20. Interpolation polynomiale

Notations et rappels

On se donne un intervalle I non réduit à un point, un entier $n \geq 2$ et n points de cet intervalle, $x_1 < x_2 < \dots < x_n$. Etant donnée une fonction réelle de la variable réelle f définie sur I , on va étudier l'existence et les propriétés des polynômes P de degré inférieur ou égal à $n - 1$ et vérifiant $P(x_i) = f(x_i)$ pour chaque $1 \leq i \leq n$. On sera amené à faire par endroits des hypothèses supplémentaires de régularité sur f .

Pour chaque entier naturel k , on note $\mathbb{R}_k[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à k et à coefficients réels. Un polynôme sera noté $P(X)$ ou simplement P . On confondra polynôme et fonction polynôme. Rappelons finalement que le polynôme nul a un degré fixé à $-\infty$, par convention.

Pour une fonction ϕ bornée sur I , on notera $\|\phi\| = \sup_{x \in I} |f(x)|$.

Partie A

► **A.1** Montrer que l'application U de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ dans $\mathbb{R}^n$ définie par

$$U(P) = (P(x_1), P(x_2), \dots, P(x_n))$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

► **A.2** En déduire que pour tous réels $y_1, y_2, \dots, y_n$, il existe un unique polynôme P de degré inférieur ou égal à $n - 1$ vérifiant $P(x_1) = y_1, P(x_2) = y_2, \dots, P(x_n) = y_n$.

► **A.3** Pour chaque $1 \leq k \leq n$, donner l'expression factorisée de l'unique polynôme L_k de degré $n - 1$ vérifiant $L_k(x_k) = 1$ et $L_k(x_j) = 0$ pour $j \neq k$.

Ces polynômes $L_1, L_2, \dots, L_n$ s'appellent polynômes d'interpolation de Lagrange pour la famille $x_1, x_2, \dots, x_n$.

► **A.4** Montrer que la famille $\{L_1, L_2, \dots, L_n\}$ forme une base de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.

► **A.5.a** Soient $y_1, \dots, y_n$ des réels quelconques. Donner, en fonction des polynômes de Lagrange $L_1, \dots, L_n$ et des réels $y_1, \dots, y_n$, l'expression de l'unique polynôme $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ vérifiant $P(x_i) = y_i$ pour tout $1 \leq i \leq n$.

► **A.5.b** En particulier, que vaut la somme $L_1 + L_2 + \dots + L_n$?

► **A.6** En déduire que pour toute fonction f définie sur I , il existe un unique polynôme $P_{[x_1, \dots, x_n]}$ de degré inférieur ou égal à $n - 1$ et prenant en chaque x_i la même valeur

que f , à l'aide de

► **A.7** (ci-dessus)

► **A.8**

est une b

On suppose le résultat

Pour ch

► **B.1** V

Dans la s défini par

On appell

► **B.2** M l'on énumé

► **B.3** M distincts d

► **B.4** M distincts d

que f , à savoir $P_{[x_1, \dots, x_n]}(x_i) = f(x_i)$ pour tout $1 \leq i \leq n$. On donnera son expression à l'aide des polynômes de Lagrange et des valeurs de f aux points $x_1, \dots, x_n$.

► **A.7** On prend $n = 2$. Donner l'expression de $P_{[x_1, x_2]}$: on pourra utiliser l'expression ci-dessus avec les polynômes de Lagrange ou bien faire un calcul géométrique direct.

► **A.8** Montrer que la famille

$$1, X - x_1, (X - x_1)(X - x_2), \dots, (X - x_1)(X - x_2) \dots (X - x_{n-1})$$

est une base de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.

Partie B

On suppose dans cette partie que f est au moins de classe C^n sur I . On va démontrer le résultat suivant :

Pour chaque $x \in I$, il existe au moins un réel $\zeta \in I$ tel que l'on ait

$$f(x) - P_{[x_1, \dots, x_n]}(x) = \frac{f^{(n)}(\zeta)}{n!} \times \prod_{i=1}^n (x - x_i)$$

► **B.1** Vérifier la propriété lorsque x est l'un des $x_1, \dots, x_n$.

Dans la suite, on se fixe dans I un x différent de $x_1, \dots, x_n$, et on appelle A le réel défini par

$$f(x) - P_{[x_1, \dots, x_n]}(x) = A \prod_{i=1}^n (x - x_i)$$

On appelle g la fonction défini sur I par

$$g(t) = f(t) - P_{[x_1, \dots, x_n]}(t) - A \prod_{i=1}^n (t - x_i)$$

► **B.2** Montrer que g est de classe C^n , et s'annule en au moins $n + 1$ point de I que l'on énumérera.

