Problème 2 : décimales des nombres rationnels

Partie A : nombres décimaux

1. • Soit $x \in \mathbb{Z}$. $10^0 x \in \mathbb{Z}$ et donc $x \in \mathbb{D}$. Ceci montre que $\mathbb{Z} \subset \mathscr{D}$. De plus, $0,1 = \dfrac{1}{10}$ est un nombre décimal qui n'est pas un entier. Donc,

$$\mathbb{Z} \underset{\neq}{\subset} \mathbb{D}.$$

• Soit $x \in \mathbb{D}$. Il existe $(n, p) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}$ tel que $10^n x = p$. Mais alors, $x = \dfrac{p}{10^n}$ et donc $x \in \mathbb{Q}$. Ceci montre que $\mathbb{D} \subset \mathbb{Q}$. Montrons alors que $\dfrac{1}{3}$ est un nombre rationnel qui n'est pas un nombre décimal. Dans le cas contraire, il existe $(n, p) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}$ tel que $10^n \times \dfrac{1}{3} = p$ et donc $3p = 10^n$. Mais $n = 0$ est impossible car 1 n'est pas un multiple de 3 et $n \geqslant 1$ est impossible car le nombre premier 3 n'est pas un facteur premier de $10^n = 2^n 5^n$. On a montré par l'absurde que $\dfrac{1}{3}$ est un nombre rationnel qui n'est pas un nombre décimal. Donc,

$$\mathbb{D} \underset{\neq}{\subset} \mathbb{Q}.$$

2. Soit $(x, y) \in \mathbb{D}^2$. Il existe $(n, p, m, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \times \mathbb{Z}$ tel que $10^n x = p$ et $10^m y = q$. Mais alors

$$10^{n+m}(x + y) = 10^m \times 10^n x + 10^n \times 10^m y = 10^m p + 10^n q \in \mathbb{Z},$$

et donc $x + y \in \mathbb{D}$. De même,

$$10^{n+m} xy = 10^n x 10^m y = pq \in \mathbb{Z},$$

et donc $xy \in \mathbb{D}$. On a montré que $\mathbb{D}$ est stable pour l'addition et pour la multiplication.

3.

3.1. Soit $n = \mathrm{Max}\{\alpha, \beta\}$. n est un entier naturel supérieur ou égal à α et à β puis

$$10^n x = \frac{2^n 5^n a}{2^\alpha 5^\beta} = 2^{n-\alpha} 5^{n-\beta} a \in \mathbb{Z}.$$

Donc, x est un nombre décimal.

3.2. x n'est pas entier et donc $b \geqslant 2$. Soit p un facteur premier de b.
Puisque x est un décimal positif non entier, il existe deux entiers naturels non nuls n et k tels que $\dfrac{a}{b} = \dfrac{k}{10^n}$ et donc $kb = 10^n a$. b divise $10^n a$ et b est premier à a. D'après le théorème de Gauss, b divise 10^n puis p divise 10^n. p est un donc facteur premier de $10^n = 2^n 5^n$ (avec $n \geqslant 1$). Donc, $p \in \{2, 5\}$.

3.3. Ainsi, si x est un décimal non entier, il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{N}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ tel que $b = 2^\alpha 5^\beta$. Si x est entier, b divise a et est premier à a et donc $b = 1 = 2^0 5^0$. Dans tous les cas, il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{N}^2$ tel que $b = 2^\alpha 5^\beta$.
La réciproque a été établie à la question a) et donc

$$x \text{ est décimal si et seulement si il existe } (\alpha, \beta) \in \mathbb{N}^2 \text{ tel que } b = 2^\alpha 5^\beta.$$

4.

4.1. Pour tout entier naturel n, $0 \leqslant \dfrac{d_n}{10^n} \leqslant \dfrac{9}{10^n} = 9\left(\dfrac{1}{10}\right)^n$. Puisque $\dfrac{1}{10} \in]-1, 1[$, la série géométrique de terme général $9\left(\dfrac{1}{10}\right)^n$, $n \in \mathbb{N}$, converge et il en est de même de la série de terme général $\dfrac{d_n}{10^n}$, $n \in \mathbb{N}$.

