SESSION 2009

CONCOURS COMMUN POLYTECHNIQUE (ENSI)

FILIERE MP

MATHEMATIQUES 2

Exercice 1

1. Posons $P = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k$ où la suite (a_k) est réelle et nulle à partir d'un certain rang.
Soit λ une valeur propre éventuelle de u. Il existe $x_0 \in E \setminus \{0\}$ tel que $u(x_0) = \lambda x_0$. Mais alors

$$(P(u))(x_0) = \left(\sum_{k=0}^{+\infty} a_k u^k\right)(x_0) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_k \lambda^k x_0 = P(\lambda) x_0.$$

Comme x_0 n'est pas nul, $P(\lambda)$ est une valeur propre de $P(u)$ associé au vecteur propre x_0.

$$\boxed{\text{Si } \lambda \text{ est valeur propre de } u,\ P(\lambda) \text{ est valeur propre de } P(u).}$$

2. (a) Soit λ une valeur propre de u. Alors $P(\lambda)$ est valeur propre de $P(u) = 0$. Maintenant l'endomorphisme 0 admet une valeur propre et une seule à savoir 0. Donc $P(\lambda) = 0$ ou encore λ est racine de P.

$$\boxed{\text{Les valeurs propres de } u \text{ sont à choisir parmi les racines d'un polynôme annulateur de } u.}$$

(b) On a $Id_E^2 = Id_E$ et donc le polynôme $P = X^2 - X = X(X-1)$ est annulateur de Id_E. Mais la racine 0 de P n'est pas une valeur propre de Id_E. Donc la réciproque du résultat du (a) est fausse.

3. Puisque E est un $\mathbb{R}$-espace de dimension impaire, le polynôme caractéristique de u est un élément de $\mathbb{R}[X]$ de degré impair. Un tel polynôme admet au moins une racine réelle et donc u admet au moins une valeur propre.
Le polynôme $P = X^3 - X^2 + X - 1 = (X-1)(X^2+1)$ est annulateur de u. Les valeurs propres de u sont à choisir parmi les racines réelles de P. Donc une valeur propre de u est nécessairement égale à 1 et finalement, puisque u admet au moins une valeur propre,

$$\boxed{\mathrm{Sp}(u) = \{1\}.}$$

Exercice 2

1. w est un vecteur normal à Π. Les vecteurs $u = e_1 - 2e_3$ et $v = e_2 - 3e_3$ sont deux vecteurs non colinéaires de Π. Donc (u, v) est une base de Π.
La famille (u, v) est libre et le vecteur w n'est pas dans $\mathrm{Vect}(u, v)$ car est dans $\Pi^\perp \setminus \{0\}$. Donc la famille (u, v, w) est une base de Π.

2. Puisque u et v sont dans Π, $s(u) = u$ et $s(v) = v$ et puisque w est dans $\Pi^\perp$, $s(w) = -w$. Donc

$$\boxed{S' = \mathrm{diag}(1, 1, -1).}$$

3. Soit P la matrice de passage de la base (e_1, e_2, e_3) à la base (u, v, w). On a $S = PS'P^{-1}$. Déterminons P^{-1}.

$$\left\{\begin{array}{l} u = e_1 - 2e_3 \\ v = e_2 - 3e_3 \\ w = 2e_1 + 3e_2 + e_3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} e_1 = u + 2e_3 \\ e_2 = v + 3e_3 \\ w = 2(u + 2e_3) + 3(v + 3e_3) + e_3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} e_3 = \dfrac{1}{14}(-2u - 3v + w) \\ e_1 = u + \dfrac{2}{14}(-2u - 3v + w) \\ e_2 = v + \dfrac{3}{14}(-2u - 3v + w) \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} e_3 = \dfrac{1}{14}(-2u - 3v + w) \\ e_1 = \dfrac{1}{14}(10u - 6v + 2w) \\ e_2 = \dfrac{1}{14}(-6u + 5v + 3w) \end{array}\right.$$