► **B.3** Montrer, sans calculer g' , que la dérivée g' s'annule en au moins n points distincts de I , que l'on ne cherchera pas à calculer.

► **B.4** Montrer, sans calculer g'' , que la dérivée g'' s'annule en au moins $n - 1$ points distincts de I , que l'on ne cherchera pas à calculer.

► **B.5** Montrer, sans utiliser l'expression de $g^{(n)}$, que la dérivée $g^{(n)}$ s'annule en au moins un point ζ de I , que l'on ne cherchera pas à calculer.

► **B.6** Donner l'expression de la dérivée $g^{(n)}(t)$. On regardera les degrés des polynômes $P_{[x_1, \dots, x_n]}(t)$ et $\prod_{i=1}^n (t - x_i)$ avant de se lancer dans de longs calculs.

► **B.7** En déduire qu'il existe $\zeta \in I$ tel que $A = \frac{f^{(n)}(\zeta)}{n!}$ et conclure.

Partie C

On suppose dans cette partie que $I = [a, b]$ est un segment.

► **C.1.a** Justifier la majoration

$$\|f - P_{[x_1, \dots, x_n]}\| \leq \frac{\|f^{(n)}\|}{n!} \times \sup_{x \in I} \prod_{i=1}^n |x - x_i|$$

► **C.1.b** En déduire la majoration

$$\|f - P_{[x_1, \dots, x_n]}\| \leq \frac{\|f^{(n)}\|}{n!} \times (b - a)^n$$

► **C.2** On prend $n = 2$, $x_1 = a$ et $x_2 = b$. En calculant explicitement le maximum intervenant dans la question C.1.a, donner une majoration de $\|f - P_{[a, b]}\|$ meilleure que celle de la question C.1.b.

► **C.3** On prend $f(x) = \frac{1}{1+x}$ sur $I = [0, 1]$. Pour chaque entier $n \geq 3$, on note $x_i = \frac{i-1}{n-1}$ pour $1 \leq i \leq n$: on obtient ainsi n points équirépartis dans $[0, 1]$. On note P_n le polynôme interpolateur de f en ces n points.

► **C.3.a** Trouver, par récurrence, l'expression de $f^{(n)}$.

► **C.3.b** En déduire que, pour tout $x \in [0, 1]$, on a

$$|f(x) - P_n(x)| \leq |(x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n)|$$

► **C.3.c** En remarquant qu'un réel $x \in [0, 1]$ se trouve à une distance inférieure ou égale à $\frac{1}{n-1}$ de exactement deux des points x_i , donner une majoration de $\|f - P_n\|$ montrant que la suite de polynômes $\{P_n\}$ converge uniformément vers f sur $[0, 1]$.

I est d
des po
prenar
de faç
il est c

► **D.1**

$P_{[a}$

► **D.2**
terme.

► **D.2**

$P_{[x_1, x_2}$

Donne

► **D.3**
chaque
tion de

Notat

I est d
des po
prenar
de faç
il est c

La not
en pra
point :

Partie D

I est de nouveau un intervalle quelconque non réduit à un point, et $x_1 < x_2 < \dots < x_n$ des points de I . On note toujours $P_{[x_1, \dots, x_n]}$ le polynôme de degré inférieur ou égal à $n-1$ prenant les mêmes valeurs que f aux points $x_1, \dots, x_n$. La notation $P_{[x_1, \dots, x_{n-1}]}$ désigne de façon analogue le polynôme d'interpolation de f aux $n-1$ points $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$: il est de degré inférieur ou égal à $n-2$.

► **D.1** Montrer qu'il existe des réels $d_1, d_2, \dots, d_n$ tels que

$$P_{[x_1, \dots, x_n]}(X) = d_1 + d_2(X - x_1) + \dots + d_{n-1}(X - x_1)(X - x_2) \cdots (X - x_{n-2}) \\ + d_n(X - x_1)(X - x_2) \cdots (X - x_{n-1})$$

► **D.2.a** Montrer que $P_{[x_1, \dots, x_{n-1}]}$ s'obtient à partir de $P_{[x_1, \dots, x_n]}$ en supprimant un terme. On justifiera la réponse.

► **D.2.b** Soit par exemple, pour une certaine fonction f et des points x_1, x_2, x_3, x_4 :

$$P_{[x_1, x_2, x_3, x_4]} = \frac{12}{5} - \frac{21}{8}(X - x_1) + 4(X - x_1)(X - x_2) + 8(X - x_1)(X - x_2)(X - x_3)$$

Donner sans aucun calcul les polynômes $P_{[x_1, x_2]}$ et $P_{[x_1, x_2, x_3]}$.

