

157

ASTÉRIQUE

2008

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES  
ET SINGULARITÉS  
EN L'HONNEUR DE J.M. AROCA

*Séries de Poincaré motiviques*

Guillaume Rond

**SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE**

Publié avec le concours du CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

# SÉRIES DE POINCARÉ MOTIVQUES D'UN GERME D'HYPERSURFACE IRRÉDUCTIBLE QUASI-ORDINAIRE

par

Guillaume Rond

---

**Résumé.** — Nous donnons ici une description combinatoire, faisant intervenir les exposants caractéristiques de la singularité, des arcs tronqués tracés sur un germe d'hypersurface quasi-ordinaire. Cela nous permet d'obtenir une expression inductive des séries de Poincaré de ce type de singularité.

**Abstract (Motivic Poincaré series of a quasi-ordinary irreducible germ of hypersurface)**

We give here a combinatorial description, using characteristic exponents of the singularity, of the truncated arcs on a quasi-ordinary hypersurface germ. This allows us to give an inductive expression of the Poincaré series of this kind of singularity.

## 1. Séries de Poincaré motiviques

Soit  $(X, 0)$  un germe d'espace analytique sur un corps  $\mathbb{k}$  de caractéristique nulle. Soit  $p$  un entier naturel. Nous définissons l'espace des jets d'ordre  $p$ , noté  $X_p$ , comme étant la variété algébrique sur  $\mathbb{k}$  dont les points  $\mathbb{K}$ -rationnels, pour toute extension de corps  $\mathbb{K}$  de  $\mathbb{k}$ , sont les  $\mathbb{K}[t]/t^{p+1}$ -points de  $(X, 0)$ . C'est-à-dire que nous avons  $X_p = \{\varphi : \text{Spec } \mathbb{k}[[t]]/t^{p+1} \rightarrow (X, 0)\}$ . Dans le cas particulier où  $(X, 0)$  est un germe d'espace analytique défini par les équations  $f_i(x) = 0$ , pour  $i = 1, \dots, r$  et  $x = (x_1, \dots, x_s)$ , alors  $X_p$  est la variété affine définie par les équations en les variables  $x_{j,k}$  pour  $k = 1, \dots, p$  et  $j = 1, \dots, s$ , provenant du fait que  $f_i(x_{j,1}t + \dots + x_{j,p}t^p) = 0 \pmod{t^{p+1}}$  pour tout  $i$ .

La limite projective de ces variétés, appelée espace des arcs sur  $X$ , est notée  $X_\infty$  et n'est en général pas de type fini sur  $\mathbb{k}$ .

Nous avons les morphismes naturels de troncations

$$\pi_p : X_\infty \longrightarrow X_p \quad \text{et} \quad \pi_{p,q} : X_p \longrightarrow X_q \quad \text{pour } p \geq q .$$

---

**Classification mathématique par sujets (2000).** — 14B05, 32S25; 11S40, 14J17.

**Mots clefs.** — Singularités quasi-ordinaires, espaces d'arcs, séries de Poincaré motiviques.

Nous nous intéressons ici au comportement des arcs tronqués, c'est-à-dire aux  $\pi_p(X_\infty)$  quand  $p$  varie. Nous savons, d'après le théorème de Greenberg [13], que ce sont des ensembles constructibles. On peut donc considérer leur image dans l'anneau de Grothendieck  $K_0(\text{Var}_{\mathbb{k}})$  des variétés sur  $\mathbb{k}$  [6]. Plus précisément nous nous intéressons à la série de Poincaré géométrique  $P_{\text{g\u00e9om}, X, 0}(T) := \sum_{p \geq 0} [\pi_p(X_\infty)] T^p$  où  $[Y]$  représente la classe de la variété  $Y$  dans  $K_0(\text{Var}_{\mathbb{k}})$ . Denef et Loeser ont montré que cette série est rationnelle avec un dénominateur qui s'écrit sous forme d'un produit de termes de la forme  $1 - \mathbb{L}^a T^b$  où  $\mathbb{L} := [\mathbb{A}_{\mathbb{k}}^1]$  et  $a \in \mathbb{Z}$  et  $b \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$  (cf. [6]). Cependant la preuve utilise à la fois la résolution des singularités du germe singulier et un théorème d'élimination des quantificateurs dû à Pas [23], et n'apporte aucune information quantitative, en particulier sur les pôles. Cette série a, jusqu'à présent, été calculée pour les branches planes (cf. [7]) et les singularités de surfaces toriques normales (cf. [17] et [22]).

Par ailleurs, on peut aussi considérer  $\varphi_p$ , la formule dans le langage de premier ordre de  $\mathbb{k}[[T]]$ , dû à Pas [23], qui définit  $\pi_p(X_\infty)$ , qui est un ensemble constructible, et regarder sa mesure arithmétique  $\chi_c(\varphi_p)$  dans l'anneau de Grothendieck  $K_0^v(\text{Mot}_{\mathbb{k}, \overline{\mathbb{Q}}})_{\mathbb{Q}}$ , c'est-à-dire l'anneau de Grothendieck des motifs de Chow sur  $\mathbb{k}$  à coefficients dans  $\overline{\mathbb{Q}}$  tensorisé avec  $\mathbb{Q}$  (cf. [7] ou [14] pour une introduction). Une autre série intéressante est alors la série définie par  $\sum_{p \geq 0} \chi_c(\varphi_p) T^p$ . Cette série se spécialise pour tout  $q$  premier, sauf un nombre fini, en la série  $\sum_{p \geq 0} N_{q^p}(X, 0) T^p$ , où  $N_{q^p}(X, 0)$  est le cardinal des  $\mathbb{Z}/q^p\mathbb{Z}$ -points de  $(X, 0)$  qui se relèvent en des  $\mathbb{Z}_q$ -points de  $(X, 0)$ . Denef et Loeser ont montré le même résultat de rationalité pour cette série que pour la série géométrique (cf. [7]). Cette série a été calculée pour les branches planes (cf. [7]) et les singularités de surfaces toriques normales (cf. [22]). Pour les branches planes ces deux séries diffèrent et pour les surfaces normales toriques, J. Nicaise montre l'égalité.

Nous avons effectué ici le calcul des séries géométrique et arithmétique d'un germe d'hypersurface irréductible quasi-ordinaire. Ce type de singularité généralise les singularités de courbes planes dans le sens où il existe un paramétrage de ces singularités à l'aide de séries fractionnaires à plusieurs variables dont le dénominateur est borné. L'ensemble des exposants, apparaissant dans l'écriture de ces séries, appartient au groupe engendré par un nombre fini d'exposants, appelés *exposants caractéristiques*, qui généralisent les exposants caractéristiques d'une courbe plane.

Pour calculer la mesure motivique de l'ensemble des arcs tronqués à l'ordre  $p$ , nous décomposons cet ensemble en deux ensembles constructibles : l'ensemble des arcs tronqués qui ne se relèvent pas en arcs inclus dans le complémentaire du tore et son complémentaire. Nous donnons d'abord une caractérisation combinatoire des arcs tronqués qui ne se relèvent pas en arcs inclus dans le complémentaire du tore. Cela nous permet de calculer la mesure motivique de l'ensemble de ces arcs tronqués. Enfin nous donnons une formule de récurrence sur la dimension du germe pour la mesure de son complémentaire. Nous obtenons alors des formules générales, inductives sur la dimension de l'hypersurface, de ces deux séries. Malheureusement ces formules font intervenir des sommes géométriques sur des cônes rationnels assez difficiles à calculer

en général. Nous donnons enfin une formule explicite de ces séries dans le cas où les coordonnées des exposants caractéristiques de la singularité sont supérieures à 1, c'est-à-dire quand la projection de celle-ci est « très » transverse (théorème 9.3).

Nous faisons remarquer que ces séries sont différentes des séries d'Igusa étudiées dans [2], séries qui sont essentiellement les séries génératrices des espaces de jets tracés sur un germe singulier. Nous pouvons par ailleurs citer le travail en cours [3] dû à Helena Cobo Pablos et Pedro Gonzalez-Perez où le calcul des séries de Poincaré motiviques pour les germes de surfaces irréductibles à singularité quasi-ordinaire est fait à l'aide de méthodes de géométrie torique qui s'inspirent du travail effectué dans [17].

Je tiens à remercier ici M. Lejeune-Jalabert pour avoir fait preuve de patience à l'écoute de ces résultats et pour ses précieux commentaires. Je remercie aussi J. Nicaise pour m'avoir, le premier, parlé des séries de Poincaré motivique lors du GAEL XII, et Helena Cobo Pablos et Pedro Gonzalez-Perez pour m'avoir indiqué une erreur dans la première version de ce travail.

## 2. Singularités quasi-ordinaires

**2.1. Exposants caractéristiques.** — Nous rappelons ici la définition de singularité quasi-ordinaire et les propriétés de ces singularités dont nous aurons besoin.

**Définition 2.1** (cf. [11] par exemple). — Soit  $f \in \mathbb{C}\{X_1, \dots, X_m\}[Y]$  un polynôme distingué. On dit que  $f$  est quasi-ordinaire si son discriminant  $\Delta_Y(f)$  a un terme dominant, c'est-à-dire si il s'écrit  $X^\alpha u$  où  $\alpha \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^m$  et  $u$  est inversible. Géométriquement, cela revient à dire que le discriminant de la projection du germe  $(X, 0) \subset \mathbb{C}^{m+1} \rightarrow \mathbb{C}^m$  qui envoie le point de coordonnées  $(x_1, \dots, x_m, y)$  sur le point de coordonnées  $(x_1, \dots, x_m)$  est à croisements normaux.

Nous avons alors le théorème

**Théorème 2.2** ([10], [20]). — *Soit  $f$  irréductible et quasi-ordinaire. Alors nous avons :*

1. Si  $\deg_Y(f) = n$  alors  $f$  a  $n$  racines distinctes dans  $\mathbb{C}\{X^{\frac{1}{n}}\}$ .
2. Si  $\xi$  est une racine de  $f$  dans  $\mathbb{C}\{X^{\frac{1}{n}}\}$ , alors il existe des éléments de  $(\frac{1}{n}\mathbb{Z})^m$ , strictement ordonnés,  $a(1) < \dots < a(g)$  (i.e.  $a_k(1) \leq \dots \leq a_k(g)$  pour tout  $k$  et  $a(i) \neq a(j)$  pour  $i \neq j$ ) tels que l'on puisse écrire

$$\xi = \xi_0 + \xi_1 + \dots + \xi_g$$

$$\text{avec } \xi_0 \in \mathbb{C}\{X\},$$

$$X^c \text{ apparaît dans } \xi \implies c \in \mathbb{Z}^m + \sum_{a(i) \leq c} a(i)\mathbb{Z},$$

$$X^c \text{ apparaît dans } \xi_i \implies c \in \mathbb{Z}^m + \sum_{j \leq i} a(j)\mathbb{Z},$$

$$\text{et } \nu_X(\xi_k) = a(k) \text{ pour tout } k.$$

3. Si  $\xi$  est racine de  $f$  dans  $\mathbb{C}\{X^{\frac{1}{n}}\}$ , alors l'ensemble des racines de  $f$  est l'ensemble formé des  $\xi(w_1 X_1^{\frac{1}{n}}, \dots, w_m X_m^{\frac{1}{n}})$  où les  $w_k$  parcourent l'ensemble des racines  $n$ -ièmes de l'unité.

**Remarque 2.3.** — Quitte à faire le changement de variables

$$X_k \longmapsto X_k \quad \forall k, \quad \text{et} \quad Y \longmapsto Y + \xi_0$$

nous pouvons supposer que  $\xi_0 = 0$  dans le théorème précédent.

