Exercice 5. Soient A et B deux parties non vides et bornées de $\mathbb{R}$. On note $A+B = \{a+b \mid (a,b) \in A \times B\}$. Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

(1) $A \subset B \Longrightarrow \sup(A) \leq \sup(B)$.
Vrai: Si M est un majorant de B, alors : $\forall x \in B$, $x \leq M$. Comme $A \subset B$, on a : $\forall x \in A$, $x \leq M$. Donc M est un majorant de A. Donc l'ensemble des majorants de B est inclus dans l'ensemble des majorants de A. Donc le plus petit majorant de B est un majorant de A, et est donc plus grand que $\sup(A)$. C'et-à-dire $\sup(B) \geq \sup(A)$.

(2) $A \subset B \Longrightarrow \inf(A) \leq \sup(B)$
Faux : si $A = \{0\}$ et $B =]-1, 0]$, on a $\inf(A) = 0 > -1 = \inf(B)$.

(3) $\sup(A \cup B) = \max\{\sup(A), \sup(B)\}$
Vrai : Comme $A \subset A \cup B$ et $B \subset A \cup B$, on a $\sup(A), \sup(B) \leq \sup(A \cup B)$, d'après le (1). Donc $\sup(A \cup B) \geq \max\{\sup(A), \sup(B)\}$. Inversement, si $\sup(A \cup B) > \max\{\sup(A), \sup(B)\}$, il existe $x \in A \cup B$ tel que

$$\sup(A \cup B) \geq x > \max\{\sup(A), \sup(B)\}$$

Comme $x \in A \cup B$, $x \in A$ ou $x \in B$. Si $x \in A$, on obtient $x > \sup(A)$ ce qui est absurde. Si $x \in B$, on obtient aussi une contradiction. Cela montre l'égalité.

(4) $\sup(A) + \sup(B)$ est un majorant de $A + B$
Vrai : On a

$$\forall a \in A, a \leq \sup(A), \quad \forall b \in B, b \leq \sup(B)$$

Donc $\forall x \in A + B, x \leq \sup(A) + \sup(B)$. Donc $\sup(A) + \sup(B)$ est un majorant de $A + B$.

(5) $\sup(A + B) < \sup(A) + \sup(B)$
Faux : supposons que ce soit le cas. Fixons

$$\varepsilon = \frac{1}{2}(\sup(A) + \sup(B) - \sup(A + B)) > 0.$$

Par définition de la borne supérieure, il existe $a \in A$ et $b \in B$ tels que

$$\sup(A) - \varepsilon < a, \ \sup(B) - \varepsilon < b.$$

On a donc $a + b > \sup(A) + \sup(B) - 2\varepsilon$. D'où $a + b > \sup(A + B)$ ce qui est absurde.

(6) $\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B)$
Vrai : d'après le point précédent, on a $\sup(A + B) \geq \sup(A) + \sup(B)$. Supposons que cette inégalité est stricte. Il existe donc $x \in A + B$ tel que

$$\sup(A + B) \geq x > \sup(A) + \sup(B).$$

On peut écrire $x = a + b$ avec $a \in A$ et $b \in B$. On a alors $a > \sup(A)$ ou $b > \sup(B)$, ce qui est absurde. L'inégalité n'est donc pas stricte. C'est dont un égalité.

(7) $\sup(-A) = -\inf(A)$
Vrai : Soit $M = \sup(-A)$. Donc, pour tout $x \in A$, $-x \leq M$. Donc, pour tout $x \in A$, $x \geq -M$. Donc $-M$ est un minorant de A et $-M \leq \inf(A)$. Donc $\sup(-A) \geq -\inf(A)$.
Inversement, pour tout $x \in A$, on a $x \geq \inf(A)$. Donc pour tout $x \in A$, $-x \leq -\inf(A)$. Donc $-\inf(A)$ est un majorant de $-A$. On a donc $-\inf(A) \geq \sup(-A)$. Cela prouve l'égalité.

