SESSION 2010

Concours commun Centrale

MATHÉMATIQUES 1. FILIERE PC

Partie I - Polynômes de Tchebychev

I.A -

I.A.1) a) La fonction $x \mapsto \operatorname{Arccos} x$ est définie sur $[-1,1]$ et donc chaque fonction F_n, $n \in \mathbb{N}$, est définie sur $D = [-1,1]$.

b) Pour tout $x \in [-1,1]$,
- $F_1(x) = \cos(\operatorname{Arccos} x) = x$
- $F_2(x) = \cos(2\operatorname{Arccos} x) = 2\cos^2(\operatorname{Arccos} x) - 1 = 2x^2 - 1$
- $F_3(x) = \cos(3\operatorname{Arccos} x) = 4\cos^3(\operatorname{Arccos} x) - 3\cos(\operatorname{Arccos} x) = 4x^3 - 3x$.

$$\boxed{\forall x \in D = [-1,1],\ F_1(x) = x,\ F_2(x) = 2x^2 - 1 \text{ et } F_3(x) = 4x^3 - 3x.}$$

c) Soit $n \in \mathbb{N}$.
- $F_n(1) = \cos(n\operatorname{Arccos}(1)) = \cos(0) = 1$,
- $F_n(-1) = \cos(n\operatorname{Arccos}(-1)) = \cos(n\pi) = (-1)^n$,
- $F_n(0) = \cos(n\operatorname{Arccos}(0)) = \cos\left(n\dfrac{\pi}{2}\right) = \begin{cases} (-1)^{n/2} \text{ si } n \in 2\mathbb{Z} \\ 0 \text{ si } n \in 1 + 2\mathbb{Z} \end{cases}$.

d) Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour $x \in [-1,1]$, $-x \in [-1,1]$ et

$$F_n(-x) = \cos(n\operatorname{Arccos}(-x)) = \cos(n(\pi - \operatorname{Arccos}(x))) = (-1)^n\cos(n\operatorname{Arccos} x) = (-1)^n F_n(x).$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ F_n \text{ a la parité de } n.}$$

I.A.2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $x \in [-1,1]$,

$$F_{n+1}(x) + F_{n-1}(x) = \cos((n+1)\operatorname{Arccos}(x)) + \cos((n-1)\operatorname{Arccos}(x)) = 2\cos(\operatorname{Arccos}(x))\cos(n\operatorname{Arccos} x) = 2xF_n(x).$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in [-1,1],\ F_{n+1}(x) + F_{n-1}(x) = 2xF_n(x).}$$

I.A.3) Un polynôme coïncidant avec F_n sur $[-1,1]$ est uniquement défini s'il existe car $[-1,1]$ est infini.

Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme encore noté F_n, de degré n, tel que $\forall x \in [-1,1]$, $F_n(x) = \cos(n\operatorname{Arccos} x)$.

• Pour $n = 0$ et $n = 1$, les polynômes $F_0 = 1$ et $F_1 = X$ conviennent et sont de degrés 0 et 1 respectivement.

• Soit $n \geqslant 0$. Supposons qu'il existe deux polynômes F_n et F_{n+1} de degrés respectifs n et $n+1$ tels que $\forall x \in [-1,1]$, $F_n(x) = \cos(n\operatorname{Arccos} x)$ et $F_{n+1}(x) = \cos((n+1)\operatorname{Arccos} x)$.
Alors, d'après la question précédente, le polynôme $P = 2XF_{n+1} - F_n$ vérifie $\forall x \in [-1,1]$, $P(x) = \cos((n+2)\operatorname{Arccos} x)$ et donc convient. On le note F_{n+2}. De plus, $\deg(F_n) = n$ et $\deg(F_{n+1}) = n+1$ et donc $\deg(F_{n+2}) = \deg(2XF_{n+1} - F_n) = \deg(XF_{n+1}) = n+2$.

On a montré que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme et un seul noté F_n, de degré n, tel que $\forall x \in [-1,1]$, $F_n(x) = \cos(n\operatorname{Arccos} x)$. De plus, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\deg F_n = n$.

Pour $n \geqslant 1$, on a $\operatorname{dom}(F_{n+1}) = \operatorname{dom}(2XF_n - F_{n-1}) = 2\operatorname{dom}(F_n)$. Puisque $\operatorname{dom}(F_1) = 1$, on en déduit que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\operatorname{dom}(F_n) = 2^{n-1}$. D'autre part, $\operatorname{dom}(F_0) = 1$.

I.A.4) Algorithme en Maple.

```
> tchebychev :=proc(n) local i,u,v,w ;
> if n=0 then v :=1
> else u :=1 :v :=x :
> for i from 2 to n do w :=2*x*v-u :u :=v :v :=simplify(w) end do ;
> end if :
> v : end proc ;
```


I.A.5) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$.

$$T_{n+2}(x) = 2^{-1-n}F_{n+2}(x) = 2^{-n}xF_{n+1}(x) + 2^{-1-n}F_n(x) = xT_{n+1}(x) - \frac{1}{4}T_n(x).$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ T_{n+2} = XT_{n+1} - \frac{1}{4}T_n.}$$

I.B -

I.B.1) a) F_n est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ en tant que polynôme.

b) Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction $x \mapsto n \operatorname{Arccos} x$ est dérivable sur $]-1,1[$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et la fonction $y \mapsto \cos y$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. Donc la fonction F_n est dérivable sur $]-1,1[$ et pour $x \in]-1,1[$,

$$F_n'(x) = (n \operatorname{Arccos})'(x) \times \cos'(n \operatorname{Arccos} x) = \frac{n \sin(n \operatorname{Arccos} x)}{\sqrt{1-x^2}}.$$

