

1. PROPRIÉTÉS DE \mathbb{R} , QUANTIFICATEURS...

Exercice 5. Soient A et B deux parties non vides et bornées de \mathbb{R} . On note $A + B = \{a + b \mid (a, b) \in A \times B\}$. Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

- (1) $A \subset B \implies \sup(A) \leq \sup(B)$.

Vrai : Si M est un majorant de B , alors : $\forall x \in B, x \leq M$. Comme $A \subset B$, on a : $\forall x \in A, x \leq M$. Donc M est un majorant de A . Donc l'ensemble des majorants de B est inclus dans l'ensemble des majorants de A . Donc le plus petit majorant de B est un majorant de A , et est donc plus grand que $\sup(A)$. C'est-à-dire $\sup(B) \geq \sup(A)$.

- (2) $A \subset B \implies \inf(A) \leq \sup(B)$

Faux : si $A = \{0\}$ et $B =]-1, 0]$, on a $\inf(A) = 0 > -1 = \inf(B)$.

- (3) $\sup(A \cup B) = \max\{\sup(A), \sup(B)\}$

Vrai : Comme $A \subset A \cup B$ et $B \subset A \cup B$, on a $\sup(A), \sup(B) \leq \sup(A \cup B)$, d'après le (1). Donc $\sup(A \cup B) \geq \max\{\sup(A), \sup(B)\}$. Inversement, si $\sup(A \cup B) > \max\{\sup(A), \sup(B)\}$, il existe $x \in A \cup B$ tel que

$$\sup(A \cup B) \geq x > \max\{\sup(A), \sup(B)\}$$

Comme $x \in A \cup B$, $x \in A$ ou $x \in B$. Si $x \in A$, on obtient $x > \sup(A)$ ce qui est absurde. Si $x \in B$, on obtient aussi une contradiction. Cela montre l'égalité.

- (4) $\sup(A) + \sup(B)$ est un majorant de $A + B$

Vrai : On a

$$\forall a \in A, a \leq \sup(A), \quad \forall b \in B, b \leq \sup(B)$$

Donc $\forall x \in A + B, x \leq \sup(A) + \sup(B)$. Donc $\sup(A) + \sup(B)$ est un majorant de $A + B$.

- (5) $\sup(A + B) < \sup(A) + \sup(B)$

Faux : supposons que ce soit le cas. Fixons

$$\varepsilon = \frac{1}{2}(\sup(A) + \sup(B) - \sup(A + B)) > 0.$$

Par définition de la borne supérieure, il existe $a \in A$ et $b \in B$ tels que

$$\sup(A) - \varepsilon < a, \quad \sup(B) - \varepsilon < b.$$

On a donc $a + b > \sup(A) + \sup(B) - 2\varepsilon$. D'où $a + b > \sup(A + B)$ ce qui est absurde.

- (6) $\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B)$

Vrai : d'après le point précédent, on a $\sup(A + B) \geq \sup(A) + \sup(B)$. Supposons que cette inégalité est stricte. Il existe donc $x \in A + B$ tel que

$$\sup(A + B) \geq x > \sup(A) + \sup(B).$$

On peut écrire $x = a + b$ avec $a \in A$ et $b \in B$. On a alors $a > \sup(A)$ ou $b > \sup(B)$, ce qui est absurde. L'inégalité n'est donc pas stricte. C'est donc une égalité.

- (7) $\sup(-A) = -\inf(A)$

Vrai : Soit $M = \sup(-A)$. Donc, pour tout $x \in A$, $-x \leq M$. Donc, pour tout $x \in A$, $x \geq -M$. Donc $-M$ est un minorant de A et $-M \leq \inf(A)$. Donc $\sup(-A) \geq -\inf(A)$.

Inversement, pour tout $x \in A$, on a $x \geq \inf(A)$. Donc pour tout $x \in A$, $-x \leq -\inf(A)$. Donc $-\inf(A)$ est un majorant de $-A$. On a donc $-\inf(A) \geq \sup(-A)$. Cela prouve l'égalité.

Exercice 6. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ croissante, telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f \circ f(x) = x$. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x$.

Correction : Supposons qu'il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) \neq x$. Considérons deux cas :

- si $x < f(x)$, on a (f étant croissante) $f(x) \leq f \circ f(x)$. Mais par hypothèse $f \circ f(x) = x$, ce qui est absurde.