**Définition 2.4.** — Les  $a(k)$  du lemme précédent sont appelés les exposants caractéristiques de  $f$ .

Nous pouvons définir les réseaux  $M = M_0 := \mathbb{Z}^m$  et  $M_k := \mathbb{Z}^m + \sum_{l \leq k} a(l)\mathbb{Z}^m$  pour  $1 \leq k \leq g$  et les réseaux duaux  $N_i := \check{M}_i$  et  $N = N_0$ . Nous définissons les entiers caractéristiques  $n_k$  du germe d'hypersurface comme étant les indices des  $M_{k-1}$  dans  $M_k$  :

$$n_k = [M_k : M_{k-1}].$$

Nous posons aussi  $n_0 = 1$  et  $n_{-1} = 0$ . Nous notons

$$e_{k-1} = n_k \dots n_g \quad \text{pour} \quad k = 1, \dots, g.$$

En particulier nous avons  $e_0 = n = n_1 \dots n_g$ .

Nous pouvons aussi définir les vecteurs  $\gamma(k)$  par :

$$\gamma(1) := a(1)$$

$$\gamma(k+1) := n_k \gamma(k) + a(k+1) - a(k)$$

Dans le cas  $m = 1$ , ce sont les  $n\gamma_i$  sont des générateurs du semi-groupe de l'ensemble des multiplicités d'intersection  $(C, X)_0$  où  $C$  parcourt l'ensemble des germes en 0 de courbes planes non contenues dans  $X$  (cf. [24]).

**2.2. Remarques sur l'écriture en coordonnées d'un arcs tracé sur un germe d'hypersurface irréductible à singularité quasi-ordinaire.** — Soit  $\varphi(t) := (x_1(t), \dots, x_m(t), y(t))$  un arc tracé sur un germe  $(X, 0)$  d'hypersurface irréductible à singularité quasi-ordinaire d'exposants caractéristiques  $a(1), \dots, a(g)$  défini par un polynôme de Weierstrass  $f \in \mathbb{C}\{X_1, \dots, X_m\}[Y]$ . Alors  $f(x_1(t), \dots, x_m(t), y(t)) = 0$ , donc  $y(t) = \xi(x^{1/n}(t))$  où  $\xi = \xi_1 + \dots + \xi_g$  est une racine de  $f$  (avec les notations du théorème 2.2) et les  $x_i^{1/n}(t)$  sont des racines  $n$ -ièmes de  $x_i(t)$  dans  $\mathbb{C}[[t^{1/n}]]$ . Nous noterons souvent  $\xi$  au lieu de  $\xi(x^{1/n}(t))$  quand les racines  $n$ -ièmes de  $x_i(t)$  seront fixées.

Nous pouvons alors faire les deux remarques suivantes :

**Remarque 2.5.** — Soit  $X^a = X_1^{a_1} \dots X_m^{a_m}$  un monôme de  $\mathbb{C}[X_1^{1/n}, \dots, X_m^{1/n}]$ . Considérons  $m$  séries  $x_i(t) = \sum_k x_{i,k} t^k$  de  $\mathbb{C}[[t]]$ , et notons  $l_i = \text{ord}(x_i(t))$ . Le choix d'une racine  $n$ -ième de  $x_i(t)$  dans  $\mathbb{C}[[t^{1/n}]]$  dépend uniquement du choix d'une racine  $n$ -ième

de  $x_{i,l_i}$  dans  $\mathbb{C}$ . Pour tout  $i$  fixons une racine  $n$ -ième de  $x_{i,l_i}$  et notons la  $x_{i,l_i}^{1/n}$ . Nous noterons alors sans équivoque  $x_{i,l_i}^{a_i} = (x_{i,l_i}^{1/n})^{na_i}$ . Dans ce cas nous avons

$$\begin{aligned} x_i(t)^{a_i} &= x_{i,l_i}^{a_i} t^{a_i l_i} \left( 1 + \sum_{k \geq l_i+1} \frac{x_{i,k}}{x_{i,l_i}} t^{k-l_i} \right)^{a_i} = x_{i,l_i}^{a_i} t^{a_i l_i} \left( 1 + \sum_{k \geq 1} \frac{x_{i,k+l_i}}{x_{i,l_i}} t^k \right)^{a_i} \\ &= x_{i,l_i}^{a_i} t^{a_i l_i} \left( 1 + a_i \sum_{k \geq 1} \frac{x_{i,k+l_i}}{x_{i,l_i}} t^k + \dots + \binom{a_i}{j} \left( \sum_{k \geq 1} \frac{x_{i,k+l_i}}{x_{i,l_i}} t^k \right)^j + \dots \right) \end{aligned}$$

avec  $\binom{a_i}{j} := \frac{a_i(a_i-1)\dots(a_i-j+1)}{j!}$ . Nous voyons que  $x_1^{a_1}(t) \dots x_m^{a_m}(t)$  est dans  $\mathbb{C}[[t]]$  si et seulement si  $\sum_i a_i l_i \in \mathbb{N}$ . Si tel est le cas, pour tout  $c \in \mathbb{N}$  avec  $c > \sum_i a_i l_i$ , le coefficient de  $t^c$  dans l'expression de la série  $x_1^{a_1}(t) \dots x_m^{a_m}(t)$  est un polynôme de la forme suivante :

$$\prod_{i=1}^m x_{i,l_i}^{a_i} P \left( x_{i,k}/x_{i,l_i}; l_i + 1 \leq k \leq c - \sum_j a_j l_j + l_i \text{ et } 1 \leq i \leq m \right)$$

où  $P$  est un polynôme quasi-homogène de poids  $c - \sum_j a_j l_j$  et où  $x_{i,k}/x_{i,l_i}$  est de poids  $k - l_i$ .

**Définition 2.6.** — Notons  $b_k : \mathbb{Z}^m \rightarrow \mathbb{Q}$  la forme linéaire

$$b_k(l) := \sum_{i=1}^m a_i(k)l_i, \quad \forall k \in \{0, \dots, g\}$$

et  $M$  l'application linéaire

$$\begin{aligned} M : \mathbb{Z}^m &\longrightarrow (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^g \\ (l_1, \dots, l_m) &\longmapsto (n \sum a_i(1)l_i, \dots, n \sum a_i(g)l_i) \end{aligned}$$

**Remarque 2.7.** — Si  $l_i$  est l'ordre de  $x_i(t)$ , alors d'après le théorème 2.2, nous voyons que nécessairement  $b_1(l) \in \mathbb{N}$  et donc  $\xi_1(x^{1/n}(t)) \in \mathbb{C}[[t]]$ . En retranchant  $\xi_1(x^{1/n}(t))$  à  $y(t)$ , nous voyons alors que  $b_2(l) \in \mathbb{N}$  et donc que  $\xi_2(x^{1/n}(t)) \in \mathbb{C}[[t]]$ . Par induction nous voyons que

$$(\text{ord}(x_1(t)), \dots, \text{ord}(x_m(t))) \in \text{Ker } M.$$

Inversement, si l'on se fixe  $m$  séries formelles en  $t$ , notées  $x_i(t)$  pour  $1 \leq i \leq m$ , qui vérifient  $(\text{ord}(x_1(t)), \dots, \text{ord}(x_m(t))) \in \text{Ker } M \cap (\mathbb{N}^*)^m$ , alors pour toute solution  $\xi$  de  $f$ , nous avons  $\xi(x^{1/n}(t)) \in \mathbb{C}[[t]]$ , et  $(x_1(t), \dots, x_m(t), \xi(x^{1/n}(t)))$  définit un arc tracé sur  $(X, 0)$ .

**2.3. Squelette de la singularité.** — Nous allons maintenant relier  $\text{Ker } M$  aux réseaux apparaissant dans une résolution plongée torique de  $(X, 0)$ . Nous rappelons ici la construction de la résolution plongée torique construite par P. Gonzalez Perez [12]. Dans la suite, nous noterons  $Z_\Sigma$  la variété torique d'éventail  $\Sigma$ .

Soit  $R = \mathbb{C}\{X_1, \dots, X_m\}[Y]/(f)$  l'anneau des fonctions de  $(X, 0)$ . L'anneau  $R$  est une  $\mathbb{C}\{X_1, \dots, X_m\}$ -algèbre de finie. Notons  $\Delta$  le cône  $\mathbb{R}_{\geq 0}^{m+d} \subset (N_\Delta)_\mathbb{R}$  où  $N_\Delta$  est le réseau  $N \oplus \mathbb{Z}^g$ . Soit  $u_1, \dots, u_g$  la base canonique de  $\{0\} \oplus \mathbb{Z}^g$ . Les éléments de  $\check{\Delta} \cap \check{N}_\Delta$  sont de la forme  $(v, w)$  où  $v \in \mathbb{R}_{\geq 0}^m \cap M$  et  $w = w_1 u_1^* + \dots + w_g u_g^*$  avec  $w_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ . Soient  $Z_\Delta$  est la variété torique associée au cône  $\Delta$  et  $o_\Delta$  l'orbite de dimension 0 de la variété torique  $Z_\Delta$ . La variété  $Z_\Delta$  est l'espace affine de dimension  $m + g$  et  $o_\Delta$  est exactement l'origine de celui-ci. Nous allons considérer le plongement  $(X, 0) \subset (Z_\Delta, o_\Delta)$ , défini par le morphisme de  $\mathbb{C}\{X_1, \dots, X_m\}$ -algèbres :

$$\Psi : \mathbb{C}\{X_1, \dots, X_m\}[U_1, \dots, U_{g-1}] \longrightarrow R$$

qui à  $U_j$  associe  $q_{j-1}(\xi)$  où  $(q_0, q_1, \dots, q_{g-1})$  est un système de racines approchées de  $f$  (c'est-à-dire que  $q_j$  est le polynôme quasi-ordinaire minimal de  $\mathbb{C}\{X_1, \dots, X_m\}[Y]$  associé à la branche  $\xi_1 + \dots + \xi_j$  ; en particulier  $q_0 = Y$ ).

Soit

$$\begin{aligned} \psi : M_\Delta &\longrightarrow M_g \\ (v, w) &\longmapsto v + \sum_{k=1}^g w_k \gamma(k) \end{aligned}$$

Soit  $L \subset (N_\Delta)_\mathbb{R}$  l'espace linéaire défini comme étant l'orthogonal de  $\text{Ker}(\psi)$  et soit  $\Xi$  le cône  $\Delta \cap L$ .

**Définition 2.8 ([18]).** — Nous appellerons *squelette* de la singularité  $(X, 0)$  le cône  $\Xi$ .

Nous avons alors le

**Théorème 2.9 ([12]).** — Soit  $\Sigma$  une division de  $\Delta$  contenant  $\Xi$ . Alors pour toute division régulière  $\Sigma'$  de  $\Sigma$  contenant tous les cônes réguliers de  $\Sigma$ , la composition du morphisme torique induit  $\varphi : Z_{\Sigma'} \longrightarrow Z_\Sigma$  avec  $\pi_\Sigma : Z_\Sigma \longrightarrow Z_\Delta$  est une résolution plongée de  $X$ .

Nous pouvons alors donner une description de  $\text{Ker } M$ . Tout d'abord nous appellerons *vecteur caractéristique* de  $h$  (où  $h$  est un arc de  $(\mathbb{A}_\mathbb{C}^m, 0)$  défini par  $(x_1(t), \dots, x_m(t))$ ) le vecteur  $(x_1(t), \dots, x_m(t), q_0(\xi), \dots, q_g(\xi))$ . Nous appellerons *vecteur des ordres* du vecteur caractéristique  $h$  le vecteur de coordonnées  $(\text{ord}(x_1(t)), \dots, \text{ord}(x_m(t)), \text{ord}(q_0(\xi)), \dots, \text{ord}(q_g(\xi)))$ .

