SESSION 2013

CAPES EXTERNE

MATHÉMATIQUES 2

Problème 1 : Puissances de matrices

Partie A : étude d'un exemple

1. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5}x_n + \frac{2}{5}y_n \\ \frac{1}{5}x_n + \frac{3}{5}y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}.$$

On en déduit par récurrence que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}.}$$

2. $\chi_A = X^2 - (\mathrm{Tr}(A))\, X + \det(A) = X^2 - \frac{7}{5}X + \frac{2}{5} = \left(X - \frac{2}{5}\right)(X-1)$. Donc la matrice A admet deux valeurs propres simples à savoir $\frac{2}{5}$ et 1. En particulier, la matrice A est diagonalisable.

• Soit $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$. $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}\,(A - I_2) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} -\frac{1}{5}x + \frac{2}{5}y = 0 \\ \frac{1}{5}x - \frac{2}{5}y = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow x - 2y = 0.$

Donc $\mathrm{Ker}\,(A - I_2) = \mathrm{Vect}(e_1)$ où $e_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

• Soit $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$. $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}\left(A - \frac{2}{5}I_2\right) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \frac{2}{5}x + \frac{2}{5}y = 0 \\ \frac{1}{5}x + \frac{1}{5}y = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow x + y = 0.$

Donc $\mathrm{Ker}\left(A - \frac{2}{5}I_2\right) = \mathrm{Vect}(e_2)$ où $e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

On sait alors que $A = PDP^{-1}$ où $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{2}{5} \end{pmatrix} = \mathrm{diag}\left(1, \frac{2}{5}\right)$, $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ et donc $P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$.

3. On en déduit que pour tout entier naturel n,

$$A^n = PD^nP^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \left(\frac{2}{5}\right)^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & \left(\frac{2}{5}\right)^n \\ 1 & -\left(\frac{2}{5}\right)^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 + \left(\frac{2}{5}\right)^n & 2 - 2\left(\frac{2}{5}\right)^n \\ 1 - \left(\frac{2}{5}\right)^n & 1 + 2\left(\frac{2}{5}\right)^n \end{pmatrix}.$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ A^n = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2+\left(\frac{2}{5}\right)^n & 2-2\left(\frac{2}{5}\right)^n \\ 1-\left(\frac{2}{5}\right)^n & 1+2\left(\frac{2}{5}\right)^n \end{pmatrix}.}$$

4. Puisque $-1 < \frac{2}{5} < 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{5}\right)^n = 0$ et donc la suite $(A^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} A^n = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.}$$

5. D'après les questions 1. et 4., pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$x_n = \frac{1}{3}\left(\left(2+\left(\frac{2}{5}\right)^n\right)x_0 + \left(2-2\left(\frac{2}{5}\right)^n\right)y_0\right) \text{ et } y_n = \frac{1}{3}\left(\left(1-\left(\frac{2}{5}\right)^n\right)x_0 + \left(1+2\left(\frac{2}{5}\right)^n\right)y_0\right).$$

Les suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent et

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} x_n = \frac{2(x_0+y_0)}{3} \text{ et } \lim_{n\to+\infty} y_n = \frac{x_0+y_0}{3}.}$$

Partie B : résultats préliminaires

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $A_n = (a_{i,j}(n))_{\substack{1\leqslant i\leqslant p\\1\leqslant j\leqslant q}}$ et $B_n = (b_{i,j}(n))_{\substack{1\leqslant i\leqslant p\\1\leqslant j\leqslant q}}$.
Posons encore $L = (l_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant p\\1\leqslant j\leqslant q}}$ et $M = (m_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant p\\1\leqslant j\leqslant q}}$.

1.1 Soit $(i,j) \in [\![1,p]\!] \times [\![1,q]\!]$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, le coefficient ligne i, colonne j, de la matrice A_n+B_n est $a_{i,j}(n)+b_{i,j}(n)$. La suite $(a_{i,j}(n)+b_{i,j}(n))_{\substack{1\leqslant i\leqslant p\\1\leqslant j\leqslant q}}$ converge vers $l_{i,j}+m_{i,j}$.
Donc, la suite de matrices $(A_n+B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et a pour limite la matrice $(l_{i,j}+m_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant p\\1\leqslant j\leqslant q}}$ qui est la matrice $L+M$.

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}(A_n+B_n) = L+M.}$$

1.2 Soit $(i,j) \in [\![1,p]\!] \times [\![1,q]\!]$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, le coefficient ligne i, colonne j, de la matrice αA_n est $\alpha a_{i,j}(n)$. La suite $(\alpha a_{i,j}(n))_{\substack{1\leqslant i\leqslant p\\1\leqslant j\leqslant q}}$ converge vers $\alpha l_{i,j}$.
Donc, la suite de matrices $(\alpha A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et a pour limite la matrice $(\alpha l_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant p\\1\leqslant j\leqslant q}}$ qui est la matrice αL.