4.2. • Si la suite (d_n) est finie, il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que pour $n \geqslant N$, $d_n = 0$. Mais alors,

$$10^N x = 10^N \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{d_n}{10^n} = 10^N \sum_{n=0}^{N} \frac{d_n}{10^n} = \sum_{n=0}^{N} d_n 10^{N-n} \in \mathbb{Z}.$$

x est donc un nombre décimal.

• Supposons que x admette un développement décimal impropre. Donc, il existe un rang $N \in \mathbb{N}^*$ tel que pour $n \geqslant N$, $d_n = 9$. D'après l'étude précédente, x est la somme d'un nombre décimal y et de

$$z = \sum_{n=N}^{+\infty} \frac{9}{10^n} = \frac{9}{10^N} \times \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{1}{10^{N-1}}.$$

Ainsi, $x = y + z$ est la somme de deux nombres décimaux et est donc un nombre décimal d'après la question 2).

4.3. Soit $N \geqslant 0$. Pour tout $k \geqslant N + 1$, on a $d_k \leqslant 9$. D'après le calcul de la question précédente,

$$\sum_{k=N}^{+\infty} \frac{d_k}{10^k} = \frac{d_N}{10^N} + \sum_{k=N+1}^{+\infty} \frac{d_k}{10^k} \leqslant \frac{d_N}{10^N} + \sum_{k=N+1}^{+\infty} \frac{9}{10^k} = \frac{d_N}{10^N} + \frac{1}{10^N} = \frac{1 + d_N}{10^N}.$$

Si toutes les inégalités $d_k \leqslant 9$, $k \geqslant N + 1$, sont des égalités, alors $\displaystyle\sum_{k=N+1}^{+\infty} \frac{9}{10^k} = \frac{1}{10^N}$. Si l'une des inégalités $d_k \leqslant 9$, $k \geqslant N + 1$, est stricte, alors

$$\sum_{k=N+1}^{+\infty} \frac{d_k}{10^k} < \sum_{k=N+1}^{+\infty} \frac{9}{10^k} = \frac{1}{10^N},$$

et donc $\displaystyle\sum_{k=N}^{+\infty} \frac{d_k}{10^k} < \frac{1 + d_N}{10^N}$. Finalement, $\displaystyle\sum_{k=N}^{+\infty} \frac{d_k}{10^k} = \frac{1 + d_N}{10^N}$ si et seulement si pour tout $k \geqslant N + 1$, $d_k = 9$.

4.4. Considérons deux suites décimales propres distinctes $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(d'_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Soient $x = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{d_n}{10^n}$ et $x' = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{d'_n}{10^n}$.

$\{n \in \mathbb{N}/\ d_n \neq d'_n\}$ est une partie non vide de $\mathbb{N}$. On peut considérer $N = \text{Min}\{n \in \mathbb{N}/\ d_n \neq d'_n\}$. Par définition $d_N \neq d'_N$. On peut supposer sans perte de généralité que $d_N < d'_N$ ou encore que $d'_N \geqslant d_N + 1$. Puisque la suite $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est propre, la question précédente permet d'écrire

$$\sum_{n=N}^{+\infty} \frac{d_n}{10^n} < \frac{1 + d_N}{10^N} \leqslant \frac{d'_N}{10^N} \leqslant \sum_{k=N}^{+\infty} \frac{d'_n}{10^n}.$$

Comme d'autre part, les éventuelles décimales de x et x' d'indices strictement inférieurs à N sont égales, on en déduit que $x < x'$. On a ainsi montré l'unicité d'un développement décimal propre.

5. Soit x un décimal positif. Posons $d_0 = E(x)$. $x - d_0$ est un décimal de $[0, 1[$. Par suite, il existe un entier naturel N tel que $10^N (x - d_0) \in \mathbb{N}$. Mais alors $10^N (x - d_0)$ est un entier élément de $[\![0, 10^N - 1]\!]$. La décomposition de cet entier en base 10 s'écrit

$$10^N (x - d_0) = d_1 \times 10^{N-1} + \ldots + d_{n-1} \times 10 + d_N$$

où les chiffres $d_1, \ldots, d_{n-1}$ sont éléments de $[\![0, 9]\!]$. On en déduit que

$$x = d_0 + d_{10} + \ldots + \frac{d_N}{10^N}.$$

Ceci montre l'existence d'un développement décimal fini et en particulier propre de x. L'unicité de ce développement a été montré à la question précédente.

