APPROXIMATION DE ARTIN CYLINDRIQUE ET MORPHISMES D'ALGÈBRES ANALYTIQUES

GUILLAUME ROND

1. Notations

Nous désignerons toujours par $\Bbbk$ un corps, $x = (x_1, ..., x_n)$ et $y = (y_1, ..., y_m)$. Nous noterons $\Bbbk\langle x\rangle$, l'anneau des séries formelles algébriques sur $\Bbbk[x]_{(x)}$, c'est-à-dire l'hensélisé de $\Bbbk[x]_{(x)}$, $\Bbbk\{x\}$ l'anneau des séries convergentes à coefficients dans $\Bbbk$ (quand $\Bbbk$ est un corps valué), et $\Bbbk[[x]]$ l'anneau des séries formelles.
Si A est un anneau local, on notera $\widehat{A}$ son complété. Si $\varphi : A \longrightarrow B$ est un morphisme d'anneaux locaux, on notera $\widehat{\varphi} : \widehat{A} \longrightarrow \widehat{B}$ le morphisme induit entre les complétés.
Les anneaux locaux seront considérés comme des anneaux topologiques où la topologie est celle induite par leur idéal maximal. Ainsi l'adhérence $\overline{E}$ d'un sous-ensemble E d'un anneau local $(A, \mathfrak{m})$ est par définition $\cap_n(E + \mathfrak{m}^n)$.

2. Introduction

A la fin des années soixante, M. Artin a montré que toute solution formelle d'un système d'équations algébriques à coefficients dans $\Bbbk\{x\}$ (resp. dans $\Bbbk\langle x\rangle$) pouvait être approchée par des solutions dans $\Bbbk\{x\}$ (resp. dans $\Bbbk\langle x\rangle$) (cf. [Ar1] et [Ar2]). Il a en même temps posé la question suivante : si une des coordonnées de la solution formelle ne dépend que de certaines variables x_k, est-ce que l'on peut approcher cette solution formelle par des solutions dans $\Bbbk\{x\}$ (resp. dans $\Bbbk\langle x\rangle$) satisfaisant la même propriété [Ar1] ? La réponse est affirmative dans le cas cylindrique (i.e. la i-ième coordonnée ne dépend que de $x_1, ..., x_{k(i)}$ où $(k(i))_i$ est croissante) quand les solutions approchées sont dans $\Bbbk\langle x\rangle$. Nous pouvons donner l'énoncé suivant qui résume cela dans un cas simple (mais seul ce cas nous intéressera dans la suite) :

Théorème 2.1. [KPPRM][Po][Sp][Te] *Soit* $P(F_i, G_j) \in \Bbbk\langle x, y\rangle[F_1, ..., F_r, G_1, ..., G_s]$. *Alors*

$$\forall \overline{f}_i \in \Bbbk[[x]],\ \forall \overline{g}_j \in \Bbbk[[x, y]],\ \textit{tels que } P(\overline{f}_i, \overline{g}_j) = 0,\ \forall c \in \mathbb{N},$$
$$\exists f_i \in \Bbbk\langle x\rangle,\ \exists g_j \in \Bbbk\langle x, y\rangle \textit{ tels que } P(f_i, g_j) = 0,$$
$$\textit{et } \overline{f}_i - f_i \in (x)^c,\ \overline{g}_j - g_j \in (x, y)^c \textit{ pour tous } 1 \leq i \leq r,\ 1 \leq j \leq s.$$

Considérons maintenant $P(F_i, G_j) \in \Bbbk\{x, y\}[F_1, ..., F_r, G_1, ..., G_s]$. Nous dirons que P possède la propriété d'approximation cylindrique par rapport à x si :

$$\forall \overline{f}_i \in \Bbbk[[x]],\ \forall \overline{g}_j \in \Bbbk[[x, y]],\ \text{tels que } P(\overline{f}_i, \overline{g}_j) = 0,\ \forall c \in \mathbb{N},$$
$$\exists f_i \in \Bbbk\{x\},\ \exists g_j \in \Bbbk\{x, y\} \text{ tels que } P(f_i, g_j) = 0,$$
$$\text{et } \overline{f}_i - f_i \in (x)^c,\ \overline{g}_j - g_j \in (x, y)^c \text{ pour tous } 1 \leq i \leq r,\ 1 \leq j \leq s.$$

Il est en général faux qu'un tel polynôme P vérifie la propriété d'approximation cylindrique par rapport à x (cf. [Ga1]).

1991 *Mathematics Subject Classification.* 13B40 (Primary), 32B05 (Secondary).