Donc $P^{-1} = \dfrac{1}{14}\begin{pmatrix} 10 & -6 & -2 \\ -6 & 5 & -3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ puis

$$S = PS'P^{-1} = \frac{1}{14}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ -2 & -3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 10 & -6 & -2 \\ -6 & 5 & -3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{14}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -3 \\ -2 & -3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 10 & -6 & -2 \\ -6 & 5 & -3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$
$$= \frac{1}{14}\begin{pmatrix} 6 & -12 & -4 \\ -12 & -4 & -6 \\ -4 & -6 & 12 \end{pmatrix} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 3 & -6 & -2 \\ -6 & -2 & -3 \\ -2 & -3 & 6 \end{pmatrix}.$$

$$\boxed{S = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 3 & -6 & -2 \\ -6 & -2 & -3 \\ -2 & -3 & 6 \end{pmatrix}.}$$

Problème : Résultant de deux polynômes

Partie I : Définitions et propriétés

1. Cas où u est bijective

(a) Soit $(A, B) \in F^2$. $\deg(P) = p$ et $\deg(A) \leqslant q - 1$ et donc $\deg(PA) \leqslant p + q - 1$. De même, $\deg(QB) \leqslant p + q - 1$ et donc $\deg(PA + QB) \leqslant p + q - 1$. u est effectivement une application de E vers F.

Soient $((A_1, B_1), (A_2, B_2)) \in E^2$ et $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{C}^2$.

$$\begin{aligned} u\left(\lambda_1(A_1, B_1) + \lambda_2(A_2, B_2)\right) &= u\left((\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2, \lambda_1 B_1 + \lambda_2 B_2)\right) = P(\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2) + Q(\lambda_1 B_1 + \lambda_2 B_2) \\ &= \lambda_1(PA_1 + QB_1) + \lambda_2(PA_2 + QB_2) = \lambda_1 u\left((A_1, B_1)\right) + \lambda_2 u\left((A_2, B_2)\right). \end{aligned}$$

$$\boxed{u \in \mathscr{L}(E, F).}$$

(b) Si u est bijective, l'élément 1 de F admet un antécédent par u dans E. Donc $\exists (U, V) \in \mathbb{C}_{q-1}[X] \times \mathbb{C}_{p-1}[X]$ tel que $UP + VQ = 1$. Le théorème de Bézout permet alors d'affirmer que les polynômes P et Q sont premiers entre eux.

(c) Supposons P et Q premiers entre eux. Soit $(A, B) \in E$.

$$(A, B) \in \mathrm{Ker}(u) \Leftrightarrow PA + QB = 0 \Leftrightarrow PA = -QB.$$

Donc, si $(A, B) \in \mathrm{Ker}(u)$, Q divise $-QB = PA$ et puisque P et Q sont premiers entre eux, Q divise A d'après le théorème de Gauss. Donc $A \in Q\mathbb{C}[X] \cap \mathbb{C}_{q-1}[X] = \{0\}$ car $\deg(Q) = q > q - 1$. Par suite, A est nul puis B est nul car $QB = 0$ et $Q \neq 0$.
On a montré que $\mathrm{Ker}(u) \subset \{(0, 0)\}$ et donc $\mathrm{Ker}(u) = \{(0, 0)\}$.
Ainsi, u est une application linéaire injective. Comme de plus $\dim(E) = \dim(F) = p + q < +\infty$, on sait que u est bijective.

$$\boxed{u \text{ est bijective si et seulement si } P \text{ et } Q \text{ sont premiers entre eux.}}$$

2. Matrice de u

(a) Soit $k \in [\![0, q-1]\!]$.

$$u\left((X^k, 0)\right) = PX^k = \sum_{m=0}^{p} a_k X^{m+k}.$$

De même, pour $k \in [\![0, p-1]\!]$, $u\left((0, X^k)\right) = \displaystyle\sum_{m=0}^{q} b_k X^{m+k}$. Donc

$$\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(u) = M_{P,Q}.}$$

(b) D'après les questions 2.(a), 1.(b), et 1.(c),

$$\mathrm{Res}(P, Q) \neq 0 \Leftrightarrow \det(M_{P,Q}) \neq 0 \Leftrightarrow u \text{ bijective} \Leftrightarrow P \text{ et } Q \text{ premiers entre eux.}$$