**Proposition 2.10.** — Le squelette  $\Xi$  correspond exactement à l'ensemble des vecteurs des ordres des vecteurs caractéristiques des arcs tracés sur  $(X, 0)$ . En particulier le sous-réseau  $\text{Ker } M \subset N$  est égal à la projection de  $\Xi$  sur  $N$ .

*Démonstration.* — L'application linéaire  $\psi$  est définie par la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \gamma_1(1) & \cdots & \gamma_1(g) \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \gamma_m(1) & \cdots & \gamma_m(g) \end{pmatrix}$$

Le noyau de  $\psi$  est donc l'image de l'application linéaire de  $N_g$  dans  $N_\Delta$  définie par la transposée de cette matrice. Or  $N_g = \text{Ker } M$ . Donc  $\Xi$  est exactement l'ensemble des éléments de la forme  $(\underline{l}, \underline{p})$  avec  $\underline{l} \in \text{Ker } M$  et  $p_k = \sum_i \gamma_i(k) l_i$  pour  $1 \leq k \leq g$ . Or, pour tout vecteur caractéristique  $(x_1(t), \dots, x_m(t), q_0(\xi), \dots, q_g(\xi))$ , nous avons  $\text{ord}(q_k(\xi)) = \sum_i \gamma_i(k) \text{ord}(x_i(t))$ . Donc  $\Xi$  correspond exactement à l'ensemble des vecteurs caractéristiques. La dernière assertion découle alors de la remarque 2.7.  $\square$

### 3. Définitions

Soit  $(X(a(1), \dots, a(g)), 0)$  est un germe d'hypersurface irréductible, mais non nécessairement réduit, défini par  $f$  un polynôme de Weierstrass quasi-ordinaire de  $\mathbb{C}\{X_1, \dots, X_m\}[Y]$  de degré  $n$  comme précédemment. Nous noterons  $h(Z) = h(Z_1, \dots, Z_m)$  un élément de  $\mathbb{C}\{Z_1, \dots, Z_m\}$  tel que  $f(Z_1^n, \dots, Z_m^n, h(Z)) = 0$ . Nous noterons  $X(a(1), \dots, a(g))_\infty$  l'ensemble des arcs tracés sur ce germe et centrés en l'origine, et  $\varphi = \varphi(a(1), \dots, a(g))$  la formule qui définit  $X(a(1), \dots, a(g))_\infty$  dans le langage de Pas (cf. [23] et [7]). Nous noterons  $\pi_p(X(a(1), \dots, a(g))_\infty)$  l'ensemble des arcs tronqués à l'ordre  $p + 1$  et  $\varphi_p$  la formule dans le langage de Pas qui définit cet ensemble constructible.

Nous allons étudier ici les séries de Poincaré géométrique et arithmétique :

$$P_{\text{géom}, X(a(1), \dots, a(g)), 0}(T) := \sum_{p \geq 0} [\pi_p(X(a(1), \dots, a(g))_\infty)] T^p,$$

$$P_{\text{arit}, X(a(1), \dots, a(g)), 0}(T) := \sum_{p \geq 0} \chi_c(\varphi_p) T^p.$$

L'espace des arcs tracés sur le germe d'hypersurface défini par  $f$  et celui des arcs tracés sur le germe d'hypersurface réduit associé sont les mêmes. Les espaces d'arcs tronqués sont donc aussi les mêmes. Nous pouvons donc supposer que le germe considéré est réduit.

Notons

$$\chi_{p, l_1, \dots, l_m} := \pi_p(\{(x_1(t), \dots, x_m(t), y(t)) \in X(a(1), \dots, a(g))_\infty / \text{ord}(x_i) = l_i\})$$

et  $\varphi_{p, l_1, \dots, l_m}$  la formule qui définit  $\chi_{p, l_1, \dots, l_m}$ .

Nous noterons  $X(a(1), \dots, a(g))_{p,cn}$  le sous-ensemble constructible de l'ensemble constructible  $\pi_p(X(a(1), \dots, a(g))_\infty)$  qui correspond à la troncation d'arcs pour lesquels un des  $x_i(t)$  est nul et nous noterons  $X(a(1), \dots, a(g))_{p,to}$  le sous-ensemble de  $\pi_p(X(a(1), \dots, a(g))_\infty)$  qui correspond à la troncation d'arcs qui ne peuvent pas se relever en arcs pour lesquels un des  $x_i(t)$  est nul. De même nous noterons  $\varphi_{p,cn} = \varphi_{p,cn}(a(1), \dots, a(m))$  et  $\varphi_{p,to} = \varphi_{p,to}(a(1), \dots, a(m))$  les formules qui définissent ces deux ensembles constructibles. L'idée de découper ainsi l'ensemble des arcs tronqués à été introduite par J. Denef et F. Loeser dans [7] pour calculer ces deux séries dans le cas des courbes planes.

Nous avons évidemment

$$[\pi_p(X(a(1), \dots, a(g))_\infty)] = [X(a(1), \dots, a(g))_{p,cn}] + [X(a(1), \dots, a(g))_{p,to}]$$

$$\text{et } \chi_c(\varphi_p(a(1), \dots, a(g))) = \chi_c(\varphi_{p,to}(a(1), \dots, a(m))) + \chi_c(\varphi_{p,cn}(a(1), \dots, a(m))) .$$

Notons aussi

$$P_{\text{g\u00e9om}}^{\text{tore}^c}(a(1), \dots, a(g))(T) := \sum_{p \geq 0} [X(a(1), \dots, a(g))_{p,cn}] T^p ,$$

$$P_{\text{g\u00e9om}}^{\text{tore}}(a(1), \dots, a(g))(T) := \sum_{p \geq 0} [X(a(1), \dots, a(g))_{p,to}] T^p ,$$

$$P_{\text{arit}}^{\text{tore}^c}(a(1), \dots, a(g))(T) := \sum_{p \geq 0} \chi_c(\varphi_{p,cn}(a(1), \dots, a(m))) T^p ,$$

$$\text{et } P_{\text{arit}}^{\text{tore}}(a(1), \dots, a(g))(T) := \sum_{p \geq 0} \chi_c(\varphi_{p,to}(a(1), \dots, a(m))) T^p .$$

**Remarque 3.1.** — Si pour tout  $i$  nous avons  $l_i < +\infty$ , alors  $[\chi_{p,l_1,\dots,l_m}] = 0$  si et seulement si  $\underline{l} \notin \text{Ker } M$  (et de m\u00eame  $\chi_c(\varphi_{p,l_1,\dots,l_m}) = 0$  si et seulement si  $\underline{l} \notin \text{Ker } M$ ).

#### 4. \u00c9tude des troncations d'arcs ne se relevant pas en arcs pour lesquels un des $x_i(t)$ est nul

Le terme  $[X(a(1), \dots, a(g))_{p,to}]$  correspond aux arcs tronqu\u00e9s qui ne peuvent pas se relever en arcs pour lesquels un des  $x_i(t)$  est nul. Si  $(x_1(t), \dots, x_m(t), y(t))$  est un arc dont la  $p$ -troncation ne peut pas se relever en un arc pour lequel un des  $x_i(t)$  est nul, nous notons  $l_i = \text{ord}(x_i(t))$  pour tout  $i$ . Nous donnons tout d'abord la d\u00e9finition suivante :

**D\u00e9finition 4.1.** — Soit  $X$  un germe irr\u00e9ductible \u00e0 singularit\u00e9 quasi-ordinaire d'exposants caract\u00e9ristiques  $(a(1), \dots, a(g))$ . Pour tout  $i$  compris entre 1 et  $m$  notons  $k_i$  le plus petit entier qui v\u00e9rifie  $a_i(k_i) \neq 0$ . Quitte \u00e0 effectuer une permutation des variables  $X_i$  (ce que nous ferons \u00e0 partir de maintenant), nous pouvons supposer que nous avons

$$1 = k_1 = k_2 = \dots = k_{i_0} < k_{i_0+1} \leq k_{i_0+2} \leq \dots \leq k_m \leq g.$$

Nous avons alors la proposition suivante :

**Proposition 4.2.** — Soit  $h(t) := (x_1(t), \dots, x_m(t), y(t))$  un arc de  $(X, 0)$ . Alors la p-troncation de  $h$  ne peut pas se relever en un arc pour lequel un des  $x_i(t)$  est nul, si et seulement si l'une des deux conditions suivantes est vérifiée :

- C1) Soit  $l_i \leq p$  pour tout  $i$ .  
 C2) Soit il existe  $i$  tel que  $+\infty > l_i \geq p + 1$ , et  
 i)  $p - l_j \geq b_{k_i}(\underline{l}) - b_{k_j}(\underline{l})$  pour tout  $j$  tel que  $k_j < k_i$ ,  
 ii)  $b_{k_i}(\underline{l}) \leq p$ .

**Remarque 4.3.** — En particulier, si  $k_i \neq k_j$ , alors  $l_i$  et  $l_j$  ne peuvent être supérieurs strictement à  $p$  en même temps. En effet, supposons  $l_i > p$  et  $l_j > p$  avec  $i \neq j$  et  $k_i > k_j$ . Alors nous avons selon la seconde condition :  $p - l_j \geq b_{k_i}(\underline{l}) - b_{k_j}(\underline{l}) > 0$ , ce qui est contradictoire.

**Définition 4.4.** — Soit  $h(t) := (x_1(t), \dots, x_m(t), y(t))$  un arc de  $(X, 0)$ . Si il existe  $i$  tel que  $l_i > p$ , nous noterons  $r_l$  l'entier  $k_i$ .

*Démonstration.* — Montrons tout d'abord qu'un arc tronqué qui ne peut pas se relever en un arc pour lequel un des  $x_i(t)$  est nul vérifie nécessairement l'une des deux conditions. Tout d'abord, si  $l_i \geq p + 1$  et si  $b_{k_i}(\underline{l}) \geq p + 1$ , alors on peut relever cet arc tronqué en un arc pour lequel  $x_i(t) = 0$ , en considérant un relevé quelconque  $h$  de cet arc tronqué, et en choisissant l'arc  $h'$  dont toutes les coordonnées, sauf la  $i$ -ième, sont égales à celles de  $h$ , et la  $i$ -ème est nulle.