L'étude de cette propriété d'approximation cylindrique a été motivée par des problèmes en théorie des singularités (équisingularité et déformations de singularités) (cf. [Gr] et [KPPRM]). Le but de cet article est d'étudier certains exemples d'équations qui possèdent la propriété d'approximation cylindrique par rapport à un groupe de variables. Ces équations sont du type suivant :

$$F(x)+\sum_{i=1}^{n}(x_i-p_i(y))G_i(x,\,y)+h(x,\,y)=0 \tag{E}$$

où $p_i(y)\in(y)\mathbb{k}\{y\}$ pour $1\leq i\leq n$, $h(x,\,y)\in\mathbb{k}\{x,\,y\}$.
Pour les équations de type (E), nous allons faire le lien avec les conditions de régularité de Gabrielov d'un morphisme d'algèbres analytiques [Ga2], [Iz], [Ro4], répondant ainsi à une question de B. Teissier posée à l'auteur. Dans la partie suivante, nous montrons l'existence d'une fonction d'approximation cylindrique (cf. théorème 4.1), et nous faisons le lien, dans le cas des équations (E), avec la fonction de Chevalley du morphisme d'anneaux locaux associé. En particulier, cela nous permet de montrer qu'il n'existe pas toujours de fonction d'approximation cylindrique qui est une fonction récursive, contrairement au cas classique (cf. [La] ou théorème 6.1. [BDLvdD]).
Je tiens à remercier ici M. Spivakovsky pour les discussions fructueuses que nous avons eu ensemble sur ce sujet.

3. Équations du type (E)

Soit $\varphi\ :\ \mathbb{k}\{x\}\longrightarrow\mathbb{k}\{y\}$ défini par $\varphi(x_i)=p_i(y)$ pour tout i. Nous avons alors la proposition suivante (inspirée par [Be2]) :

Proposition 3.1. *Toutes les équations (E), pour $h\in\mathbb{k}\{x,\,y\}$, possèdent la propriété d'approximation cylindrique par rapport à x si et seulement si $\widehat{\varphi}(\mathbb{k}[[x]])\cap\mathbb{k}\{y\}=\varphi(\mathbb{k}\{x\})$.*

Démonstration. Montrons d'abord la condition nécessaire. Soient $h\in\widehat{\varphi}(\mathbb{k}[[x]])\cap\mathbb{k}\{y\}$ et $\overline{f}\in\mathbb{k}[[x]]$ tel que $\widehat{\varphi}(\overline{f})=h$. Alors il existe $\overline{g}_1,\ldots,\,\overline{g}_n\in\mathbb{k}[[x,\,y]]$ tels que

$$h(y)=\overline{f}(x)+\sum_{i=1}^{n}\overline{g}_i(x,\,y)\,(x_i-p_i(y))\,.$$

Si l'équation (E) vérifie la propriété d'approximation cylindrique par rapport à x, alors pour tout $c\in\mathbb{N}$, il existe $f_c\in\mathbb{k}\{x\}$ et $g_{1,\,c},\ldots,\,g_{n,\,c}\in\mathbb{k}\{x,\,y\}$ tels que

$$h(y)=f_c(x)+\sum_{i=1}^{n}g_{i,\,c}(x,\,y)\,(x_i-p_i(y))$$

et $f_c-\overline{f}\in(x)^c$. Alors $\varphi(f_c)=h$. Donc $\widehat{\varphi}(\mathbb{k}[[x]])\cap\mathbb{k}\{y\}=\varphi(\mathbb{k}\{x\})$.

Inversement, supposons maintenant que $\widehat{\varphi}(\mathbb{k}[[x]])\cap\mathbb{k}\{y\}=\varphi(\mathbb{k}\{x\})$. Soient $\overline{f}\in\mathbb{k}[[x]]$ et $\overline{g}_1,\ldots,\,\overline{g}_n\in\mathbb{k}[[x,\,y]]$ tels que

$$\overline{f}(x)+\sum_{i=1}^{n}\overline{g}_i(x,\,y)\,(x_i-p_i(y))+h(x,\,y)=0.$$

Alors $\widehat{\varphi}(\overline{f})=-h(p_i(y),\,y)=:h'(y)\in\mathbb{k}\{y\}$ et donc il existe $f\in\mathbb{k}\{x\}$ tel que $\varphi(f)=h'(y)$. Donc par hypothèse, $\overline{f}-f\in\overline{\mathrm{Ker}(\varphi)}=\mathrm{Ker}(\varphi)\mathbb{k}[[x]]$. Il existe donc $f'_c\in\mathrm{Ker}(\varphi)$ tels que

$\overline{f}-f-f'_c\in(x)^c$ pour tout $c\in\mathbb{N}$. Notons $f_c:=f+f'_c$; en particulier $\varphi(f_c)=h'(y)$. Il existe alors $g_{i,\,c}\in\Bbbk\{x,\,y\}$ pour $1\leq i\leq n$ tels que

$$h'(y)=f_c(x)+\sum_{i=1}^n g_{i,\,c}(x,\,y)(x_i-p_i(y)).$$

Par ailleurs il existe $g'_i(x,\,y)\in\Bbbk\{x,\,y\}$ pour $1\leq i\leq n$ tels que

$$h'(y)+h(x,\,y)=-\sum_{i=1}^n g'_i(x,\,y)(x_i-p_i(y)).$$

Nous avons donc, en combinant les deux dernières relations,

$$f_c(x)+\sum_{i=1}^n(g_{i,\,c}(x,\,y)+g'_i(x,\,y))(x_i-p_i(y))+h(x,\,y)=0.$$

D'après le lemme 3.2 il existe $c_0\in\mathbb{N}$, indépendant de c, et $g'_{i,\,c}\in\Bbbk\{x,\,y\}$ pour $1\leq i\leq n$ tels que

$$f_c(x)+\sum_{i=1}^n g'_{i,\,c}(x,\,y)\,(x_i-p_i(y))+h(x,\,y)=0.$$

et $\overline{g}_i-g'_{i,\,c}\in(x,\,y)^{c-c_0}$ pour $1\leq i\leq n$. Comme c_0 est indépendant de c, on obtient le résultat voulu. □

