Algèbre linéaire

• **Exercice 1.** Soit $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire et E_1, E_2 deux sous-espaces vectoriels de E, F_1, F_2 deux sous-espaces vectoriels de F. Que pouvez-vous-dire de $f(E_1+E_2)$, $f(E_1 \cap E_2)$, $f^{-1}(F_1+F_2)$, $f^{-1}(F_1 \cap F_2)$?

Correction : • On a $f(E_1+E_2) = f(E_1)+f(E_2)$. En effet, on a, pour tout $y \in F$:

$$\begin{aligned} & y \in f(E_1+E_2) \\ \Longleftrightarrow\ & \exists e_1 \in E_1, \exists e_2 \in E_2 \text{ tels que } y = f(e_1+e_2) \\ \Longleftrightarrow\ & \exists e_1 \in E_1, \exists e_2 \in E_2 \text{ tels que } y = f(e_1)+f(e_2) \\ \Longleftrightarrow\ & y \in f(E_1)+f(E_2). \end{aligned}$$

• On a $f(E_1 \cap E_2) \subset f(E_1) \cap f(E_2)$ car si $y \in f(E_1 \cap E_2)$ alors il existe $e \in E_1 \cap E_2$ tel que $y = f(e)$, et donc $y \in f(E_1) \cap f(E_2)$.
L'inclusion inverse n'est pas vraie en général. Par exemple si $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ est l'application linéaire dont la matrice dans la base canonique est $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, E_1 est la droite engendrée par $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et E_2 la droite engendrée par $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, on a $E_1 \cap E_2 = (0)$, et $f(E_1) = f(E_2) = E_1 \neq (0)$.
• On a facilement $f^{-1}(F_1)+f^{-1}(F_2) \subset f^{-1}(F_1+F_2)$, car si $x \in f^{-1}(F_1)+f^{-1}(F_2)$, il existe $e_1 \in E$ et $e_2 \in E$ tels que $x = e_1+e_2$ et $f(e_1) \in F_1$, $f(e_2) \in F_2$, et donc $f(x) = F_1+F_2$.
Mais l'inclusion inverse n'est pas vraie en général. En effet, si l'on considère l'application linéaire $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dont la matrice dans la base canonique est $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, F_1 est la droite engendrée par $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et F_2 la droite engendrée par $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, on a $f^{-1}(F_1+F_2) = f^{-1}(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R}^2$ et $f^{-1}(F_1)+f^{-1}(F_2) = (0)$.
• On a $f^{-1}(F_1 \cap F_2) = f^{-1}(F_1) \cap f^{-1}(F_2)$ comme cela est le cas pour toute application (par forcément linéaire).

• **Exercice 2.** Soient E, F deux espaces vectoriels et $f : E \longrightarrow F$ linéaire.

1) Montrer que f est injective si et seulement si f transforme toute famille libre de E en une famille libre de F.
2) Montrer que f est surjective si et seulement s'il existe une famille génératrice de E transformée par f en une famille génératrice de F.

Correction :

1) Supposons que f est injective et soit $\{e_i\}_{i \in I}$ une famille libre de vecteurs de E (famille pas forcément finie). On veut montrer que la famille $\{f(e_i)\}_{i \in I}$ est libre. Soient $\lambda_i \in \mathbb{K}$ des scalaires presque tous nuls (c'est-à-dire qu'ils sont tous nuls sauf éventuellement un nombre fini d'entre eux) tels que $\sum_{i \in I} \lambda_i f(e_i) = 0$. Or
$$\sum_{i \in I} \lambda_i f(e_i) = f\left(\sum_{i \in I} \lambda_i e_i\right)$$
car la somme est finie (tous les λ_i sont nuls sauf un nombre éventuellement fini). Donc $\sum_{i \in I} \lambda_i e_i$ est dans le noyau de f. Cette somme est donc nulle car f est injective. Comme la famille $\{e_i\}_{i \in I}$ est libre, cela implique que tous les λ_i sont nuls. La famille $\{f(e_i)\}_{i \in I}$ est donc libre.
Nous allons montrer la réciproque par contraposée : supposons que f n'est pas injective. Il existe donc $e \in E$, $e \neq 0$ tel que $f(e) = 0$. La famille formée de l'unique élément e est donc libre (car $e \neq 0$) mais la famille formée de

l'unique élément $f(e)$ n'est pas libre (car $f(e) = 0$). La réciproque est donc vraie.

2) Supposons qu'il existe une famille génératrice de E transformée par f en une famille génératrice de F. Notons la $\{e_i\}_{i\in I}$. Montrons que f est surjective. Soit $y \in F$. Comme la famille $\{f(e_i)\}_{i\in I}$ engendre F, il existe des scalaire λ_i (presque tous nuls) tels que $y = \sum_{i\in I} \lambda_i f(e_i)$. Posons $x = \sum_{i\in I} \lambda_i e_i$. Comme la somme est finie, nous avons
$$f(x) = f\big(\sum_{i\in I} \lambda_i e_i\big) = \sum_{i\in I} \lambda_i f(e_i) = y.$$
Donc f est surjective.
Pour la réciproque, supposons que f est surjective. Soit $\{y_i\}_{i\in I}$ une famille génératrice de F. Comme f est surjective, pour tout $i \in I$, il existe $e_i \in E$ tel que $f(e_i) = y_i$. On peut compléter cette famille $\{e_i\}_{i\in I}$ en une famille génératrice de E, que l'on note $\{e_i\}_{i\in J}$ où J contient I. La famille $\{f(e_i)\}_{i\in J}$ est alors une famille génératrice de F puisque la sous-famille $\{f(e_i)\}_{i\in I}$ est déjà génératrice de F. La réciproque est donc vraie.