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}(\alpha A_n) = \alpha L.}$$

1.3 Soit $(i,j) \in [\![1,p]\!] \times [\![1,q]\!]$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, le coefficient ligne i, colonne j, de la matrice $\alpha_n B$ est $\alpha_n b_{i,j}$. La suite $(\alpha_n b_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant p\\1\leqslant j\leqslant q}}$ converge vers $\alpha b_{i,j}$.
Donc, la suite de matrices $(\alpha_n B)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et a pour limite la matrice $(\alpha b_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant p\\1\leqslant j\leqslant q}}$ qui est la matrice αB.

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}(\alpha_n B) = \alpha B.}$$

2.

2.1 Soit $(i,j) \in [\![1,p]\!] \times [\![1,q]\!]$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, le coefficient ligne i, colonne j, de la matrice A_nX est $\sum\limits_{k=1}^{p} a_{i,k}(n)x_{k,j}$. La suite $\left(\sum\limits_{k=1}^{p} a_{i,k}(n)x_{k,j}\right)_{\substack{1\leqslant i\leqslant p\\1\leqslant j\leqslant q}}$ converge vers $\sum\limits_{k=1}^{p} l_{i,k}x_{k,j}$.

Donc, la suite de matrices $(A_nX)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et a pour limite la matrice $\left(\sum\limits_{k=1}^{p} l_{i,k}x_{k,j}\right)_{\substack{1\leqslant i\leqslant p\\1\leqslant j\leqslant q}}$ qui est la matrice LX.

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}(A_nX)=LX.}$$

2.2 De même, pour toute matrice $X\in\mathscr{M}_{q,p}(\mathbb{C})$, $\lim\limits_{n\to+\infty} XA_n=XL$.

3. D'après la question précédente, pour tout vecteur colonne $X\in\mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{C})$, $\lim\limits_{n\to+\infty} A_nX=LX$.
On a donc pour tout vecteur colonne $X\in\mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{C})$, $LX=0$. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{C}^p$ canoniquement associé à L. On a donc pour tout x de $\mathbb{C}^p$, $f(x)=0$ et donc $f=0$ puis $L=0$.
Finalement, $\lim\limits_{n\to+\infty} A_n=L=0$.

Partie C : condition nécessaire

1. Soit λ une valeur propre de u.

1.1 Il existe $X=(x_i)_{1\leqslant i\leqslant p}\in\mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{C})$ tel que $X\neq 0$ et $AX=\lambda X$. Soit $i_0\in[\![1,p]\!]$ tel que $x_{i_0}\neq 0$.
On sait que pour tout entier naturel n, $A^nX=\lambda^nX$. Par hypothèse, la suite $(A^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. D'après la question 2) de la partie B, la suite $(A^nX)_{n\in\mathbb{N}}$ converge ou encore la suite $(\lambda^nX)_{n\in\mathbb{N}}$. En particulier, la suite $(\lambda^nx_{i_0})_{n\in\mathbb{N}}$ converge et finalement la suite $(\lambda^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge puisque $x_{i_0}\neq 0$.

En résumé, si la suite $(A^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et si λ est une valeur propre de A, alors la suite $(\lambda^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Si $|\lambda|>1$, la suite $(\lambda^n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge et donc la suite $(A^n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge. Par contraposition, si la suite $(A^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, alors $|\lambda|\leqslant 1$.

1.2 Supposons de plus que $|\lambda|=1$. Puisque la suite $(\lambda^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, la suite $\left(\lambda^{n+1}-\lambda^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0. Or, pour tout entier naturel n,

$$\left|\lambda^{n+1}-\lambda^n\right|=|\lambda|^n\times|\lambda-1|=|\lambda-1|\,.$$

Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\lambda^{n+1}-\lambda^n\right)=0$, on en déduit que $|\lambda-1|=0$ puis que $\lambda=1$.

2. Soit $x\in\mathrm{Ker}(u-\mathrm{Id})\cap\mathrm{Im}(u-\mathrm{Id})$. Donc $u(x)=x$ et il existe y tel que $x=u(y)-y$. On en déduit que $u\left(u(y)-y\right)=u(y)-y$ puis que $u^2(y)-2u(y)+y=0$.

Montrons par récurrence que $\forall n\geqslant 0$, $u^n(y)=nu(y)+(1-n)y$.
- Puisque $u^0(y)=y$, l'égalilté est vraie quand $n=0$.
- Soit $n\geqslant 0$. Supposons que $u^n(y)=nu(y)+(1-n)y$. Alors

$$\begin{aligned}u^{n+1}(y)&=u\left(u^n(y)\right)=u\left(nu(y)+(1-n)y\right)=nu^2(y)+(1-n)u(y)=n\left(2u(y)-y\right)+(1-n)u(y)\\&=(n+1)u(y)+(1-(n+1))y.\end{aligned}$$

Le résultat est démontré par récurrence.