I.B.2) a) Quand x tend vers 1 par valeurs inférieures, $\operatorname{Arccos}(x)$ tend vers 0 et donc

$$\operatorname{Arccos}(x) \underset{x \to 1^-}{\sim} \sin(\operatorname{Arccos}(x)) = \sqrt{1-x^2} = \sqrt{(1-x)(1+x)} \underset{x \to 1^-}{\sim} \sqrt{2(1-x)}.$$

$$\boxed{\operatorname{Arccos}(x) \underset{x \to 1}{\sim} \sqrt{2(1-x)}.}$$

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Puisque F_n est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, $F_n'(1) = \lim\limits_{x \to 1^-} F_n'(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{n \sin(n \operatorname{Arccos} x)}{\sqrt{1-x^2}}$. Or

$$\frac{n \sin(n \operatorname{Arccos} x)}{\sqrt{1-x^2}} \underset{x \to 1}{\sim} \frac{n^2 \operatorname{Arccos} x)}{\sqrt{1-x^2}} \underset{x \to 1}{\sim} \frac{n^2\sqrt{1-x^2})}{\sqrt{1-x^2}} = n^2.$$

Ensuite, F_n a la parité de n (d'après I.A.1)d), $\forall x \in [-1,1]$, $F_n(-x) = (-1)^n F_n(x)$ et donc $F_n(-X) = (-1)^n F_n$ puisque $[-1,1]$ est infini), et donc F_n' a la parité contraire de n. On en déduit que $F_n'(-1) = (-1)^{n-1}n^2$.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ F_n'(1) = n^2 \text{ et } F_n'(-1) = (-1)^{n-1}n^2.}$$

I.B.3) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $x \in]-1,1[$,

$$F_n''(x) = -\frac{n^2 \cos(n \operatorname{Arccos} x)}{1-x^2} + \frac{nx \sin(n \operatorname{Arccos} x)}{(1-x^2)^{3/2}},$$

et donc

$$\begin{aligned} xT_n'(x) - (1-x^2)T_n''(x) &= 2^{1-n}\left(x\frac{n \sin(n \operatorname{Arccos} x)}{\sqrt{1-x^2}} - (1-x^2)\left(-\frac{n^2 \cos(n \operatorname{Arccos} x)}{1-x^2} + \frac{nx \sin(n \operatorname{Arccos} x)}{(1-x^2)^{3/2}}\right)\right) \\ &= n^2 2^{1-n} \cos(n \operatorname{Arccos} x) = n^2 T_n(x). \end{aligned}$$

Ainsi, les polynômes $XT_n' - (1-X^2)T_n''$ et n^2T_n coïncident sur $]-1,1[$ qui est infini et donc ces polynômes sont égaux.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in \mathbb{R},\ (1-x^2)T_n''(x) - xT_n'(x) + n^2T_n(x) = 0.}$$

I.C -

I.C.1) Soit $(f,g) \in E^2$. La fonction $x \mapsto \dfrac{f(x)g(x)}{\sqrt{1-x^2}}$ est continue sur $]-1,1[$. De plus, f et g sont bornées au voisinage de 1 et au voisinage de -1 car continues en 1 et en -1. On en déduit que $\dfrac{f(x)g(x)}{\sqrt{1-x^2}} \underset{x \to 1^-}{=} O\left(\dfrac{1}{(1-x)^{1/2}}\right)$ et $\dfrac{f(x)g(x)}{\sqrt{1-x^2}} \underset{x \to -1^+}{=} O\left(\dfrac{1}{(1+x)^{1/2}}\right)$. Comme les fonctions $x \mapsto \dfrac{1}{(1-x)^{1/2}}$ et $x \mapsto \dfrac{1}{(1+x)^{1/2}}$ sont intégrables au voisinage de 1 et au voisinage de -1 respectivement, on en déduit que la fonction $x \mapsto \dfrac{f(x)g(x)}{\sqrt{1-x^2}}$ est intégrable sur $]-1,1[$.

I.C.2) φ est bilinéaire et symétrique. De plus, pour $f \in E$, $\varphi(f,f) = \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{f^2(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \geqslant 0$. Enfin,

$$\varphi(f,f)=0 \Rightarrow \int_{-1}^{1}\frac{(f(x))^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx=0$$

$$\Rightarrow \forall x\in]-1,1[,\ \frac{(f(x))^2}{\sqrt{1-x^2}}=0 \text{ (fonction continue, positive, d'intégrale nulle)}$$

$$\Rightarrow \forall x\in]-1,1[,\ f(x)=0\Rightarrow f=0 \text{ (polynôme ayant une infinité de racines).}$$

Finalement, φ est une forme bilinéaire, symétrique , définie et positive sur E et donc un produit scalaire sur E.

I.C.3) a) On prend déjà $p_0=1$ qui est un polynôme unitaire de degré 0. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. L'orthogonal de E_{n-1} dans E_n est une droite vectorielle, engendrée par un certain polynôme P_n. P_n est dans E_n et pas dans E_{n-1} et donc P_n est de degré n.

Pour tout entier n, on pose $p_n=\dfrac{P_n}{\text{dom}(P_n)}$. La famille $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille de polynômes unitaires telle que $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\deg(p_n)=n$ et $p_n\in E_{n-1}^{\perp}$.

b) La famille $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convient. Montrons l'unicité de cette famille. Soit $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille de polynômes unitaires telle que $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\deg(Q_n)=n$ et $Q_n\in E_{n-1}^{\perp}$. Nécessairement, $Q_0=1=p_0$.