3. Racine multiple **(a)** Soit P de $\mathbb{C}[X]$ de degré supérieur ou égal à 1. On sait qu'une racine multiple de P est encore racine de P' et qu'une racine commune à P et P' est racine multiple de P. Donc, d'après la question 2.(b),

$$P \text{ admet une racine multiple} \Leftrightarrow P \text{ et } P' \text{ admettent une racine commune} \Leftrightarrow \mathrm{Res}(P, P') = 0.$$

(b) Si $P = X^3 + aX + b$ alors $P' = 3X^2 + a$ puis

$$\begin{aligned}
\mathrm{Res}(P, P') &= \begin{vmatrix} b & 0 & a & 0 & 0 \\ a & b & 0 & a & 0 \\ 0 & a & 3 & 0 & a \\ 1 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = b \begin{vmatrix} b & 0 & a & 0 \\ a & 3 & 0 & a \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} + a \begin{vmatrix} a & b & a & 0 \\ 0 & a & 0 & a \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} \\
&= 3b \begin{vmatrix} b & a & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} + a^2 \begin{vmatrix} a & 0 & a \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} + a \begin{vmatrix} b & a & 0 \\ a & 0 & a \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} \\
&= 9b \begin{vmatrix} b & a \\ 0 & 3 \end{vmatrix} + 3a^2 \begin{vmatrix} a & a \\ 1 & 3 \end{vmatrix} - a^2 \begin{vmatrix} a & a \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \\
&= 27b^2 + 4a^3.
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{X^3 + aX + b \text{ a une racine double si et seulement si } 27b^2 + 4a^3 = 0.}$$

Partie II : Applications

4. Equation de Bézout. **(a)**

$$\begin{aligned}
\mathrm{Res}(P, Q) &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \ (C_4 \leftarrow C_4 - C_1) \\
&= \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \ (C_3 \leftarrow C_3 + C_4) \\
&= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \ (C_1 \leftarrow C_1 - C_3) \\
&= -\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.
\end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{\text{P et Q sont premiers entre eux.}}$$

(b) Soit $(A, B) \in \mathbb{C}_2[X] \times \mathbb{C}_3[X]$. Posons $A = \alpha_0 + \alpha_1 X + \alpha_2 X^2$ et $B = \beta_0 + \beta_1 X + \beta_2 X^2 + \beta_3 X^3$ de sorte que

$$(A, B) = \alpha_0(1, 0) + \alpha_1(X, 0) + \alpha_2(X^2, 0) + \beta_0(0, 1) + \beta_1(0, X) + \beta_2(0, X^2) + \beta_3(0, X^3).$$

$$PA + QB = 1 \Leftrightarrow u((A, B)) = 1 \Leftrightarrow M_{P,Q}\begin{pmatrix}\alpha_0\\ \alpha_1\\ \alpha_2\\ \beta_0\\ \beta_1\\ \beta_2\\ \beta_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

Maintenant

$$M_{P,Q}\begin{pmatrix}\alpha_0\\ \alpha_1\\ \alpha_2\\ \beta_0\\ \beta_1\\ \beta_2\\ \beta_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}1&0&0&1&0&0&0\\0&1&0&-1&1&0&0\\0&0&1&0&-1&1&0\\1&0&0&1&0&-1&1\\1&1&0&0&1&0&-1\\0&1&1&0&0&1&0\\0&0&1&0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_0\\ \alpha_1\\ \alpha_2\\ \beta_0\\ \beta_1\\ \beta_2\\ \beta_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\alpha_0 + \beta_0 = 1\\ \alpha_1 - \beta_0 + \beta_1 = 0\\ \alpha_2 - \beta_1 + \beta_2 = 0\\ \alpha_0 + \beta_0 - \beta_2 + \beta_3 = 0\\ \alpha_0 + \alpha_1 + \beta_1 - \beta_3 = 0\\ \alpha_1 + \alpha_2 + \beta_2 = 0\\ \alpha_2 + \beta_3 = 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\beta_0 = 1 - \alpha_0\\ \beta_3 = -\alpha_2\\ \alpha_0 + \alpha_1 + \beta_1 = 1\\ \alpha_2 - \beta_1 + \beta_2 = 0\\ -\beta_2 - \alpha_2 = -1\\ \alpha_0 + \alpha_1 + \beta_1 + \alpha_2 = 0\\ \alpha_1 + \alpha_2 + \beta_2 = 0\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\alpha_2 = -1\\ \beta_3 = 1\\ \beta_2 = 2\\ \beta_1 = 1\\ \alpha_1 = -1\\ \alpha_0 = 1\\ \beta_0 = 0\end{array}\right. \Leftrightarrow A = 1 - X - X^2 \text{ et } B = X + 2X^2 + X^3.$$