• **Exercice 3.** Soit E un espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que pour tout $x \in E$, la famille $(x, f(x))$ est liée.

1) Montrer que pour $x \neq 0$, il existe un unique scalaire λ_x tel que $f(x) = \lambda_x x$.
2) Soient x, $y \in E$ linéairement indépendants. Comparer λ_x, λ_{x+y} et λ_y.
3) Montrer que f est une homothétie.

Correction :

1) Soit $x \in E$. Comme $(x, f(x))$ est liée, il existe λ et $\mu \in \mathbb{K}$, non nuls simultanément, tels que $\lambda x + \mu f(x) = 0$. Si $\mu = 0$, on a alors $\lambda x = 0$ ce qui implique que $x = 0$ ou $\lambda = 0$. Comme $\lambda \neq 0$, forcément $x = 0$. Donc si $x \neq 0$, $\mu \neq 0$ et donc $f(x) = -\frac{\lambda}{\mu}x$. Il existe donc λ_x tel que $f(x) = \lambda_x x$.
Supposons qu'il existe un autre scalaire λ tel que $f(x) = \lambda x$, pour $x \neq 0$. On a alors $(\lambda - \lambda_x)x = 0$ et donc $\lambda - \lambda_x = 0$ car $x \neq 0$. Cela montre l'unicité de λ_x.
2) Soient x, $y \in E$ linéairement indépendants. En particulier x, y et $x + y$ sont non nuls, donc λ_x, λ_y et λ_{x+y} sont bien définis. On a alors
$$\lambda_{x+y}(x + y) = f(x + y) = f(x) + f(y) = \lambda_x x + \lambda_y y.$$
Comme x et y sont linéairement indépendants, on a $\lambda_{x+y} = \lambda_x = \lambda_y$.
3) Soit $x \neq 0$ et $\lambda \in \mathbb{K}^*$. On a alors
$$\lambda_{\lambda x}\lambda x = f(\lambda x) = \lambda f(x) = \lambda\lambda_x x$$
donc $\lambda_{\lambda x} = \lambda_x$. On en déduit qu'il existe un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que
$$\forall x \in E \setminus \{0\},\ f(x) = \lambda x.$$
Évidemment cette égalité est encore vraie pour $x = 0$. Donc f est l'homothétie de rapport λ.

• **Exercice 4.** On considère les vecteurs de $\mathbb{K}^3$, où $\mathbb{K}$ est un corps : $a = (1, 2, 1)$, $b = (1, 3, 2)$, $c = (1, 1, 0)$, $d = (3, 8, 5)$.
Soient $F = \mathrm{Vect}(a, b)$ et $G = \mathrm{Vect}(c, d)$. Comparer F et G.

Correction : Il est clair que $\dim(F) = \dim(G) = 2$ car a et b ne sont pas colinéaires, et c et d non plus. Par ailleurs on a
$$c = 2a - b \text{ et } d = a + 2b$$
donc $G \subset F$. Par égalité des dimensions, cela implique que $F = G$.

• **Exercice 5.** Montrer que dans $\mathbb{R}^3$, les trois vecteurs $a = (1, 0, 1)$, $b = (-1, -1, 2)$ et $c = (-2, 1, -2)$ forment une base, et calculer les coordonnées dans cette base d'un vecteur $X = (x, y, z)$.

Correction : Il suffit de montrer que ces 3 vecteurs engendrent $\mathbb{R}^3$, car une famille génératrice de 3 vecteurs dans un espace vectoriel de dimension 3 est nécessairement libre. Il suffit donc de montrer que l'application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, dont la matrice dans la base canonique est $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$, est surjective (puisque l'image de f est engendrée par les vecteurs colonnes de A qui sont les vecteurs a, b et c). Or cette application linéaire est surjective si et seulement si elle est bijective, car les dimensions des espaces de départ et d'arrivée sont les mêmes. Or le déterminant de A vaut 1, donc f est bijective. Donc les vecteurs a, b et c forment une base de $\mathbb{R}^3$.

• **Exercice 6.** Dans les cas qui suivent, on considère un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E et une famille $\mathcal{F}$ de vecteurs de E. Étudier si les vecteurs de $\mathcal{F}$ sont libres.

(1) $E = \{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\}$, $\mathcal{F} = (\sin, \cos)$.
(2) $E = \{f : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}\}$, $\mathcal{F} = (f_a, x \longmapsto x^a)$, $a \in \mathbb{R}$.
(3) $E = \{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\}$, $\mathcal{F} = (g_a : x \longmapsto |x - a|)$, $a \in \mathbb{R}$.

Correction :

(1) Soient λ et μ deux réels tels que
$$\lambda \sin + \mu \cos = 0,$$
c'est-à-dire que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\lambda \sin(x) + \mu \cos(x) = 0$. Pour $x = 0$, on obtient $\mu = 0$, pour $x = \pi/2$, on obtient $\lambda = 0$. La famille est donc libre.