Partie B : périodicité des décimales d'un rationnel positif non décimal

1. Soit $N \geqslant 1$.

1.1. Algorithme.

Variables	a et b sont des entiers naturels non nuls N est un entier naturel non nul k est un entier naturel d et r sont des entiers naturels
Initialisation	Demander a, b et N Affecter à d la valeur $E(a/b)$ Affecter à r la valeur $a - db$

Traitement	Afficher d
	Afficher r
	Tant que $k < N$
	    Affecter à d la valeur $E(10r/b)$
	    Affecter à r la valeur $10r - db$
	    Afficher d
	    Afficher r
	    Affecter à k la valeur $k + 1$
	Fin du Tant que
	Fin

1.2. On donne les résultats successifs dans un tableau.

n	0	1	2	3	4	5	6	7
d_n	0	3	8	4	6	1	5	3
r_n	5	11	6	8	2	7	5	11
$10r_n$	50	110	60	80	20	70	50	110

2.

2.1. Montrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $x = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{d_k}{10^k} + \frac{r_n}{10^n b}$.

- d_0 et r_0 sont respectivement le quotient et le reste de la division euclidienne de a par b. Donc, $a = bd_0 + r_0$ puis

$$x = \frac{a}{b} = d_0 + \frac{r_0}{b} = \sum_{k=0}^{0} \frac{d_k}{10^k} + \frac{r_0}{10^0 b}.$$

La formule proposée est vraie quand $n = 0$.

- Soit $n \geqslant 0$. Supposons que $x = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{d_k}{10^k} + \frac{r_n}{10^n b}$. d_{n+1} et r_{n+1} sont respectivement le quotient et le reste de la division euclidienne de $10r_n$ par b. Donc, $10r_n = bd_{n+1} + r_{n+1}$ puis, après division des deux membres par $10^{n+1}b$,

$$\frac{r_n}{10^n b} = \frac{d_{n+1}}{10^{n+1}} + \frac{r_{n+1}}{10^{n+1} b},$$

puis $x = \displaystyle\sum_{k=0}^{n+1} \frac{d_k}{10^k} + \frac{r_{n+1}}{10^{n+1} b}$.

Le résultat est démontré par récurrence.

2.2. Soit $n \in \mathbb{N}$. En multipliant les deux membres de l'égalité précédente par $10^n b$, on obtient $10^n a = q_n b + r_n$ où $q_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} d_k 10^{n-k}$ est un entier et r_n est un entier tel que $0 \leqslant r_n < b$. Donc r_n est le reste de la division euclidienne de $10^n a$ par b.

2.3. • Pour tout entier naturel n, $0 \leqslant r_n < b$ puis $0 \leqslant 10r_n < 10b$ puis

$$0 \leqslant d_{n+1} = E\left(\frac{10r_n}{b}\right) \leqslant \frac{10r_n}{b} < 10,$$

ou encore $0 \leqslant d_{n+1} \leqslant 9$. Ainsi, pour tout entier naturel non nul, $d_n \in [\![0, 9]\!]$. D'autre $d_0 = E\left(\frac{a}{b}\right)$ est un entier.

• Soit $n \in \mathbb{N}$. $0 \leqslant \frac{r_n}{10^n b} < \frac{b}{10^n b} = \frac{1}{10^n}$. Puisque $\frac{1}{10^n}$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$, le théorème des gendarmes permet d'affirmer que la suite $\left(\frac{r_n}{10^n b}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{r_n}{10^n b} = 0$.

On en déduit encore que la série de terme général $\frac{d_k}{10^k}$, $k \in \mathbb{N}$ converge et que

$$x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{d_k}{10^k}.$$

• Ce développement décimal est nécessairement propre. Dans le cas contraire, d'après la question 4.2, de la partie A, x serait un nombre décimal ce qui n'est pas.

3.

3.1. S'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $r_n = 0$, alors pour cet entier n, $x = \sum_{k=0}^{n} \frac{d_k}{10^k}$ et en particulier, x est un nombre décimal, ce qui est faux. Donc, $\forall n \in \mathbb{N}$, $r_n \neq 0$.