Ainsi, pour tout entier naturel n, $u^n(y)=n(u(y)-y)+y=nx+y$. Puisque la suite $(u^n(y))_{n\in\mathbb{N}}$ converge, la suite $(nx+y)_{n\in\mathbb{N}}$ converge ce qui impose $x=0$. On a montré que

$$\boxed{\mathrm{Ker}(u-\mathrm{Id})\cap\mathrm{Im}(u-\mathrm{Id})=\{0\}.}$$

Partie D : condition suffisante

1. Théorème de d'Alembert-Gauss. Tout polynôme à coefficients dans $\mathbb{C}$ de degré supérieur ou égal à 1 est scindé sur $\mathbb{C}$.

2. On sait que χ_u est de degré p et de coefficient dominant $(-1)^p$. Si on note $(\alpha_1,\ldots,\alpha_p)$, la famille des p racines (distinctes ou confondues) de χ_u dans $\mathbb{C}$, on a

$$\chi_u=(-1)^p\prod_{i=1}^{p}(X-\alpha_i)=\prod_{i=1}^{p}(\alpha_i-X)\,.$$

3. u est un endomorphisme de $\mathbb{C}^p$ qui est un $\mathbb{C}$-espace de dimension finie. On sait alors que u est triangulable. Par suite, il existe une base de $\mathbb{C}^p$ dans laquelle la matrice de u est triangulaire supérieure. Le polynôme caractéristique de cette matrice triangulaire est le polynôme caractéristique de u. On trouve donc sur la diagonale de cette matrice triangulaire la famille des racines de χ_u. Quite à réordonner les vecteurs de base, on a montré qu'il existe une base $(e_1,\ldots,e_p)$ dans laquelle u admet une matrice de la forme

$$T = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \dots & \dots & \dots \\ & \alpha_2 & \dots & \dots \\ & & \ddots & \dots \\ 0 & & & \alpha_p \end{pmatrix}.$$

4.

4.1. $u(e_1) = \alpha_1 e_1$ puis, pour tout entier naturel n, $u^n(e_1) = \alpha_1^n e_1$. Comme $|\alpha_1| < 1$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_1^n = 0$ puis

$$\lim_{n\to+\infty} u^n(e_1) = \lim_{n\to+\infty} \alpha_1^n e_1 = 0.$$

4.2. Montrons par récurrence que $\forall i \in [\![1, p]\!]$, $\lim\limits_{n\to+\infty} u^n(e_i) = 0$.

- Le résultat est vrai pour $i = 1$ d'après la question précédente.
- Soit $i \in [\![1, p-1]\!]$. Supposons que pour tout $j \in [\![1, i]\!]$, $\lim\limits_{n\to+\infty} u^n(e_j) = 0$ et montrons que $\lim\limits_{n\to+\infty} u^n(e_{i+1}) = 0$.

Par hypothèse de récurrence, pour tout $j \in [\![1, i]\!]$, $\lim\limits_{n\to+\infty} u^n(e_j) = 0$ et donc, par linéarité, pour tout x de $\text{Vect}(e_1, \dots, e_i)$, $\lim\limits_{n\to+\infty} u^n(x) = 0$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Puisque T est triangulaire supérieure, il existe un vecteur x de $\text{Vect}(e_j)_{1\leqslant j\leqslant i}$ tel que

$$u(e_{i+1}) = \alpha_{i+1} e_{i+1} + x.$$

On en déduit que pour tout entier naturel k, $u^{k+1}(e_{i+1}) - \alpha_{i+1} u^k(e_{i+1}) = u^k(x)$ puis que

$$\alpha_{i+1}^{n-k-1} u^{k+1}(e_{i+1}) - \alpha_{i+1}^{n-k} u^k(e_{i+1}) = \alpha_{i+1}^{n-k-1} u^k(x).$$

En sommant ces égalités, on obtient

$$u^n(e_{i+1}) - \alpha_{i+1}^n e_{i+1} = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\alpha_{i+1}^{n-k-1} u^{k+1}(e_{i+1}) - \alpha_{i+1}^{n-k} u^k(e_{i+1})\right) = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_{i+1}^{n-k-1} u^k(x).$$

(somme télescopique). Ainsi, pour tout entier naturel non nul n,

$$u^n(e_{i+1}) = \alpha_{i+1}^n e_{i+1} + \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_{i+1}^{n-k-1} u^k(x).$$

Déjà, puisque $|\alpha_{i+1}| < 1$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_{i+1}^n e_{i+1} = 0$. Montrons alors que $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=0}^{n-1} \alpha_{i+1}^{n-k-1} u^k(x) = 0$.