Lemme 3.2. *Soient $h(x,\,y)\in\Bbbk\{x,\,y\}$ et $b_i(x,\,y)\in\Bbbk\{x,\,y\}$, pour $1\leq i\leq n$, et $c\in\mathbb{N}$. Supposons qu'il existe $g_i(x,\,y)\in\Bbbk\{x,\,y\}$, pour $1\leq i\leq n$, tels que*

$$\sum_{i=1}^n b_i(x,\,y)g_i(x,\,y)+h(x,\,y)=0$$

et qu'il existe $\overline{g}_i(x,\,y)\in\Bbbk\{x,\,y\}$, pour $1\leq i\leq n$, tels que

$$\sum_{i=1}^n b_i(x,\,y)\overline{g}_i(x,\,y)+h(x,\,y)\in(x,\,y)^c$$

Alors il existe $c_0\in N$, ne dépendant que des b_i, et $g_{i,\,c}\in\Bbbk\{x,\,y\}$ tels que

$$\sum_{i=1}^n b_i(x,\,y)g_{i,\,c}(x,\,y)+h(x,\,y)=0$$

et $g_i-g_{i,\,c}\in(x,\,y)^{c-c_0}$.

Démonstration. Considérons l'équation

$$P(G_1,...,\,G_n):=\sum_{i=1}^n b_i(x,\,y)G_i+h(x,\,y)=0.$$

Par hypothèse nous avons

$$P(G_1,...,\,G_n)=\sum_{i=1}^n b_i(x,\,y)\,(G_i-g_i)\,.$$

D'autre part

$$P\left(\overline{g}_1(x,\,y),...,\,\overline{g}_n(x,\,y)\right)\in(x,\,y)^c.$$

D'après le lemme d'Artin-Rees, il existe une constante c_0 ne dépendant que de l'idéal $I := (b_1, ..., b_n)\mathbb{k}[[x, y]]$, telle que $(x, y)^c \cap I \subset (x, y)^{c-c_0}I$. Donc

$$P\left(\overline{g}_1(x, y), ..., \overline{g}_n(x, y)\right) = \sum_{i=1}^{n} b_i(x, y)\varepsilon_i(x, y)$$

où $\varepsilon_i(x, y) \in (x, y)^{c-c_0}\mathbb{k}[[x, y]]$ pour $1 \leq i \leq n$. Donc

$$P\left(\overline{g}_1(x, y) - \varepsilon_1(x, y), ..., \overline{g}_n(x, y) - \varepsilon_n(x, y)\right) = 0.$$

Alors, d'après le théorème d'approximation de Artin, il existe $g_{i,\,c} \in \mathbb{k}\{x, y\}$ pour $1 \leq i \leq n$ tels que

$$P\left(g_{1,\,c}, ..., g_{n,\,c}\right) = 0$$

et $\overline{g}_i - \varepsilon_i - g_{i,\,c} \in (x, y)^c$, i.e. $\overline{g}_i - g_{i,\,c} \in (x, y)^{c-c_0}$. □

Remarque 3.3. *La proposition précédente reste évidemment vraie (la preuve en est strictement identique) si l'on remplace $\mathbb{k}\{x\}$ et $\mathbb{k}\{y\}$ par $\mathbb{k}\langle x\rangle$ et $\mathbb{k}\langle y\rangle$. Donc, d'après le théorème 2.1, nous obtenons le résultat suivant :*

Proposition 3.4. *Soit $\varphi : \mathbb{k}\langle x\rangle \longrightarrow \mathbb{k}\langle y\rangle$ un morphisme d'algèbres locales. Alors nous avons toujours $\widehat{\varphi}(\mathbb{k}[[x]]) \cap \mathbb{k}\langle y\rangle = \varphi(\mathbb{k}\langle x\rangle)$.*

Soit $\varphi : \mathbb{k}\{x\} \longrightarrow \mathbb{k}\{y\}$. On notera ord_y la valuation naturelle sur $\mathbb{k}\{y\}$, ν la valuation définie sur $\mathbb{k}\{x\}$ par $\nu := \mathrm{ord}_y \circ \varphi$, $A_\nu := \{f \in \mathrm{Frac}(A/\mathrm{Ker}(\varphi)) \ / \ \nu(f) \geq 0\}$ l'anneau de valuation associé à ν, et $\mathbb{k}_\nu$ le corps résiduel de ν. On peut alors définir les rangs suivants :

$$r_1 := 0 \text{ si } A_\nu = \mathbb{k}, \text{i.e. si } \mathrm{Ker}(\varphi) = (x),$$