3.2. D'après la question précédente, $\forall n \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant r_n \leqslant b - 1$. Les b nombres $r_0, \ldots, r_{b-1}$ sont éléments de $[\![1, b-1]\!]$ qui est de cardinal $b - 1 < b$. D'après le principe des tiroirs, les b nombres $r_0, \ldots, r_{b-1}$ ne peuvent être deux à deux distincts.

3.3. Montrons par récurrence que $\forall n \geqslant q$, $r_{n+p} = r_n$.

- Le résultat est vrai pour $n = q$ car par définition de q, $r_{q+p} = r_q$.
- Soit $n \geqslant q$. Supposons que $r_{n+p} = r_n$. r_{n+1+p} est le reste de la division euclidienne de $10r_{n+p} = 10r_n$ par b. Le reste de la division euclidienne de $10r_n$ par b est aussi r_{n+1}. Donc, $r_{n+1+p} = r_{n+1}$.

Le résultat est démontré par récurrence. La suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est p-périodique à partir du rang q.

Soit $n \geqslant q$. $10r_n = d_{n+1}b + r_{n+1}$ et donc $d_{n+1} = \frac{10r_n - r_{n+1}}{b}$. On en déduit que la suite $(d_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est p-périodique à partir du rang q ou encore que la suite $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est p-périodique à partir du rang $q + 1$.

4.

4.1. i. Tout d'abord, si l'un des entiers 10^k, $0 \leqslant b - 1$ est congru à 0 modulo b, alors b est un diviseur de 10^k et est donc de la forme $2^\alpha 5^\beta$, $(\alpha, \beta) \in \mathbb{N}^2$. D'après la question 3.1 de la partie A, x est décimal ce qui est faux. Donc, aucun des 10^k, $0 \leqslant k \leqslant b - 1$, n'est congru à 0 modulo b. Par suite, les b restes des divisions euclidiennes de 10^0, $10^1, \ldots, 10^{b-1}$ sont éléments de $[\![1, b-1]\!]$. Comme à la question 3.2, deux d'entre eux sont égaux ou encore deux au moins des nombres 10^0, $10^1, \ldots, 10^{b-1}$ sont congrus modulo b.

ii. Soit $(n, m) \in \mathbb{N}^2$.

$$\begin{aligned} r_n = r_m &\Leftrightarrow 10^n a \equiv 10^m a\ [b] \text{ (d'après la question 2.2)} \\ &\Leftrightarrow 10^n \equiv 10^m\ [b] \text{ (car } a \text{ et } b \text{ sont premiers entre eux et donc } a \text{ est simplifiable modulo } b). \end{aligned}$$

Ceci montre que q est le plus petit exposant d'un nombre de la liste qui est congru à un autre nombre de la liste modulo b puis que $q + p$ est l'exposant du premier nombre de la liste congru à 10^p modulo b et distinct de 10^q.

4.2. Le résultat de la question 4.1. de dépend pas du choix de l'entier non nul a, premier à b. Puisque l'entier 1 est premier à b, les rationnels $\frac{a}{b}$ et $\frac{1}{b}$ ont même période et même pré-période.

5. • $10^0 \equiv 1$ [7], $10^1 \equiv 3$ [7], $10^2 \equiv 2$[7], $10^3 \equiv 6$ [7], $10^4 \equiv 4$ [7], $10^5 \equiv 5$ [7] et $10^6 \equiv 1$ [7]. Donc la pré-période de 7 est 0 et la période de 7 est 6.

• $10^0 \equiv 1$ [12], $10^1 \equiv 10$ [12], $10^2 \equiv 4$[12], $10^3 \equiv 4$ [12]. Donc la pré-période de 12 est 2 et la période de 12 est 1.

• $10^0 \equiv 1$ [112], $10^0 \equiv 10$ [112], $10^2 \equiv 100$ [112], $10^3 \equiv 104$ [112], $10^4 \equiv 32$ [112], $10^5 \equiv 96$ [112], $10^6 \equiv 64$ [112], $10^7 \equiv 80$ [112], $10^8 \equiv 16$ [112], $10^9 \equiv 48$ [112], $10^{10} \equiv 32$ [112]. Donc la pré-période de 112 est 4 et la période de 112 est 6.

Partie C : détermination de la pré-période

1.