Maintenant supposons que  $l_i \geq p + 1$  et que  $p - l_j < b_{k_i}(\underline{l}) - b_{k_j}(\underline{l})$  pour un  $j$  tel que  $k_j < k_i$ . En particulier, d'après la remarque 4.3, pour  $j$  tel que  $k_j \neq k_i$ ,  $l_j \leq p$  et donc les  $x_{j,k}$  sont fixés pour  $k \leq p$  car les  $x_j(t)$  sont fixés modulo  $t^{p+1}$ . Considérons alors les coefficients de  $t^{b_{k_i}(\underline{l})}$  dans l'écriture de  $\xi_{k_j}(x^{1/n})$  et dans l'écriture de  $\xi_{k_i}(x^{1/n})$ . Dans  $\xi_{k_j}(x^{1/n})$ , celui-ci est de la forme

$$\prod_{r \neq j} x_{r,l_r}^{a_r(k_j)} \cdot \left( \frac{x_{j,b_{k_i}(\underline{l}) - b_{k_j}(\underline{l}) + l_j}}{x_{j,l_j}} + P \left( \frac{x_{r,k}}{x_{r,l_r}}; k \leq b_{k_i}(\underline{l}) - b_{k_j}(\underline{l}) + l_r \text{ et } 1 \leq r \leq m \right) \right)$$

où  $P$  ne dépend pas de  $\frac{x_{j,b_{k_i}(\underline{l}) - b_{k_j}(\underline{l}) + l_j}}{x_{j,l_j}}$ . Comme  $b_{k_i}(\underline{l}) - b_{k_j}(\underline{l}) + l_j > p$ , le terme  $\frac{x_{j,b_{k_i}(\underline{l}) - b_{k_j}(\underline{l}) + l_j}}{x_{j,l_j}}$  n'apparaît pas dans l'écriture de  $x_j(t)$  modulo  $t^{p+1}$ . Il n'apparaît pas non plus dans l'expression des coefficients de  $t^d$ , pour  $d < b_{k_i}(\underline{l})$ , dans l'écriture de  $\xi(x^{1/n})$ . D'autre part, le coefficient de  $t^{b_{k_i}(\underline{l})}$  dans l'écriture de  $\xi_{k_i}(x^{1/n})$  est de la forme :

$$\prod_{r \neq i} x_{r,l_r}^{a_r(k_i)} \cdot x_{i,l_i}^{a_i(k_i)}$$

En particulier, nous pouvons choisir  $x_{i,l_i}$  égal à zéro en donnant la bonne valeur au terme  $\frac{x_{j,b_{k_i}(\underline{l}) - b_{k_j}(\underline{l}) + l_j}}{x_{j,l_j}}$ . Ceci n'affecte alors ni la valeur de  $x_j(t)$  modulo  $t^{p+1}$ , ni la valeur des coefficients de  $t^d$ , pour  $d < b_{k_i}(\underline{l})$ , dans l'écriture de  $\xi(x^{1/n})$ . Nous pouvons continuer ainsi par récurrence croissante sur  $c$  en regardant le coefficient de  $t^c$  dans

l'écriture de  $\xi(x^{1/n})$  et annuler le terme  $x_{i,c-\sum_{r \neq i} a_r(k_i)l_r}$  en modifiant éventuellement le terme  $\frac{x_{j,c-b_{k_j}(\underline{l})+l_j}}{x_{j,l_j}}$ .

Montrons maintenant la suffisance de ces deux conditions. La première condition implique clairement que l'arc tronqué ne peut pas se relever en un arc dont l'une des coordonnées est nulle. Montrons que la seconde est aussi suffisante.

Soit  $h$  un arc qui vérifie la seconde condition. Tout d'abord, comme  $l_j \leq p$  pour  $j$  tel que  $k_j \neq k_i$ , les coordonnées  $x_j(t)$  d'un relèvement d'une  $p$ -troncation de  $h$  sont non nulles. Plus particulièrement, pour  $j$  tel que  $k_j \neq k_i$ ,  $x_{j,k}$  est fixé pour  $l_j \leq k \leq p$ . Le coefficient de  $t^{b_1(\underline{l})}$  fixe  $\prod_j x_{j,l_j}^{a_j(1)}$ . Par récurrence croissante sur les coefficients de  $t^c$ , pour  $c < b_{k_i}(\underline{l})$ ,  $\prod_j x_{j,l_j}^{a_j(r)}$  est fixé pour  $r < k_i$  car seuls les  $x_{j,k}$  pour  $j \neq i$  et  $k \leq c - b_{k_j}(\underline{l}) + l_j < p$  apparaissent dans son expression. Considérons alors le coefficient de  $t^{b_{k_i}(\underline{l})}$  dans l'expression de la coordonnée  $y(t)$  de  $h$ . Nous avons  $y(t) = \xi_1(x^{1/n}(t)) + \dots + \xi_{k_i}(x^{1/n}(t)) + \dots + \xi_g(x^{1/n}(t))$  pour un choix d'une racine  $n$ -ième des  $x_j(t)$ . Le coefficient de  $t^{b_{k_i}(\underline{l})}$  dans l'expression de  $\xi_r(x^{1/n}(t))$  est de la forme (pour  $r < k_i$ ) :

$$\prod_{j \neq i} x_{j,l_j}^{a_j(r)} P_r(x_{j,k}/x_{j,l_j}, k \leq b_{k_i}(\underline{l}) - b_{k_r}(\underline{l}) + l_j)$$

d'après la remarque 2.5. Or nous avons  $p - l_j \geq b_{k_i}(\underline{l}) - b_{k_j}(\underline{l}) \geq b_r(\underline{l}) - b_{k_j}(\underline{l})$ , et donc  $P_r(x_{j,k}/x_{j,l_j}, k \leq b_{k_i}(\underline{l}) - b_{k_r}(\underline{l}) + l_j)$  est fixé du fait que les  $x_j(t)$  sont fixés modulo  $t^{p+1}$ . D'après la récurrence, le coefficient considéré est donc fixé. Le coefficient de  $t^{b_{k_i}(\underline{l})}$  dans l'expression de  $\xi_{k_i}(x^{1/n}(t))$  est de la forme :

$$\prod_{j \neq i} x_{j,l_j}^{a_j(k_i)} . x_{i,l_i}^{a_i(k_i)}$$

Donc le coefficient de  $t^{b_{k_i}(\underline{l})}$  dans l'expression de  $y(t)$  est de la forme  $a x_{i,l_i}^{a_i(k_i)} + b$  où  $b$  est fixé et  $a$  est non nul par hypothèse sur  $h$ . Comme  $x_{i,l_i} \neq 0$  par hypothèse sur  $h$ ,  $b \neq 0$  et nécessairement tout relevé de la  $p$ -troncation de  $h$  a sa  $i$ -ième coordonnée non nulle. Plus précisément, nous pouvons remarquer que nécessairement  $b_{k_i}(\underline{l}) = \sum_j a_j(k_i)l_j$  est fixé. □

Nous avons donc

$$(1) \quad X(a(1), \dots, a(g))_{p,to} = \bigcup_{(l_1, \dots, l_m) \in D(m)_p} \chi_{p,l_1, \dots, l_m}$$

où

$$\Sigma_{m,p} := \{(l_1, \dots, l_m) / l_i \leq p\} \cup \left( \bigcup_{i=1}^m \{(l_1, \dots, l_m) / l_i > p, p - l_j \geq b_{k_i}(\underline{l}) - b_{k_j}(\underline{l}), k_j < k_i, b_{k_i}(\underline{l}) \leq p\} \right)$$

et  $D(m)_p := \Sigma_{m,p} \cap \text{Ker } M \cap (\mathbb{N}^*)^m$ .

Il nous suffit donc de calculer  $\chi_{p,l_1, \dots, l_m}$  et  $\varphi_{p,l_1, \dots, l_m}$ , et d'étudier l'union (1).

### 5. Calcul de $\chi_{p, l_1, \dots, l_m}$ et $\varphi_{p, l_1, \dots, l_m}$

Pour calculer  $\chi_{p, l_1, \dots, l_m}$  et  $\varphi_{p, l_1, \dots, l_m}$ , nous allons voir que  $\chi_{p, l_1, \dots, l_m}$  peut s'écrire sous la forme  $\bar{\chi}_{p, l_1, \dots, l_m} \times \mathbb{A}_{\mathbb{C}}^{n(p, \underline{l})}$ , où  $n(p, \underline{l})$  est un entier, et nous allons trouver un revêtement galoisien  $W \rightarrow \bar{\chi}_{p, l_1, \dots, l_m}$  surjectif où  $[W]$  est facile à calculer et l'action du groupe de Galois du revêtement est facile à décrire.

Pour cela, notons  $x_j = \sum_{r \geq l_j} x_{j,r} t^r$  et  $z_j = z_{j,0} t^{\frac{l_j}{n}} (1 + \sum_{r \geq 1} z_{j,r} t^r)$ . Les termes  $z_{j,r}$  pour  $r > p - l_j$  n'apparaissent pas dans l'expression de  $z_j^n$  modulo  $t^{p+1}$  mais  $z_{j,p-l_j}$  y apparaît. De même les termes  $z_{j,r}$  pour  $r > p - b_{k_j}(\underline{l})$  n'apparaissent pas dans l'expression de  $\xi(z)$  modulo  $t^{p+1}$  si  $p \geq b_{k_j}(\underline{l})$  mais  $z_{j,p-b_{k_j}(\underline{l})}$  y apparaît. Si  $p < b_{k_j}(\underline{l})$ , alors aucun terme  $z_{j,r}$  n'apparaît dans l'expression de  $\xi(z)$  modulo  $t^{p+1}$ .

Soit

$$W_{\underline{l}} := \mathbb{G}_{m, \mathbb{C}}^m \times \mathbb{A}_{\mathbb{C}}^{\max\{p-l_1, p-b_{k_1}(\underline{l})\}} \times \dots \times \mathbb{A}_{\mathbb{C}}^{\max\{p-l_m, p-b_{k_m}(\underline{l})\}}.$$

On considère sur  $W_{\underline{l}}$  les coordonnées  $(z_{1,0}, \dots, z_{m,0})$  sur le premier facteur et les coordonnées  $(z_{j,1}, \dots, z_{j, \max\{p-l_j, p-b_{k_j}(\underline{l})\}})$  sur le  $(j+1)$ -ième facteur.

Soit  $V$  la variété  $\mathbb{A}^{p(m+1)}$ ; considérons le morphisme de  $\mathbb{C}$ -schémas  $h_{\underline{l}} : W_{\underline{l}} \rightarrow V$  qui envoie le point de coordonnées précédentes sur les  $p$  premiers coefficients de  $z_1^n, \dots, z_m^n$  et  $\xi(z)$  (où  $z_j(t) := z_{j,0} t^{\frac{l_j}{n}} (1 + \sum_{r=1}^{\max\{p-l_j, p-b_{k_j}(\underline{l})\}} z_{j,r} t^r)$ ) :

$$h_{\underline{l}} : W_{\underline{l}} \rightarrow V$$

$$z_i = z_{i,0} t^{\frac{l_i}{n}} \left( 1 + \sum_{j=1}^{\max\{p-l_i, p-b_{k_i}(\underline{l})\}} z_{i,j} t^j \right) \mapsto z_1^n, \dots, z_m^n, \xi(z)$$

L'image de  $h_{\underline{l}}$  coïncide clairement avec  $\chi_{p, l_1, \dots, l_m}$ , mais ce morphisme n'est pas fini en général.