$$r_1 := \mathrm{tr.deg}_{\mathbb{k}}\nu + 1 \text{ sinon},$$

$$r_2 := \dim\left(\mathbb{k}[[x]]/\mathrm{Ker}(\widehat{\varphi})\right),$$

$$r_3 := \dim\left(\mathbb{k}\{x\}/\mathrm{Ker}(\varphi)\right).$$

On a alors $r_1 \leq r_2 \leq r_3$.
Si $\mathbb{k} = \mathbb{C}$ alors $\widehat{\varphi}(\mathbb{k}[[x]]) \cap \mathbb{k}\{y\} = \varphi(\mathbb{k}\{x\})$ si et seulement si $r_1 = r_2$ [Ga2], [E-H], [Iz], [To2].
Si $\mathbb{k}$ est un corps valué quelconque, alors $r_1 = r_2$ implique que $\widehat{\varphi}(\mathbb{k}[[x]]) \cap \mathbb{k}\{y\} = \varphi(\mathbb{k}\{x\})$ [Ro4]. On obtient alors la proposition suivante :

Proposition 3.5. *Soit $\varphi : \mathbb{k}\{x\} \longrightarrow \mathbb{k}\{y\}$ défini par $\varphi(x_i) = p_i(y)$. Si $r_1 = r_2$ alors l'équation (E) possède la propriété d'approximation cylindrique.*

Soit $\varphi : \mathbb{k}\{x_1\} \longrightarrow \mathbb{k}\{y\}$. Si $r_1 = 0$ alors $\mathrm{Ker}(\varphi) = (x_1)$ et $r_3 = 0$; si $r_1 = 1$ alors nécessairement $r_3 = 1$ car $r_1 \leq r_3 \leq 1 = \dim(\mathbb{k}\{x_1\})$.
Soit $\varphi : \mathbb{k}\{x_1, x_2\} \longrightarrow \mathbb{k}\{y\}$ où $\mathbb{k}$ est un corps valué de caractéristique quelconque. Si $r_1 = 0$ alors $\mathrm{Ker}(\varphi) = (x)\mathbb{k}\{x\}$ et donc $r_1 = r_3$. Si $r_1 = 1$, alors nécessairement $r_3 = 1$: autrement $r_3 = 2$ et alors φ serait injective, et donc $r_1 = 2$ [Ab-vdP], [Ro3]. Finalement si $r_1 = 2$ alors nécessairement $r_3 = 2$.
On obtient donc la proposition suivante :

Proposition 3.6. *Les équations (E) possèdent toutes la propriété d'approximation cylindrique si $n \leq 2$.*

Exemple 3.7. [Ga1] *Soit* $\varphi : \mathbb{C}\{x_1, x_2, x_3,\} \longrightarrow \mathbb{C}\{y_1, y_2\}$ *défini par*

$$\varphi(x_1) = y_1,\ \varphi(x_2) = y_1y_2,\ \varphi(x_3) = y_1y_2e^{y_2}.$$

Ce morphisme est injectif et $\widehat{\varphi}$ *l'est aussi. Néanmoins il existe* $h \in \mathbb{C}\{y\} \cap \widehat{\varphi}(\mathbb{C}[[y]])$ *tel que* $\widehat{\varphi}^{-1}(h) \notin \Bbbk\{x\}$. *En particulier, l'équation*

$$F(x) + (x_1 - y_1)G_1(x, y) + (x_2 - y_1y_2)G_2(x, y) + (x_3 - y_1y_2e^{y_2})G_3(x, y) - h(y) = 0$$

ne vérifie pas la propriété d'approximation cylindrique par rapport à x.

Exemple 3.8. *Soit* $\varphi : \mathbb{C}\{x\} \longrightarrow \mathbb{C}\{y\}$ *tel que* $\varphi(x_i)$ *soit un polynôme pour tout* i. *Alors, d'après le théorème B de* [Be2] *(cf.* [Mi] *aussi), on a* $\widehat{\varphi}(\mathbb{C}[[x]]) \cap \mathbb{C}\{y\} = \varphi(\mathbb{C}\{x\})$. *En particulier, toute équation de type* (E), *où* $\Bbbk = \mathbb{C}$ *et les* $p_i(y)$ *sont des polynômes, vérifie la propriété d'approximation cylindrique par rapport à* x.

4. Existence d'une fonction d'approximation cylindrique

Nous allons montrer ici le résultat suivant :

Théorème 4.1. *Soit* $P(F_i, G_j) \in \Bbbk[[x, y]][F_1, ..., F_r, G_1, ..., G_s]$. *Alors il existe une fonction* $\beta : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ *avec la propriété suivante :*
Soient $c \in \mathbb{N}$, $\overline{f}_i \in \Bbbk[[x]]$, *pour* $1 \leq i \leq r$, *et* $\overline{g}_j \in \Bbbk[[x, y]]$, *pour* $1 \leq j \leq s$, *tels que* $P(\overline{f}_i, \overline{g}_j) \in (x, y)^{\beta(c)}$. *Alors il existe* $f_i \in \Bbbk[[x]]$, *pour* $1 \leq i \leq r$, *et* $g_j \in \Bbbk[[x, y]]$, *pour* $1 \leq j \leq s$, *tels que* $P(f_i, g_j) = 0$ *et* $f_i - \overline{f}_i \in (x)^c$, *pour* $1 \leq i \leq r$, $g_j - \overline{g}_j \in (x, y)^c$, *pour* $1 \leq j \leq s$.

