \Gamma_\infty(T\mathbf{R}^m)$ convient. On peut même facilement voir que c'est la seule possible.

Revenons au cas général et considérons $Y \in \Gamma_\infty(TN)$. Nous allons commencer par trouver pour tout $x_0 \in M$ un voisinage U_{x_0} de x_0 et un champ de vecteurs X_{x_0} de classe \mathcal{C}^∞ défini sur U_{x_0} faisant commuter le diagramme précédent pour $x \in U_{x_0}$, *i.e.* tel que $T_x f(X_{x_0}(x)) = Y(f(x))$ pour tout $x \in U_{x_0}$.

Fixons $x_0 \in M$. Par le théorème de forme normale des submersions, il existe une carte locale (U_{x_0}, φ) en x_0 avec $\varphi(U_{x_0}) = \mathbf{R}^m$ et une carte locale (V_{x_0}, ψ) en $f(x_0)$ avec $\psi(V_{x_0}) = \mathbf{R}^n$ telles que $f(U_{x_0}) \subset V_{x_0}$ et $\psi \circ f \circ \varphi^{-1} = \pi$.

$$\begin{array}{ccc} U_{x_0} & \xrightarrow{f} & V_{x_0} \\ \varphi \downarrow & & \downarrow \psi \\ \mathbf{R}^m & \xrightarrow{\pi} & \mathbf{R}^n \end{array}$$

On souhaite tirer en arrière le champ de vecteurs $Y|_{V_{x_0}}$ sur U_{x_0} . On commence par tirer $Y|_{V_{x_0}}$ sur \mathbf{R}^n en prenant l'image directe par le difféomorphisme ψ . L'étape précédente montre alors que l'on peut tirer en arrière ce champ à travers π via l'application $\tilde{\cdot}$. Et enfin on remonte le résultat sur U_{x_0} grâce à l'image réciproque par φ . On considère donc $X_{x_0} = \varphi^*(\tilde{\psi_* Y})$. Il n'est pas difficile de voir que ce champ de vecteurs convient. En effet, on doit faire commuter le carré frontal du diagramme suivant, dans lequel on omet les restrictions et on identifie $T_{\varphi(x)} \varphi(U)$ avec \mathbf{R}^m et $T_{\psi \circ f(x)} \psi(V)$ avec \mathbf{R}^n de façon usuelle :

$$\begin{array}{ccccc} & & \mathbf{R}^m & \xrightarrow{\pi} & \mathbf{R}^n \\ & \nearrow T_x \varphi & & & \nearrow T_{f(x)} \psi \\ T_x U & \xrightarrow{T_x f} & & \xrightarrow{} & T_{f(x)} V \\ & \searrow \tilde{\psi_* Y} & & & \searrow \psi_* Y \\ & & \{\varphi(x)\} & \xrightarrow{\pi} & \{\psi \circ f(x)\} \\ & \nearrow \varphi & & & \nearrow \psi \\ \{x\} & \xrightarrow{f} & \{f(x)\} & & \end{array}$$

Par définition de carte locale, les deux carrés des côtés commutent. Celui du dessous aussi grâce au théorème de forme normale des submersions (autrement dit grâce au choix des cartes locales). Le carré du fond commute par définition de la différentielle de π , identifiée avec elle-même par linéarité. Enfin la commutation du carré du haut provient de la fonctorialité du foncteur T . On en déduit aisément que celui du devant commute également.

Remarquons qu'un premier choix a été fait ici, celui des cartes (U_{x_0}, φ) et (V_{x_0}, ψ) .

On a donc défini des champs de vecteurs au voisinage de chaque point de M . Il reste à les recoller convenablement. Soit $(u_{x_0})_{x_0 \in M}$ une partition de l'unité \mathcal{C}^∞ de M associé au recouvrement par les ouverts $(U_{x_0})_{x_0 \in X}$. Posons alors $X = \sum_{x_0 \in X} u_{x_0} X_{x_0}$. Il s'agit bien d'un champ de vecteurs :

- $X(x) \in T_x M$ pour tout $x \in M$;
- X est de classe \mathcal{C}^∞ car au voisinage de tout point c'est une somme finie d'applications \mathcal{C}^∞ .

Ensuite, si $x \in M$, utilisant la linéarité de $T_x f$ et le fait que si $u_{x_0}(x) \neq 0$, alors $x \in U_{x_0}$ et $T_x f(X_{x_0}(x)) = Y(f(x))$,

$$T_x f(X(x)) = \sum_{x_0 \in M} u_{x_0}(x) T_x f(X_{x_0}(x)) = \sum_{x_0 \in M} \underbrace{u_{x_0}(x)}_{=1} Y(f(x)) = Y(f(x))$$

qui est la propriété que l'on souhaitait démontrer.

Remarquons ici un nouveau choix arbitraire, celui de la partition de l'unité.

