Algèbre linéaire

Exercice 1. Soit $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire et E_1, E_2 deux sous-espaces vectoriels de E, F_1, F_2 deux sous-espaces vectoriels de F. Que pouvez-vous-dire de $f(E_1 + E_2)$, $f(E_1 \cap E_2)$, $f^{-1}(F_1 + F_2)$, $f^{-1}(F_1 \cap F_2)$?

Exercice 2. Soient E, F deux espaces vectoriels et $f : E \longrightarrow F$ linéaire.

1) Montrer que f est injective si et seulement si f transforme toute famille libre de E en une famille libre de F.
2) Montrer que f est surjective si et seulement s'il existe une famille génératrice de E transformée par f en une famille génératrice de F.

Exercice 3. Soit E un espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que pour tout $x \in E$, la famille $(x, f(x))$ est liée.

1) Montrer que pour $x \in 0$, il existe un unique scalaire λ_x tel que $f(x) = \lambda_x x$.
2) Soient x, $y \in E$ linéairement indépendants. Comparer λ_x, λ_{x+y} et λ_y.
3) Montrer que f est une homothétie.

Exercice 4. On considère les vecteurs de $\mathbb{K}^3$, où $\mathbb{K}$ est un corps : $a = (1, 2, 1)$, $b = (1, 3, 2)$, $c = (1, 1, 0)$, $d = (3, 8, 5)$.
Soient $F = \operatorname{Vect}(a, b)$ et $G = \operatorname{Vect}(c, d)$. Comparer F et G.

Exercice 5. Montrer que dans $\mathbb{R}^3$, les trois vecteurs $a = (1, 0, 1)$, $b = (-1, -1, 2)$ et $c = (-2, 1, -2)$ forment une base, et calculer les coordonnées dans cette base d'un vecteur $X = (x, y, z)$.

Exercice 6. Dans les cas qui suivent, on considère un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E et une famille $\mathcal{F}$ de vecteurs de E. Étudier si les vecteurs de $\mathcal{F}$ sont libres.

(1) $E = \{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\}$, $\mathcal{F} = (\sin, \cos)$.
(2) $E = \{f : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}\}$, $\mathcal{F} = (f_a, x \longmapsto x^a)$, $a \in \mathbb{R}$.
(3) $E = \{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\}$, $\mathcal{F} = (g_a : x \longmapsto |x - a|)$, $a \in \mathbb{R}$.

Exercice 7. Soit E un espace vectoriel, $(x_1, \dots, x_n)$ une famille libre de vecteurs de E, et α_1, $\dots$, α_n des scalaires.
On pose $y = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i$ et $x'_i = x_i + y$ pour tout i. Étudier à quelle condition la famille $(x'_1, \dots, x'_n)$ est libre.

Exercice 8. Soient F, G, H trois sous-espaces d'un espace vectoriel E. Comparer $F \cap (G + (F \cap H))$ et $(F \cap G) + (F \cap H)$.

Exercice 9. Soientt $E = \mathbb{R}_3[X]$, $F = \{P \in E \mid P(0) = P(1) = P(2) = 0\}$, $G = \{P \in E \mid P(1) = P(2) = P(3) = 0\}$, et $H = \{P \in E \mid P(X) = P(-X)\}$.

(1) Montrer que $F \oplus G = \{P \in E \mid P(1) = P(2) = 0\}$.
(2) Montrer que $F \oplus G \oplus H = E$.

Exercice 10. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel non nul, et F et G des sous-espaces vectoriels stricts de E. Montrer que $E \neq F \cup G$.

Exercice 11. On considère $\mathbb{R}$ comme un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel.

(1) Montrer que la famille $(1, \sqrt{2}, \sqrt{3})$ est libre.
(2) Montrer que la famille $(\ln p)$ où p décrit l'ensemble des nombres premiers positifs est libre.

Exercice 12. Soit E un espace vectoriel et f, $g \in \mathcal{L}(E)$.
Montrer que $f(\operatorname{Ker}(g \circ f)) = \operatorname{Ker} g \cap \operatorname{Im} f$.

Exercice 13. Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

(1) $\operatorname{Ker} f^2 = \operatorname{Ker} f$.
(2) $\operatorname{Im} f^2 = \operatorname{Im} f$.
(3) $\operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f = E$.
(4) $\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f = \{0\}$.
(5) $\operatorname{Ker} f + \operatorname{Im} f = E$.

Exercice 14. Soient E un espace vectoriel de dimension finie et $f,\, g \in \mathcal{L}(E)$ tels que $\operatorname{Ker} f + \operatorname{Ker} g = \operatorname{Im} f + \operatorname{Im} g = E$. Montrer que les sommes sont directes.

Exercice 15. Soient $\mathbb{K}$ un corps, $A \in M_{3,2}(\mathbb{K})$, $B \in M_{2,2}(\mathbb{K})$, $C \in M_{2,3}(\mathbb{K})$ telles que

$$ABC = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & x & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Trouver x.

Exercice 16. Calculer les déterminants suivants :

$$\begin{vmatrix} x & a & b & x \\ b & x & x & a \\ x & b & a & x \\ a & x & x & b \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ a^2+b^2 & b^2+c^2 & c^2+a^2 \\ a^3+b^3 & b^3+c^3 & c^3+a^3 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a^2 & b^2 & ab \\ b^2 & ab & a^2 \\ ab & a^2 & b^2 \end{vmatrix}.$$

Exercice 17. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$.

(1) Montrer que l'équation en X : $AX = B$, $X,\, B \in M_{3,n}(\mathbb{R})$, a des solutions si et seulement si les colonnes de B sont des progressions arithmétiques (traiter d'abord le cas $n = 1$).
(2) Résoudre $AX = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 4 & 5 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$.

Exercice 18. Soient E un espace vectoriel de dimension finie et $f,\, g \in \mathcal{L}(E)$. Établir :

(1) $\dim \operatorname{Ker}(f \circ g) \leq \dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Ker} g$.
(2) $\dim(\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} g) = \operatorname{rang}(f) - \operatorname{rang}(g \circ f)$.
(3) $\operatorname{rang}(f) + \operatorname{rang}(g) - \dim E \leq \operatorname{rang}(f \circ g) \leq \min(\operatorname{rang}(f), \operatorname{rang}(g))$.

Exercice 19. Soient E, F deux espaces vectoriels de dimensions finies et $u,\, v \in \mathcal{L}(E, F)$.
Montrer que $\dim(\operatorname{Ker}(u+v)) \leq \dim(\operatorname{Ker} \cap \operatorname{Ker} v) + \dim(\operatorname{Im} \cap \operatorname{Im} v)$.
(Indication : considérer $w = u_{|\operatorname{Ker}(u+v)}$ et appliquer le théorème du rang).