Soit $\varepsilon > 0$. Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} u^k(x) = 0$ et que $|\alpha_{i+1}| < 1$, il existe un entier naturel non nul n_0 tels que, pour tout entier $k \geqslant n_0$, $\|u^k(x)| < \dfrac{\varepsilon(1 - |\alpha_{i+1}|)}{2}$. Pour $n \geqslant n_0$, on a

$$\begin{aligned}
\left\|\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_{i+1}^{n-k-1} u^k(x)\right\| &\leqslant \sum_{k=0}^{n_0-1} |\alpha_{i+1}|^{n-k-1} \left\|u^k(x)\right\| + \sum_{k=n_0}^{n-1} |\alpha_{i+1}|^{n-k-1} \left\|u^k(x)\right\| \\
&\leqslant \sum_{k=0}^{n_0-1} |\alpha_{i+1}|^{n-k-1} \left\|u^k(x)\right\| + \frac{\varepsilon(1 - |\alpha_{i+1}|)}{2} \sum_{k=n_0}^{n-1} |\alpha_{i+1}|^{n-k-1} \\
&\leqslant \sum_{k=0}^{n_0-1} |\alpha_{i+1}|^{n-k-1} \left\|u^k(x)\right\| + \frac{\varepsilon(1 - |\alpha_{i+1}|)}{2} \sum_{k=0}^{+\infty} |\alpha_{i+1}|^k \\
&= \sum_{k=0}^{n_0-1} |\alpha_{i+1}|^{n-k-1} \left\|u^k(x)\right\| + \frac{\varepsilon}{2}
\end{aligned}$$

D'autre part, $\sum\limits_{k=0}^{n_0-1} |\alpha_{i+1}|^{n-k-1} \left\|u^k(x)\right\|$ est la somme d'un nombre fixe (quand n varie) de suites géométriques, convergentes, de limites nulles. Donc, $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=0}^{n_0-1} |\alpha_{i+1}|^{n-k-1} \left\|u^k(x)\right\| = 0$. On en déduit qu'il existe un entier naturel

$n_1 \geqslant n_0$ tel que pour $n \geqslant n_1$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n_0-1} |\alpha_{i+1}|^{n-k-1} \left\|u^k(x)\right\| < \frac{\varepsilon}{2}$. Pour $n \geqslant n_1$, on a $\left\|\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_{i+1}^{n-k-1} u^k(x)\right\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

Ceci montre que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_{i+1}^{n-k-1} u^k(x) = 0$ et finalement que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u^n(e_{i+1}) = 0$.

On a montré par récurrence que $\forall i \in [\![1,p]\!]$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u^n(e_i) = 0$.

4.3 Pour tout $n \in \mathbb{C}$ et tout $i \in [\![1,p]\!]$, les composantes de la i-ème colonne $C_{i,n}$ de T^n sont les coordonnées de $u^n(e_i)$ dans la base $(e_1, \dots, e_p)$ de $\mathbb{C}^p$. Puisque pour tout $i \in [\![1,p]\!]$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u^n(e_i) = 0$, on en déduit que chaque colonne $C_{i,n}$ de T^n tend vers la colonne nulle quand n tend vers $+\infty$ ou encore chaque suite de coefficients de T^n tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. Mais alors la matrice T^n tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

Il existe une matrice inversible P telle que $A = PTP^{-1}$. Pour tout entier naturel n, $A^n = PT^nP^{-1}$. D'après la question 2. de la partie B, la suite $(A^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers la matrice $P \times 0 \times P^{-1} = 0$. En résumé, la suite $(A^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers la matrice nulle.

5.

5.1 $\mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id}) \cap \mathrm{Im}(u - \mathrm{Id}) = \{0\}$ et d'autre part, d'après le théorème du rang, $\dim(\mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id})) + \dim(\mathrm{Im}(u - \mathrm{Id})) = \dim(\mathbb{C}^p) < +\infty$. On sait alors que $\mathbb{C}^p = \mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id}) \oplus \mathrm{Im}(u - \mathrm{Id})$.

Les endomorphismes u et $u - \mathrm{Id}$ commutent. On sait alors que $\mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id})$ et $\mathrm{Im}(u - \mathrm{Id})$ sont stables par u.

5.2 Si $\mathrm{Im}(u-\mathrm{Id}) = \{0\}$, alors $\mathbb{C}^p = \mathrm{Ker}(u-\mathrm{Id})$ puis $u = \mathrm{Id}$. Dans ce cas, $A = I_p$ et il n'y a rien à dire dans cette question.

Sinon, $\mathrm{Im}(u - \mathrm{Id}) \neq \{0\}$ et u_1 est un endomorphisme d'un $\mathbb{C}$-espace de dimension finie non nulle. u_1 admet donc au moins une valeur propre. Soit λ une valeur propre de u_1 dans $\mathbb{C}$. Il existe un vecteur non nul x de $\mathrm{Im}(u-\mathrm{Id})$ tel que $u_1(x) = \lambda x$. Mais alors, x est un vecteur non nul de $\mathbb{C}^p$ tel que $u(x) = \lambda x$. λ est donc une valeur propre de u.

Si $\lambda = 1$, alors x est un vecteur non nul tel que $u(x) = x$ et donc x est un vecteur non nul de $\mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id}) \cap \mathrm{Im}(u - \mathrm{Id})$ ce qui est impossible. Donc, $\lambda \neq \lambda_1$. On a montré que toute valeur propre de u_1 est une valeur propre de u distincte de λ_1.

5.3 Si $\mathrm{Im}(u - \mathrm{Id}) = \{0\}$, $A = I_p$ et donc la suite $(A^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers I_p.