(2) Soient $\{\lambda_a\}_{a\in\mathbb{R}}$ une famille presque toute nulle telle que
$$\sum_{a\in\mathbb{R}} \lambda_a f_a = 0.$$
L'ensemble $\{a \in \mathbb{R} \mid \lambda_a \neq 0\}$ est fini, il est donc inclus dans un ensemble fini de réels de la forme $\{a_1, \ldots, a_n\}$, avec $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$. On a alors
$$\forall x > 0,\ \sum_{i=1}^{n} \lambda_{a_i} x^{a_i} = 0.$$
On a donc
$$\forall x > 0,\ x^{a_n} \sum_{i=1}^{n} \lambda_{a_i} x^{a_i - a_n} = 0$$
Or $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_{a_i} x^{a_i - a_n} \xrightarrow[x\to+\infty]{} \lambda_{a_n}$. On en déduit que $\lambda_n = 0$. Par récurrence, on obtient que tous les λ_{a_i} sont nuls. La famille est donc libre.

(3) Soient $\{\lambda_a\}_{a\in\mathbb{R}}$ une famille presque toute nulle telle que
$$\sum_{a\in\mathbb{R}} \lambda_a g_a = 0.$$
Comme précédemment, on peut supposer que $\{a \in \mathbb{R} \mid \lambda_a \neq 0\} \subset \{a_1, \ldots, a_n\}$, avec $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$. Pour $x \in]a_j, a_{j+1}[$ on a donc
$$\sum_{i=1}^{j} \lambda_{a_i}(x - a_i) + \sum_{i=j+1}^{n} \lambda_{a_i}(a_i - x) = 0$$

Cela étant vrai pour tout $x \in]a_j, a_{j+1}[$, on en déduit que

$$\sum_{i=1}^{j} \lambda_{a_i} - \sum_{i=j+1}^{n} \lambda_{a_i} = 0 \text{ pour } j = 1, \dots, n-1.$$

De même, pour tout $x > a_n$ on a

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_{a_i}(x - a_i) = 0$$

donc $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_{a_i} = 0$. On a donc

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \cdots & \vdots & \vdots \\ -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_{a_1} \\ \lambda_{a_2} \\ \lambda_{a_3} \\ \vdots \\ \lambda_{a_n} \end{pmatrix} = 0$$

Or la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \cdots & \vdots & \vdots \\ -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible puisque son rang est n. En effet, en ajoutant la dernière colonne de cette matrice aux autres colonnes, on ne change pas le rang, et on obtient la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \cdots & \vdots & \vdots \\ -0 & -0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$ qui est inversible. On a donc $\lambda_{a_1} = \cdots = \lambda_{a_n} = 0$. Ceci prouve que la famille est libre.

• **Exercice 7.** Soit E un espace vectoriel, $(x_1, \dots, x_n)$ une famille libre de vecteurs de E, et $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ des scalaires.
On pose $y = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$ et $x'_i = x_i + y$ pour tout i. Étudier à quelle condition la famille $(x'_1, \dots, x'_n)$ est libre.

Correction : Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tels que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x'_i = 0$. On a alors

$$0 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x'_i = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (x_i + \sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j) = \sum_{k=1}^{n} (\lambda_k + \alpha_k \sum_{i=n}^{n} \lambda_i) x_k.$$

La famille $(x'_1, \dots, x'_n)$ est libre si et seulement si, pour tous $\lambda_i \in \mathbb{K}$ tels que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x'_i = 0$, on a $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$. La famille $(x_1, \dots, x_n)$ étant libre, on sait que $\lambda_k + \alpha_k \sum_{i=n}^{n} \lambda_i = 0$ pour tout k. La famille $(x'_1, \dots, x'_n)$ est libre si et seulement si, pour tous $\lambda_i \in \mathbb{K}$ tels que $\lambda_k + \alpha_k \sum_{i=n}^{n} \lambda_i = 0$ pour tout k, on a $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$.

En notant $A = \begin{pmatrix} 1+\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \cdots & \alpha_n \\ \alpha_1 & 1+\alpha_2 & \alpha_3 & \cdots & \alpha_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \cdots & \vdots \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \cdots & 1+\alpha_n \end{pmatrix}$, on a donc que la famille

$(x_1, \ldots, x'_n)$ est libre si et seulement si l'application linéaire de $f : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^n$, de matrice A dans la base canonique, est injective. La matrice étant carrée, cela revient à dire que son déterminant est non nul. Mais on a (en rajoutant à la première colonne la somme des autres colonnes) :

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1+\sum_{i=1}^n \alpha_i & \alpha_2 & \alpha_3 & \cdots & \alpha_n \\ 1+\sum_{i=1}^n \alpha_i & 1+\alpha_2 & \alpha_3 & \ldots & \alpha_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ldots & \vdots \\ 1+\sum_{i=1}^n \alpha_i & \alpha_2 & \alpha_3 & \cdots & 1+\alpha_n \end{vmatrix} =$$

$$= \big(1+\sum_{i=1}^n \alpha_i\big) \begin{vmatrix} 1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \cdots & \alpha_n \\ 1 & 1+\alpha_2 & \alpha_3 & \ldots & \alpha_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ldots & \vdots \\ 1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \cdots & 1+\alpha_n \end{vmatrix}$$

Et le déterminant de droite vaut $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ldots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$ en retranchant à la i-ème colonne (pour $i = 2, \ldots, n$) la première colonne). On obtient donc $\det(A) = 1 + \sum_{i=1}^n \alpha_i$. Donc la famille $(x'_1, \ldots, x'_n)$ est libre si et seulement $\sum_{i=1}^n \alpha_i \neq -1$.