1.1. b et 10 sont premiers entre eux et il en est de même de b et 10^q. Par suite, 10^q est simplifiable modulo b ou encore $10^q \equiv 10^{p+q}$ [b] $\Leftrightarrow 10p \equiv 10^0$ [b].

1.2. Par définition de q, on a $10^q \equiv 10^{p+q}$ [b]. D'après la question précédente, on a donc $10^p \equiv 10^0$ [b]. Puisque $1 \leqslant p \leqslant b-1$, par définition de q, on a $q = 0$ ou encore $\omega(b) = 0$.

2. Si 10^q est un multiple de $2^j \times 5^k$ et si $10^p - 1$ est un multiple de c, alors $10^q\left(10^p - 1\right)$ est un multiple de $2^j \times 5^k \times c = b$.

Réciproquement, supposons que $10^q\left(10^p - 1\right)$ soit un multiple de $b = 2^j \times 5^k \times c$. Il existe un entier K tel que

$$10^q\left(10^p - 1\right) = K \times 2^j \times 5^k \times c \ (*)).$$

c est premier avec 10 et donc avec 10^q. D'autre part, d'après l'égalité $(*)$, l'entier c divise $10^q\left(10^p - 1\right)$. D'après le théorème de Gauss, c divise $10^p - 1$.

D'après le théorème de Bézout, les entiers $10^p - 1$ et 10^p sont premiers entre eux car $1 \times 10^p + (-1) \times \left(10^p - 1\right) = 1$. On en déduit que l'entier naturel $10^p - 1$ supérieur ou égal à 2, n'admet ni 2, ni 5 pour facteur premier et donc premier avec $2^j \times 5^k$ (même si $j = k = 0$).
D'après l'égalité $(*)$, l'entier $2^j \times 5^k$ divise $10^q\left(10^p - 1\right)$ et est d'autre part premier avec $10^p - 1$. D'après le théorème de Gauss, $2^j \times 5^k$ divise 10^q.

On a ainsi montré que : $10^q\left(10^p - 1\right)$ multiple de $b \Leftrightarrow 10^q$ multiple de $2^j \times 5^k$ et $10^p - 1$ multiple de c. Maintenant, $10^q\left(10^p - 1\right)$ multiple de $b \Leftrightarrow 10^{q+p} \equiv 10^p$ [b].
D'après la question 4.1 de la partie B et d'après ce qui précède, q est la pré-période de b et p est la période de b si et seulement si q est le plus petit entier naturel tel que 10^q soit un multiple de $2^j \times 5^k$ et p est le plus petit entier naturel non nul tel que $10^p \equiv 1$ [c].
Or, $10^q = 2^q \times 5^q$ est un multiple de $2^j \times 5^k$ si et seulement si $q \geqslant \text{Max}\{j, k\}$. Ceci montre que

$$\omega(b) = \text{Max}\{j, k\}.$$

D'autre part, le plus petit entier naturel non nul p tel que $10^p \equiv 1$ [c] est la période de c d'après la question 1 et donc

$$\pi(b) = \pi(c).$$

3. • $150 = 2 \times 3 \times 5^2$. Ici, $c = 3$, $j = 1$ et $k = 2$. D'après ce qui précède, $\pi(150) = \pi(3) = 1$ et $\omega(150) = \text{Max}\{1, 2\} = 2$. La pré-période de 150 est 2 et la période de 150 est 1.

• $1120 = 2^5 \times 5 \times 7$. Donc $\omega(1120) = \text{Max}\{5, 1\} = 5$ et $\pi(1120) = \pi(7) = 6$. La pré-période de 1120 est 5 et la période de 1120 est 6.

Partie D : détermination de la période

1.

1.1. • Vérifions tout d'abord que pour tout élément $\overline{a}$ de $(\mathbb{Z}/b\mathbb{Z})^*$, $\overline{10} \times \overline{a} \in (\mathbb{Z}/b\mathbb{Z})^*$.
Soit $\overline{a}$ de $(\mathbb{Z}/b\mathbb{Z})^*$. Puisque 10 est premier avec b, on sait que $\overline{10}$ est un inversible de l'anneau $(\mathbb{Z}/b\mathbb{Z}, +, \times)$. En particulier, $\overline{10}$ est simplifiable pour $\times$ dans $\mathbb{Z}/b\mathbb{Z}$ et donc si $\overline{10} \times \overline{a} = \overline{0}$, alors $\overline{a} = \overline{0}$. Par contraposition, $\overline{a} \neq \overline{0} \Rightarrow \overline{10} \times \overline{a} \neq \overline{0}$.
Ceci montre que f est effectivement une application de $(\mathbb{Z}/b\mathbb{Z})^*$ dans lui-même.