Ensuite, pour $n\in\mathbb{N}^*$, $Q_n\in E_n\cap \text{Vect}(Q_k)^{\perp}_{0\leqslant k\leqslant n-1}=E_n\cap E_{n-1}^{\perp}=\text{Vect}(p_n)$ (puisque p_n est un élément non nul de la droite vectorielle $E_{n-1}^{\perp}\cap E_n$) et donc il existe $\lambda\in\mathbb{R}$ tel que $Q_n=\lambda p_n$. Puisque p_n et Q_n sont unitaires, on a $\lambda=1$ et donc $Q_n=p_n$.

$$\boxed{\text{Il existe une unique suite } (Q_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ de polynômes unitaires telle que } Q_0=1 \text{ et } \forall n\in\mathbb{N}^*,\ \deg(Q_n)=n \text{ et } Q_n\in E_{n-1}^{\perp}.}$$

I.C.4) Soit $(m,n)\in\mathbb{N}^2$. En posant $t=\text{Arccos}\,x$, on obtient

$$(T_n|T_m)=2^{2-n-m}\int_{-1}^{1}\frac{F_n(x)F_m(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx2^{2-n-m}\int_{-1}^{1}\frac{\cos(n\,\text{Arccos}\,x)\cos(m\,\text{Arccos}\,x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$
$$=\int_{\pi}^{0}\cos(nt)\cos(mt)\ -dt=\frac{1}{2}\left(\int_0^{\pi}\cos((n+m)t)\,dt+\int_0^{\pi}\cos((n-m)t)\,dt\right).$$

Par suite, si $n\neq m$ (de sorte que $n+M\neq 0$ et $n-m\neq 0$), $(T_n|T_m)=0$ puis si $n=m\neq 0$, $(T_n|T_m)=\dfrac{\pi}{2}$ et enfin si $n=m=0$, $(T_n|T_m)=\pi$.

$$\boxed{\forall(n,m)\in\mathbb{N}^2,\ (T_n|T_m)=\begin{cases}\pi \text{ si } n=m=0\\ \dfrac{\pi}{2} \text{ si } n=m\neq 0\\ 0 \text{ si } n=m\end{cases}.}$$

En particulier, la famille $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est l'unique famille orthogonale pour $(.|.)$ constituée de polynômes unitaires et telle que $\forall n\in\mathbb{N}$, $\deg(T_n)=n$.

Partie II - Inégalités de Bernstein et Markov

II.A -

II.A.1) a) Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Si $n=1$, pour tout $\theta\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$, on a $|\sin(n\theta)|=n\sin\theta$. A partir de maintenant dans les questions a), b) et c), on suppose $n\geqslant 2$.

Pour $\theta\in\left[0,\dfrac{\pi}{2n}\right]$, on pose $f(\theta)=n\sin(\theta)-|\sin(n\theta)|=n\sin(\theta)-\sin(n\theta)$. f est dérivable sur $\left[0,\dfrac{\pi}{2n}\right]$ et pour $\theta\in\left[0,\dfrac{\pi}{2n}\right]$,

$$f'(\theta)=n\left(\cos(\theta)-\cos(n\theta)\right).$$

Pour $\theta\in\left]0,\dfrac{\pi}{2n}\right]$, on a $0<\theta<n\theta\leqslant\dfrac{\pi}{2}$ et donc $f'(\theta)>0$ puisque la fonction cos est strictement décroissante sur $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$. La fonction f est strictement décroissante sur $\left[0,\dfrac{\pi}{2n}\right]$. On en déduit que pour $\theta\in\left]0,\dfrac{\pi}{2n}\right]$, $f(\theta)<f(0)=0$. Donc,

$$\boxed{\forall n\geqslant 2,\ \forall\theta\in\left[0,\frac{\pi}{2n}\right],\ |\sin(n\theta)|\leqslant n\sin\theta \text{ avec égalité si et seulement si } \theta=0.}$$

b) La fonction sin est concave sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Donc son graphe sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ est au-dessus de sa corde joignant ses points d'abscisses 0 et $\frac{\pi}{2}$. On en déduit que $\forall \theta \in \left[\frac{\pi}{2n}, \frac{\pi}{2}\right]$, $\sin(\theta) \geqslant \frac{2}{\pi}\theta$.

c) Pour tout θ de $\left[\frac{\pi}{2n}, \frac{\pi}{2}\right]$, on a $n \sin \theta \geqslant n\frac{2\theta}{\pi} \geqslant \frac{2n\frac{\pi}{2n}}{\pi} = 1 \geqslant |\sin(n\theta)|$.

d) On a montré que

$$\boxed{\forall \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right],\ |\sin(n\theta)| \leqslant n \sin \theta.}$$

e) Si $n = 1$, on a vu que $\forall \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $|\sin(n\theta)| = n \sin \theta$. Soit alors $n \geqslant 2$.
On a vu que pour $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2n}\right]$, $|\sin(n\theta)| = n \sin \theta \Leftrightarrow \theta = 0$. D'autre part, si $\theta \in \left]\frac{\pi}{2n}, \frac{\pi}{2}\right]$, $n \sin \theta \geqslant n\frac{2}{\pi}\theta > 1$ et donc $n \sin \theta > |\sin(n\theta)|$. Finalement

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Si } n = 1,\ \forall \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right],\ |\sin(n\theta)| = n \sin \theta. \\ \text{Si } n \geqslant 2,\ \forall \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right],\ |\sin(n\theta)| = n \sin \theta \Leftrightarrow \theta = 0. \end{array}}$$

II.A.2) Soit $n \geqslant 1$. Pour $x \in]-1, 1[$,

$$|T_n'(x)| = \left|2^{1-n}\frac{n \sin(n \operatorname{Arccos} x)}{\sqrt{1-x^2}}\right| \leqslant \frac{n}{\sqrt{1-x^2}}|n \sin(\operatorname{Arccos} x)| = 2^{1-n}n^2.$$