Si on note ϕ_t^X et ϕ_t^Y les flots de X et Y respectivement, montrons que le champ de vecteurs ainsi construit vérifie :

$$f \circ \phi_t^X = \phi_t^Y \circ f,$$

i.e. fait commuter le diagramme suivant (à t fixé) :

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & N \\ \phi_t^X \downarrow & & \downarrow \phi_t^Y \\ M & \xrightarrow{f} & N \end{array}$$

Soit $x \in M$, supposons Y à support compact (et donc en particulier complet) et considérons les deux arcs tracés $t \mapsto f \circ \phi_t^X(x)$ et $t \mapsto \phi_t^Y \circ f(x)$ sur N . Ils sont de classe \mathcal{C}^∞ sur leurs ensembles de définition, valent tous deux $f(x)$ en 0 et vérifient :

$$\frac{d}{dt}[f \circ \phi_t^X(x)] = T_{\phi_t^X(x)} f \circ \frac{d\phi_t^X(x)}{dt} = T_{\phi_t^X(x)} f \circ X \circ \phi_t^X(x) = Y(f \circ \phi_t^X(x))$$

et

$$\frac{d}{dt}[\phi_t^Y \circ f(x)] = Y(\phi_t^Y \circ f(x)).$$

Une démonstration similaire à 3.4.1 permet de voir que si sur l'ensemble de définition de $t \mapsto \phi_t(x)$,

$$f \circ \phi_t^X(x) = \phi_t^Y \circ f(x).$$

On note γ_x^X la courbe intégrale de X en $x \in M$ et $\gamma_{f(x)}^Y$ celle de Y en $f(x) \in N$. Si $]a, b[$ est un intervalle fini inclus dans l'intervalle de définition γ_x^X , on a $\gamma_x^X(]a, b[) \subset f^{-1}(\gamma_{f(x)}^Y(]a, b[))$. Or f est propre donc $\gamma_x^X(]a, b[)$ est inclus dans un compact de M et X est complet par 3.4.5.

4.4 Quatrième étape : construction de la trivialisaton locale $\Phi_F : V \times F \rightarrow f^{-1}(V)$.

Pour $i = 1, \dots, n$ on choisit un relevé X_i sur M de Y_i et on note $\phi_t^{X_i}$ son flot. Le paragraphe précédent montre que les X_i sont des champs complets.

On rappelle que l'on a construit à l'étape 2. un difféomorphisme $\Phi : W \subset \mathbf{R}^n \rightarrow V \subset N$. On peut supposer W symétrique par rapport à $0_{\mathbf{R}^n}$, quitte à le réduire à une boule, modifiant également $V = \Phi(W)$. L'application

$$\theta : \begin{array}{l} W \times F \rightarrow f^{-1}(V) \\ (\mathbf{t}, x) \mapsto \phi_{t_1}^{X_1} \circ \dots \circ \phi_{t_n}^{X_n}(x) \end{array}$$

est bien définie et de classe \mathcal{C}^∞ car si $(\mathbf{t}, x) \in W \times F$,

$$f(\theta(\mathbf{t}, x)) = f \circ \phi_{t_1}^{X_1} \circ \dots \circ \phi_{t_n}^{X_n}(x) = \phi_{t_1}^{Y_1} \circ \dots \circ \phi_{t_n}^{Y_n}(f(x)) = \phi_{t_1}^{Y_1} \circ \dots \circ \phi_{t_n}^{Y_n}(y_0) = \Phi(\mathbf{t}) \in \Phi(W) = V. \quad (2)$$

Il s'agit en fait d'un \mathcal{C}^∞ -difféomorphisme, d'inverse

$$\theta^{-1} : \begin{array}{l} f^{-1}(V) \rightarrow W \times F \\ x \mapsto (\mathbf{t} = \Phi^{-1} \circ f(x), x' = \phi_{-t_n}^{X_n} \circ \dots \circ \phi_{-t_1}^{X_1}(x)) \end{array}.$$

C'est l'application que l'on cherchait à obtenir, au changement $W \leftrightarrow V$ près... ça tombe bien, ces deux ensembles sont difféomorphes. On définit finalement l'application

$$\Phi_F : \begin{array}{l} V \times F \rightarrow f^{-1}(V) \\ (y, x) \mapsto \theta(\Phi^{-1}(y), x) \end{array}$$

qui est un \mathcal{C}^∞ -difféomorphisme.

$$\begin{array}{ccccc} & & \Phi_F & & \\ & & \simeq & & \\ V \times F & \xrightarrow{\Phi^{-1} \times \text{id}_F} & W \times F & \xrightarrow{\theta} & f^{-1}(V) \\ & \simeq & & \simeq & \\ & \text{pr}_1 & & f & \\ & & V & & \end{array}$$

La commutation du triangle inférieur provenant du calcul 2 fait précédemment :

$$f \circ \theta \circ (\Phi^{-1} \times \text{id}_F) = \Phi \circ \text{pr}_1 \circ (\Phi^{-1} \times \text{id}_F = \text{pr}_1),$$

ce qui conclut. □

Références

- [AMR88] Ralph ABRAHAM, Jerrold E. MARSDEN et Tudor S. RAȚIU. *Manifolds, Tensor Analysis, and Applications*. 2nd ed. Applied Mathematical Sciences v. 75. Includes index. New York : Springer-Verlag, 1988. 654 p. ISBN : 978-0-387-96790-5.
- [Pau] Frédéric PAULIN. “Géométrie différentielle élémentaire”. In : (), p. 363.