Sinon, la matrice de u dans une base adaptée à la décomposition $\mathbb{C}^p = \mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id}) \oplus \mathrm{Im}(u - \mathrm{Id})$ est de la forme $T = \begin{pmatrix} I_d & 0 \\ 0 & T_1 \end{pmatrix}$ (puisque $\mathrm{Im}(u - \mathrm{Id})$ est stable par u). A est semblable à T. Un calcul par blocs montre que A^n est semblable à $T^n = \begin{pmatrix} I_d & 0 \\ 0 & T_1^n \end{pmatrix}$.
Les valeurs propres de T_1 sont les valeurs propres de A de modules tous strictement inférieurs à 1. D'après la question 4., la suite $(T_1^n)^{n\mathbb{N}}$ converge vers la matrice nulle et donc la suite $(T^n)^{n\mathbb{N}}$ converge vers la matrice $\begin{pmatrix} I_d & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Mais alors, comme à la question 4.3., la suite $(A^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une matrice semblable à la matrice $\begin{pmatrix} I_d & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ où $d = \dim(\mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id}))$, ce qui reste vrai dans la cas où $\mathrm{Im}(u - \mathrm{Id}) = \{0\}$.

Partie E : conclusion et applications

1. La partie C montre que la condition est nécessaire et la partie D montre que la condition est suffisante (la lecture de l'énoncé étant conventionnelle dans le cas $m = 1$).

2.

2.1 $\chi_A = X^2 - 0,5X + 0,04 = (X - 0,1)(X - 0,4)$. A est de format 2 et a deux valeurs propres distinctes dont les modules sont strictement plus petits que 1. D'après la question précédente, la suite $(A^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

2.2 A est triangulaire supérieure de format 3. Ses valeurs propres deux à deux distinctes sont 1 et $\dfrac{i}{2}$ qui est de module $\dfrac{1}{2} < 1$. D'après la question précédente, la suite $(A^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si et seulement si $\mathrm{Ker}(A - I_3) \cap \mathrm{Im}(A - I_3) = \{0\}$.

$A - I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & i \\ 0 & -1 + \dfrac{i}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. $\mathrm{rg}(A - I_3) = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & i \\ -1 + \dfrac{i}{2} & 1 \end{pmatrix} = 2$ car $\begin{vmatrix} 1 & i \\ -1 + \dfrac{i}{2} & 1 \end{vmatrix} = \dfrac{3}{2} + i \neq 0$. Donc, $\mathrm{Im}(A - I_3)$ est un plan et $\mathrm{Ker}(A - I_3)$ est une droite d'après le théorème du rang. Le vecteur $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ est un vecteur non nul de $\operatorname{Ker}(A - I_3)$ et donc $\operatorname{Ker}(A - I_3) = \operatorname{Vect}(e_1)$. On en déduit que la suite $(A^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si et seulement si $e_1 \notin \operatorname{Im}(A - I_3)$.

$\operatorname{Im}(A - I_3)$ est engendré par les colonnes de $A - I_3$ et donc une base de $\operatorname{Im}(A - I_3)$ est (e_2, e_3) où $e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 + \dfrac{i}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$ et $e_3 = \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ (car $\operatorname{Im}(A - I_3)$ est un plan). La matrice de la famille (e_1, e_2, e_3) dans la base canonique de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{C})$ est $\begin{pmatrix} 1 & 1 & i \\ 0 & -1 + \dfrac{i}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Cette matrice n'est pas inversible car sa dernière ligne est nulle. Donc, la famille (e_1, e_2, e_3) est liée puis $e_1 \in \operatorname{Vect}(e_2, e_3) = \operatorname{Im}(A - I_3)$ car la famille (e_2, e_3) est libre. Ceci montre que la suite $(A^n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.

2.3 En développant suivant la première colonne, on obtient

$$\begin{aligned}\chi_A &= (1 - X)\left(X^2 - \left(-6 + \frac{i}{2} + 6 + \frac{i}{2}\right)X + \left(-6 + \frac{i}{2}\right)\left(6 + \frac{i}{2}\right) + 36\right) = (1 - X)\left(X^2 - iX - \frac{1}{4}\right) \\ &= (1 - X)\left(X - \frac{i}{2}\right)^2.\end{aligned}$$

Comma à la question précédente, la suite $(A^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si et seulement si $\operatorname{Ker}(A - I_3) \cap \operatorname{Im}(A - I_3) = \{0\}$. Puisque $A - I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -7 + \dfrac{i}{2} & 9 \\ 0 & -4 & 5 + \dfrac{i}{2} \end{pmatrix}$ et que $\begin{vmatrix} -7 + \dfrac{i}{2} & 9 \\ -4 & 5 + \dfrac{i}{2} \end{vmatrix} = 1 - \dfrac{7i}{2} \neq 0$, la matrice $A - I_3$ est de rang 2. $\operatorname{Ker}(A - I_3)$ est la droite vectorielle engendrée par le vecteur $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\operatorname{Im}(A - I_3)$ est le plan vectoriel de base (e_2, e_3) où $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -7 + \dfrac{i}{2} \\ -4 \end{pmatrix}$ et $e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ 5 + \dfrac{i}{2} \end{pmatrix}$. Enfin, la matrice de la famille (e_1, e_2, e_3) dans la base canonique de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{C})$ est $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -7 + \dfrac{i}{2} & 9 \\ 0 & -4 & 5 + \dfrac{i}{2} \end{pmatrix}$. Le déterminant de cette matrice est $1 - \dfrac{7i}{2} \neq 0$. La famille (e_1, e_2, e_3) est libre et donc $e_1 \notin \operatorname{Vect}(e_2, e_3)$ ou encore $\operatorname{Ker}(A - I_3) \cap \operatorname{Im}(A - I_3) = \{0\}$. Dans ce cas, la suite $(A^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Problème 2 : quelques théorèmes d'arithmétique