En particulier, en combinant ce résultat avec le théorème 2.1, nous obtenons le résultat suivant :

Théorème 4.2. *Soit* $P(F_i, G_j) \in \Bbbk\langle x, y\rangle[F_1, ..., F_r, G_1, ..., G_s]$. *Alors il existe une fonction* $\beta : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ *avec la propriété suivante :*
Soient $c \in \mathbb{N}$, $\overline{f}_i \in \Bbbk[[x]]$, *pour* $1 \leq i \leq r$, *et* $\overline{g}_j \in \Bbbk[[x, y]]$, *pour* $1 \leq j \leq s$, *tels que* $P(\overline{f}_i, \overline{g}_j) \in (x, y)^{\beta(c)}$. *Alors il existe* $f_i \in \Bbbk\langle x\rangle$, *pour* $1 \leq i \leq r$, *et* $g_j \in \Bbbk\langle x, y\rangle$, *pour* $1 \leq j \leq s$, *tels que* $P(f_i, g_j) = 0$ *et* $f_i - \overline{f}_i \in (x)^c$, *pour* $1 \leq i \leq r$, $g_j - \overline{g}_j \in (x, y)^c$, *pour* $1 \leq j \leq s$.

Soit $P \in \Bbbk[[x, y]]$ comme ci-dessus. Une fonction β qui satisfait le théorème précédent sera appelée une *fonction d'approximation* pour P.
Ce dernier théorème généralise un peu le théorème 4.2. de [BDLvdD] au cas où x est une multivariable. Nous allons montrer le théorème 4.1 à l'aide d'ultraproduits en nous inspirant de la preuve du théorème 3.2. de [BDLvdD]. Nous allons pour cela rappeler brièvement la construction d'un ultraproduit et donner certaines propriétés de celui-ci dont nous avons besoin.

Un *filtre* D (sur $\mathbb{N}$) est un sous-ensemble non vide de $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, l'ensemble des parties de $\mathbb{N}$, qui vérifie les propriétés suivantes :

$$\text{a) } \emptyset \notin D, \quad \text{b) } \mathcal{E}, \mathcal{F} \in D \Longrightarrow \mathcal{E} \cap \mathcal{F} \in D, \quad \text{c) } \mathcal{E} \in D, \mathcal{E} \subset \mathcal{F} \Longrightarrow \mathcal{F} \in D.$$

Un filtre D est *principal* si il existe $\mathcal{E} \in D$ tel que $D = \{\mathcal{F} \ / \ \mathcal{E} \subset \mathcal{F}\}$. Un *ultrafiltre* est un filtre qui est maximal pour l'inclusion. Il est facile de vérifier qu'un filtre D est un ultrafiltre si et seulement si pour tout $\mathcal{E} \subset \mathbb{N}$ on a $\mathcal{E} \in D$ ou $\mathbb{N} - \mathcal{E} \in D$. De la même manière un ultrafiltre est non-principal si et seulement si il contient le filtre $E := \{\mathcal{E} \subset \mathbb{N} \ / \ \mathbb{N} - \mathcal{E} \text{ est fini}\}$.

Soit $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une famille d'anneaux commutatifs nœthériens. Soit D un ultrafiltre non-principal. On définit *l'ultraproduit* A^* de la manière suivante :

$$A^* := \frac{\{(a_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \prod_i A_i\}}{((a_i) \sim (b_i) \text{ ssi } \{i\,/\,a_i = b_i\} \in D)}.$$

L'ultraproduit A^* est muni d'une structure d'anneau commutatif. Si tous les A_i sont des corps alors, A^* est un corps. Si tous les A_i sont des anneaux locaux d'idéal maximal $\mathfrak{m}_i$ alors A^* est un anneau local d'idéal maximal $\mathfrak{m}$ défini par $(a_i)_i \in \mathfrak{m}$ si et seulement si $\{i\,/\,a_i \notin \mathfrak{m}_i\} \in D$. Les preuves de ces résultats sont données dans [BDLvdD].

Nous pouvons maintenant donner la preuve du théorème 4.1 :

Démonstration du théorème 4.1. Supposons que ce théorème est faux. Ceci signifie qu'il existe $d \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $c \in \mathbb{N}$, il existe $\overline{f}_{i,\,c} \in \Bbbk[[x]]$ et $\overline{g}_{j,\,c} \in \Bbbk[[x,\,y]]$, pour $1 \leq i \leq r$ et $1 \leq j \leq s$, tels que

$$P(\overline{f}_{i,\,c},\,\overline{g}_{i,\,c}) \in (x,\,y)^c,$$

mais il n'existe pas de $f_{i,\,c} \in \Bbbk[[x]]$ et $g_{j,\,c} \in \Bbbk[[x,\,y]]$, pour $1 \leq i \leq r$ et $1 \leq j \leq s$, tels que $P(f_{i,\,c},\,g_{i,\,c}) = 0$ et tels que $\overline{f}_{i,\,c} - f_{i,\,c} \in (x)^d$ et $\overline{g}_{j,\,c} - g_{j,\,c} \in (x,\,y)^d$, pour $1 \leq i \leq r$ et $1 \leq j \leq s$.