Cette inégalité reste vraie par continuité de T_n' en 1 et -1. Donc $\forall x \in [-1, 1]$, $|T_n'(x)| \leqslant 2^{1-n}n^2$. De plus, d'après la question I.B.2)b), $|T_n'(1)| = 2^{1-n}n^2$ et donc

$$\boxed{\forall n \geqslant 1,\ \sup_{x \in [-1,1]} |T_n'(x)| = 2^{1-n}n^2.}$$

Ensuite, si $n = 1$, $\forall x \in [-1, 1]$, $T_1(x) = x$ et donc $\forall x \in [-1, 1]$, $|T_1'(x)| = 1 = 2^{1-1}1^2$. Donc, si $n = 1$, la borne supérieure est atteinte en tout réel x de $[-1, 1]$.
Si $n \geqslant 2$, on sait déjà que $\sup_{x \in [-1,1]} |T_n'(x)|$ est atteint pour $x = 1$ et $x = -1$ d'après la question I.B)2)b).
Soit $x \in]-1, 1[$. Puisque T_n est paire ou impaire

$$\begin{aligned} |T_n'(x)| = |T_n'(|x|)| &= n2^{1-n}\left|\frac{\sin(n \operatorname{Arccos}(|x|))}{\sqrt{1-x^2}}\right| \\ &< n2^{1-n}\frac{n \sin(\operatorname{Arccos}(|x|))}{\sqrt{1-x^2}} \text{ (car } \operatorname{Arccos}|x| \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[\text{ et d'après II.A.1)e))} \\ &= n^2 2^{1-n}. \end{aligned}$$

Finalement, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la borne supérieure est atteinte. De plus, si $n = 1$ elle est atteinte en tout réel x de $[-1, 1]$ et si $n \geqslant 2$, elle est atteinte en $x = 1$ et $x = -1$.

II.A.3) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $x \in [-1, 1]$,

$$T_n(x) = 0 \Leftrightarrow \cos(n \operatorname{Arccos} x) = 0 \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}/\ n \operatorname{Arccos} x = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}/\ \operatorname{Arccos} x = \frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n} \quad (*).$$

Soit $k \in \mathbb{Z}$. $0 \leqslant \frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n} \leqslant \pi \Leftrightarrow -\frac{\pi}{2n} \times \frac{n}{\pi} \leqslant k \leqslant \frac{n}{\pi}\left(\pi - \frac{\pi}{2n}\right) \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leqslant k \leqslant n - \frac{1}{2} \Leftrightarrow 0 \leqslant k \leqslant n-1$. Donc

$$(*) \Leftrightarrow \exists k \in [\![0, n-1]\!]/\ \operatorname{Arccos} x = \frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n} \Leftrightarrow \exists k \in [\![0, n-1]\!]/\ x = \cos\left(\frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n}\right).$$

Maintenant, les nombres $\cos\left(\frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n}\right)$, $0 \leqslant k \leqslant n-1$, sont deux à deux distincts (car $\forall k \in [\![0, n-1]\!]$, $\frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n} \in [0, \pi]$ et car la fonction cos est injective sur $[0, \pi]$) et tous racines du polynôme T_n qui est de degré n. Ce sont donc toutes les racines de ce polynôme, toutes simples, réelles et dans $[-1, 1]$. Plus précisément, puisque $T_n(1) \neq 0$ et $T_n(-1) \neq 0$ d'après I.A.1)c), ces racines sont dans $]-1, 1[$.

Puisque la fonction cos est strictement décroissante sur $[0, \pi]$, on a

$$\cos\left(\frac{\pi}{2n}+\frac{(n-1)\pi}{n}\right)<\cos\left(\frac{\pi}{2n}+\frac{(n-2)\pi}{n}\right)<\ldots<\cos\left(\frac{\pi}{2n}+\frac{\pi}{n}\right)<\cos\left(\frac{\pi}{2n}\right),$$

et on pose donc $x_{n,j}=\cos\left(\frac{\pi}{2n}+\frac{(n-j)\pi}{n}\right)=\cos\frac{(2n-2j+1)\pi}{2n}$ pour $1\leqslant j\leqslant n$.

$$\boxed{\forall n\geqslant 1,\ \forall j\in[\![1,n]\!],\ x_{n,j}=\cos\left(\frac{(2n-2j+1)\pi}{2n}\right)=-\cos\left(\frac{(2j-1)\pi}{2n}\right).}$$

II.A.4) Puisque T_n est de degré n et de coefficient dominant 2^{1-n}, pour $x\in\mathbb{R}$ on a $T_n(x)=2^{1-n}\prod_{j=1}^{n}(x-x_{n,j})$ et donc pour $x\in\mathbb{R}\setminus\{x_{n,j},\ 1\leqslant j\leqslant n\}$,

$$T_n'(x)=2^{1-n}\sum_{j=1}^{n}\prod_{k\neq j}(x-x_{n,k})=\sum_{j=1}^{n}\frac{T_n(x)}{x-x_{n,j}},$$

et donc

$$\boxed{\forall n\geqslant 1,\ \forall x\in\mathbb{R}\setminus\{x_{n,j},\ 1\leqslant j\leqslant n\},\ \frac{T_n'(x)}{T_n(x)}=\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{x-x_{n,j}}.}$$

II.A.5) a) Soit $P\in E_{n-1}$.

Pour $j\in[\![1,n]\!]$, $\frac{T_n}{X-x_{n,j}}=\prod_{k\neq j}(X-x_{n,k})$ est un polynôme de degré $n-1$ que l'on note $U_{n,j}$. De plus, pour $k\neq j$, $U_{n,j}(x_{n,k})=0$ et pour $k=j$, $U_{n,j}(x_{n,j})=T_n'(x_{n,j})$ car $T_n'=((X-x_{n,j})U_{n,j})'=U_{n,j}+(X-x_{n,j})U_{n,j}'$.