• Soient $\overline{a}$ et $\overline{a'}$ deux éléments de $(\mathbb{Z}/b\mathbb{Z})^*$ tels que $f\left(\overline{a}\right) = f\left(\overline{a'}\right)$. Alors $\overline{10} \times \overline{a} = \overline{10} \times \overline{a'}$ puis $\overline{a} = \overline{a'}$ car $\overline{10}$ est simplifiable pour $\times$ dans $\mathbb{Z}/b\mathbb{Z}$.

On a montré que f est une application injective de $(\mathbb{Z}/b\mathbb{Z})^*$ dans lui-même.

1.2. Puisque l'ensemble $(\mathbb{Z}/b\mathbb{Z})^*$ est fini de cardinal $b - 1$, on sait que f est une permutation de $(\mathbb{Z}/b\mathbb{Z})^*$. On en déduit que

$$\prod_{a=1}^{b-1} \overline{a} = \prod_{a=1}^{b-1} f\left(\overline{a}\right) = \prod_{a=1}^{b-1} \left(\overline{10} \times \overline{a}\right) = \overline{10}^{\,b-1} \times \prod_{a=1}^{b-1} \overline{a}.$$

Puisque b est un nombre premier, on sait que toutes les classes non nulles sont inversibles et donc simplifiables dans $\mathbb{Z}/b\mathbb{Z}$. Après simplification par $\displaystyle\prod_{a=1}^{b-1} \overline{a}$, on obtient $\overline{10}^{\,b-1} = \overline{1}$ ou encore $10^{b-1} \equiv 1$ [b].

1.3. Soient n un entier naturel et m un entier naturel non nul. La division euclidienne de n par m s'écrit $n = qm + r$ où q et r sont deux entiers naturels tels que $0 \leqslant r < m$.

$$\begin{aligned} 10^n - 1 &= 10^{qm+r} - 1 = 10^{qm+r} - 10^r + 10^r - 1 = 10^r\left(\left(10^m\right)^q - 1\right) + \left(10^r - 1\right) \\ &= 10^r\left(\left(10^m\right)^{m-1} + \left(10^m\right)^{m-1} + \ldots + 10^m + 1\right)\left(10^m - 1\right) + \left(10^r - 1\right) \end{aligned}$$

Tout d'abord, $10^r\left((10^m)^{m-1}+(10^m)^{m-1}+\ldots+10^m+1\right)$ est un entier. Ensuite,

$$0\leqslant r<m\Rightarrow 10^0\leqslant 10^r<10^m\Rightarrow 0\leqslant 10^r-1<10^m-1.$$

Donc, le reste de la division euclidienne de 10^n-1 par 10^m-1 est 10^r-1.

1.4. • Soit k un entier naturel tel que $10^k\equiv 1$ [b]. D'après la question précédente, il existe un entier Q tel que $10^k-1=Q\times\left(10^{\pi(b)}-1\right)+(10^r-1)$ où r est le reste de la division euclidienne de k par $\pi(b)$.
Les deux entiers 10^k-1 et $10^{\pi(b)}-1$ sont congrus à 0 modulo b et donc 10^r-1 est congru à 0 modulo b. Ainsi, r est un entier vérifiant $10^r\equiv 1$ [b] et $0\leqslant r<\pi(b)$. Puisque $\pi(b)$ est le plus petit entier naturel n non nul vérifiant $10^n\equiv 1$ [b], il ne reste que la possibilité $r=0$. Ceci montre que $\pi(b)$ divise k.
On a montré que pour tout entier naturel k, si $10^k\equiv 1$ [b], alors $\pi(b)$ divise k. On peut noter que la réciproque est vraie puisque $10^{\pi(b)}\equiv 1$ [b].

• D'après la question 1.2, $10^{b-1}\equiv 1$ [b] et donc, d'après la question précédente, $\pi(b)$ divise $b-1$.