Soit D un ultrafiltre non-principal et soient $A^* := \left(\prod_{i\in\mathbb{N}} \Bbbk[[x]]\right)/D$ et $B^* := \left(\prod_{i\in\mathbb{N}} \Bbbk[[x,\,y]]\right)/D$. Notons $\Bbbk^* := \left(\prod_{i\in\mathbb{N}} \Bbbk\right)/D$. On peut voir $\Bbbk^*[[x]]$ (resp. $\Bbbk^*[[x,\,y]]$) comme un sous-anneau de A^* (resp. de B^*) en identifiant x_i avec $(x_i,\,x_i,\,...,\,x_i,\,...)$ pour tout i. Soient $\overline{f}_i \in A^*$ (resp. $\overline{g}_j \in B^*$) l'image de la suite $(\overline{f}_{i,\,c})_{c\in\mathbb{N}}$ (resp. $(\overline{g}_{i,\,c})_{c\in\mathbb{N}}$). De la même manière on identifie $P(F_i,\,G_j) \in \Bbbk[[x,\,y]][F_i,\,G_j]$ avec la suite constante $(P(F_i,\,G_j))_{c\in\mathbb{N}} \in \Bbbk^*[[x,\,y]][F_i,\,G_j]$. Comme D contient tous les complémentaires d'ensembles finis, nous avons $P(\overline{f}_i,\,\overline{g}_j) \in (x,\,y)^c$ pour tout $c \in \mathbb{N}$, mais il n'existe pas $f_i \in \Bbbk^*[[x]]$ et $g_j \in \Bbbk^*[[x,\,y]]$ tels que $P(f_i,\,g_j) = 0$, $\overline{f}_i - f_i \in (x)^d$ et $\overline{g}_j - g_j \in (x,\,y)^d$.

Soient $(x)^\infty := \bigcap\limits_{c\geq 0} (x)^c \subset A^*$ et $(x,\,y)^\infty := \bigcap\limits_{c\geq 0} (x,\,y)^c \subset B^*$. Notons A_1 (resp. B_1) le quotient de A^* par $(x)^\infty$ (resp. de B^* par $(x,\,y)^\infty$). Notons respectivement π_A et π_B les projections $A^* \longrightarrow A_1$ et $B^* \longrightarrow B_1$. Il est clair que $\pi_{A_{|\Bbbk^*[[x]]}}$ et $\pi_{B_{|\Bbbk^*[[x,\,y]]}}$ sont injectives d'après le lemme de Nakayama, et donc on peut identifier $\Bbbk^*[[x]]$ et $\Bbbk^*[[x,\,y]]$ avec des sous-anneaux de A_1 et B_1. Alors, d'après le lemme 3.4. [BDLvdD], $A_1 \simeq \Bbbk^*[[x]]$ et $B_1 \simeq \Bbbk^*[[x,\,y]]$.

On a alors $P(\pi_A(\overline{f}_i),\,\pi_B(\overline{g}_j)) = \pi_B(P(\overline{f}_i,\,\overline{g}_j)) = 0$ d'après ce qui précède. Notons alors $f_i := \pi_A(\overline{f}_i)$ pour $1 \leq i \leq r$, et $g_j := \pi_B(\overline{g}_j)$ pour $1 \leq j \leq s$. On a donc $P(f_i,\,g_j) = 0$ et $f_i - \overline{f}_i \in (x)^c$ et $g_j - \overline{g}_j \in (x,\,y)^c$ pour tout $c \in \mathbb{N}$. On obtient alors une contradiction avec ce qui précède. □

Exemple 4.3. *Soit* $\varphi\ :\ \Bbbk[[x]] \longrightarrow \Bbbk[[y]]$. *Alors, d'après le lemme de Chevalley (*[Ch] *lemme 4.4), il existe une fonction* $\beta\ :\ \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ *telle que*

$$(\star) \qquad \varphi^{-1}((y)^{\beta(c)}) \subset (x)^c + Ker(\varphi).$$

On appelera fonction de Chevalley de φ *toute fonction* β *qui vérifie* $(\star)$.

Soient $P(F,\,G_j) := F(x) + \sum_{j=1}^n (x_j - \varphi(x_j)(y))G_j(x,\,y)$ *et* β *une fonction de Chevalley de* φ. *Soient* $c \in \mathbb{N}$, $\overline{f} \in \Bbbk[[x]]$, $\overline{g}_j \in \Bbbk[[x,\,y]]$ *pour* $1 \leq j \leq n$ *tels que* $P(\overline{f},\,\overline{g}_j) \in (x,\,y)^{\beta(c)}$. *Alors* $P(\overline{f}) \in (y)^{\beta(c)}$, *donc* $\overline{f} \in (x)^c + Ker(\varphi)$. *Soit* $f \in Ker(\varphi)$ *tel que* $f - \overline{f} \in (x)^c$. *Alors il existe* $\tilde{g}_j \in \Bbbk[[x,\,y]]$ *tels que* $f + \sum_j (x_j - \varphi(x_j)(y))\tilde{g}_j = 0$. *Finalement, en utilisant le lemme 3.2, on voit qu'il existe* $g_j \in \Bbbk[[x,\,y]]$ *tels que* $P(f,\,g_j) = 0$ *et* $g_j - \overline{g}_j \in (x,\,y)^c$. *Donc* β *est une*