**Définition 5.1.** — Nous définissons les ensembles suivants :

$$\Sigma_{m,p} := \{(l_1, \dots, l_m) / l_i \leq p\} \cup \left( \bigcup_{i=1}^m \{(l_1, \dots, l_m) / l_i > p, p - l_j \geq b_{k_i}(\underline{l}) - b_{k_j}(\underline{l}), k_j < k_i, b_{k_i}(\underline{l}) \leq p\} \right),$$

$$D(m)_p := \Sigma_{m,p} \cap \text{Ker } M \cap (\mathbb{N}^*)^m,$$

$$I_{p, \underline{l}} := \{j \in \{1, m\} / l_j > p\},$$

$$D_{0,i}(m)_p := \{\underline{l} \in D(m)_p \setminus l_j \leq p \ \forall j, l_i - b_{k_i}(\underline{l}) \geq l_j - b_{k_j}(\underline{l}) \ \forall j \neq i \\ \text{et } l_i - b_{k_i}(\underline{l}) > l_j - b_{k_j}(\underline{l}) \ \forall j < i\},$$

$$D_{q,i}(m)_p := \{\underline{l} \in D(m)_p \setminus l_i > p, \text{Card}(I_{p, \underline{l}}) = q, l_i - b_{k_i}(\underline{l}) \geq l_j - b_{k_j}(\underline{l}) \ \forall j \neq i \\ \text{et } l_i - b_{k_i}(\underline{l}) > l_j - b_{k_j}(\underline{l}) \ \forall j < i\},$$

$$D_{q,i,I}(m)_p := \{\underline{l} \in D(m)_{q,i}(m)_p \setminus I_{p, \underline{l}} = I\}.$$

**Remarque 5.2.** — Si  $l_i > p$  et si  $j$  est tel que  $k_j \neq k_i$ , alors  $l_i - b_{k_i}(l) > l_j - b_{k_j}(l)$ . En effet, si  $k_i > k_j$ , alors par hypothèse nous avons  $p - l_j \geq b_{k_i}(l) - b_{k_j}(l)$ . Or  $p - l_j < l_i - l_j$  et le résultat s'ensuit. Si  $k_i < k_j$ , alors  $0 < l_i - p \leq l_i - l_j$ . Or  $b_{k_i}(l) - b_{k_j}(l) < 0$  et le résultat s'ensuit là encore. En particulier nous avons

$$D(m)_p = \prod_{0 \leq i, q \leq m} D_{i,q}(m)_p.$$

**5.1. Cas C1.** — Soit  $\underline{l} \in D_{0,i}(m)_p$ . Nous notons alors

$$W'_\underline{l} := \mathbb{G}_{m,\mathbb{C}}^m \times \mathbb{A}_{\mathbb{C}}^{p-l_1} \times \dots \times \mathbb{A}_{\mathbb{C}}^{\max\{p-l_i, p-b_{k_i}(l)\}} \times \dots \times \mathbb{A}_{\mathbb{C}}^{p-l_m}$$

et

$$W''_\underline{l} := \mathbb{G}_{m,\mathbb{C}}^m \times \mathbb{A}_{\mathbb{C}}^{p-l_1} \times \dots \times \mathbb{A}_{\mathbb{C}}^{p-l_m}.$$

On considère sur  $W'_\underline{l}$  les coordonnées  $(z_{1,0}, \dots, z_{m,0})$  sur le premier facteur, les coordonnées  $(z_{j,1}, \dots, z_{j,p-l_j})$  sur le  $(j + 1)$ -ième facteur pour  $j \neq i$  et les coordonnées  $(z_{i,1}, \dots, z_{i,\max\{p-l_i, p-b_{k_i}(l)\}})$  sur  $(i + 1)$ -ième facteur. On considère sur  $W''_\underline{l}$  les coordonnées  $(z_{1,0}, \dots, z_{m,0})$  sur le premier facteur, et les coordonnées  $(z_{j,1}, \dots, z_{j,p-l_j})$  sur le  $(j + 1)$ -ième facteur pour tout  $j$ .

Nous avons clairement

$$W''_\underline{l} \subset W'_\underline{l} \subset W_\underline{l}.$$

**Définition 5.3.** — Nous notons

$$e := \max\{l_j - b_{k_j}(l), 0\} = \max\{l_i - b_{k_i}(l), 0\}.$$

Par ailleurs, nous notons  $k_\underline{l}$  l'unique entier qui vérifie les inégalités suivantes :

$$(2) \quad b_{k_\underline{l}}(l) = \sum_j a_j(k_\underline{l})l_j \leq p - e < \sum_j a_j(k_\underline{l} + 1)l_j = b_{k_\underline{l}+1}(l).$$

Nous avons alors le résultat suivant :

**Lemme 5.4.** — *Le morphisme  $h_\underline{l}$  restreint à  $W'_\underline{l}$  est fini et d'image  $\chi_{p,l_1,\dots,l_m}$ . Si nous notons  $\bar{\chi}_{p,l_1,\dots,l_m} := h_\underline{l}(W''_\underline{l})$ , nous avons  $\chi_{p,l_1,\dots,l_m} = \bar{\chi}_{p,l_1,\dots,l_m} \times \mathbb{A}_{\mathbb{C}}^{l_i - b_{k_i}(l)}$  et  $h_\underline{l}$  restreint à  $W''_\underline{l}$  est un revêtement galoisien de  $\bar{\chi}_{p,l_1,\dots,l_m}$ . Son groupe de Galois est le groupe  $G_{k_\underline{l}}$ , sous-groupe commutatif de  $\mathbb{U}_n^m$  formé des éléments  $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m)$  qui vérifient les équations  $\prod_i \varepsilon_i^{na_r(i)} = 1$  pour  $r = 1, \dots, k_\underline{l}$  où  $\mathbb{U}_n$  est le groupe des racines  $n$ -ièmes de l'unité, qui agit par multiplication terme à terme sur  $\mathbb{G}_{m,\mathbb{C}}^m$ .*

**Démonstration.** — Nous allons d'abord montrer que l'image de  $W'_\underline{l}$  par  $h_\underline{l}$  est égale à  $\chi_{p,l_1,\dots,l_m}$ .

Soit  $z = (z_1, \dots, z_m) \in W_\underline{l}$ , et montrons que l'on peut trouver  $w \in W'_\underline{l}$  ayant même image par  $h_\underline{l}$  que  $z$ . Nécessairement nous devons avoir

$$z_{j,0}^n = w_{j,0}^n \text{ si } l_j \leq p,$$

$$\left( 1 + \sum_{k=1}^{p-l_j} z_{j,k} t^k \right)^n = \left( 1 + \sum_{k=1}^{p-l_j} w_{j,k} t^k \right)^n \pmod{t^{p-l_j+1}} \text{ si } l_j \leq p.$$

Comme  $l_j \leq p$  pour tout  $j$ , nécessairement  $z_{j,0}^n = w_{j,0}^n$  et  $z_{j,k} = w_{j,k}$ , pour tout  $j$  et  $1 \leq k \leq p - l_j$ . Nous posons alors  $w_{j,k} = z_{j,k}$ , pour tout  $j$  et  $0 \leq k \leq p - l_j$ . Les coefficients de  $t^c$  dans l'écriture de  $\xi(z)$ , pour  $c \leq p - e$ , ne dépendent que des  $z_{j,k}$  pour  $k \leq p - l_j$ . Le coefficient de  $t^{p-e+1}$  est de la forme

$$\prod_j z_{j,l_j}^{a_j(k_j)} \cdot z_{i,p-l_i+1} + P$$

où  $P$  ne dépend que des  $z_{i,k}$  pour  $k \leq p - l_i$  et des  $z_{j,k}$  pour  $j \neq i$  et  $k \leq p - l_j + 1$ . Comme  $\prod_j z_{j,l_j}^{a_j(k_j)} = \prod_j w_{j,l_j}^{a_j(k_j)} \neq 0$ , nous pouvons trouver  $w_{i,p-l_i+1}$  de telle manière à choisir (s'il apparaissent ici) les  $w_{j,p-l_j+1}$  égaux à zéro pour  $j \neq i$  sans changer la valeur de ce coefficient. Nous pouvons continuer ainsi par récurrence croissante sur les coefficients de  $t^c$  dans l'écriture de  $\xi(z)$ , pour voir que l'on peut trouver  $w \in W'_l$  tel que  $h_l(z) = h_l(w)$ , le système d'équations apparaissant ici étant triangulaire. Le morphisme  $h_l$  restreint à  $W'_l$  est donc fini.

Nous remarquons au passage, que le système d'équations obtenu des coefficients de  $t^c$  dans l'écriture de  $\xi(z)$  est triangulaire en les variables  $z_{i,k}$  pour  $p - l_i + 1 \leq k \leq p - b_{k_i}(l)$ , pour  $p - e + 1 \leq c \leq p$ . Donc nous pouvons écrire  $\chi_{p,l_1,\dots,l_m}$  sous la forme  $\bar{\chi}_{p,l_1,\dots,l_m} \times \mathbb{A}_{\mathbb{C}}^{l_i - b_{k_i}(l)}$  où  $\bar{\chi}_{p,l_1,\dots,l_m} = h_l(W''_l)$ .

Déterminons la fibre au-dessus d'un point de  $\bar{\chi}_{p,l_1,\dots,l_m}$ . Remarquons que  $k_i \leq k_l$  car  $b_{k_l+1}(l) > p - e = p - l_i + b_{k_i}(l) \geq b_{k_i}(l)$ . Soient  $z$  et  $w$  dans  $W''_l$  tels que  $h_l(z) = h_l(w)$ . Dans ce cas  $z_{j,0}^n = w_{j,0}^n$  pour tout  $j$  et  $z_{j,k} = w_{j,k}$  pour tout  $j$  et pour tout  $1 \leq k \leq p - l_j$ . Considérons alors le coefficient de  $t^c$  dans l'écriture de  $\xi(z) = \xi(w)$ . Pour  $c = b_{k_1}(l)$ , ce coefficient nous permet de dire que  $(z_{1,0}, \dots, z_{m,0}) = \varepsilon(w_{1,0}, \dots, w_{m,0})$  pour un  $\varepsilon \in G_{k_1}$ . Pour  $b_{k_1}(l) < c < b_{k_2}(l)$ , ces coefficients n'apportent aucune information supplémentaire. Pour  $c = b_{k_2}(l)$ , coefficient nous permet de dire que  $(z_{1,0}, \dots, z_{m,0}) = \varepsilon(w_{1,0}, \dots, w_{m,0})$  pour un  $\varepsilon \in G_{k_2}$ . Par récurrence sur  $c$ , nous voyons alors que  $(z_{1,0}, \dots, z_{m,0}) = \varepsilon(w_{1,0}, \dots, w_{m,0})$  pour un  $\varepsilon \in G_{k_l}$ . Comme  $l_j < +\infty$  pour tout  $j$ , le revêtement est étale et donc galoisien de groupe de Galois  $G_{k_l}$ . □

Nous avons alors

$$[\chi_{p,l_1,\dots,l_m}] = [G_{m,\mathbb{C}}^m / G_{k_l}] \mathbb{L}^{pm + \max\{l_i - b_{k_i}(l), 0\} - \sum_{j=1}^m l_j}.$$

**5.2. Cas C2.** — Soit  $l \in D_{q,i}(m)_p$  avec  $q \geq 1$ . Nous notons alors

$$W'_l := G_{m,\mathbb{C}}^{m-q+1} \times \left( \prod_{j \notin I_{l,p}} \mathbb{A}_{\mathbb{C}}^{p-l_j} \right) \times \mathbb{A}_{\mathbb{C}}^{p-b_{k_i}(l)}$$

et

$$W'_l := \mathbb{G}_{m,\mathbb{C}}^{m-q+1} \times \left( \prod_{j \notin I_{l,p}} \mathbb{A}_{\mathbb{C}}^{p-l_j} \right).$$

On considère sur  $W'_l$  les coordonnées  $(z_{j_1,0}, \dots, z_{j_{m-q},0})$  sur le premier facteur (où  $\{j_1, \dots, j_{m-q+1}\} = \{1, \dots, m\} \setminus \{I_{l,p} \setminus \{i\}\}$ ), les coordonnées  $(z_{j,1}, \dots, z_{j,p-l_j})$  sur le  $(j+1)$ -ième facteur pour  $j \notin I_{l,p}$  et les coordonnées  $(z_{i,1}, \dots, z_{i,p-b_{k_i}(l)})$  sur  $(i+1)$ -ième facteur. On considère ces deux variétés plongées dans  $W_l$  en identifiant un élément de coordonnées

$$(z_{j_1,0}, \dots, z_{j_{m-q+1},0}, z_{j,1}, \dots, z_{j,p-l_j}, j \notin I_{l,p})$$

avec l'élément de  $W_l$  de coordonnées

$$(z_{1,0}, \dots, z_{m,0}, z_{j,1}, \dots, z_{j,p-l_j}, j \neq i, z_{i,1}, \dots, z_{i,p-b_{k_i}(l)})$$

en posant  $z_{j,0} = 1$  et  $z_{j,k} = 0$  si  $j \in I_{p,l}$  et  $k \leq p - l_j$ . Nous avons alors le résultat suivant :

**Lemme 5.5.** — *Le morphisme  $h_l$  restreint à  $W'_l$  est fini et d'image  $\chi_{p,l_1,\dots,l_m}$ . Si nous notons  $\bar{\chi}_{p,l_1,\dots,l_m} := h_l(W'_l)$ , nous avons  $\chi_{p,l_1,\dots,l_m} = \bar{\chi}_{p,l_1,\dots,l_m} \times \mathbb{A}_{\mathbb{C}}^{l_i - b_{k_i}(l)}$  et  $h_l$  restreint à  $W'_l$  est un revêtement galoisien. Son groupe de Galois est le groupe  $G_{k_i} \cap \mathbb{U}_n^{m-q+1}$ , où  $\mathbb{U}_n^{m-q+1}$  est le sous-groupe de  $\mathbb{U}_n^m$  dont les éléments ont les coordonnées d'indice dans  $I_{l,p} \setminus \{i\}$  égales à 0, et  $G_{k_i}$  est le sous-groupe de  $\mathbb{U}_n^m$  formé des éléments  $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{m-q+1})$  qui vérifient les équations  $\prod_{j \notin I_{p,l} \setminus \{i\}} \varepsilon_j^{na_r(j)} = 1$  pour  $r = 1, \dots, k_i$  où  $\mathbb{U}_n$  est le groupe des racines  $n$ -ièmes de l'unité, qui agit par multiplication terme à terme sur  $\mathbb{G}_{m,\mathbb{C}}^{m-q}$ .*

*Démonstration.* — Nous allons d'abord montrer que l'image de  $W'_l$  par  $h_l$  est égale à  $\chi_{p,l_1,\dots,l_m}$ .