2.

2.1. Soit n un entier naturel. Si 10^n-1 est multiple de bc, alors 10^n-1 est multiple de b et de c. Réciproquement, si 10^n-1 est multiple de b et de c, alors 10^n-1 est multiple du PPCM de b et de c à savoir bc puisque b et c sont premiers entre eux. En résumé,

$$10^n\equiv 1\ [bc]\Leftrightarrow 10^n\equiv 1\ [b] \text{ et } 10^n\equiv 1\ [c].$$

Ensuite, le raisonnement de la question 1.4 n'a pas fait intervenir le fait que b soit un nombre premier et donc

$$10^n\equiv 1\ \Leftrightarrow n \text{ est un multiple de } \pi(b).$$

En résumé,

$$10^n\equiv 1\ [bc]\Leftrightarrow n \text{ est un multiple de } \pi(b) \text{ et } \pi(c).$$

2.2. Les multiples communs à deux entiers sont les multiples de leur PPCM et donc

$$10^n\equiv 1\ [bc]\Leftrightarrow n \text{ est un multiple de PPCM}\left(\pi(b),\pi(c)\right).$$

En particulier, $\pi(bc)=\text{PPCM}\left(\pi(b),\pi(c)\right)$.

3.

3.1. Puisque $\ell\pi(p)$, $10^\ell\equiv 1$ [p] ou encore il existe un entier K tel que $10^\ell-1=Kp$. Soit k la valuation p-adique de K. On peut écrire K sous la forme $K=p^k\times q$ où k est un entier naturel et q est un entier naturel non nul premier à p. On a alors $10^\ell-1=p^{k+1}\times q$ ou encore $10^\ell-1=p^r\times q$ où $r=k+1$ de sorte que $r\geqslant 1$.

3.2. Supposons que $n\leqslant r$. Alors, $p^r\times q=10^\ell-1$ est un multiple de p^n et donc $10^\ell\equiv 1$ $[p^n]$. On sait alors que $\pi\left(p^n\right)\leqslant\ell$. Mais d'autre part, puisque $10^{\pi\left(p^n\right)}\equiv 1$ $[p^n]$, alors en particulier $10^{\pi\left(p^n\right)}\equiv 1$ [p] et donc $\pi\left(p^n\right)\geqslant\ell$.
Finalement, $\pi\left(p^n\right)=\ell$.

3.3. Supposons que $n>r$.
Montrons par récurrence que pour tout $k\in\mathbb{N}$, il existe un entier naturel Q_k premier avec p tel que $10^{\ell\times p^k}-1=p^{r+k}\times Q_k$ et que $\pi\left(p^{r+k}\right)=\ell\times p^k$.

• La proposition est vraie quand $k=0$ avec $Q_0=q$ (qui est premier avec p) puisque d'autre part $\pi\left(p^r\right)=\ell$ d'après la question précédente.

• Soit $k\geqslant 0$. Supposons qu'il existe un entier naturel Q_k premier avec p tel que $10^{\ell\times p^k}-1=p^{r+k}\times Q_k$ et que $\pi\left(p^{r+k}\right)=\ell\times p^k$. Alors

$$\begin{aligned}10^{\ell\times p^{k+1}}-1&=\left(10^{\ell\times p^k}\right)^p-1\\&=\left(p^{r+k}\times Q_k+1\right)^p-1 \text{ par hypothèse de récurrence}\\&=\sum_{j=1}^{p}\binom{p}{j}\left(p^{r+k}Q_k\right)^j=p^{r+k+1}Q_k+\sum_{j=2}^{p}\binom{p}{j}p^{j(r+k)}Q_k^j\end{aligned}$$

Posons $Q_{k+1}=Q_k+\displaystyle\sum_{j=2}^{p}\binom{p}{j}p^{j(r+k)-r-k-1}Q_k^j=Q_k+\sum_{j=2}^{p}\binom{p}{j}p^{(j-1)(r+k)-1}Q_k^j$.