Exercice 6. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ croissante, telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f \circ f(x) = x$. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x$.

Correction : Supposons qu'il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) \neq x$. Considérons deux cas :
- si $x < f(x)$, on a (f étant croissante) $f(x) \leq f \circ f(x)$. Mais par hypothèse $f \circ f(x) = x$, ce qui est absurde.
- si $x > f(x)$, on obtient $f(x) \geq f \circ f(x) = x$, ce qui est à nouveau une absurdité.
Donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x$.

Exercice 7. Soit $f :]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ croissante telle que

$$g : \begin{array}{ccc}]0, +\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{f(x)}{x} \end{array}$$

soit décroissante. Montrer que f est continue.

Correction : La fonction f est croissante, elle admet donc des limites à droite et à gauche en tout point. En effet, si f n'admet pas de limite à gauche en un point $a \in]0, +\infty[$, il existe une suite (x_n) de $]0, +\infty[$, avec $x_n < a$ pour tout n, qui converge avec a, mais telle que $f(x_n)$ ne converge pas. On peut même supposer que (x_n) est croissante en considérant une suite extraite de (x_n). Mais dans ce cas la suite $(f(x_n))$ est croissante (car f est croissante) et majorée par $f(a)$ (car f est croissante et $x_n < a$ pour tout n). On obtient donc une contradiction, puisque toute suite croissante et majorée converge. Le même raisonnement s'applique pour les limites à droite.
De plus comme f est croissante, on a $\lim_{a^-} f \leq f(a) \leq \lim_{a^+} f$. En effet si (x_n) (respectivement (y_n)) est une suite croissante (resp. décroissante) qui converge vers a, on obtient

$$\forall n \in \mathbb{N}, \; f(x_n) \leq f(a) \leq f(y_n).$$

On obtient donc l'inégalité voule en passant à la limite.
Il nous suffit donc de montrer, que pour tout $a \in]0, +\infty[$, on a $\lim_{a^-} f \geq \lim_{a^+} f$. Ceci prouvera alors que $\lim_a f$ existe et vaut $f(a)$.
Comme pour f, la fonction g admet des limites à gauche et à droite en tout point $a \in]0, +\infty[$. De plus, pour tout $a > 0$, on a

$$\frac{1}{a} \lim_{a^-} f = \lim_{a^-} \geq \lim_{a^+} g = \frac{1}{a} \lim_{a^+} f,$$

l'inégalité du milieu provenant du fait que g est décroissante. Ceci montre bien que $\lim_{a^-} f \geq \lim_{a^+} f$.

Exercice 8. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ croissante. On note

$$E := \{g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \text{ croissante } \mid g \leq f\}.$$

On pose, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\widetilde{f}(x) = \sup\{g(x) \mid g \in E\}$.

(1) Montrer que $\widetilde{f} \in E$.
(2) Montrer que $\widetilde{f}$ admet des limites à droite et à gauche en tout point.
(3) On suppose que f est continue. Montrer alors que $\widetilde{f}$ est continue. (Indication : si $\lim_{x^+} \widetilde{f} \neq \lim_{x^-} \widetilde{f}$, montrer que l'on peut construire une fonction de E supérieure à $\widetilde{f}$).

Correction :

(1) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, et pour tout $g(x) \in E$, on a $g(x) \leq f(x)$. Donc $\widetilde{f}(x) \leq f(x)$.

Soient $x < y$. Pour tout $g \in E$, on a $g(x) \leq g(y)$, car les fonctions de E sont croissantes. On a donc $\widetilde{f}(x) \leq \widetilde{f}(y)$, i.e. f est croissante. Donc $\widetilde{f} \in E$.

(2) Comme $\widetilde{f}$ est croissante, $\widetilde{f}$ admet des limites à droite et à gauche en tout point.