► **D.3** On suppose $n \geq 3$. Calculer d_1, d_2 , puis d_3 en fonction des valeurs $f(x_i)$. Pour chaque calcul, on donnera à x des valeurs particulières. Vérifier que, après transformation de l'expression calculée, on a

$$d_3 = \frac{\frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2} - \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}}{x_3 - x_1}$$

Partie E

Notations et remarques

I est de nouveau un intervalle quelconque non réduit à un point, et $x_1 < x_2 < \dots < x_n$ des points de I . On note toujours $P_{[x_1, \dots, x_n]}$ le polynôme de degré inférieur ou égal à $n-1$ prenant les mêmes valeurs que f aux points $x_1, \dots, x_n$. La notation $P_{[x_1, \dots, x_{n-1}]}$ désigne de façon analogue le polynôme d'interpolation de f aux $n-1$ points $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$: il est de degré inférieur ou égal à $n-2$.

La notation $P_{[x_i]}$ (avec $1 \leq i \leq n$) désigne le polynôme constant égal à $f(x_i)$. C'est, en pratique, le polynôme interpolateur de degré 0 de f sur le système réduit à l'unique point x_i .

Nous avons vu précédemment que $P_{[x_1, \dots, x_n]}$ s'écrit de façon unique sous la forme

$$P_{[x_1, \dots, x_n]}(X) = d_1 + d_2(X - x_1) + \dots + d_{n-1}(X - x_1)(X - x_2) \dots (X - x_{n-2}) + d_n(X - x_1)(X - x_2) \dots (X - x_{n-1})$$

et que nous avons immédiatement

$$P_{[x_1, \dots, x_{n-1}]}(X) = d_1 + d_2(X - x_1) + \dots + d_{n-1}(X - x_1)(X - x_2) \dots (X - x_{n-2})$$

Le coefficient d_n de l'écriture de $P_{[x_1, \dots, x_n]}$ va désormais être noté $f[x_1, \dots, x_n]$. Nous parlerons aussi de «coefficient directeur de $P_{[x_1, \dots, x_n]}$ », puisque qu'il s'agit du coefficient de ce polynôme sur le polynôme de plus haut degré de la base

$$\{1, X - x_1, (X - x_1)(X - x_2), \dots, (X - x_1)(X - x_2) \dots (X - x_{n-1})\}$$

de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$. Nous poserons $f[x_i] = f(x_i)$ aussi.

Il résulte de la remarque ci-dessus que d_{n-1} va se noter $f[x_1, \dots, x_{n-1}]$, puisqu'il s'agit du coefficient directeur de $P_{[x_1, \dots, x_{n-1}]}$. En reculant ainsi de suite, nous avons finalement

$$(*) P_{[x_1, \dots, x_n]}(X) = f[x_1] + f[x_1, x_2](X - x_1) + f[x_1, x_2, x_3](X - x_1)(X - x_2) + \dots + f[x_1, x_2, \dots, x_n](X - x_1) \dots (X - x_{n-1})$$

Nous utiliserons plus généralement, pour $1 \leq i < k \leq n$, cette notation avec le polynôme $P_{[x_i, \dots, x_k]}$, qui est le polynôme de degré inférieur ou égal à $k - i$ prenant aux points $x_i, \dots, x_k$ les mêmes valeurs que f , et qui s'écrit donc sous la forme :

$$P_{[x_i, \dots, x_k]}(X) = f[x_i] + f[x_i, x_{i+1}](X - x_i) + f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}](X - x_i)(X - x_{i+1}) + \dots + f[x_i, x_{i+1}, \dots, x_k](X - x_i) \dots (X - x_{k-1})$$

► **E.1** Soient $1 \leq i < k \leq n$. On pose

$$Q(x) = \frac{(x - x_k)P_{[x_i, \dots, x_{k-1}]}(x) - (x - x_i)P_{[x_{i+1}, \dots, x_k]}(x)}{x_i - x_k}$$

► **E.1.a** Quel est le degré maximal de Q ?

► **E.1.b** Calculer $Q(x_i)$, $Q(x_k)$, puis $Q(x_j)$ pour $i < j < k$.

► **E.1.c** identifier le polynôme Q en terme de polynôme interpolateur de f .

► **E.2.a** Par analogie avec la question A.8, écrire sans justification la base à utilisée pour écrire le polynôme $P_{[x_i, \dots, x_k]}$. Elle ne doit faire intervenir que les points $x_i, \dots, x_k$.

► **E.2.b** En déduire que pour tout $1 \leq i < k \leq n$, on a :

$$f[x_i, \dots, x_k] = \frac{f[x_i, \dots, x_{k-1}] - f[x_{i+1}, \dots, x_k]}{x_i - x_k}$$

On pourra regarder le coefficient de X^{k-i} des deux membres de l'égalité E.2.c.