fonction d'approximation cylindrique de P.
Inversement, supposons que $P(F, G_j)$ admet une fonction d'approximation cylindrique β'. Soient $c \in \mathbb{N}$ et $\overline{f} \in \varphi^{-1}((y)^{\beta'(c)})$. Alors $\varphi(\overline{f}) \in (y)^{\beta'(c)}$ et donc il existe $\overline{g}_j \in \Bbbk[[x, y]]$ pour $1 \leq j \leq n$ tels que $P(\overline{f}, \overline{g}_j) \in (x, y)^{\beta'(c)}$. Donc il existe $f \in \Bbbk[[x]]$ et $g_j \in \Bbbk[[x, y]]$ tels que $P(f, g_j) = 0$ et $f - \overline{f} \in (x)^c$. En particulier $f \in Ker(\varphi)$. Donc β' est une fonction de Chevalley de φ.
On voit donc que les fonctions de Chevalley de φ sont les fonctions d'approximation cylindrique de P.
En particulier, d'après [Iz] *et* [Ro3]*, on voit que P admet une fonction d'approximation cylindrique majorée par une fonction affine si et seulement si le morphisme satisfait $r_1 = r_3$.*

Dans le cas où il n'y a pas de variables F_i, l'existence d'une fonction d'approximation a été montrée par M. Artin [Ar2]. Dans ce cas, pendant longtemps la question s'est posée de savoir si il existait une fonction d'approximation qui serait une fonction affine. Un premier contre-exemple à été donné dans [Ro1] et un autre dans [Ro2]. Dans ces deux exemples, on a montré que les fonctions d'approximation ont une croissance supérieure ou égale à une fonction polynomiale de degré 2. Nous allons donner ici un exemple encore plus pathologique dans le cas où il y a des variables F_i :

Exemple 4.4. [Ro3] *Soient $\alpha : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ une fonction croissante et $\Bbbk$ un corps. Soit $(n_i)_i$ une suite d'entiers telle que $n_{i+1} > \alpha(n_i)$ pour tout i et telle que $\xi(Y) := \sum_{i\geq 1} Y^{n_i}$ soit transcendant sur $\Bbbk(Y)$. On définit alors le morphisme $\varphi : A := \Bbbk[[x_1, x_2, x_3]] \longrightarrow B := \Bbbk[[y_1, y_2]]$ de la manière suivante :*

$$(\varphi(x_1), \varphi(x_2), \varphi(x_3)) = (y_1, y_1y_2, y_1\xi(y_2)).$$

On montre de la manière suivante que φ est injective. En effet, soit $f \in Ker(\varphi)$. On peut écrire $f = \sum_d f_d$, où f_d est homogène de degré d. Alors $\varphi(f) = \sum y_1^d f_d(1, y_2, \xi(y_2)) = 0$. Donc $f_d(1, y_2, \xi(y_2)) = 0$ pour tout d. Comme $1, y_2, \xi(y_2)$ sont algébriquement indépendants sur $\Bbbk$, ceci implique $f_d = 0$ pour tout d et donc $f = 0$.
Pour tout entier i on peut définir :

$$\overline{f}_i := x_1^{n_i-1}x_3 - \left(x_2^{n_1}x_1^{n_i-n_1} + \cdots + x_2^{n_{i-1}}x_1^{n_i-n_{i-1}} + x_2^{n_i}\right).$$

On a alors :

$$\varphi(\overline{f}_i) = y_1^{n_i}\xi(y_2) - y_1^{n_i}\sum_{k=1}^{i} y_2^{n_k} \in (y)^{n_i+n_{i+1}} \subset (y)^{\alpha(n_i)}$$

mais $\overline{f}_i \notin (x)^{n_i+1}$ pour tout i. Donc toute fonction de Chevalley β de φ vérifie $\beta(n_i + 1) > \alpha(n_i)$ pour tout $i \in \mathbb{N}$. Soit

$$P(F, G_j) := F(x) + \sum_{j=1}^{4}(x_j - \varphi(x_j)(y))G_j(x, y) \in \Bbbk[[x, y]][F, G_j].$$

D'après l'exemple 4.3, toute fonction d'approximation cylindrique de P, notée β, vérifie alors $\beta(n_i + 1) > \alpha(n_i)$ pour tout $i \in \mathbb{N}$. Comme $n_i \longrightarrow +\infty$ quand $i \longrightarrow +\infty$, on voit que $\limsup \frac{\beta(n)}{\alpha(n)} \geq 1$. Nous obtenons alors le corollaire suivant :

Corollaire 4.5. *Il existe $P(F_i, G_j)$ comme dans le théorème 4.1 qui n'admet pas de fonction d'approximation cylindrique qui est une fonction récursive.*