Partie A : théorème de Lagrange

1. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ puis $k \in [\![1, n]\!]$.

$$k\binom{n}{k} = k \times \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} = n \times \frac{(n-1)!}{(k-1)!((n-1)-(k-1))!} = n\binom{n-1}{k-1}.$$

2. Soient p un nombre premier puis $k \in [\![1, p-1]\!]$. Alors k et p sont premiers entre eux. Ensuite, p divise $p\binom{p-1}{k-1} = k\binom{p}{k}$. En résumé, p divise $k\binom{p}{k}$ et p est premier à k. D'après le théorème de Gauss, p divise $\binom{p}{k}$.

3.

3.1 Soient p un entier premier impair (donc $p \geqslant 3$) et $x \in \mathbb{R}$.

$$(x+1)f(x+1)-xf(x)=(x+1)\prod_{k=1}^{p-1}(x+1+k)-x\prod_{k=1}^{p-1}(x+k)=\prod_{k=0}^{p-1}(x+(k+1))-\prod_{k=0}^{p-1}(x+k)$$
$$=\prod_{k=1}^{p}(x+k)-\prod_{k=0}^{p-1}(x+k)=((x+p)-x)\prod_{k=1}^{p-1}(x+k)=pf(x).$$

3.2 f est un polynôme de degré $p-1$ et il existe donc des réels $a_0,\ldots,a_{p-1}$ tels que pour tout réel x,

$$f(x)=a_0x^{p-1}+a_1x^{p-2}+\ldots+a_{p-2}x+a_{p-1}=\sum_{k=0}^{p-1}a_kx^{p-1-k}.$$

3.3 Le coefficient de x^{p-1} est $1\times1\times\ldots\times1=1$ et donc $a_0=1$. D'autre part,

$$a_{p-1}=f(0)=1\times2\times\ldots\times(p-1)=(p-1)!$$

3.4 Soit $k\in[\![0,p-1]\!]$. pa_k est le coefficient de x^{p-1-k} dans pf. D'autre part, pour tout réel x

$$\begin{aligned}pf(x)=(x+1)f(x+1)-xf(x)&=(x+1)\sum_{k=0}^{p-1}a_k(x+1)^{p-1-k}-x\sum_{k=0}^{p-1}a_kx^{p-1-k}\\&=\sum_{k=0}^{p-1}a_k(x+1)^{p-k}-\sum_{k=0}^{p-1}a_kx^{p-k}=\sum_{k=0}^{p-1}a_k\left(\sum_{i=0}^{p-k}\binom{p-k}{i}x^{p-k-i}\right)-\sum_{k=0}^{p-1}a_kx^{p-k}\\&=\sum_{k=0}^{p-1}a_k\left(\sum_{i=1}^{p-k}\binom{p-k}{i}x^{p-k-i}\right)\\&=\sum_{k=0}^{p-1}\left(\sum_{j=k}^{p-1}\binom{p-k}{j+1-k}a_kx^{p-1-j}\right)\ \text{(en posant } j=k+i-1)\\&=\sum_{j=0}^{p-1}\left(\sum_{k=0}^{j}\binom{p-k}{j+1-k}a_k\right)x^{p-1-j}\\&=\sum_{k=0}^{p-1}\left(\sum_{i=0}^{k}\binom{p-i}{k+1-i}a_i\right)x^{p-1-k}\ \text{(en posant } k=i \text{ et } j=k).\end{aligned}$$

Pour tout $k\in[\![0,p-1]\!]$, le coefficient de x^{p-1-k} dans pf est aussi $\displaystyle\sum_{i=0}^{k}\binom{p-i}{k+1-i}a_k$ et donc, par identification des coefficients,

$$\forall i\in[\![0,p-1]\!],\ pa_k=\sum_{i=0}^{k}\binom{p-i}{k+1-i}a_i.$$

3.5 Quand $k=0$, on obtient $pa_0=pa_0$ ce qui n'apporte rien.
Quand $k=1$, on obtient $pa_1=\binom{p}{2}a_0+\binom{p-1}{1}a_1=\binom{p}{2}+(p-1)a_1$ et donc $a_1=\binom{p}{2}$.
Pour $k\in[\![2,p-1]\!]$, on a

$$pa_k=\binom{p}{k+1}a_0+\sum_{i=1}^{k-1}\binom{p-i}{k+1-i}a_i+\binom{p-k}{1}a_k$$

et donc $(p-(p-k))a_k=\binom{p}{k+1}a_0+\displaystyle\sum_{i=1}^{k-1}\binom{p-i}{k+1-i}a_i$ puis $ka_k=\binom{p}{k+1}+\displaystyle\sum_{i=1}^{k-1}\binom{p-i}{k+1-i}a_i$.

