1. Exercices d'échauffement

Exercice 1. Le nombre $\frac{\ln(3)}{\ln(2)}$ est-il rationnel ou irrationnel ?

Exercice 2. (1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $N_n := 0,201920192019\dots2019$ (n fois). Mettre N_n sous la forme d'une fraction rationnelle.

(2) Soit $M := 0,201920192019\dots$ (à l'infini). Donner le rationnel dont l'écriture en décimales est M.

(3) Même question avec

$$x = 0,1111\dots + 0,2222\dots + 0,3333\dots + 0,4444\dots + 0,5555\dots + 0,6666\dots + \\ +0,7777\dots + 0,8888\dots + 0,9999\dots$$

Exercice 3. Déterminer la moyenne entre les nombres suivants :

$$\frac{1+2+3}{3}, \ \frac{2+3+4}{3}, \ \frac{3+4+5}{3}, \dots, \frac{998+999+1000}{3}.$$

Exercice 4. Trouver le nombre en centième position de la suite suivante :

$$1, 3, 3, 3, 5, 5, 5, 5, 5, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 9, \dots$$

Vous pourrez trouver plein d'autres exercices ludiques du même type à l'adresse suivante : `https://images.math.cnrs.fr/-Defis-du-Calendrier-mathematique-.html`

2. Propriétés de $\mathbb{R}$, quantificateurs....

Exercice 5. Soient A et B deux parties non vides et bornées de $\mathbb{R}$. On note $A + B = \{a + b \mid (a, b) \in A \times B\}$. Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

(1) $A \subset B \Longrightarrow \sup(A) \leq \sup(B)$
(2) $A \subset B \Longrightarrow \inf(A) \leq \sup(B)$
(3) $\sup(A \cup B) = \max\{\sup(A), \sup(B)\}$
(4) $\sup(A) + \sup(B)$ est un majorant de $A + B$
(5) $\sup(A + B) < \sup(A) + \sup(B)$
(6) $\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B)$
(7) $\sup(-A) = -\inf(A)$

Exercice 6. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ croissante, telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f \circ f(x) = x$. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x$.

Exercice 7. Soit $f :]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ croissante telle que

$$\begin{array}{rccc} g : &]0, +\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \frac{f(x)}{x} \end{array}$$

soit décroissante. Montrer que f est continue.

Exercice 8. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction (pas forcément croissante). On note

$$E := \{g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \text{ croissante } \mid g \leq f\}.$$

On pose, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\widetilde{f}(x) = \sup\{g(x) \mid g \in E\}$.

(1) Montrer que $\widetilde{f} \in E$.
(2) Montrer que $\widetilde{f}$ admet des limites à droite et à gauche en tout point.
(3) On suppose que f est continue. Montrer alors que $\widetilde{f}$ est continue. (Indication : si $\lim_{x^+} \widetilde{f} \neq \lim_{x^-} \widetilde{f}$, montrer que l'on peut construire une fonction de E supérieure à $\widetilde{f}$).

3. Continuité - Théorème des valeurs intermédiaires

Exercice 9. Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(a) = f(b)$. Montrer que la fonction $g(t) = f(t + \frac{b-a}{2}) - f(t)$ s'annule en au moins un point de $[a, \frac{a+b}{2}]$.
Application : une personne parcourt 4 km en 1 heure. Montrer qu'il existe un intervalle de 30 mn pendant lequel elle parcourt exactement 2 km.

Exercice 10. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $T > 0$. On suppose que f est T-périodique, c'est-à-dire que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x+T) = f(x)$.

(1) Si f possède une limite finie en $+\infty$, montrer que f est constante.
(2) Si f est continue et non constante, montrer que f admet une plus petite période (indication : considérer l'ensemble E des périodes de f, et montrer que la borne inférieure de E appartient à E).
(3) Si f est continue, montrer que f est bornée et atteint ses bornes.

Exercice 11. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue en 0 telle que pour chaque $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = f(2x)$. Montrer que f est constante.

Exercice 12. Soient $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues. On pose pour tout $x \in \mathbb{R}$, $h(x) := \max\{f(x), g(x)\}$. Montrer que $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue.

Exercice 13. Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, telle que pour tout $x \in I$, $f(x)^2 = 1$. Montrer que $f = 1$ ou $f = -1$.

Exercice 14. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction uniformément continue. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $g(x) := \sup_{t \in [x, x+1]} f(t)$. Montrer que g est continue.
Est-ce que cela reste vrai si f est seulement supposée continue ?

Exercice 15. Soit $f : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue possédant une limite $l \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ en $+\infty$. Montrer que f prend toutes les valeurs entre $f(0)$ et l (l étant exclu).

Exercice 16.

(1) Soit $f : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ continue. Montrer que f admet un point fixe, c'est-à-dire qu'il existe $x \in [0,1]$ tel que $f(x) = x$.
(2) Soient f, $g : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ continues telles que $f \circ g = g \circ f$. Montrer qu'il existe $x \in [0,1]$ tel que $f(x) = g(x)$. (Indication : on étudiera l'ensemble des points fixes de f).

Exercice 17. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue et supposons qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ avec $f \circ f(a) = a$. Est-ce que f admet un point fixe ? (Indication : étudier la fonction $x \longmapsto f(x) - x$ entre a et $f(a)$).