• **Exercice 8.** Soient F, G, H trois sous-espaces d'un espace vectoriel E. Comparer $F \cap (G + (F \cap H))$ et $(F \cap G) + (F \cap H)$.

Correction : Montrons que ces deux espaces sont égaux.
Soit $x \in F \cap (G + (F \cap H))$. On peut donc écrire $x = g + y$ avec $g \in G$ et $y \in F \cap H$. Comme $x \in F$, et $y \in F$, on a $g = x - y \in F$, car F est un sous-espace vectoriel de E. Donc $g \in F \cap G$. On a donc $x \in (F \cap G) + (F \cap H)$.
Inversement, si $x \in (F \cap G) + (F \cap H)$, on peut écrire $x = y + z$ avec $y \in F \cap G$ et $z \in F \cap H$. On a donc $x \in F$ et $x = y + z \in G + F \cap H$. Donc $x \in F \cap (G + (F \cap H))$.
On a ainsi montré que ces deux sous-espaces sont les mêmes.

• **Exercice 9.** Soient $E = \mathbb{R}_3[X]$, $F = \{P \in E \mid P(0) = P(1) = P(2) = 0\}$, $G = \{P \in E \mid P(1) = P(2) = P(3) = 0\}$, et $H = \{P \in E \mid P(X) = P(-X)\}$.

(1) Montrer que $F \oplus G = \{P \in E \mid P(1) = P(2) = 0\}$.
(2) Montrer que $F \oplus G \oplus H = E$.

Correction : On va noter $V = \{P \in E \mid P(1) = P(2) = 0\}$.

(1) On a $F \subset V$ et $G \subset V$. Donc $F + G \subset V$. Montrons que la somme est directe. Soit $P \in F \cap G$. On a donc
$$P(0) = P(1) = P(2) = P(3) = 0.$$
Le polynôme P a donc au moins 4 racines, mais étant de degré inférieur ou égal à 3, $P = 0$. Donc la somme est directe. Il reste à montrer que $V \subset F \oplus G$.
Soit $P \in V$. Comme $P(1) = P(2) = 0$, P est divisible par $X - 1$ et $X - 2$. Comme $X - 1$ et $X - 2$ sont premiers entre eux, leur produit divise P. Donc $P = (X - 1)(X - 2)Q$ où Q est un polynôme de de degré ≤ 1. On peut donc écrire $Q = aX + b$ avec $a, b \in \mathbb{R}$. Donc
$$Q = aX + b = \left(a + \frac{b}{3}\right) X - \frac{b}{3}(X - 3).$$
En particulier P est une combinaison linéaire de $X(X - 1)(X - 2)$ et de $(X - 1)(X - 2)(X - 3)$. Ce premier polynôme appartient à F et le second à G. Donc $V \subset F \oplus G$, et $V = F \oplus G$.

(2) Montrons d'abord que H est en somme directe avec $F \oplus G$. Soit $P \in H \cap (F \oplus G) = H \cap V$. On a donc $P(X) = P(-X)$, c'est-à-dire que les coefficients des monômes de degrés impairs de P sont nuls. On peut donc écrire $P = a + bX^2$. Comme $P \in V$, on a
$$a + b = a + 4b = 0.$$
On en déduit alors que $a = b = 0$. Donc $P = 0$ et la somme est directe.
Maintenant, 1 et X^2 engendrent H et sont linéairement indépendants. Ils forment donc une base de H et $\dim(H) = 2$. D'un autre côté $X(X-1)(X-2) \in F$ et $(X-1)(X-2)(X-3) \in G$, donc $\dim(F)$, $\dim(G) \geq 1$. Ceci implique que $\dim(F \oplus G \oplus H) \geq 4$. Comme $\dim(E) = 4$, on a $F \oplus G \oplus H = E$.

• **Exercice 10.** Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel non nul, et F et G des sous-espaces vectoriels stricts de E. Montrer que $E \neq F \cup G$.

Correction : Nous allons montrer que si $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel de E alors $F \subset G$ ou $G \subset F$.
Supposons que $F \not\subset G$ et $G \not\subset F$. Soient $f \in F \setminus G$ et $g \in G \setminus F$. Alors $f + g \notin F$ et $f + g \notin G$ car F et G sont des sous-espaces vectoriels de E. Donc $f + g \notin F \cup G$ et $F \cup G$ n'est pas un sous-espace vectoriel de E.
Donc si $E = F \cup G$, forcément $F \subset G$ et $G \subset F$, et donc $E = F$ ou $E = G$. Par contraposée, si F et G sont des sous-espaces vectoriels stricts de E, alors $E \neq F \cup G$.

• **Exercice 11.** On considère $\mathbb{R}$ comme un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel.

(1) Montrer que la famille $(1, \sqrt{2}, \sqrt{3})$ est libre.
(2) Montrer que la famille $(\ln p)$ où p décrit l'ensemble des nombres premiers positifs est libre.