Pour $j \geqslant 2$, $(j-1)(r+k)-1 \geqslant r+k-1 \geqslant 1+0-1=0$ car $r \geqslant 1$. Donc Q_{k+1} est un entier naturel non nul tel que

$$10^{\ell \times p^{k+1}} - 1 = p^{r+k+1} Q_{k+1}.$$

Vérifions que Q_{k+1} est premier avec p. Pour $j \geqslant 3$, $(j-1)(r+k)-1 \geqslant 2(r+k)-1 \geqslant 2-1=1$. Donc, $\sum_{j=3}^{p} \binom{p}{j} p^{(j-1)(r+k)-1} Q_k^j$ est un entier divisible par p. D'autre part, $\binom{p}{2} p^{(2-1)(r+k)-1} Q_k^j = p \times \dfrac{p-1}{2} p^{r+k-1} Q_k^2$ est un entier divisible par p puisque $\dfrac{p-1}{2}$ est un entier, p étant impair. Finalement, $\sum_{j=2}^{p} \binom{p}{j} p^{(j-1)(r+k)-1} Q_k^j$ est un entier divisible par p. On en déduit que $Q_{k+1} \equiv Q_k$ [p]. Par hypothèse de récurrence, Q_k est premier au nombre premier p. Il en est de même de Q_{k+1}.

Montrons alors que $\pi\left(p^{r+k+1}\right) = \ell \times p^{k+1}$. Puisque $10^{\ell \times p^{k+1}} - 1$ est divisible par p^{r+k+1}, on a $10^{\ell \times p^{k+1}} \equiv 1$ [p^{r+k+1}]. On en déduit que $\pi\left(p^{r+k+1}\right)$ est un diviseur de $\ell \times p^{r+k+1}$.

Mais d'autre part, $10^{\pi\left(p^{r+k+1}\right)} - 1$ est divisible par p^{r+k+1} et donc par p^{r+k} et donc $\pi\left(p^{r+k+1}\right)$ est un multiple de $\pi\left(p^{r+k}\right)$ ou encore de $\ell \times p^{r+k}$ par hypothèse de récurrence. Donc, il existe un entier naturel non nul K tel que $\pi\left(p^{r+k+1}\right) = K \times \ell \times p^{r+k}$. Puisque $K \times \ell \times p^{r+k}$ divise $\ell \times p^{r+k+1}$, K est un diviseur de p et donc $K=1$ ou $K=p$ puisque p est premier.

Ceci ne laisse plus comme possibilités que $\pi\left(p^{r+k+1}\right) = \ell \times p^{r+k+1}$ ou $\pi\left(p^{r+k+1}\right) = \ell \times p^{r+k}$.
Mais si $\pi\left(p^{r+k+1}\right) = \ell \times p^{r+k}$, alors $10^{\ell \times p^{r+k}} - 1 \equiv 0$ [p^{r+k+1}] ou encore $p^{r+k} Q_k \equiv 0$ [p^{r+k+1}] ou enfin $Q_k \equiv 0$ [p] ce qui est faux. Donc, $\pi\left(p^{r+k+1}\right) = \ell \times p^{r+k+1}$.

Le résultat est démontré par récurrence.

En particulier, pour $k = n - r \in \mathbb{N}$ de sorte que $n = r + k$, on obtient $\pi\left(p^n\right) = \ell \times p^{n-r}$.

4.

4.1. • $10^1 \equiv 1$ [3]. Donc si $p=3$, alors $\ell = 1$. De plus, $10^\ell - 1 = 9 = 3^2$ et donc $r = 2$ si $p = 3$. Par suite, $\pi(3) = \pi\left(3^2\right) = 1$ puis $\pi\left(3^3\right) = 1 \times 3^1 = 3$ et $\pi\left(3^4\right) = 1 \times 3^2 = 9$.

• On a vu à la question 5 de la partie B que $\pi(7) = 6$. De plus, $10^6 - 1 = 999\,999 = 7^1 \times 142\,857$ avec 142857 premier à 7. Donc, si $p = 7$, alors $r = 1$. D'après la question précédente, $\pi(7) = 6$ puis $\pi(7^2) = 6 \times 7 = 42$ puis $\pi(7^3) = 6 \times 7^2 = 294$.

4.2. $27783 = 3^4 \times 7^3$. D'après ce qui précède, $\pi(27783) = \pi\left(3^4\right) \times \pi\left(7^3\right) = 9 \times 294 = 2646$.

$$\pi(27783) = 2646.$$