Par suite, le polynôme $U=\sum_{j=1}^{n}\frac{P(x_{n,j})}{T_n'(x_{n,j})}U_{n,j}$ est un polynôme de degré au plus $n-1$ tel que pour tout $j\in[\![1,n]\!]$,

$$U(x_{n,j})=0+\ldots+0+\frac{P(x_{n,j})}{T_n'(x_{n,j})}U_{n,j}(x_{n,j})+0+\ldots+0=P(x_{n,j}).$$

Puisque les polynômes U et P sont de degrés au plus $n-1$ et prennent la même valeur en au moins n réels deux à deux distincts, ces polynômes sont égaux. On a montré que

$$\boxed{\forall P\in E_{n-1},\ \forall x\in\mathbb{R}\setminus\{x_{n,j},\ 1\leqslant j\leqslant n\},\ P(x)=\sum_{j=1}^{n}\frac{P\left(x_{n,j}\right)}{T_n'\left(x_{n,j}\right)}\frac{T_n(x)}{x-x_{n,j}}.}$$

b) Soient $n\in\mathbb{N}^*$ puis $j\in[\![1,n]\!]$. Puisque les racines de T_n sont simples, on a $T_n'(x_{n,j})\neq 0$ et

$$\frac{1}{T_n'(x_{n,j})}=\frac{\sqrt{1-x_{n,j}^2}}{2^{1-n}n\sin(n\,\mathrm{Arccos}(x_{n,j}))}=\frac{2^{n-1}}{n}\sqrt{1-x_{n,j}^2}\frac{1}{\sin\left(\frac{(2n-2j+1)\pi}{2}\right)}=(-1)^{n-j}\frac{2^{n-1}}{n}\sqrt{1-x_{n,j}^2}$$

et donc

$$\boxed{\forall P\in E_{n-1},\ \forall x\in\mathbb{R}\setminus\{x_{n,j},\ 1\leqslant j\leqslant n\},\ P(x)=\frac{2^{n-1}}{n}\sum_{j=1}^{n}(-1)^{n-j}\sqrt{1-x_{n,j}^2}P\left(x_{n,j}\right)\frac{T_n(x)}{x-x_{n,j}}.}$$

II.B - Inégalité de Bernstein

II.B.1) Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Tout d'abord, $x_{1,n}\leqslant 0\leqslant x_{n,n}$ et $|x_{1,n}|=|x_{n,n}|=\cos\left(\frac{\pi}{2n}\right)$. Par suite,

$$\begin{aligned}x_{1,n}\leqslant x\leqslant x_{n,n}&\Rightarrow x^2\leqslant\cos^2\left(\frac{\pi}{2n}\right)\\&\Rightarrow\sqrt{1-x^2}\geqslant\sqrt{1-\cos^2\left(\frac{\pi}{2n}\right)}=\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)\geqslant\frac{2}{\pi}\times\frac{\pi}{2n}\ \text{(d'après II.A.1)b))}\\&\Rightarrow\sqrt{1-x^2}\geqslant\frac{1}{n}.\end{aligned}$$

II.B.2) a) Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Soit $P\in E_{n-1}$ tel que $\sup_{x\in[-1,1]}\sqrt{1-x^2}|P(x)|\leqslant 1$. Soit $x\in[-1,1]$.

- Si $x\in[x_{n,1},x_{n,n}]$, d'après la question précédente, $\sqrt{1-x^2}\geqslant\frac{1}{n}$ et donc

$$|P(x)| \leqslant \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \leqslant n.$$

• Supposons maintenant que $x \in [-1, x_{n,1}[\cup]x_{n,n}, 1]$. Alors x n'est pas racine de T_n et d'après la question II.A.5)b)

$$\begin{aligned}
|P(x)| &= \frac{2^{n-1}}{n}\left|\sum_{j=1}^{n}(-1)^{n-j}\sqrt{1-x_{n,j}^2}P(x_{n,j})\frac{T_n(x)}{x-x_{n,j}}\right| \text{ (d'après II.A.5)b))}\\
&\leqslant \frac{2^{n-1}}{n}\sum_{j=1}^{n}\sqrt{1-x_{n,j}^2}|P(x_{n,j})|\frac{|T_n(x)|}{|x-x_{n,j}|}\\
&\leqslant \frac{2^{n-1}}{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{|T_n(x)|}{|x-x_{n,j}|}.
\end{aligned}$$

Maintenant, d'après la question II.A.4), $\dfrac{T_n'(x)}{T_n(x)} = \displaystyle\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{x-x_{n,j}}$. De plus, puisque $x \in [-1, x_{n,1}[\cup]x_{n,n}, 1]$, on a ou bien $\forall j \in [\![1, n]\!]$, $x - x_{n,j} < 0$, ou bien $\forall j \in [\![1, n]\!]$, $x - x_{n,j} > 0$, de sorte que $\dfrac{|T_n'(x)|}{|T_n(x)|} = \displaystyle\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{|x-x_{n,j}|}$. On en déduit que

$$\begin{aligned}
|P(x)| &\leqslant \frac{2^{n-1}}{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{|T_n(x)|}{|x-x_{n,j}|} = \frac{2^{n-1}}{n}|T_n'(x)|\\
&\leqslant \frac{2^{n-1}}{n} \times 2^{1-n}n^2 \text{ (d'après II.A.2))}\\
&= n.
\end{aligned}$$

Finalement, $\forall x \in [-1, 1]$, $|P(x)| \leqslant n$ et donc $\displaystyle\sup_{x\in[-1,1]}|P(x)| \leqslant n$.

b) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $P \in E_{n-1}$. Si $P = 0$, l'inégalité de l'énoncé est immédiate. Sinon, P ne s'annule pas en au moins un réel de $]-1, 1[$ et donc le nombre $M = \displaystyle\sup_{x\in[-1,1]}\sqrt{1-x^2}|P(x)|$ est strictement positif.