Correction :

(1) Soient x, y, $z \in \mathbb{Q}$ tels que
$$x + y\sqrt{2} + z\sqrt{3} = 0.$$
Tout d'abord, si $z = 0$, on obtient $x + y\sqrt{2} = 0$, et donc $x = y = 0$ car $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. De même si $y = 0$, on a $x = z = 0$ car $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$. Supposons donc que $z \neq 0$. On peut donc écrire
$$\sqrt{3} = u + v\sqrt{2}$$
avec u, $v \in \mathbb{Q}$. On a donc
$$(u + v\sqrt{2})^2 = 3$$
D'où
$$2uv\sqrt{2} = 3 - u^2 - 2v^2.$$
Comme $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, on a nécessairement $u = 0$ ou $v = 0$. Si $v = 0$, on obtient une contradiction car $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$. Si $u = 0$, on a $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \in \mathbb{Q}$. Si cela était possible, on pourrait écrire $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{a}{b}$ avec a, $b \in \mathbb{N}^*$ premiers entre eux. Mais dans ce cas nous aurions $3b^2 = 2a^2$, donc on pourrait écrire $b = 2c$, d'où $6c^2 = a^2$. Dans ce cas a serait divisible par 2, ce qui serait contradictoire avec le fait que a et b sont premiers entre eux. Donc $u \neq 0$ et on a alors une contradiction.
Donc on a forcément $z = 0$. Et donc $x = y = 0$. Ceci prouve que la famille $(1, \sqrt{2}, \sqrt{3})$ est libre sur $\mathbb{Q}$.

(2) Supposons que l'on a une combinaison linéaire des $\ln(p)$ qui soit nulle :
$$\frac{a_1}{b_1}\ln(p_1)+\cdots+\frac{a_n}{b_n}\ln(p_n)=0$$
où les p_i sont premiers distincts deux à deux et les a_i et b_i sont de entiers. En mettant toutes les fractions $\frac{a_i}{b_i}$ au même dénominateur, on peut supposer que les b_i sont tous égaux au même $b\in\mathbb{Z}^*$. On obtient alors $\ln\left(\prod_{i=1}^n p_i^{\frac{a_i}{b}}\right)=0$ et
$$\prod_{i=1}^n p_i^{\frac{a_i}{b}}=1.$$
Quite à réordonner les p_i, on peut supposer qu'il existe i_0 tel que $a_i\leq 0$ pour $i>i_0$ et $a_i\geq 0$ pour $i\leq i_0$. On obtient donc
$$\prod_{i=1}^{i_0} p_i^{a_i}=\prod_{i=i_0+1}^{n} p_i^{-a_i}.$$
Mais $\mathbb{Z}$ étant un anneau factoriel, toute décomposition d'un entier positif en produit de nombres premiers est unique. Donc on a $a_i=0$ pour tout i. Ceci montre que la famille $(\ln p)$ où p décrit l'ensemble des nombres premiers positifs est libre.

• **Exercice 12.** Soit E un espace vectoriel et $f,\ g\in\mathcal{L}(E)$.
Montrer que $f(\operatorname{Ker}(g\circ f))=\operatorname{Ker} g\cap\operatorname{Im} f$.

Correction : Considérons d'abord $y\in f(\operatorname{Ker}(g\circ f))$. On peut donc écrire $y=f(x)$ avec $x\in\operatorname{Ker}(g\circ f)$. En particulier $y\in\operatorname{Im}(f)$. De plus $g(y)=g\circ f(x)=0$, et $y\in\operatorname{Ker}(g)$. Ceci montre que $f(\operatorname{Ker}(g\circ f))\subset\operatorname{Ker} g\cap\operatorname{Im} f$.
Inversement, soit $y\in\operatorname{Ker} g\cap\operatorname{Im} f$. Il existe donc $x\in E$ tel que $y=f(x)$. De plus $g\circ f(x)=g(y)=0$, donc $x\in\operatorname{Ker}(g\circ f)$. Ceci prouve que $\operatorname{Ker} g\cap\operatorname{Im} f\subset f(\operatorname{Ker}(g\circ f))$.

• **Exercice 13.** Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $f\in\mathcal{L}(E)$. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :
(1) $\operatorname{Ker} f^2=\operatorname{Ker} f$.
(2) $\operatorname{Im} f^2=\operatorname{Im} f$.
(3) $\operatorname{Ker} f\oplus\operatorname{Im} f=E$.
(4) $\operatorname{Ker} f\cap\operatorname{Im} f=\{0\}$.
(5) $\operatorname{Ker} f+\operatorname{Im} f=E$.