Soit  $z = (z_1, \dots, z_m) \in W_l$ , et montrons que l'on peut trouver  $w \in W'_l$  ayant même image par  $h_l$  que  $z$ . En particulier nous avons

$$z_{j,0}^n \text{ est fixé si } l_j \leq p,$$

$$\left( 1 + \sum_{k=1}^{p-l_j} z_{j,k} t^k \right)^n \text{ mod } t^{p-l_j+1} \text{ est fixé si } l_j \leq p.$$

Les coefficients de  $t^c$  dans l'écriture de  $\xi(z)$ , pour  $c < b_{k_i}(l)$ , ne dépendent que des  $z_{j,k}$  pour  $j \notin I_{p,l}$  et  $k \leq p$ , d'après la remarque 5.2. Si  $c = b_{k_i}(l)$ , ce coefficient est de la forme

$$\prod_{j \neq i} z_{j,0}^{a_j(k_i)} \cdot z_{i,0}^{a_i(k_i)} + P$$

où  $P$  ne dépend que des  $z_{j,k}$  pour  $j \notin I_{l,p}$ ,  $k \leq p - l_j + 1$ . Si nous posons  $w_{j,0} = 1$  pour  $j \in I_{p,l} \setminus \{i\}$  et  $w_{j,p-l_j+1} = 0$ , il existe toujours un  $w_{i,0}$  qui permet de garder la valeur de ce coefficient inchangée. Nous pouvons continuer ainsi par récurrence croissante sur les coefficients de  $t^c$  dans l'écriture de  $\xi(z)$ , pour voir que l'on peut trouver  $w \in W'_l$

tel que  $h_l(z) = h_l(w)$ , le système d'équations apparaissant ici étant triangulaire. Le morphisme  $h_l$  restreint à  $W'_l$  est donc fini.

Nous remarquons au passage, que le système d'équations obtenu des coefficients de  $t^c$  dans l'écriture de  $\xi(z)$  est triangulaire en les variables  $z_{i,k}$ , pour  $0 \leq k \leq p - b_{k_i}(l)$  et  $b_{k_i}(l) \leq c \leq p$ . Donc nous pouvons écrire  $\chi_{p,l_1,\dots,l_m}$  sous la forme  $\bar{\chi}_{p,l_1,\dots,l_m} \times \mathbb{A}_{\mathbb{C}}^{l_i - b_{k_i}(l)}$  où  $\bar{\chi}_{p,l_1,\dots,l_m} = h_l(W''_l)$ .

Comme précédemment nous voyons que deux éléments  $z$  et  $w$  de  $W''_l$  ont même image par  $h_l$  si et seulement si  $z = \varepsilon w$  où  $\varepsilon \in G_{k_i} \cap \mathbb{U}_n^{m-q+1}$ . □

Nous avons alors

$$[\chi_{p,l_1,\dots,l_m}] = [\mathbb{G}_{m,\mathbb{C}}^{m-q+1}/G'_{k_i}]_{\mathbb{L}}^{p(m-q+1) - \sum_{j \neq l} l_j - b_{k_i}(l)}.$$

**5.3. Calcul de  $\chi_{p,l_1,\dots,l_m}$  et  $\varphi_{p,l_1,\dots,l_m}$ .** — Nous allons maintenant énoncer un lemme utile pour achever le calcul (la partie *ii*) étant un analogue du lemme 1.4.3 de [5]). Pour les définitions se rapportant à la mesure d'une variété munie d'une action de groupe nous renvoyons le lecteur à [5] et [7].

**Lemme 5.6.** — *Soit  $G$  un sous-groupe de  $\prod_{i=1}^m \mathbb{U}_{n_i}$  agissant sur  $\mathbb{G}_{m,\mathbb{C}}^m$  par multiplication sur chaque terme. Alors :*

- i) *La variété quotient  $\mathbb{G}_{m,\mathbb{C}}^m/G$  est isomorphe à  $\mathbb{G}_{m,\mathbb{C}}^m$ .*
- ii) *Pour tout caractère irréductible non trivial  $\alpha$  de  $G$ , nous avons  $\chi_c(\mathbb{G}_{m,\mathbb{C}}^m, \alpha) = 0$ , et  $\chi_c(\mathbb{G}_{m,\mathbb{C}}^m, 1) = (\mathbb{L} - 1)^m$  où 1 est le caractère trivial de  $G$ .*

*Démonstration.* — Montrons d'abord i). D'un point de vue torique, le cône associé à  $\mathbb{G}_{m,\mathbb{C}}^m$  est l'origine de  $\mathbb{Z}^m$ . Le semi-groupe de cette variété est donc  $\mathbb{Z}^m$  en entier. L'ensemble des puissances des monômes invariants par l'action de  $G$  forment un semi-groupe  $N$  de  $\mathbb{Z}^m$  qui est en fait un groupe car  $X_1^{k_1} \dots X_m^{k_m}$  est invariant sous l'action de  $G$  si et seulement si  $X_1^{-k_1} \dots X_m^{-k_m}$  l'est aussi. Donc  $N$  est isomorphe à  $\mathbb{Z}^l$  pour  $l \leq m$  et  $N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} \cong \mathbb{R}^l$ . Or pour tout  $i$ ,  $X_i^{n_i}$  est invariant par  $G$  donc  $N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} = \mathbb{R}^m$  et  $l = m$ . Donc  $\mathbb{G}_{m,\mathbb{C}}^m/G$  est isomorphe à  $\mathbb{G}_{m,\mathbb{C}}^m$ .

Montrons maintenant ii). L'action de  $G$  sur  $\mathbb{G}_{m,\mathbb{C}}^m$  s'étend en une action sur  $(\mathbb{P}^1_{\mathbb{k}})^m$  qui laisse fixe les coordonnées 0 et  $\infty$ . Pour chaque  $\varepsilon \in (\mathbb{k}^*)^m$ , la classe, dans le groupe de Chow  $A^m((\mathbb{P}^1_{\mathbb{k}})^m \times (\mathbb{P}^1_{\mathbb{k}})^m)$ , du graphe de la multiplication par  $\varepsilon$  sur  $(\mathbb{P}^1_{\mathbb{k}})^m$  est la même que la classe de la diagonale : en effet, la classe, dans le groupe de Chow  $A^1(\mathbb{P}^1_{\mathbb{k}} \times \mathbb{P}^1_{\mathbb{k}})$ , de la multiplication par la  $i$ -ème coordonnée de  $\varepsilon$  sur la  $i$ -ème composante de  $(\mathbb{P}^1_{\mathbb{k}})^m$  est la même que la classe de la diagonale. Pour tout caractère  $\alpha$  de  $G$ , notons  $f_{\alpha} := |G|^{-1} \sum_{g \in G} \alpha^{-1}(g) [g]$  où  $[g]$  est la correspondance donnée par le graphe de la multiplication par  $g$  (voir [5] partie 1.3 ou [7] partie 3.1). Nous voyons donc que  $f_{\alpha} = 0$  si  $\alpha$  est un caractère non trivial, et donc que  $\chi_c(\mathbb{G}_{m,\mathbb{C}}^m, \alpha) = 0$  d'après le théorème 1.3.1 de [5].

Enfin  $\chi_c(\mathbb{G}_{m,\mathbb{C}}^m, 1) = (\mathbb{L} - 1)^m$  par définition (voir [5] 1.3 par exemple). □

D'après le point  $i$ ) du lemme précédent, nous avons  $[\mathbb{G}_{m,\mathbb{C}}^r/G_k] = (\mathbb{L} - 1)^r$  et nous obtenons :

$$\text{pour le cas C1 : } [\chi_{p,l_1,\dots,l_m}] = (\mathbb{L} - 1)^m \mathbb{L}^{pm} \mathbb{L}^{-\sum_{j=1}^m l_j + \max\{l_i - b_{k_i}(\mathbb{L}), 0\}}.$$

$$\text{pour le cas C2 : } [\chi_{p,l_1,\dots,l_m}] = (\mathbb{L} - 1)^{m-q+1} \mathbb{L}^{p(m-q+1) - \sum_{j \notin I_{p,\underline{l}}} l_j - b_{k_i}(\mathbb{L})}.$$

Nous utilisons le même morphisme  $h_{\underline{l}}$  pour calculer  $\chi_c(\varphi_{p,l_1,\dots,l_m})$ . En effet, dans le cas C1, la mesure arithmétique de l'image de  $h_{\underline{l}}$  coïncide avec  $\chi_c(\varphi_{p,l_1,\dots,l_m})$ . Or  $\varphi_{p,l_1,\dots,l_m} = \overline{\varphi}_{p,l_1,\dots,l_m} \wedge \varphi'$  où  $\overline{\varphi}_{p,l_1,\dots,l_m}$  est la formule qui définit  $\overline{\chi}_{p,l_1,\dots,l_m}$  et  $\varphi'$  est la formule qui définit  $\mathbb{A}_{\mathbb{C}}^{\max\{l_i - b_{k_i}(\mathbb{L}), 0\}}$ . La mesure arithmétique de  $W_{\underline{l}}''$  est égale à  $\mathbb{L}^{p(m-q) - \sum_{j \notin I_{p,\underline{l}}} l_j}$  car la formule qui définit  $W_{\underline{l}}''$  est sans quantificateurs. Le morphisme  $h_{\underline{l}}$  restreint à  $W_{\underline{l}}''$  est un revêtement galoisien de groupe de Galois fini, de cardinal  $n/n_{k_{\underline{l}}}$  dans le cas C1 et de cardinal  $n(i, I_{p,\underline{l}})$  dans le cas C2 ( $n(i, I_{p,\underline{l}})$  ne dépend que de  $i$  et de  $I_{p,\underline{l}}$ ). La mesure  $\chi_c(\overline{\varphi}_{p,l_1,\dots,l_m})$  est par construction égale à la mesure  $\chi_c(W_{\underline{l}}'', \delta)$  où  $\delta$  est la fonction centrale qui vaut 1 en l'identité et 0 ailleurs car  $G$  est abélien (cf. [7] 3.2. et 3.4). Cette fonction  $\delta$  est une combinaison linéaire sur  $\mathbb{Q}$  de caractères irréductibles de  $G$ , et le coefficient du caractère trivial est égal à  $1/|G|$ . Finalement, la formule  $\varphi'$  est sans quantificateurs, donc sa mesure vaut  $\mathbb{L}^{l_i - b_{k_i}(\mathbb{L})}$ . Donc nous avons

$$\text{cas C1 : } \chi_c(\varphi_{p,l_1,\dots,l_m}) = \frac{n_{k_{\underline{l}}}}{n} (\mathbb{L} - 1)^m \mathbb{L}^{pm} \mathbb{L}^{-\sum_{j=1}^m l_j + \max\{l_i - b_{k_i}(\mathbb{L}), 0\}}.$$

$$\text{cas C2 : } \chi_c(\varphi_{p,l_1,\dots,l_m}) = \frac{1}{n(i, I_{p,\underline{l}})} (\mathbb{L} - 1)^{m-q+1} \mathbb{L}^{p(m-q+1) - \sum_{j \notin I_{p,\underline{l}}} l_j - b_{k_i}(\mathbb{L})}.$$

### 6. Étude de l'union (1)

L'union (1) n'est cependant pas toujours disjointe comme le montre l'exemple ci-dessous :

**Exemple 6.1.** — Soit  $f = Z^3 - XY$ . Notons  $h_1(t)$ ,  $h_2(t)$  et  $h_3(t)$  les arcs définis par  $h_1(t) = (t^5, t^7, t^4)$ ,  $h_2(t) = (t^6, t^6, t^4)$  et  $h_3(t) = (t^7, t^5, t^4)$ . Modulo  $t^5$ , ces trois arcs ont la même troncation mais les ordres des différentes coordonnées ne coïncident pas. C'est-à-dire que  $\chi_{4,5,7} \cap \chi_{4,6,6} \cap \chi_{4,7,5} \neq \emptyset$ .