$$\boxed{\text{On peut prendre } (A_0, B_0) = (1 - X - X^2, X + 2X^2 + X^3).}$$

(c) Soit $(A, B) \in \mathbb{C}[X]$.

$$AP + BQ = 1 \Leftrightarrow AP + BQ = A_0P + B_0Q \Leftrightarrow P(A - A_0) = Q(B_0 - B).$$

Nécessairement, P divise $Q(B_0 - B)$ et donc, puisque $P \wedge Q = 1$, P divise $B_0 - B$ d'après le théorème de Gauss. Donc il existe un polynôme S tel que $B_0 - SP$. De même, il existe un polynôme R tel que $A = A_0 + QR$.
Réciproquement, si $A = A_0 + QR$ et $B = B_0 - PS$,

$$AP + BQ = 1 \Leftrightarrow A_0P + B_0Q + QP(R - S) = 1 \Leftrightarrow QP(R - S) = 0 \Leftrightarrow R = S.$$

$$\boxed{\mathscr{S} = \left\{(1 - X - X^2 - S(X^3 - X + 1)), X + 2X^2 + X^3 + S(X^4 + X^3 + 1)),\ S \in \mathbb{C}[X]\right).}$$

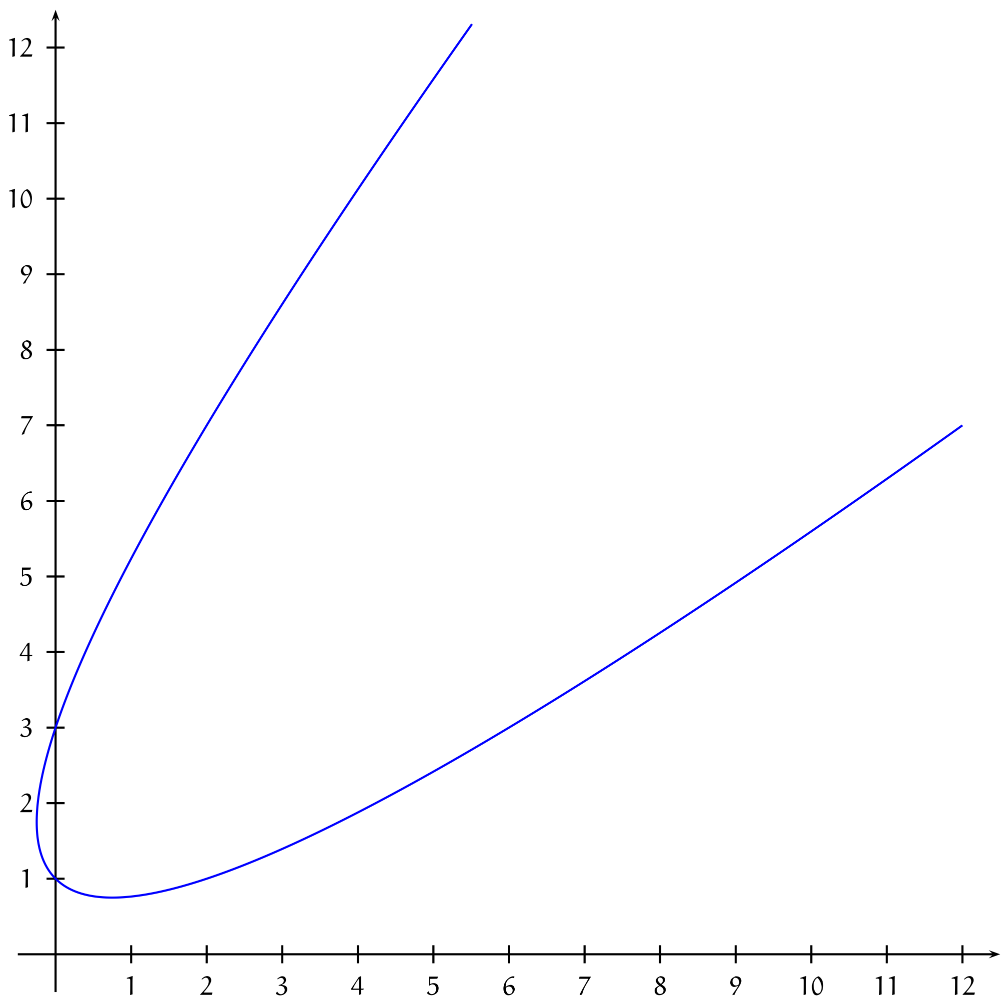
4. Equation d'une courbe **(a)** Pour $t \in \mathbb{R}$, $\dfrac{d\overrightarrow{M}}{dt}(t) = \begin{pmatrix}2t + 1\\ 2t - 1\end{pmatrix}$. En particulier, $\forall t \in \mathbb{R}$, $\dfrac{d\overrightarrow{M}}{dt}(t) \neq \overrightarrow{0}$ et Γ est un arc régulier.