Correction : On a immédiatement (3) $\Longrightarrow$ (4) et (3) $\Longrightarrow$ (5).
Le théorème du rang nous dit que $\dim(E)=\dim(\operatorname{Ker} f)+\dim(\operatorname{Im} f)$. Donc si (4) est vérifié, on a $\dim(\operatorname{Ker} f\oplus\operatorname{Im} f)=\dim(E)$ et donc $\operatorname{Ker} f\oplus\operatorname{Im} f=E$. Donc (4) $\Longrightarrow$ (3).
De même, si $\operatorname{Ker} f+\operatorname{Im} f=E$, on a $\dim(\operatorname{Ker} f)+\dim(\operatorname{Im} f)-\dim(\operatorname{Ker} f\cap\operatorname{Im} f)=\dim(E)$, et donc $\dim(\operatorname{Ker} f\cap\operatorname{Im} f)=0$. Ceci montre que (5) $\Longrightarrow$ (3).
Supposons maintenant que $\operatorname{Ker} f^2=\operatorname{Ker} f$ et fixons $y\in\operatorname{Ker} f\cap\operatorname{Im} f$. On a donc $y=f(x)$ pour un certain $x\in E$. Comme $y\in\operatorname{Ker} f$, on a $f^2(x)=0$. Par hypothèse on a alors $f(x)=0$. Mais $y=f(x)$, donc $y=0$. Ceci montre (1) $\Longrightarrow$ (4).
Inversement, supposons $\operatorname{Ker} f\cap\operatorname{Im} f=(0)$ et fixons $x\in\operatorname{Ker} f^2$. Alors $f(x)\in\operatorname{Ker} f\cap\operatorname{Im} f=(0)$, donc $x\in\operatorname{Ker} f$. Ceci montre (4) $\Longrightarrow$ (1).
On a donc (1) $\Longleftrightarrow$ (3) $\Longleftrightarrow$ (4) $\Longleftrightarrow$ (5).
Finalement, on a toujours $\operatorname{Ker} f\subset\operatorname{Ker} f^2$ et $\operatorname{Im} f^2\subset\operatorname{Im} f$. De plus $\dim(\operatorname{Ker} f)+\dim(\operatorname{Im} f)=\dim(E)=\dim(\operatorname{Ker} f^2)+\dim(\operatorname{Im} f^2)$. Donc on a
$$(1)\iff\dim(\operatorname{Ker} f)=\dim(\operatorname{Ker} f^2)\iff\dim(\operatorname{Im} f)=\dim(\operatorname{Im} f^2)\iff(2).$$

Cela montre bien que ces cinq assertions sont équivalentes.

• **Exercice 14.** Soient E un espace vectoriel de dimension finie et f, $g \in \mathcal{L}(E)$ tels que $\operatorname{Ker} f + \operatorname{Ker} g = \operatorname{Im} f + \operatorname{Im} g = E$. Montrer que les sommes sont directes.

Correction : Par hypothèse on a

$$\dim(\operatorname{Ker} f) + \dim(\operatorname{Ker} g) \geq \dim(E) \text{ et } \dim(\operatorname{Im} f) + \dim(\operatorname{Im} g) \geq \dim(E).$$

Du théorème du rang nous déduisons alors

$$\dim(\operatorname{Im} f) + \dim(\operatorname{Im} g) \leq \dim(E) \text{ et } \dim(\operatorname{Ker} f) + \dim(\operatorname{Ker} g) \leq \dim(E).$$

On a donc

$$\dim(\operatorname{Ker} f) + \dim(\operatorname{Ker} g) = \dim(E) \text{ et } \dim(\operatorname{Im} f) + \dim(\operatorname{Im} g) = \dim(E).$$

On a donc $\dim(\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Ker} g) = \dim(\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Im} g) = (0)$. Les sommes sont donc directes.

• **Exercice 15.** Soient $\mathbb{K}$ un corps, $A \in M_{3,2}(\mathbb{K})$, $B \in M_{2,2}(\mathbb{K})$, $C \in M_{2,3}(\mathbb{K})$ telles que

$$ABC = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & x & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Trouver x.

Correction : De l'hypothèse nous déduisons que le rang de ABC est inférieur ou égal à 2. La première et la troisième colonnes de ABC sont linéairement indépendantes, donc ce rang vaut 2 et la seconde colonne est une combinaison linéaire des deux autres. Il existe donc a, $b \in \mathbb{K}$ tels que

$$\left\{ \begin{array}{ccc} 1 & = & a + 2b \\ x & = & -2a + b \\ -2 & = & a + b \end{array} \right.$$

On voit donc que $b = 3$ et $a = -5$. Donc $x = 13$.

• **Exercice 16.** Calculer les déterminants suivants :

$$\begin{vmatrix} x & a & b & x \\ b & x & x & a \\ x & b & a & x \\ a & x & x & b \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ a^2+b^2 & b^2+c^2 & c^2+a^2 \\ a^3+b^3 & b^3+c^3 & c^3+a^3 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a^2 & b^2 & ab \\ b^2 & ab & a^2 \\ ab & a^2 & b^2 \end{vmatrix}.$$

Correction : On a (en retranchant ou ajoutant des colonnes à d'autres colonnes) :

• $$\begin{vmatrix} x & a & b & x \\ b & x & x & a \\ x & b & a & x \\ a & x & x & b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & a & b & x \\ b & x & x & a \\ 0 & b-a & a-b & 0 \\ a-b & 0 & 0 & b-a \end{vmatrix} = (b-a)^2 \begin{vmatrix} x & a & b & x \\ b & x & x & a \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (b-a)^2 \begin{vmatrix} 2x & a+b & b & x \\ b+a & 2x & x & a \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (b-a)^2((a+b)^2 - 2x) = (b-a)^2(a+b-2x)(a+b+2x).$$

• $$\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 0 \\ 2b & b-c-a & a+b+c \\ 2c & 2c & -a-b-c \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a-b-c & a+b+c & 0 \\ 2b & -a-b-c & a+b+c \\ 2c & 0 & -a-b-c \end{vmatrix} = (a+b+c)^2 \begin{vmatrix} a-b-c & 1 & 0 \\ 2b & -1 & 1 \\ 2c & 0 & -1 \end{vmatrix} =$$
$$= (a+b+c)^2\left((a-b-c)-(-2b-2c)\right) = (a+b+c)^3.$$