Le polynôme $\dfrac{P}{M}$ est alors un élément de E_{n-1} tel que $\displaystyle\sup_{x\in[-1,1]}\sqrt{1-x^2}\left|\frac{1}{M}P(x)\right| \leqslant 1$. La question précédente permet d'affirmer que $\displaystyle\sup_{x\in[-1,1]}\left|\frac{1}{M}P(x)\right| \leqslant n$ et donc que $\displaystyle\sup_{x\in[-1,1]}|P(x)| \leqslant nM = n\sup_{x\in[-1,1]}\sqrt{1-x^2}|P(x)|$. On a montré que

$$\boxed{\forall P \in E_{n-1},\ \sup_{x\in[-1,1]}|P(x)| \leqslant n\sup_{x\in[-1,1]}\sqrt{1-x^2}|P(x)|.}$$

II.B.3) a) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Pour $\theta \in \mathbb{R}$, on a $F_k(\cos\theta) = \cos(k\theta)$ et donc $-\sin\theta F_k'(\cos\theta) = -k\sin(k\theta)$ puis $\sin(k\theta) = \sin\theta\left(\dfrac{F_k'}{k}\right)(\cos\theta)$. Puisque F_k est un polynôme de degré k, le polynôme $B_k = \dfrac{1}{k}F_k'$ est un polynôme de degré $k-1$ vérifiant $\forall\theta \in \mathbb{R}$, $\sin(k\theta) = \sin\theta\, B_k(\cos\theta)$.

b) Pour $\theta \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
T(\theta_0+\theta) - T(\theta_0-\theta) &= \sum_{k=1}^{n}\left(a_k(\cos(k(\theta_0+\theta)) - \cos(k(\theta_0-\theta))) + b_k(\sin(k(\theta_0+\theta)) - \sin(k(\theta_0-\theta)))\right)\\
&= \sum_{k=1}^{n}\left(-2a_k\sin(k\theta_0)\sin(k\theta) + 2b_k\cos(k\theta_0)\sin(k\theta)\right)\\
&= 2\sum_{k=1}^{n}(-a_k\sin(k\theta_0) + b_k\cos(k\theta_0))B_k(\cos\theta)\ \sin\theta\\
&= 2\sin\theta\ P(\cos\theta)
\end{aligned}$$

où $P = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}(-a_k\sin(k\theta_0) + b_k\cos(k\theta_0))B_k$ est un polynôme de degré au plus $n-1$. Le polynôme P dépend de T et de θ_0.

c) Soit $x \in [-1, 1]$. On pose $M = \displaystyle\sup_{\theta\in\mathbb{R}}|T(\theta)|$. Puisque $P \in E_{n-1}$, la question II.B.2)b) permet d'écrire

$$
\begin{aligned}
|P(x)| &\leqslant n \sup_{x\in[-1,1]} \sqrt{1-x^2}|P(x)| = n \sup_{\theta\in\mathbb{R}} \left(\sqrt{1-\cos^2\theta}|P(\cos\theta)|\right) = n \sup_{\theta\in\mathbb{R}} |\sin\theta\, P(\cos\theta)| \\
&= \frac{n}{2} \sup_{\theta\in\mathbb{R}} |T(\theta_0+\theta) - T(\theta_0-\theta)| \leqslant \frac{n}{2}(M+M) = nM,
\end{aligned}
$$

et donc $\displaystyle\sup_{x\in[-1,1]} |P(x)| \leqslant n \sup_{\theta\in\mathbb{R}} |T(\theta)|$.

d) Soient $\theta_0 \in \mathbb{R}$ et $\theta \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{2\sin\theta P(\cos(\theta))}{\theta} = \dfrac{T(\theta_0+\theta) - T(\theta_0-\theta)}{\theta} = \dfrac{T(\theta_0+\theta) - T(\theta_0)}{\theta} - \dfrac{T(\theta_0-\theta) - T(\theta_0)}{\theta}$.
Quand θ tend vers 0, on obtient $2P(1) = 2T'(\theta_0)$ et donc

$$|T'(\theta_0)| = |P(1)| \leqslant \sup_{x\in[-1,1]} |P(x)| \leqslant n \sup_{\theta\in\mathbb{R}} |T(\theta)|.$$

Ceci étant valable pour tout réel θ_0, on a montré que

$$\boxed{\sup_{\theta\in\mathbb{R}} |T'(\theta)| \leqslant n \sup_{\theta\in\mathbb{R}} |T(\theta)|.}$$

II.C - Inégalité de Markov

Soit $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in E_n$. Pour $\theta \in \mathbb{R}$, on pose $T(\theta) = P(\cos\theta)$.

On sait que pour $k \in [\![0, n]\!]$, $\cos^k\theta$ se linéarise en une combinaison linéaire des $\cos(j\theta)$, $0 \leqslant j \leqslant k$ et donc il existe des réels $a_0, \ldots, a_n$ tels que $\forall\theta \in \mathbb{R}$, $T(\theta) = a_0 + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k \cos(k\theta)$. On a alors

$$
\begin{aligned}
\sup_{x\in[-1,1]} |P'(x)| &\leqslant n \sup_{x\in[-1,1]} \sqrt{1-x^2}|P'(x)| \text{ (d'après II.B.2)b) car } P' \in E_{n-1}) \\
&= n \sup_{\theta\in\mathbb{R}} |\sin\theta P'(\cos\theta)| = n \sup_{\theta\in\mathbb{R}} |T'(\theta)| \\
&\leqslant n^2 \sup_{\theta\in\mathbb{R}} |T(\theta)| \text{ (d'après II.B.3)d))} \\
&= n^2 \sup_{x\in[-1,1]} |P(x)|
\end{aligned}
$$

On a montré que

$$\boxed{\forall P \in E_n,\ \sup_{x\in[-1,1]} |P'(x)| \leqslant n^2 \sup_{x\in[-1,1]} |P(x)|.}$$

Partie III - Approximation polynômiale

III.A -

III.A.1) Soient $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{S}$ et $j \in \mathbb{N}$. La suite $(n^{j+2}\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée et donc $n^{j+2}\alpha_n \underset{n\to+\infty}{=} O(1)$ ou encore $n^j\alpha_n \underset{n\to+\infty}{=} O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$. On en déduit que la série numérique de terme général $n^j\alpha_n$, $n \in \mathbb{N}$, converge absolument et donc converge.