Démonstration. En effet, il existe des fonctions croissantes qui ne sont bornées par aucune fonction récursive. Il suffit de choisir une telle fonction α et de considérer alors le polynôme $P(F, G_j)$ de l'exemple précédent. □

Remarque 4.6. *Dans* [BDLvdD]*, il est affirmé que, pour tout $P(F_i, G_j)$, il existe toujours une fonction d'approximation cylindrique récursive pour P lorsque $n = 1$, c'est-à-dire lorsque x n'est pas une multivariable (voir remarque après le théorème 6.1* [BDLvdD]*).*

Références

[Ab-vdP] S. S. Abhyankar, M. van der Put, Homomorphisms of analytic local rings, *J. Reine Angew. Math.*, **242**, (1970), 26-60.

[Ar1] M. Artin, On the solutions of analytic equations, *Invent. Math.*, **5**, (1968), 177-291.

[Ar2] M. Artin, Algebraic approximation of structures over complete local rings, *Publ. Math. IHES*, **36**, (1969), 23-58.

[Be1] J. Becker, A counterexample to Artin approximation with respect to subrings, *Math. Ann.*, **230**, (1977), no. 2, 195-196.

[Be2] J. Becker, Exposé on a conjecture of Tougeron, *Annales de l'Institut Fourier*, **27**, no. 4, (1977), 9-27.

[BDLvdD] J. Becker, J. Denef, L. Lipshitz, L. van den Dries, Ultraproducts and approximation in local rings I, *Invent. Math.*, **51**, (1979), 189-203.

[Ch] C. Chevalley, On the theory of local rings, *Ann. of Math. (2)*, **44**, (1943), 690-708.

[E-H] P. M. Eakin, G. A. Harris, When $\Phi(f)$ convergent implies f convergent, *Math. Ann.*, **229**, (1977), 201-210.

[Ga1] A. M. Gabrielov, The formal relations between analytic functions, *Funkcional. Anal. i Prilovzen*, **5**, (1971), 64-65.

[Ga2] A. M. Gabrielov, Formal relations among analytic functions, *Izv. Akad. Naut. SSSR*, **37**, (1973), 1056-1088.

[Gr] H. Grauert, Über die Deformation isolierter Singularitäten analytischer Mengen, *Invent. Math.*, **15**, (1972), 171-198.

[Iz] S. Izumi, The rank condition and convergence of formal functions, *Duke Math. J.*, **59**, (1989), 241-264.

[Iz2] S. Izumi, Increase, convergence and vanishing of functions along a Moishezon space, *J. Math. Kyoto Univ.*, **32-1**, (1992), 245-258.

[KPPRM] H. Kurke, G. Pfister, D. Popescu, M. Roczen, T. Mostowski, Die Approximationseigenschaft lokaler Ringe, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 634. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1978. iv+204 pp.

[La] D. Lascar, Caractère effectif des théorèmes d'approximation d'Artin, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B*, **287**, (1978), no. 14, A907-A910.

[MC] P. McCarthy, Algebraic extensions of fields, Dover.

[Mi] P. Milman, Polynomial and analytic homomorphisms of analytic rings, *Math. Ann.*, **232**, (1978), 247-253.

[Ma] H. Matsumura, Commutative Ring Theory, Cambridge University Press, 1986.

[Na] M. Nagata, Local Rings, Interscience, New York, (1962).

[Po] D. Popescu, General Neron desingularisation and approximation, *Nagoya Math. J.*, **104**, (1986), 85-115.

[Ro1] G. Rond, Sur la linéarité de la fonction de Artin, *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, **38**, no. 6, (2005), 979-988.

[Ro2] G. Rond, Lemme d'Artin-Rees, théorème d'Izumi et fonction de Artin, *J. of Algebra*, **299**, (2006), 245-275.

[Ro3] G. Rond, Homomorphisms of local algebras in positive characteristic, ArXiv AC/0612214, soumis.

[Ro4] G. Rond, An algebraic proof of Gabrielov's theorem about analytic homomorphisms in any characteristic, ArXiv 0704.2144, soumis.

[Sp] M. Spivakovsky, A new proof of D. Popescu's theorem on smoothing of ring homomorphisms, *J. Amer. Math. Soc.*, **12** (1999), no. 2, 381-444.

[Te] B. Teissier, Résultats récents sur l'approximation des morphismes en algèbre commutative [d'après Artin, Popescu et Spivakovsky], *Sém. Bourbaki*, **784**, (1994).

[To1] J.-Cl. Tougeron, Courbes analytiques sur un germe d'espace analytique et applications, *Annales de l'Institut Fourier*, **26**, no. 2, (1976), 117-131.

[To2] J.-Cl. Tougeron, Sur les racines d'un polynôme à coefficients séries formelles, *Real analytic and algebraic geometry (Trento 1988)*, 325-363, *Lectures Notes in Math.*, **1420**, (1990).

Institut de Mathématiques de Luminy, Université Aix-Marseille 2, Campus de Luminy, case 907, 13288 Marseille cedex 9

E-mail address: `rond@iml.univ-mrs.fr`