- $$\begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ a^2+b^2 & b^2+c^2 & c^2+a^2 \\ a^3+b^3 & b^3+c^3 & c^3+a^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a-c & b+c & c+a \\ a^2-c^2 & b^2+c^2 & c^2+a^2 \\ a^3-c^3 & b^3+c^3 & c^3+a^3 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a-c & b-a & 2a \\ a^2-c^2 & b^2-a^2 & 2a^2 \\ a^3-c^3 & b^3-a^3 & 2a^3 \end{vmatrix} =$$

$$= 2a(a-c)(b-c) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a+c & b+c & a \\ a^2+ac+c^2 & b^2+bc+c^2 & a^2 \end{vmatrix} =$$

$$= 2a(a-c)(b-c) \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ c & b+c-a & a \\ ac+c^2 & b^2+bc+c^2-a^2 & a^2 \end{vmatrix} =$$

$$= 2a(a-c)(b-c)\left(c(b^2+bc+c^2-a^2)-(ac+c^2)(b+c-a)\right) =$$
$$= 2ac(a-c)(b-c)(b^2+bc+c^2-a^2-(a+c)(b+c-a)) = 2ac(a-c)(b-c)(b^2-ab) =$$
$$= 2abc(a-c)(b-a)(b-c)$$

- $$\begin{vmatrix} a^2 & b^2 & ab \\ b^2 & ab & a^2 \\ ab & a^2 & b^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a^2-ab & b^2-ab & ab \\ b^2-a^2 & ab-a^2 & a^2 \\ ab-b^2 & a^2-b^2 & b^2 \end{vmatrix} = (a-b)^2 \begin{vmatrix} a & -b & ab \\ -a-b & -a & a^2 \\ b & a+b & b^2 \end{vmatrix} =$$

$$= (a-b)^2 \begin{vmatrix} a & -b & 0 \\ -a-b & -a & a^2+ab+b^2 \\ b & a+b & 0 \end{vmatrix} = -(a-b)^2(a^2+ab+b^2) \begin{vmatrix} a & -b \\ b & a+b \end{vmatrix} =$$
$$= -(a-b)^2(a^2+ab+b^2)^2 = -(a^3-b^3)^2.$$

- **Exercice 17.** Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$.
  (1) Montrer que l'équation en X : $AX = B$, X, $B \in M_{3,n}(\mathbb{R})$, a des solutions si et seulement si les colonnes de B sont des progressions arithmétiques (traiter d'abord le cas $n = 1$).
  (2) Résoudre $AX = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 4 & 5 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$.

Correction : Notons C_i la i-ème colonne de A. Remarquons que C_1 et C_2 sont linéairement indépendantes et que $C_2 - C_1 = C_3 - C_2$.
Pour une matrice $M \in M_{p,q}(\mathbb{R})$, notons $f_M : \mathbb{R}^q \longrightarrow \mathbb{R}^p$ l'application linéaire associée. La mrarque précédente nous permet de dire que l'image de f_A est engendrée par les deux premiers vecteurs colonne de A. Remarquons que ces vecteurs sont de la forme $(a, a+b, a2b)$ avec a, $b \in \mathbb{R}$. Inversement si un vecteur de $\mathbb{R}^3$ est de la forme $(a, a+b, a+2b)$ alors il s'écrit

$$\begin{pmatrix} a \\ a+b \\ a+2b \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = a\left[\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}\right] + b\left[2\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}\right] \in \operatorname{Im} f_A.$$

Donc

$$\operatorname{Im} f = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ a+b \\ a+2b \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

L'équation $AX = B$ a des solutions si et seulement l'application linéaire $f_B : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^3$ se factorise par $f_A : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, c'est-à-dire s'il existe $f_X : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tel que $f_B = f_A \circ f_X$. Une condition nécessaire à l'existence de X, est donc que $\operatorname{Im} f_B \subset \operatorname{Im} f_A$, c'est-à-dire à ce que les vecteurs colonnes de B soient des progressions arithmétiques.
Montrons que c'est aussi une condition suffisante. En effet, les colonnes de B sont des progressions arithmétiques si et seulement si $\operatorname{Im} f_B \subset \operatorname{Im} f_A$. Supposons que ce soit le cas. Notons $V \subset \mathbb{R}^3$ un supplémentaire de $\operatorname{Ker}(f_A)$ et $W := \operatorname{Im} f_A$. La restriction de f_A à V induit une application linéaire bijective $f_{A_{|V}} : V \longrightarrow W$. En notant g sa réciproque, on a $f_A \circ g = \mathrm{Id}_W$. Alors $\operatorname{Im}(g \circ f_B) \subset V$ et, par construction, $f_A \circ (g \circ f_B) = f_B$. Donc f_B se factorise par f_A. Ceci prouve la condition suffisante.

Pour la seconde question, on remarque que, en notant e_1, e_2 et e_3 les vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^3$:

$$Ae_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \ Ae_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \ Ae_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

De plus les vecteurs colonnes de AX vérifient

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = Ae_3, \ \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} = Ae_3 + [2Ae_1 - Ae_2]$$

On peut donc prendre pour X la matrice de l'application linéaire qui envoie le premier vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^2$ sur e_3 et le second vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^2$ sur $e_3 + 2e_1 - e_2$, c'est-à-dire

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

• **Exercice 18.** Soient E un espace vectoriel de dimension finie et f, $g \in \mathcal{L}(E)$. Établir :

(1) $\dim \operatorname{Ker}(f \circ g) \leq \dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Ker} g$.
(2) $\dim(\operatorname{Im} g \cap \operatorname{Ker} g) = \operatorname{rang}(g) - \operatorname{rang}(f \circ g)$.
(3) $\operatorname{rang}(f) + \operatorname{rang}(g) - \dim E \leq \operatorname{rang}(f \circ g) \leq \min\{\operatorname{rang}(f), \operatorname{rang}(g)\}$.