(3) Supposons que $\widetilde{f}$ n'est pas continue. Donc il existe x tel que $\lim_{x^+} \widetilde{f} > \lim_{x^-} \widetilde{f}$. On a, pour $y > x$, $f(y) \geq \widetilde{f}(y)$. En passant à la limite on obtient alors (par continuité de f) : $f(x) \geq \lim_{x^+} \widetilde{f}$. Par continuité de f,

$$\exists \eta > 0, \forall y \in \mathbb{R}, x - \eta < y < x \Longrightarrow |f(y) - f(x)| < \frac{\lim_{x^+} \widetilde{f} - \lim_{x^-} \widetilde{f}}{2}.$$

En particulier, pour $y \in]x - \eta, x[$, on a $f(y) \geq \frac{\lim_{x^+} \widetilde{f} + \lim_{x^-} \widetilde{f}}{2} > \lim_{x^-} \widetilde{f}$.
On définit alors la fonction g de la manière suivante :

$$\begin{cases} \forall y \geq x, & g(y) = \widetilde{f}(y) \\ \forall y \leq x - \eta, & g(y) = \widetilde{f}(y) \\ \forall y \in]x - \eta, x[, & g(y) = \frac{\lim_{x^+} \widetilde{f} + \lim_{x^-} \widetilde{f}}{2} \end{cases}$$

On obtient donc $g(y) \leq f(y)$ pour tout y, et g est croissante. Donc $g \in E$. Mais on a, pour $y \in]x - \eta, x[$, $g(y) > \lim_{x^-} \widetilde{f} \geq \widetilde{f}(y)$. Cela contredit la définition de $\widetilde{f}$. Donc $\widetilde{f}$ est continue.

Exercice 9. Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(a) = f(b)$. Montrer que la fonction $g(t) = f(t + \frac{b-a}{2}) - f(t)$ s'annule en au moins un point de $[a, \frac{a+b}{2}]$.
Application : une personne parcourt 4 km en 1 heure. Montrer qu'il existe un intervalle de 30 mn pendant lequel elle parcourt exactement 2 km.

Correction : La fonction g est continue car f est continue. De plus on a

$$g(a) = f\left(\frac{a+b}{2}\right) - f(a) = -\left(f(a) - f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right) = -\left(f(b) - f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right) = -g\left(\frac{a+b}{2}\right).$$

Donc, d'après le théorème des valeurs intermédaires, il existe $c \in [a, \frac{a+b}{2}]$ tel que $g(c) = 0$

On applique cela au problème de la manière suivante : on note $d(t)$ la distance parcourue en kilomètres au bout du temps t (t est exprimé en heures) (ici $a = 0$ et $b = 1$), et on pose $f(t) = d(t) - 4t$. On a alors $f(0) = f(1) = 0$. La fonction g s'annule donc en un point c, c'est-à-dire qu'il existe c tel que

$$d\left(c + \frac{1}{2}\right) - d(c) = 2.$$

Cela signifie qu'entre les temps c et $c + \frac{1}{2}$, le coureur a parcouru exactement 2 kilomètres.

Exercice 10.
Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $T > 0$. On suppose que f est T-périodique, c'est-à-dire que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x + T) = f(x)$.

(1) Si f possède une limite finie en $+\infty$, montrer que f est constante.
(2) Si f est continue et non constante, montrer que f admet une plus petite période (indication : considérer l'ensemble E des périodes de f, et montrer que la borne inférieure de E appartient à E).

(3) Si f est continue, montrer que f est bornée et atteint ses bornes.

Correction :

(1) Supposons que $\lim_{+\infty} f = \ell \in \mathbb{R}$. Soient $x \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon > 0$. Alors il existe $A \in \mathbb{R}$, tel que pour tout $y \geq A$, on ait $|f(y) - \ell| < \varepsilon$. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $x + nT \geq A$. On a donc
$$f(x) = f(x + nT) \in]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[$$
Ceci étant vrai pour tout $\varepsilon > 0$, on obtient $f(x) = \ell$. Donc f est constante.