Tableau de variations conjointes de x et y

t	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$x'(t)$		$-$	0		$+$		
x	$+\infty$	$\searrow$	$-\frac{1}{4}$	$\nearrow$			$+\infty$
y	$+\infty$		$\searrow$		$\frac{3}{4}$	$\nearrow$	$+\infty$
$y'(t)$			$-$		0	$+$	

Etude des branches infinies. Quand t tend vers $\pm\infty$, $x(t)$ et $y(t)$ tend vers $+\infty$ puis $\dfrac{y(t)}{x(t)} = \dfrac{t^2 - t + 1}{t^2 + t}$ tend vers 1 et enfin $y(t) - x(t) = -2t + 1$ tend vers $-\infty$ quand t tend vers $+\infty$ et vers $+\infty$ quand t tend vers $-\infty$.
On en déduit que Γ admet une direction asymptotique d'équation $y = x$ mais n'admet pas de droite asymptote.

Tracé de Γ



(b) $M(x, y) \in \Gamma \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R} / \left\{\begin{array}{l} x = x(t) \\ y = y(t) \end{array}\right. \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R} / \left\{\begin{array}{l} A(t) = 0 \\ B(t) = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow A$ et B ont une racine commune dans $\mathbb{R}$.
Maintenant,

$$\begin{aligned}
A \text{ et } B \text{ ont une racine commune dans } \mathbb{C} &\Leftrightarrow \operatorname{Res}(A, B) = 0 \\
&\Leftrightarrow \left|\begin{array}{cccc} -x & 0 & 1-y & 0 \\ 1 & -x & -1 & 1-y \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right| = 0 \\
&\Leftrightarrow -x \left|\begin{array}{ccc} -x & -1 & 1-y \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}\right| + (1-y) \left|\begin{array}{ccc} 1 & -x & 1-y \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right| = 0 \\
&\Leftrightarrow -x((-x+1) + (y)) + (1-y)(2 - (-x - 1 + y)) = 0 \\
&\Leftrightarrow x^2 - 2xy + y^2 - 4y + 3 = 0.
\end{aligned}$$