III.A.2) Soit $k \in \mathbb{N}$. Il existe $M \in \mathbb{R}^+$ tel que $\forall p \in \mathbb{N}$, $|p^{j+k+2}\alpha_p| \leqslant M$ et donc $\forall p \in \mathbb{N}$, $|p^j\alpha_p| \leqslant \dfrac{M}{p^{k+2}}$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a alors

$$
\begin{aligned}
|n^k R_n(j)| &\leqslant n^k \sum_{p=n+1}^{+\infty} |p^j\alpha_p| \leqslant Mn^k \sum_{p=n+1}^{+\infty} \frac{1}{p^{k+2}} \text{ (la série converge car } k+2 \geqslant 2) \\
&\leqslant Mn^k \sum_{p=n+1}^{+\infty} \int_{p-1}^{p} \frac{1}{t^{k+2}}\, dt = Mn^k \int_{n}^{+\infty} \frac{dt}{t^{k+2}} = Mn^k \left[-\frac{1}{(k+1)t^{k+1}}\right]_n^{+\infty} \\
&= \frac{M}{(k+1)n} \leqslant \frac{M}{k+1},
\end{aligned}
$$

ce qui reste vrai pour $n = 0$ car $0^k R_0(j) = 0$. Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $|n^k R_n(j)| \leqslant \dfrac{M}{k+1}$. On a montré que $\forall k \in \mathbb{N}$, la suite $(n^k R_n(j))_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée et donc la suite $(R_n(j))_{n\in\mathbb{N}}$ est élément de $\mathcal{S}$.

III.B -

III.B.1) Soit $x \in [-1, 1]$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|F_n(x)| = |\cos(n \operatorname{Arccos}(x))| \leqslant 1$. Par suite, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|\alpha_n F_n(x)| \leqslant |\alpha_n|$ avec $\alpha_n \underset{n \to +\infty}{=} O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.
On en déduit que la série de terme général $\alpha_n F_n(x)$, $n \in \mathbb{N}$, converge.

III.B.2) La série de fonctions de terme général $\alpha_n F_n$, $n \in \mathbb{N}$, converge simplement vers f sur $[-1, 1]$ et chaque fonction $\alpha_n F_n$ est de classe C^∞ sur $[-1, 1]$.
Ensuite, D'après la question II.C), puisque $F_n \in E_n$,

$$\sup_{x \in [-1,1]} |(\alpha_n F_n)'(x)| = |\alpha_n| \sup_{x \in [-1,1]} |F_n'(x)| \leqslant n^2 |\alpha_n| \sup_{x \in [-1,1]} |F_n(x)| \leqslant n^2 |\alpha_n|.$$

Plus généralement, puisque pour $k \leqslant n$, $F_n^{(k)}$ est dans E_{n-k}, pour $k \leqslant n$, on a

$$\sup_{x \in [-1,1]} |(\alpha_n F_n)(k)(x)| \leqslant n^2(n-1)^2 \dots (n-k+1)^2 |\alpha_n| \leqslant n^{2k} |\alpha_n|,$$

ce qui reste vrai pour $k > n$ car alors $F_n^{(k)} = 0$. Ainsi, $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\sup\limits_{x \in [-1,1]} |(\alpha_n F_n)(k)(x)| \leqslant n^{2k} |\alpha_n|$. Comme la série numérique de terme général $n^{2k}|\alpha_n|$, $n \in \mathbb{N}$, converge d'après la question III.A.1), on en déduit que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la série de fonction de terme $(\alpha_n F_n)^{(k)}$, $n \in \mathbb{N}$, converge normalement sur $[-1, 1]$.

En résumé,
- la série de fonctions de terme général $\alpha_n F_n$, $n \in \mathbb{N}$, converge simplement vers f sur $[-1, 1]$.
- chaque fonction $\alpha_n F_n$, $n \in \mathbb{N}$, est de classe C^∞ sur $[-1, 1]$
- chaque série de fonctions $\alpha_n F_n^{(k)}$, $k \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}$, converge normalement sur $[-1, 1]$.

D'après une généralisation du théorème de dérivation terme à terme, la fonction f est de classe C^∞ sur $[-1, 1]$ et les dérivées successives de f s'obtiennent par dérivation terme à terme.

III.B.3) Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour $x \in [-1, 1]$,

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} \alpha_k F_k(x) \right| = \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} \alpha_k F_k(x) \right| \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} |\alpha_k||F_k(x)| \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} |\alpha_k|$$

Mais alors, $\sup\limits_{x \in [-1,1]} \left| f(x) - \sum\limits_{k=0}^{n} \alpha_k F_k(x) \right| \leqslant \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} |\alpha_k|$. Maintenant, puisque $\sum\limits_{k=0}^{n} \alpha_k F_k$ est dans V_n, on en déduit que $d(f, V_n) \leqslant \sup\limits_{x \in [-1,1]} \left| f(x) - \sum\limits_{k=0}^{n} \alpha_k F_k(x) \right| \leqslant \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} |\alpha_k|$. Ainsi,

$$\forall n \in \mathbb{N},\ d(f, V_n) \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} |\alpha_k| \quad (*).$$

Maintenant, il est clair que la suite (α_n) est à décroissance rapide si et seulement si la suite $(|\alpha_n|)$ l'est et la question III.A.2) appliquée à la suite $(|\alpha_n|)$ et à $j = 0$ permet d'affirmer que la suite $\left(\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} |\alpha_k| \right)_{n \in \mathbb{N}}$ est à décroissance rapide.
Les inégalités $(*)$ montrent alors qu'il en est de même de la suite $(d(f, V_n))_{n \in \mathbb{N}}$.

$$\boxed{\text{La suite } (d(f, V_n))_{n \in \mathbb{N}} \text{ est à décroissance rapide.}}$$

III.C -

III.C.1) La fonction $\widetilde{f}$ est 2π-périodique, continue par morceaux et paire et donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $b_n(\widetilde{f}) = 0$. Ensuite, puisque f est de classe C^∞ sur $[-1, 1]$, $\widetilde{f}$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$. On sait alors que $\forall k \in \mathbb{N}$, $a_n(\widetilde{f}) \underset{n \to +\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{n^k}\right)$ ou encore $\forall k \in \mathbb{N}$, $n^k a_n(\widetilde{f}) \underset{n \to +\infty}{\to} 0$. En particulier, $\forall k \in \mathbb{N}$, la suite $(n^k a_n(\widetilde{f}))$ est bornée et donc la suite $(a_n(\widetilde{f}))$ est à décroissance rapide.