Correction :

(1) Notons V un supplémentaire de $\operatorname{Ker} g$ dans E. Alors

$$g_{|V} : V \longrightarrow g(V) = \operatorname{Im} g$$

est une application linéaire bijective. Notons $W := g_{|V}^{-1}(g(V) \cap \operatorname{Ker} f)$. Comme $g_{|V}$ est un isomorphisme, on a

$$\dim(W) = \dim(g(V) \cap \operatorname{Ker} f) \leq \dim(\operatorname{Ker} f).$$

Il suffit donc de montrer que $\operatorname{Ker}(f \circ g) = \operatorname{Ker} g + W$ (cette somme est même directe car W est inclus dans un supplémentaire de $\operatorname{Ker} g$).
On a clairement $\operatorname{Ker} g \subset \operatorname{Ker}(f \circ g)$. De même si $x \in W$, on a $g(x) \in \operatorname{Ker} f$, donc $x \in \operatorname{Ker}(f \circ g)$. Donc $\operatorname{Ker} g + W \subset \operatorname{Ker}(f \circ g)$.
Inversement, soit $x \in \operatorname{Ker}(f \circ g)$. Alors $g(x) \in \operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} g$. Soit $z :=$

$g_{|V}^{-1}(g(x)) \in W$. On a $g(x-z) = g(x) - g(z) = g(x) - g(x) = 0$. Donc $x - z \in \operatorname{Ker} g$, et $x \in \operatorname{Ker} g + W$. Ceci montre l'inclusion inverse.

(2) Avec les notations de la question précédente, nous avons

$$\operatorname{Im} g \cap \operatorname{Ker} f = g(V) \cap \operatorname{Ker} f.$$

Donc $\dim(\operatorname{Im} g \cap \operatorname{Ker} f) = \dim(W)$. Comme nous avons $\operatorname{Ker}(f \circ g) = \operatorname{Ker} g \oplus W$, on en déduit que

$$\dim(\operatorname{Ker}(f \circ g)) = \dim(\operatorname{Ker} g) + \dim(\operatorname{Im} g \cap \operatorname{Ker} f).$$

Où encore, d'après le théorème du rang :

$$\dim(E) - \operatorname{rang}(f \circ g) = \dim(E) - \operatorname{rang}(g) + \dim(\operatorname{Im} g \cap \operatorname{Ker} f)$$

ce qui donne l'égalité cherchée.

(3) D'après (1) on a

$$\dim \operatorname{Ker}(f \circ g) \leq \dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Ker} g.$$

Avec le théorème du rang cela nous donne

$$\dim(E) - \operatorname{rang}(f \circ g) \leq \dim(E) - \operatorname{rang}(f) + \dim(E) - \operatorname{rang}(g)$$

d'où

$$\operatorname{rang}(f) + \operatorname{rang}(g) - \dim(E) \leq \operatorname{rang}(f \circ g).$$

On a $\operatorname{Im}(f \circ g) \subset \operatorname{Im}(f)$. Donc $\operatorname{rang}(f \circ g) \leq \operatorname{rang}(f)$. D'après (2) on a $\operatorname{rang}(f \circ g) \leq \operatorname{rang}(g)$. Donc

$$\operatorname{rang}(f \circ g) \leq \min\{\operatorname{rang}(f), \operatorname{rang}(g)\}.$$

• **Exercice 19.** Soient E, F deux espaces vectoriels de dimensions finies et u, $v \in \mathcal{L}(E, F)$.
Montrer que $\dim(\operatorname{Ker}(u+v)) \leq \dim(\operatorname{Ker} u \cap \operatorname{Ker} v) + \dim(\operatorname{Im} u \cap \operatorname{Im} v)$.
(Indication : considérer $w = u_{|\operatorname{Ker}(u+v)}$ et appliquer le théorème du rang).

Correction : On note donc w la restriction de u à $\operatorname{Ker}(u+v)$. On a, pour $x \in E$, $x \in \operatorname{Ker}(w)$ si et seulement si $(u+v)(x) = 0$ et $u(x) = 0$, ou encore $u(x) = v(x) = 0$. Donc

$$\operatorname{Ker}(w) = \operatorname{Ker} u \cap \operatorname{Ker} v.$$

Par ailleurs pour $y \in F$, on a $y \in \operatorname{Im} w$ si il existe $x \in \operatorname{Ker}(u+v)$ tel que $y = u(x)$. Mais comme $(u+v)(x) = 0$, on a aussi $y = v(-x)$. Donc $y \in \operatorname{Im} u \cap \operatorname{Im} v$ et

$$\operatorname{Im} w \subset \operatorname{Im} u \cap \operatorname{Im} v.$$

Le théorème du rang nous donne

$$\dim(\operatorname{Ker} w) + \dim(\operatorname{Im} w) = \dim(\operatorname{Ker}(u+v)).$$

On en déduit donc

$$\dim(\operatorname{Ker}(u+v)) \leq \dim(\operatorname{Ker} u \cap \operatorname{Ker} v) + \dim(\operatorname{Im} u \cap \operatorname{Im} v).$$