Néanmoins nous pouvons énoncer le résultat suivant :

**Lemme 6.2.** — *Nous avons*

$$\chi_{p,l_1,\dots,l_m} = \chi_{p,l'_1,\dots,l'_m} \iff \chi_{p,l_1,\dots,l_m} \cap \chi_{p,l'_1,\dots,l'_m} \neq \emptyset$$

$$\iff \begin{cases} l_i \leq p \Rightarrow l_i = l'_i \\ l_i > p \Leftrightarrow l'_i > p \\ b_{r_{\underline{l}}}(\underline{l} - \underline{l}') = 0 \end{cases}$$

où  $r_{\underline{l}}$  est l'entier  $k_i$  si  $l_i > p$  (voir définition 4.4).

*Démonstration.* — Il est clair que

$$\chi_{p, l_1, \dots, l_m} = \chi_{p, l'_1, \dots, l'_m} \implies \chi_{p, l_1, \dots, l_m} \cap \chi_{p, l'_1, \dots, l'_m} \neq \emptyset.$$

L'implication

$$\chi_{p, l_1, \dots, l_m} \cap \chi_{p, l'_1, \dots, l'_m} \neq \emptyset \implies \begin{cases} b_{r_{\underline{l}}}(\underline{l} - \underline{l}') = 0, \\ l_i \leq p \implies l_i = l'_i \\ l_i > p \iff l'_i > p \end{cases}$$

découle de la remarque faite à la fin de la preuve de la proposition 4.2.

Fixons  $(l_1, \dots, l_m) \in \text{Ker } M$  et  $(l'_1, \dots, l'_m) \in \text{Ker } M$ . Supposons que nous ayons  $b_{r_{\underline{l}}}(\underline{l} - \underline{l}') = 0$ ,  $l_i \leq p \implies l_i = l'_i$  et que  $l_i > p \iff l'_i > p$ . Supposons qu'il existe un entier  $i$  pour lequel  $l_i > p$ . Dans le cas contraire les équivalences sont triviales. Soient  $h \in \chi_{p, l_1, \dots, l_m}$  et  $\bar{h}$  un arc égal à  $h$  modulo  $(t)^{p+1}$  et dont chaque composante  $x_i$  est d'ordre  $l_i$  pour  $1 \leq i \leq m$ . Nous avons donc  $\bar{h}(t) = (x_1(t), \dots, x_m(t), z(t))$  et nous pouvons supposer, quitte à changer les variables, que  $x_1(t) = \dots = x_k(t) = 0$  modulo  $(t)^{p+1}$ , et que  $x_{k+1}(t), \dots, x_m(t)$  sont non nuls modulo  $(t)^{p+1}$  (c'est-à-dire que  $l_1, \dots, l_k > p$  et  $l_{k+1}, \dots, l_m \leq p$ ). Nous allons chercher des  $x'_i(t)$ , avec  $\text{ord}(x'_i(t)) = l'_i$  pour  $1 \leq i \leq m$ , tels que

$$\xi(x^{1/n}(t)) = \xi(x'^{1/n}(t)).$$

Pour cela, il nous suffit de poser  $x'_i(t) = x_i(t)$  pour tout  $i$  compris entre  $k + 1$  et  $m$ , et de voir que cela revient alors à trouver des  $x'_i(t)$  tels que

$$(3) \quad \xi_{k_i}(x^{1/n}(t)) + \xi_{k_i+1}(x^{1/n}(t)) + \dots = \xi_{k_i}(x'^{1/n}(t)) + \dots.$$

Il suffit pour cela de trouver  $x'_{i, l'_i}$  pour  $k+1 \leq i \leq m$  tels que  $\prod_i x_{i, l_i}^{a_i(k_i)} = \prod_i x'_{i, l'_i}{}^{a_i(k_i)}$  ce qui est toujours possible. Ensuite il suffit de choisir les  $x'_{i, k}$  pour  $k > l'_i$  ce qui est toujours possible car les équations en les  $x'_{i, k}$ , qui découlent de l'annulation des différents termes de l'équation 3, forment un système triangulaire. Donc  $h \in \chi_{p, l'_1, \dots, l'_m}$ .  $\square$

**Exemple 6.3.** — Si pour tous  $i$  et  $j$  tels que  $i \neq j$  nous avons  $a_i(1) + a_j(1) \geq 1$ , alors l'union (1) précédente est disjointe.

**Définition 6.4.** — Nous allons alors noter :

$$N_{p, l_1, \dots, l_m} := \text{Card} \left\{ \text{Ker}(b_{p, l_1, \dots, l_m}) \cap \prod_{i \in I_{p, \underline{l}}} (\mathbb{Z} \cap ] - \infty, l_i - p[) \right\}$$

où  $I_{p, \underline{l}} = \{i_1, \dots, i_q\}$  est l'ensemble des indices  $i$  pour lesquels  $l_i > p$  et  $b_{p, l_1, \dots, l_m}$  est l'application linéaire

$$\begin{aligned} b_{p, l_1, \dots, l_m} : \mathbb{Z}^q &\longrightarrow \mathbb{Z} \\ (u_1, \dots, u_q) &\longmapsto na_{i_1}(r_{\underline{l}})u_1 + \dots + na_{i_q}(r_{\underline{l}})u_q \end{aligned}$$

D'après le lemme précédent, nous voyons que  $\chi_{p, l_1, \dots, l_m} = \chi_{p, l'_1, \dots, l'_m}$  si seulement si  $(l_1 - l'_1, \dots, l_m - l'_m) \in \text{Ker}(b_{p, l_1, \dots, l_m}) \cap \prod_{i \in I_{p, l}} (\mathbb{Z} \cap ] - \infty, l_i - p[)$ .

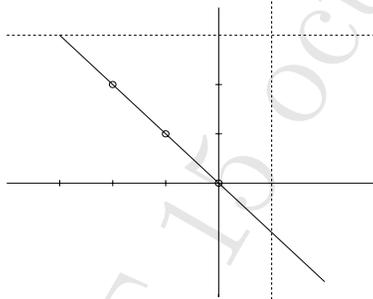
La mesure motivique des  $p$ -troncations d'arcs qui ne se relèvent pas en arcs dont l'une des coordonnées  $x_i$  est nulle est alors égale à :

$$(4) \quad \left[ \bigcup_{(l_1, \dots, l_m) \in D(m)_p} \chi_{p, l_1, \dots, l_m} \right] = \sum_{(l_1, \dots, l_m) \in D(m)_p} \frac{[\chi_{p, l_1, \dots, l_m}]}{N_{p, l_1, \dots, l_m}}$$

**Exemple 6.5.** — Dans le cas  $Z^3 = XY$ , nous avons

$$N_{4, 5, 7} = \text{Card} \left\{ \text{Ker}(1, 1) \cap ((\mathbb{Z} \cap ] - \infty, 1[) \times (\mathbb{Z} \cap ] - \infty, 3[) \right\}.$$

Cet ensemble est formé de trois points : le point  $(0, 0)$  correspond à  $\chi_{4, 5, 7}$ , le point  $(1, -1)$  correspond à  $\chi_{4, 6, 6}$  et le point  $(2, -2)$  correspond à  $\chi_{4, 7, 5}$ . Et donc le cardinal de cet ensemble vaut 3 :



### 7. Étude des troncations d'arcs pour lesquels un des $x_i(t)$ est nul

Ce terme correspond aux troncations d'arcs pour lesquels un des  $x_i(t)$  est nul.

Nous allons exprimer le terme  $[X(a(1), \dots, a(g))_{p, cn}]$  en fonction de différents termes de la forme  $[X(b(1), \dots, b(i))_{p, to}]$  pour  $i < g$ .

Rappelons que pour tout  $i$  compris entre 1 et  $m$ ,  $k_i$  est le plus petit entier qui vérifie  $a_i(k_i) \neq 0$  et que nous avons

$$1 = k_1 = k_2 = \dots = k_{i_0} < k_{i_0+1} \leq k_{i_0+2} \leq \dots \leq k_m \leq g.$$

Soit  $i \in \{1, \dots, m\}$ . Que vaut  $[\chi_{p, l_1, \dots, l_m}]$  où  $l_i = +\infty$  et  $l_j < +\infty$  pour  $j < i$  ?

Si  $i > i_0$  les  $x_j$  pour  $j > i$  peuvent être choisis quelconques et

$$[\chi_{p, l_1, \dots, l_m}] = \mathbb{L}^{p(m-i)} [\chi_{p, l_1, \dots, l_{i-1}}^i]$$

où  $\chi_{p, l_1, \dots, l_{i-1}}^i$  est l'ensemble des troncations à l'ordre  $p$  d'arcs tracés sur  $X(a^i(1), \dots, a^i(k_i - 1))$  et d'ordre  $l_1, \dots, l_{i-1}$ , où  $X(a^i(1), \dots, a^i(k_i - 1))$  est le germe d'hypersurface à singularité quasi-ordinaire d'exposants caractéristiques  $a^i(j) = (a_1(j), \dots, a_{i-1}(j))$  pour  $1 \leq j \leq k_i - 1$ . Le germe de variété  $X(a^i(1), \dots, a^i(k_i - 1))$

n'est peut-être pas réduit mais il reste irréductible car ses exposants caractéristiques sont conjugués.

Si  $i \leq i_0$ , les  $x_j$  pour  $j \neq i$  peuvent être choisis quelconques mais les  $x_j$  pour  $j < i$  doivent être non nuls donc  $[\chi_{p, l_1, \dots, l_m}] = \mathbb{L}^{p(m-i)} (\mathbb{L}^p - 1)^{i-1}$ .