III.C.2) Puisque $\widetilde{f}$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, 2π-périodique, on sait que la série de FOURIER de $\widetilde{f}$ converge normalement vers $\widetilde{f}$ sur $\mathbb{R}$.

III.C.3) Pour tout réel θ,

$$f(\cos\theta) = \widetilde{f}(\theta) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(\widetilde{f}) \cos(n\theta) = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n F_n(\cos\theta),$$

où $\alpha_n = a_n(\widetilde{f}) = \left\{\begin{array}{l} \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(\cos t)\ dt \text{ si } n = 0 \\ \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(\cos t)\cos(nt)\ dt \text{ si } n \geqslant 1 \end{array}\right.$. Mais alors, $\forall x \in [-1,1]$, $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n F_n(x)$. De plus, la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à décroissance rapide d'après la question II.C.1).

Mais alors, d'après la question III.B.3), la suite $(d(f,V_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est à décroissance rapide. On a ainsi montré que si f est de classe C^∞ sur $[-1,1]$, la suite $(d(f,V_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est à décroissance rapide.

III.D -

III.D.1) Soit $n \in \mathbb{N}$. Par définition d'une borne inférieure, il existe un élément p_n de V_n tel que $\|f-p_n\|_\infty \leqslant d(f,V_n)+\dfrac{1}{n^n}$.

Maintenant, pour tout entier k, la suite $\left(n^k\left(d(f,V_n)+\dfrac{1}{n^n}\right)\right)$ est bornée et il en est de même de la suite $(n^k\|f-p_n\|_\infty)$.

Ainsi, $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions polynomiales telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\deg(p_n) \leqslant n$ et la suite $(\|f-p_n\|_\infty)$ est à décroissance rapide.

III.D.2) a) Soient $k \in \mathbb{N}^*$ puis $P \in E_{k-1}$.

$$\begin{aligned} a_k(\widetilde{P}) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \widetilde{P}(t)\cos(kt)\ dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} P(\cos t)F_k(\cos t)\ dt \\ &= \frac{2}{\pi}\int_1^{-1} P(x)F_k(x) \times -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{P(x)F_k(x)}{\sqrt{1-x^2}}\ dx \\ &= \frac{1}{\pi}(P|F_k) = \frac{2^{k-1}}{\pi}(P|T_k). \end{aligned}$$

Maintenant, d'après la question I.C.3), $T_k \in E_{k-1}^\perp$ et donc $(P|T_k) = 0$. Ainsi, $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $a_k(\widetilde{P}) = 0$. Ensuite, par linéarité des coefficients de FOURIER, pour $k \in \mathbb{N}^*$,

$$a_k(\widetilde{f}) = a_k(\widetilde{f}) - a_k(\widetilde{P}) = a_k(\widetilde{f}-\widetilde{P}) = a_k(\widetilde{f-P}).$$

b) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $P \in E_{k-1}$,

$$|a_k(\widetilde{f})| = |a_k(\widetilde{f-P})| = \frac{1}{\pi}\left|\int_{-\pi}^{\pi}(f-P)(\cos t)\cos(kt)\ dt\right| \leqslant \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|(f-P)(\cos t)||\cos(kt)|\ dt \leqslant 2\|f-P\|_\infty.$$

Par suite, $\dfrac{1}{2}|a_k(\widetilde{f})|$ est un minorant de $\{\|f-P\|_\infty,\ P \in V_{k-1}\}$ et puisque $d(f,V_{k-1})$ est le plus grand de ces minorants, on a donc $\dfrac{1}{2}|a_k(\widetilde{f})| \leqslant d(f,V_{k-1})$. Ainsi, $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $|a_k(\widetilde{f})| \leqslant 2d(f,V_{k-1})$. On en déduit que la suite $(a_k(\widetilde{f}))_{k\in\mathbb{N}}$ est à décroissance rapide.

c) Soit g la fonction définie sur $[-1,1]$ par : $\forall x \in [-1,1]$, $g(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(\widetilde{f})F_n(x)$.

Puisque la suite $(a_n(\widetilde{f}))_{n\in\mathbb{N}}$ est à décroissance rapide, la question III.B permet d'affirmer que g est définie sur $[-1,1]$ et de classe C^∞ sur $[-1,1]$.

Pour tout réel θ, $\widetilde{g}(\theta) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(\widetilde{f})F_n(\cos\theta) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(\widetilde{f})\cos(n\theta)$, cette série convergeant normalement vers $\widetilde{g}$ sur $\mathbb{R}$ (car par exemple $\forall\theta \in \mathbb{R}$, $|a_n(\widetilde{f})\cos(n\theta)| \leqslant |a_n(\widetilde{f})|$ avec $a_n(\widetilde{f}) \underset{n\to+\infty}{=} O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.

On sait alors que l'on obtient les coefficients de FOURIER de $\widetilde{g}$ par intégration terme à terme ce qui fournit $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n(\widetilde{g}) = a_n(\widetilde{f})$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $b_n(\widetilde{g}) = b_n(\widetilde{f})$. Comme $\widetilde{f}$ et $\widetilde{g}$ sont continues sur $\mathbb{R}$, on en déduit que $\widetilde{f} = \widetilde{g}$. Mais alors $\forall x \in [-1,1]$, $f(x) = g(x)$ et donc $f = g$. Puisque g est de classe C^∞ sur $[-1,1]$, il en est de même de f.
On a montré que

$\boxed{\forall f \in C([-1,1]),\ f \text{ est de classe } C^\infty \text{ sur } [-1,1] \text{ si et seulement si la suite } (d(f,V_n))_{n\in\mathbb{N}} \text{ est à décroissance rapide.}}$