En résumé,

$$\begin{aligned} M(x,y)\in\Gamma &\Leftrightarrow \text{A et B ont une racine commune dans } \mathbb{R}\\ &\Rightarrow \text{A et B ont une racine commune dans } \mathbb{C}\\ &\Leftrightarrow x^2-2xy+y^2-4y+3=0. \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Si } M(x,y)\in\Gamma \text{ alors } x^2-2xy+y^2-4y+3=0.}$$

Remarque.

$$\begin{aligned} M(x,y)\in\Gamma &\Leftrightarrow \exists t\in\mathbb{R}/\ \left\{\begin{array}{l} x=t^2+t\\ y=t^2-t+1\end{array}\right. \Leftrightarrow \exists t\in\mathbb{R}/\ \left\{\begin{array}{l} x-y=2t-1\\ y=t^2-t+1\end{array}\right.\\ &\Leftrightarrow \exists t\in\mathbb{R}/\ \left\{\begin{array}{l} t=\dfrac{1}{2}(x-y+1)\\ y=\dfrac{1}{4}(x-y+1)^2-\dfrac{1}{2}(x-y+1)+1\end{array}\right. \Leftrightarrow y=\frac{1}{4}(x-y+1)^2-\frac{1}{2}(x-y+1)+1\\ &\Leftrightarrow x^2-2xy+y^2-4y+3=0. \end{aligned}$$

(c) La matrice de q dans la base canonique est $\begin{pmatrix} 1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$. Cette matrice est de rang 1 et on sait que la courbe d'équation $x^2-2xy+y^2-4y+3=0$ est une conique du genre parabole et donc soit une parabole, soit une droite, soit est vide. En tenant compte du tracé de la question (a), cette courbe est une parabole.

6. Nombre algébrique. Déterminons le résultant de P et Q.

$$\begin{aligned}\text{Res}(P,Q)&=\begin{vmatrix} -3 & 0 & y^2-7 & 0\\ 0 & -3 & -2y & y^2-7\\ 1 & 0 & 1 & -2y\\ 0 & 1 & 0 & 1\end{vmatrix} = -3\begin{vmatrix} -3 & -2y & y^2-7\\ 0 & 1 & -2y\\ 1 & 0 & 1\end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & y^2-7 & 0\\ -3 & -2y & y^2-7\\ 1 & 0 & 1\end{vmatrix}\\ &=-3(-3+(3y^2+7))+((3y^2-21)+(y^4-14y^2+49))=y^4-20y^2+16.\end{aligned}$$

Si $y=\sqrt{3}+\sqrt{7}$, alors P et Q ont une racine commune dans $\mathbb{C}$ à savoir $\sqrt{3}$ et donc $\text{Res}(P,Q)=0$. Ainsi, pour $y=\sqrt{3}+\sqrt{7}$, on a $y^4-20y^2+16=0$ et donc

$$\boxed{\sqrt{3}+\sqrt{7} \text{ est racine du polynôme } X^4-20X^2+16.}$$

Ensuite, pour $z\in\mathbb{C}$,

$$\begin{aligned} z^4-20z^2+16=0 &\Leftrightarrow (z^2-10)^2=84 \Leftrightarrow z^2=10+2\sqrt{21} \text{ ou } z^2=10-2\sqrt{21}\\ &\Leftrightarrow z^2=(\sqrt{3}+\sqrt{7})^2 \text{ ou } z^2=(\sqrt{3}-\sqrt{7})^2\\ &\Leftrightarrow z\in\{\sqrt{3}+\sqrt{7},-\sqrt{3}+\sqrt{7},\sqrt{3}-\sqrt{7},-\sqrt{3}-\sqrt{7}. \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Les racine du polynôme } X^4-20X^2+16 \text{ sont } \sqrt{3}+\sqrt{7},\ -\sqrt{3}+\sqrt{7},\ \sqrt{3}-\sqrt{7} \text{ et } -\sqrt{3}-\sqrt{7}.}$$

Remarque. $\alpha=\sqrt{3}+\sqrt{7}\Rightarrow\alpha^2=10+2\sqrt{21}\Rightarrow(\alpha^2-10)^2=84\Rightarrow\alpha^4-20\alpha^2+16=0.$