(2) On note donc E l'ensemble des périodes strictement positives. Soit $T = \inf(E)$. Il existe donc une suite (T_n) d'éléments de E telle que $T_n \longrightarrow T$. On a donc pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}$, $f(x+T_n) = f(x)$. Par continuité de f, on obtient
$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x + T) = f(x).$$
Montrons que T est strictement positif. Si ce n'est pas le cas, fixons $x > 0$ tel que $f(x) \neq f(0)$. Par continuité de f, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $y \in]x - \eta, x + \eta[$, $f(y) \neq f(0)$. Comme (T_n) tend vers 0, il existe un entier N tel que $0 < T_N < \eta$. Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que
$$kT_N \leq x - \eta \text{ et } (k + 1)T_N > x - \eta.$$
Il suffit de prendre pour k la partie entière de $\frac{x-\eta}{T_N}$. On a alors $(k+1)T_N \in]x - \eta, x + \eta[$ car $0 < T_N < \eta$. Mais comme T_N est une période de F on a
$$f(0) = f((k + 1)T_n) \neq f(0)$$
ce qui est absurde. Donc $T > 0$ et $T \in E$.

(3) Soit T une période de f. Alors $f(\mathbb{R}) = f([0, T])$. Comme f est continue et $[0, T]$ est compact, f est bornée et atteint ses bornes sur $[0, T]$. Cela reste donc le cas sur $\mathbb{R}$.

Exercice 11.

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue en 0 telle que pour chaque $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = f(2x)$. Montrer que f est constante.

Correction : Soit $x \in \mathbb{R}$. On a $f(x) = f(x/2)$, et par induction sur n on a
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \; f(x) = f(x/2^n).$$
Or, $x/2^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, et f est continue en 0, donc
$$f(x) = f(x/2^n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(0).$$
Donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f(x) = f(0)$, et donc f est constante.

Exercice 12.

Soient $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues. On pose pour tout $x \in \mathbb{R}$, $h(x) := \max\{f(x), g(x)\}$. Montrer que $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue.

Correction : On a, pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$\max\{f(x), g(x)\} = \frac{f(x) + g(x)}{2} + \frac{|f(x) - g(x)|}{2}.$$
On en déduit que h est continue comme somme de produits de compostions de fonctions continues (car $x \longmapsto |x|$ est continue).

Exercice 13. Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, telle que pour tout $x \in I$, $f(x)^2 = 1$. Montrer que $f = 1$ ou $f = -1$.

Correction : Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a forcément $f(x) = 1$ ou -1. Supposons le contraire qu'il existe x et $y \in \mathbb{R}$, tels que $f(x) = 1$ et $f(x) = -1$. Comme f est continue, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe z tel que $f(z) = 0$. Mais dans ce cas $f(z)^2 = 0 \neq 1$, ce qui est impossible. Donc on a $f = 1$ ou $f = -1$.

Exercice 14. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction uniformément continue. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $g(x) := \sup_{t\in[x,x+1]} f(t)$. Montrer que g est continue.
Est-ce que cela reste vrai si f est seulement supposée continue ?

Correction : Fixons $\varepsilon > 0$. Comme f est uniformément continue, il existe $\eta > 0$ tel que

$$\forall x, y \in \mathbb{R},\ |x - y| < \eta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Soit x, $y \in \mathbb{R}$, $x \leq y$ et $|x - y| < \eta$. Comme $[y, y + 1]$ est compact, il existe $y_0 \in [y, y + 1]$ tel que $g(y) = \sup_{t\in[y,y+1]} f(t) = f(y_0)$. Si $y_0 \in [x, x + 1]$, alors $g(y) \leq \sup_{t\in[x,x+1]} f(t) = g(x)$. Si $y_0 \in [x + 1, y + 1]$, $|y_0 - (x + 1)| < \eta$, donc $f(y_0) < f(x + 1) + \varepsilon \leq \sup_{t\in[x,x+1]} f(t) + \varepsilon = g(x) + \varepsilon$. On a donc

$$g(y) < g(x) + \varepsilon.$$

Par symétrie on a aussi $g(x) < g(y) + \varepsilon$, donc $|g(x) - g(x)| < \varepsilon$. La fonction g est donc continue, et même uniformément continue.