- si $x > f(x)$, on obtient $f(x) \geq f \circ f(x) = x$, ce qui est à nouveau une absurdité. Donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x$.

Exercice 7. Soit $f :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ croissante telle que

$$g : \begin{array}{ccc}]0, +\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{f(x)}{x} \end{array}$$

soit décroissante. Montrer que f est continue.

Correction : La fonction f est croissante, elle admet donc des limites à droite et à gauche en tout point. En effet, si f n'admet pas de limite à gauche en un point $a \in]0, +\infty[$, il existe une suite (x_n) de $]0, +\infty[$, avec $x_n < a$ pour tout n , qui converge avec a , mais telle que $f(x_n)$ ne converge pas. On peut même supposer que (x_n) est croissante en considérant une suite extraite de (x_n) . Mais dans ce cas la suite $(f(x_n))$ est croissante (car f est croissante) et majorée par $f(a)$ (car f est croissante et $x_n < a$ pour tout n). On obtient donc une contradiction, puisque toute suite croissante et majorée converge. Le même raisonnement s'applique pour les limites à droite.

De plus comme f est croissante, on a $\lim_{a^-} f \leq f(a) \leq \lim_{a^+} f$. En effet si (x_n) (respectivement (y_n)) est une suite croissante (resp. décroissante) qui converge vers a , on obtient

$$\forall n \in \mathbb{N}, f(x_n) \leq f(a) \leq f(y_n).$$

On obtient donc l'inégalité voulue en passant à la limite.

Il nous suffit donc de montrer, que pour tout $a \in]0, +\infty[$, on a $\lim_{a^-} f \geq \lim_{a^+} f$. Ceci prouvera alors que $\lim_a f$ existe et vaut $f(a)$.

Comme pour f , la fonction g admet des limites à gauche et à droite en tout point $a \in]0, +\infty[$. De plus, pour tout $a > 0$, on a

$$\frac{1}{a} \lim_{a^-} f = \lim_{a^-} g \geq \lim_{a^+} g = \frac{1}{a} \lim_{a^+} f,$$

l'inégalité du milieu provenant du fait que g est décroissante. Ceci montre bien que $\lim_{a^-} f \geq \lim_{a^+} f$.

Exercice 8. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ croissante. On note

$$E := \{g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ croissante} \mid g \leq f\}.$$

On pose, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\tilde{f}(x) = \sup\{g(x) \mid g \in E\}$.

- (1) Montrer que $\tilde{f} \in E$.
- (2) Montrer que \tilde{f} admet des limites à droite et à gauche en tout point.
- (3) On suppose que f est continue. Montrer alors que \tilde{f} est continue. (Indication : si $\lim_{x^+} \tilde{f} \neq \lim_{x^-} \tilde{f}$, montrer que l'on peut construire une fonction de E supérieure à \tilde{f}).

Correction :

- (1) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, et pour tout $g(x) \in E$, on a $g(x) \leq f(x)$. Donc $\tilde{f}(x) \leq f(x)$.

Soient $x < y$. Pour tout $g \in E$, on a $g(x) \leq g(y)$, car les fonctions de E sont croissantes. On a donc $\tilde{f}(x) \leq \tilde{f}(y)$, i.e. f est croissante. Donc $\tilde{f} \in E$.

- (2) Comme \tilde{f} est croissante, \tilde{f} admet des limites à droite et à gauche en tout point.
- (3) Supposons que \tilde{f} n'est pas continue. Donc il existe x tel que $\lim_{x^+} \tilde{f} > \lim_{x^-} \tilde{f}$. On a, pour $y > x$, $f(y) \geq \tilde{f}(y)$. En passant à la limite on obtient alors (par continuité de f) : $f(x) \geq \lim_{x^+} \tilde{f}$. Par continuité de f ,

$$\exists \eta > 0, \forall y \in \mathbb{R}, x - \eta < y < x \implies |f(y) - f(x)| < \frac{\lim_{x^+} \tilde{f} - \lim_{x^-} \tilde{f}}{2}.$$

En particulier, pour $y \in]x - \eta, x[$, on a $f(y) \geq \frac{\lim_{x^+} \tilde{f} + \lim_{x^-} \tilde{f}}{2} > \lim_{x^-} \tilde{f}$.
On définit alors la fonction g de la manière suivante :

$$\begin{cases} \forall y \geq x, & g(y) = \tilde{f}(y) \\ \forall y \leq x - \eta, & g(y) = \tilde{f}(y) \\ \forall y \in]x - \eta, x[, & g(y) = \frac{\lim_{x^+} \tilde{f} + \lim_{x^-} \tilde{f}}{2} \end{cases}$$