3.6 Montrons par récurrence sur k que $\forall k\in[\![1,p-2]\!]$, a_k est divisible par p.

- $a_1=\binom{p}{2}=p\times\dfrac{p-1}{2}$. Puisque p est impair, $\dfrac{p-1}{2}$ est un entier et donc p divise a_1. Ceci achève la démonstration si $p=3$. On suppose forénavant $p\geqslant5$.

- Soit $k \in [\![2, p-2]\!]$. Supposons que $\forall i \in [\![1, k-1]\!]$, p divise a_i. Alors, p divise déjà $\displaystyle\sum_{i=1}^{k-1}\binom{p-i}{k+1-i}a_i$.

  D'autre part, $k+1 \in [\![1, p-1]\!]$ et donc, d'après la question 2., p divise $\dbinom{p}{k+1}$.

  Finalement, p divise $\dbinom{p}{k+1} + \displaystyle\sum_{i=1}^{k-1}\binom{p-i}{k+1-i}a_i = ka_k$.

  Ainsi, p divise ka_k et p est premier avec k (car p est premier et $k \in [\![1, p-1]\!]$). D'après le théorème de Gauss, p divise a_k.

Le résultat est démontré par récurrence.

Partie B : théorème de Wilson

1. $(2-1)! = 1$ et $1 \equiv -1$ [2]. Donc la propriété est vraie pour $p = 2$.

2.

2.1 $p! = \displaystyle\prod_{i=1}^{p-1}(1+i) = f(1) = \sum_{k=0}^{p-1} a_k = a_0 + \sum_{k=1}^{p-2} a_k + a_{p-1} = 1 + \sum_{k=1}^{p-2} a_k + (p-1)!$ d'après la question 3.3 de la partie A.

2.2 $p!$ est divisible par p et $\displaystyle\sum_{k=1}^{p-2} a_k$ est divisible par p d'après la question 3.6. Donc $(p-1)! + 1 \equiv 0$ [p] ou encore $(p-1)! \equiv -1$ [p].

3. Soit p un entier naturel supérieur ou égal à 3 tel que $(p-1)! \equiv -1$ [p]. Alors, il existe un entier naturel q tel que $\forall k \in [\![2, p-1]\!]$, $\left(-\displaystyle\prod_{1 \leqslant j \leqslant p,\ j \neq k}^{j}\right)k + qp = 1$. Le théorème de Bézout montre que p est premier avec chacun des entiers k tels que $1 \leqslant k \leqslant p-1$ et donc que p est un nombre premier.
Puisque 2 est premier, le résultat est vrai quand $p = 2$. On a montré que

$$\forall p \geqslant 2,\ p \text{ premier} \Leftrightarrow (p-1)! \equiv -1\ [p].$$

4.

4.1 Posons $n = p_1p_2m$ où p_1 et p_2 sont deux nombres premiers tels que $p_1 < p_2$ et m est un entier naturel non nul. Alors $2 \leqslant p_1 < p_2 \leqslant p_2m < n$ (car si $p_2m = n$, alors $p_1 = 1$ ce qui est faux. Ainsi, p_1 et p_2m sont deux diviseurs de n, inférieurs ou égaux à $n-1$ et tels que $p_1 < p_2m$.
$(n-1)!$ est un multiple de $p_1 \times p_2m = n$ et donc $(n-1)! \equiv 0$ [n].

4.2 Posons $n = p^\alpha$ où p est un nombre premier et $\alpha \geqslant 3$. Alors, $p \geqslant 2$, $\alpha - 1 \geqslant 2$ puis $p < p^{\alpha-1} < p^\alpha$ par stricte croissance de la fonction $x \mapsto p^x$ sur $\mathbb{R}$.
p et $p^{\alpha-1}$ sont deux diviseurs de n, inférieurs ou égaux à $n-1$ et tels que $p < p^{\alpha-1}$.
$(n-1)!$ est un multiple de $p \times p^{\alpha-1} = n$ et donc $(n-1)! \equiv 0$ [n].

4.3 Posons $n = p^2$ où p est un nombre premier supérieur ou égal à 3 (car si $p = 2$, alors $n = 4$ ce qui est faux). $2 \times p \geqslant 2 > 1$ et d'autre part, $2 \times p < p \times p = n$. Donc $1 < 2p < n$ et même $1 < p < 2p < n$.
$(n-1)!$ est un multiple de $p \times 2p = 2n$. En particulier, $(n-1)!$ est un multiple de n et donc $(n-1)! \equiv 0$ [n].