Si f est seulement supposée continue, soit $x \in \mathbb{R}$. La fonction est f est alors uniformément continue sur $[x - 2, x + 2]$. Pour $\varepsilon > 0$, il existe donc $\eta > 0$ (qu'on peut supposer strictement inférieur à 1) tel que

$$\forall y, z \in [x - 2, x + 2],\ |y - z| < \eta \Longrightarrow |f(y) - f(z)| < \varepsilon.$$

Finalement, on reprend l'argument précédent pour montrer que f est continue en x.

Exercice 15. Soit $f : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue possédant une limite $l \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ en $+\infty$. Montrer que f prend toutes les valeurs entre $f(0)$ et ℓ (ℓ étant exclu).

Correction : si $f(0) = \ell$ il n'y a rien à montrer. Supposons $f(0) > \ell$ (le cas $f(0) < \ell$ sera identique). Soit $y \in]\ell, f(0)]$. Comme $\lim_{+\infty} f = \ell$, il existe $A \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall x \geq A, |f(x) - \ell| < y - \ell.$$

La restriction de f à l'intervalle $[0, A]$ étant continue, et comme $f(A) < y \leq f(0)$, il existe $x \in [0, A[$ tel que $f(x) = y$.

Exercice 16.

(1) Soit $f : [0, 1] \longrightarrow [0, 1]$ continue. Montrer que f admet un point fixe, c'est-à-dire qu'il existe $x \in [0, 1]$ tel que $f(x) = x$.
(2) Soient f, $g : [0, 1] \longrightarrow [0, 1]$ continues telles que $f \circ g = g \circ f$. Montrer qu'il existe $x \in [0, 1]$ tel que $f(x) = g(x)$. (Indication : on étudiera l'ensemble des points fixes de f).

Correction : Posons, pour tout $x \in [0,1]$, $g(x) := f(x) - x$. Alors g est continue, $g(0) = f(0) \geq 0$, $g(1) = f(1) - 1 \leq 0$, donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $x \in [0,1]$ tel que $g(x) = 0$. C'est-à-dire $f(x) = x$.

Dans le second cas, raisonnons par l'absurde et supposons que pour tout x, $g(x) \neq f(x)$. Dans ce cas on peut supposer que la fonction $g - f$ est de signe constant. Par exemple, $\forall x \in [0,1]$, $g(x) - f(x) > 0$. On pose $E := \{x \in [0,1] \mid f(x) = x\}$. Si $x \in E$, on a

$$f(g(x)) = g(f(x)) = g(x)$$

donc $g(x) \in E$. D'autre part, $\sup(E) \in E$ (il suffit de prendre une suite (x_n) de points de E qui convergent vers $\sup(E)$, par continuité de f, on a que $f(\sup(E)) = \sup(E)$). On a alors

$$g(\sup(E)) > f(\sup(E)) = \sup(E)$$

mais $g(\sup(E)) \in E$. Ceci est contradictoire. On en déduit donc que $g - f$ ne peut pas être toujours strictement positif. Par symétrie, $g - f$ ne peut pas toujours être de signe négatif. Donc $g - f$ s'annule forcément en un point d'après le théorème des valeurs inétermédiaires

Exercice 17. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue et supposons qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ avec $f \circ f(a) = a$. Est-ce que f admet un point fixe ? (Indication : étudier la fonction $x \longmapsto f(x) - x$ entre a et $f(a)$).

Correction : Posons, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = f(x) - x$. On a

$$g(f(a)) = f(f(a)) - f(a) = a - f(a) = -g(a).$$

Comme g est continue, le théorème des valeurs intermédiaires montre l'existence de b entre a et $f(a)$ tel que $g(b) = 0$, c'est-à-dire $f(b) = b$.