On obtient donc $g(y) \leq f(y)$ pour tout y , et g est croissante. Donc $g \in E$.
Mais on a, pour $y \in]x - \eta, x[$, $g(y) > \lim_{x^-} \tilde{f} \geq \tilde{f}(y)$. Cela contredit la définition de \tilde{f} . Donc \tilde{f} est continue.

Exercice 9. Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(a) = f(b)$. Montrer que la fonction $g(t) = f(t + \frac{b-a}{2}) - f(t)$ s'annule en au moins un point de $[a, \frac{a+b}{2}]$.

Application : une personne parcourt 4 km en 1 heure. Montrer qu'il existe un intervalle de 30 mn pendant lequel elle parcourt exactement 2 km.

Correction : La fonction g est continue car f est continue. De plus on a

$$g(a) = f\left(\frac{a+b}{2}\right) - f(a) = -\left(f(a) - f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right) = -\left(f(b) - f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right) = -g\left(\frac{a+b}{2}\right).$$

Donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $c \in [a, \frac{a+b}{2}]$ tel que $g(c) = 0$

On applique cela au problème de la manière suivante : on note $d(t)$ la distance parcourue en kilomètres au bout du temps t (t est exprimé en heures) (ici $a = 0$ et $b = 1$), et on pose $f(t) = d(t) - 4t$. On a alors $f(0) = f(1) = 0$. La fonction g s'annule donc en un point c , c'est-à-dire qu'il existe c tel que

$$d\left(c + \frac{1}{2}\right) - d(c) = 2.$$

Cela signifie qu'entre les temps c et $c + \frac{1}{2}$, le coureur a parcouru exactement 2 kilomètres.

Exercice 10.

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $T > 0$. On suppose que f est T -périodique, c'est-à-dire que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x + T) = f(x)$.

- (1) Si f possède une limite finie en $+\infty$, montrer que f est constante.
- (2) Si f est continue et non constante, montrer que f admet une plus petite période (indication : considérer l'ensemble E des périodes de f , et montrer que la borne inférieure de E appartient à E).

- (3) Si f est continue, montrer que f est bornée et atteint ses bornes.

Correction :

- (1) Supposons que $\lim_{+\infty} f = \ell \in \mathbb{R}$. Soient $x \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon > 0$. Alors il existe $A \in \mathbb{R}$, tel que pour tout $y \geq A$, on ait $|f(y) - \ell| < \varepsilon$. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $x + nT \geq A$. On a donc

$$f(x) = f(x + nT) \in]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[$$

Ceci étant vrai pour tout $\varepsilon > 0$, on obtient $f(x) = \ell$. Donc f est constante.

- (2) On note donc E l'ensemble des périodes strictement positives. Soit $T = \inf(E)$. Il existe donc une suite (T_n) d'éléments de E telle que $T_n \rightarrow T$. On a donc pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}$, $f(x + T_n) = f(x)$. Par continuité de f , on obtient

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x + T) = f(x).$$

Montrons que T est strictement positif. Si ce n'est pas le cas, fixons $x > 0$ tel que $f(x) \neq f(0)$. Par continuité de f , il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $y \in]x - \eta, x + \eta[$, $f(y) \neq f(0)$. Comme (T_n) tend vers 0, il existe un entier N tel que $0 < T_N < \eta$. Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que

$$kT_N \leq x - \eta \text{ et } (k + 1)T_N > x - \eta.$$

Il suffit de prendre pour k la partie entière de $\frac{x - \eta}{T_N}$. On a alors $(k + 1)T_N \in]x - \eta, x + \eta[$ car $0 < T_N < \eta$. Mais comme T_N est une période de F on a

$$f(0) = f((k + 1)T_N) \neq f(0)$$

ce qui est absurde. Donc $T > 0$ et $T \in E$.

- (3) Soit T une période de f . Alors $f(\mathbb{R}) = f([0, T])$. Comme f est continue et $[0, T]$ est compact, f est bornée et atteint ses bornes sur $[0, T]$. Cela reste donc le cas sur \mathbb{R} .