Partie C : théorème de Wolstenholme

1. Algorithme.

Variables	s et t sont des entiers naturels non nuls n est un entier naturel non nul d est un entier naturel non nul
Initialisation	Affecter à s la valeur 1 Affecter à t la valeur 1
Traitement	Pour n allant de 1 à 9 Affecter à s la valeur $(n+1)*s+t$ Affecter à t la valeur $(n+1)t$ Affecter à d la valeur $\text{PGCD}(s,t)$ Affecter à s la valeur s/d Affecter à t la valeur t/d Afficher à s Afficher t Fin du Tant que Fin

2. • $H_4 = 1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4} = \dfrac{12+6+4+3}{12} = \dfrac{25}{12}$. Puisque $\text{PGCD}(25,12)=1$, on a $s_4 = 25 = 5^2$. s_4 est donc divisible par 5^2.

• $H_6 = H_4+\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{6} = \dfrac{25}{12}+\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{6} = \dfrac{125+12+10}{60} = \dfrac{147}{60} = \dfrac{3\times 7^2}{2^2\times 3\times 5} = \dfrac{49}{20}$. Puisque $\text{PGCD}(49,20)=1$, on a $s_6 = 49 = 7^2$. s_6 est donc divisible par 7^2.

• $H_{10} = H_6+\dfrac{1}{7}+\dfrac{1}{8}+\dfrac{1}{9}+\dfrac{1}{10} = \dfrac{49}{20}+\dfrac{1}{7}+\dfrac{1}{8}+\dfrac{1}{9}+\dfrac{1}{10} = \dfrac{49\times 2\times 3^2\times 7+2^3\times 3^2\times 5+3^2\times 5\times 7+2^3\times 5\times 7+2^2\times 3^2\times 7}{2^3\times 3^2\times 5\times 7} = \dfrac{6174+360+315+280+252}{2^3\times 3^2\times 5\times 7} = \dfrac{7381}{2^3\times 3^2\times 5\times 7} = \dfrac{11^2\times 61}{2^3\times 3^2\times 5\times 7}$. 61 est premier car n'est divisible par aucun des nombres premiers inférieurs ou égaux à sa racine carrée à savoir 2, 3, 5 et 7.
Puisque $\text{PGCD}(11^2\times 61, 2^3\times 3^2\times 5\times 7)=1$, on a $s_{10} = 11^2\times 61 = 7381$. s_{10} est donc divisible par 11^2.

3. Après réduction au même dénominateur, on obtient $H_{p-1} = \dfrac{\displaystyle\sum_{k=1}^{p-1}\left(\prod_{1\leqslant j\leqslant p-1,\ j\neq k} j\right)}{(p-1)!}$.

Le coefficient de x dans le développement de $f(x) = \displaystyle\prod_{k=1}^{p-1}(x+k)$ est $\displaystyle\sum_{k=1}^{p-1}\left(\prod_{1\leqslant j\leqslant p-1,\ j\neq k}\right)$. Ce coefficient est aussi a_{p-2} et donc

$$H_{p-1} = \frac{a_{p-2}}{(p-1)!}.$$

4. Pour tout réel x, $f(x) = a_0x^{p-1}+a_1x^{p-2}+\ldots+a_{p-2}x+a_{p-1} = x^{p-1}+a_1x^{p-2}+\ldots+a_{p-2}x+(p-1)!$. Donc, $f(-p) = p^{p-1}-a_1p^{p-2}+\ldots+a_{p-3}p^2-a_{p-2}p+(p-1)!$ (car $p-1$ est pair, -2 est impair …). Mais d'autre part,

$$f(-p) = (-p+1)(-p+2)\ldots(-p+(p-2))(-p+(p-1)) = (-1)^{p-1}(p-1)! = (p-1)!$$

car $p-1$ est pair. Donc, $p^{p-1}-a_1p^{p-2}+\ldots+a_{p-3}p^2-a_{p-2}p+(p-1)! = (p-1)!$ puis $pa_{p-2} = p^{p-1}-a_1p^{p-2}+\ldots+a_{p-3}p^2$ et finalement,

$$a_{p-2} = p^{p-2}-a_1p^{p-3}+\ldots+a_{p-3}p.$$

5. $a_{p-2} = p\left(p^{p-3}-a_1p^{p-4}+\ldots+a_{p-3}\right)$. Puisque $p\geqslant 5$, chacun des termes de la somme dans la parenthèse est divisible par p d'après la question 3.6 de la partie A et donc le nombre entre parenthèses est divisible par p puis a_{p-2} est divisible par p^2.

L'égalité $H_{p-1} = \dfrac{a_{p-2}}{(p-1)!}$ s'écrit encore $s_{p-1}\times(p-1)! = a_{p-2}\times t_{p-1}$. p^2 divise a_{p-2} et donc p^2 divise $a_{p-2}\times t_{p-1} = s_{p-1}\times(p-1)!$. Mais p est premier et donc p est premier avec $(p-1)!$ d'après le théorème de Wilson. On en déduit que p^2 est premier avec $(p-1)!$ et que p^2 divise $s_{p-1}\times(p-1)!$. D'après le théorème de Gauss, p^2 divise $(p-1)!$.