Nous avons donc

$$(5) \quad [X(a(1), \dots, a(g))_{p, cn}] = \sum_{i=1}^{i_0} \mathbb{L}^{p(m-i)} (\mathbb{L}^p - 1)^{i-1} \\ + \sum_{i=i_0+1}^m \mathbb{L}^{p(m-i)} [X(a^i(1), \dots, a^i(k_i - 1))_{p, to}],$$

et

$$(6) \quad P_{\text{géom}}^{\text{tore}^c}(a(1), \dots, a(g))(T) = \sum_{i=0}^{i_0-1} \sum_{j=0}^i \frac{\binom{i}{i-j} (-1)^j}{1 - \mathbb{L}^{m-j-1} T} \\ + \sum_{i=i_0+1}^m P_{\text{géom}, X(a^i(1), \dots, a^i(k_i - 1)), 0}^{\text{tore}}(\mathbb{L}^{m-i} T).$$

En suivant le même raisonnement nous obtenons

$$(7) \quad \chi_c(\varphi_{p, cn}(a(1), \dots, a(g))) = \sum_{i=1}^{i_0} \mathbb{L}^{p(m-i)} (\mathbb{L}^p - 1)^{i-1} \\ + \sum_{i=i_0+1}^m \mathbb{L}^{p(m-i)} \chi_c(\varphi_{p, to}(a^i(1), \dots, a^i(k_i - 1))),$$

et

$$(8) \quad P_{\text{arit}}^{\text{tore}^c}(a(1), \dots, a(g))(T) = \sum_{i=0}^{i_0-1} \sum_{j=0}^i \frac{\binom{i}{i-j} (-1)^j}{1 - \mathbb{L}^{m-j-1} T} \\ + \sum_{i=i_0+1}^m P_{\text{arit}, X(a^i(1), \dots, a^i(k_i - 1)), 0}^{\text{tore}}(\mathbb{L}^{m-i} T).$$

## 8. Résultat principal

Nous pouvons alors donner la forme générale des deux séries étudiées :

**Théorème 8.1.** — Soit  $(X, 0)$  un germe d'hypersurface irréductible quasi-ordinaire d'exposants caractéristiques  $a(1), \dots, a(g)$ . Nous avons alors les relations de récurrence suivantes

$$(9) \quad \begin{aligned} & P_{\text{g\acute{e}om}, X(a(1), \dots, a(g)), 0}^{\text{tore}}(T) = \\ & (\mathbb{L} - 1)^m \sum_{i=1}^m \sum_{p \geq 0} \mathbb{L}^{pm} T^p \times \sum_{(l_1, \dots, l_m) \in D_{0,i}(m)_p} \mathbb{L}^{-\sum_{j=1}^m l_j + \max\{l_i - b_{k_i}(l), 0\}} + \\ & + \sum_{q=1}^m \sum_{i=1}^m (\mathbb{L} - 1)^{m-q+1} \sum_{p \geq 0} (\mathbb{L}^{m-q+1} T)^p \times \sum_{(l_1, \dots, l_m) \in D_{q,i}(m)_p} \frac{\mathbb{L}^{-\sum_{j \notin I_p, l} l_j - b_{k_i}(l)}}{N_{p, l_1, \dots, l_m}}, \end{aligned}$$

$$(10) \quad \begin{aligned} & P_{\text{g\acute{e}om}, X(a(1), \dots, a(g)), 0}^{\text{c\^one}}(T) = \\ & \sum_{i=0}^{i_0-1} \sum_{j=0}^i \frac{\binom{i}{i-j} (-1)^j}{1 - \mathbb{L}^{m-j-1} T} + \sum_{i=i_0+1}^m P_{\text{g\acute{e}om}, X(a^i(1), \dots, a^i(k_i-1)), 0}^{\text{tore}}(\mathbb{L}^{m-i} T) \end{aligned}$$

$$(11) \quad \begin{aligned} & P_{\text{arit}, X(a(1), \dots, a(g)), 0}^{\text{g\acute{e}om}}(T) = \\ & (\mathbb{L} - 1)^m \sum_{k=0}^g \frac{n_{k_l}}{n} \sum_{i=1}^m \sum_{p \geq 0} \mathbb{L}^{pm} T^p \times \sum_{(l_1, \dots, l_m) \in D_{0,i}(m)_p} \mathbb{L}^{-\sum_{j=1}^m l_j + \max\{l_i - b_{k_i}(l), 0\}} + \\ & + \sum_{k=0}^g \sum_{q=1}^m \sum_{i=1}^m \sum_{I \subset \{1, \dots, m\}} \sum_{i \in I, \#I = q} (\mathbb{L} - 1)^{m-q+1} \sum_{p \geq 0} (\mathbb{L}^{m-q+1} T)^p \times \\ & \times \sum_{(l_1, \dots, l_m) \in D_{q,i,I}(m)_p} \frac{1}{n(i, I_p, l)} \frac{\mathbb{L}^{-\sum_{j \notin I_p, l} l_j - b_{k_i}(l)}}{N_{p, l_1, \dots, l_m}}, \end{aligned}$$

et

$$(12) \quad \begin{aligned} & P_{\text{arit}, X(a(1), \dots, a(g)), 0}^{\text{c\^one}}(T) = \\ & \sum_{i=0}^{i_0-1} \sum_{j=0}^i \frac{\binom{i}{i-j} (-1)^j}{1 - \mathbb{L}^{m-j-1} T} + \sum_{i=i_0+1}^m P_{\text{arit}, X(a^i(1), \dots, a^i(k_i-1)), 0}^{\text{tore}}(\mathbb{L}^{m-i} T) \end{aligned}$$

où  $b_k$  et  $M$  sont donnés définition 2.6,  $k_i$  et  $i_0$  sont donnés définition 4.1,  $D(m)_p$ ,  $D_{0,i}(m)_p$ ,  $D_{q,i}(m)_p$ ,  $I_{p, l}$  et  $D_{q,i,I}(m)_p$  sont donnés définition 5.1,  $k_l$  est donné définition 5.3,  $N_{p, l_1, \dots, l_m}$  est donné définition 6.4 et  $X(a^i(1), \dots, a^i(k_i - 1))$  est le germe d'hypersurface à singularité quasi-ordinaire d'exposants caractéristiques  $a^i(j) = (a_1(j), \dots, a_{i-1}(j))$  pour  $1 \leq j \leq k_i - 1$ .

**Remarque 8.2.** — Ce résultat nous donne une expression des deux séries de Poincaré motiviques d'un germe d'hypersurface irréductible à singularité quasi-ordinaire de dimension  $m$  en termes d'autres séries de Poincaré motiviques de germes de dimensions

strictement inférieures à  $m$ . Malheureusement la description des cônes  $D_{q,i}(m)_p$  (pour  $0 \leq q \leq m$ ) est trop compliquée pour pouvoir donner une expression plus effective de ces séries dans des cas qui pourraient sembler simples (par exemple dans le cas d'un germe défini par une équation de la forme  $Y^n - X_1^{a_1} \dots X_m^{a_m} = 0$ ).

**9. Cas où les  $a_i(1) \geq 1$  pour tout  $i$**

Dans ce cas beaucoup de choses peuvent être simplifiées, et nous pouvons donner une expression explicite de ces deux séries. Tous les  $k_j$  sont égaux à 1, et  $b_1(l) \geq l_j$  pour tout  $j$ , si  $l_j > 0$  pour tout  $j$ . En particulier, si  $l_i > p$ , alors  $b_{k_i}(l) > p$  et seul le cas C1 est à considérer ici. D'autre part  $e = 0$ . Nous avons

$$D(m)_p = \{(l_1, \dots, l_m) \in \text{Ker } M / 0 < l_i \leq p\}.$$

Notons

$$\mathbb{E}_p := \sum_{\substack{(l_1, \dots, l_m) \in \text{Ker } M \\ 0 < l_i \leq p}} \mathbb{L}^{-\sum_{i=1}^m l_i}$$

et  $\mathbb{F}_{k,p} := \sum_{\substack{(l_1, \dots, l_m) \in \text{Ker } M \\ 0 < l_i \leq p \\ b_k(l) \leq p}} \mathbb{L}^{-\sum_{i=1}^m l_i}.$

Nous avons alors

$$P_{\text{géom}}^{\text{tore}}(a(1), \dots, a(g))(T) = (\mathbb{L} - 1)^m \sum_{p \geq 0} \mathbb{E}_p (\mathbb{L}^m T)^p$$

et

(13)

$$\begin{aligned} P_{\text{arit}}^{\text{tore}}(a(1), \dots, a(g))(T) &= \sum_{k=1}^{g-1} (\mathbb{L} - 1)^m \sum_{p \geq 0} (\mathbb{L}^m T)^p (\mathbb{F}_{k,p} - \mathbb{F}_{k+1,p}) \\ &+ (\mathbb{L} - 1)^m \sum_{p \geq 0} (\mathbb{L}^m T)^p \mathbb{F}_{g,p} + (\mathbb{L} - 1)^m \sum_{p \geq 0} (\mathbb{E}_p - \mathbb{F}_{1,p}) (\mathbb{L}^m T)^p \\ &= (\mathbb{L} - 1)^m \sum_{p \geq 0} \mathbb{E}_p (\mathbb{L}^m T)^p + (\mathbb{L} - 1)^m \sum_{k=1}^g \left( \frac{n_k - n_{k-1}}{n} \right) \sum_{p \geq 0} \mathbb{F}_{k,p} (\mathbb{L}^m T)^p. \end{aligned}$$

Pour calculer ces séries, notons

$$\mathbb{E}_p = \mathbb{E}_{p_1, \dots, p_m} = \sum_{\substack{(l_1, \dots, l_m) \in \text{Ker } M \\ 0 < l_i \leq p_i}} \mathbb{L}^{-\sum_{i=1}^m l_i}.$$

Nous avons alors le lemme suivant :

**Lemme 9.1.** — *Nous avons pour tous  $n \geq p_k > 0, p > 0, k \geq 0$  :*

1.  $\mathbb{E}_p = \mathbb{E}_{p, \dots, p}$ ,
2.  $\mathbb{E}_{p_1, \dots, p_j + kn, \dots, p_m} = \mathbb{E}_{p_1, \dots, kn, \dots, p_m} + \mathbb{L}^{-kn} \mathbb{E}_{p_1, \dots, p_j, \dots, p_m}$ ,

- 3.  $\mathbb{E}_{p_1, \dots, kn, \dots, p_m} = \frac{1 - \mathbb{L}^{-kn}}{1 - \mathbb{L}^{-n}} \mathbb{E}_{p_1, \dots, n, \dots, p_m}$ ,
- 4.  $\mathbb{E}_{p_1, \dots, p_j + kn, \dots, p_m} = \frac{1 - \mathbb{L}^{-kn}}{1 - \mathbb{L}^{-n}} \mathbb{E}_{p_1, \dots, n, \dots, p_m} + \mathbb{L}^{-kn} \mathbb{E}_{p_1, \dots, p_j, \dots, p_m}$ .

Notons  $\mathcal{S}_m := \{s : \{1, \dots, m\} \rightarrow \{0, 1\}^m\}$ . Pour tout  $s \in \mathcal{S}_m$ , nous noterons  $|s|$  le nombre d'éléments de  $\{1, \dots, m\}$  d'image 1 par  $s$ . Nous avons alors

$$\mathbb{E}_{\underline{p} + n\underline{k}} = \sum_{s \in \mathcal{S}_m} \mathbb{L}^{\sum_i -k_i n(1-s(i))} \mathbb{E}_{p_1(1-s(1)) + k_1 n s(1), \dots, p_m(1-s(m)) + k_m n s(m)}.$$

En notant  $\mathbb{E}_{p,s} = \mathbb{E}_{p(1-s(1)) + ns(1), \dots, p(1-s(m)) + ns(m)}$ , nous avons

$$\mathbb{E}_{\underline{p} + n\underline{k}} = \sum_{s \in \mathcal{S}_m} \left( \frac{\mathbb{L}^{-kn} - 1}{\mathbb{L}^{-n} - 1} \right)^{|s|} \mathbb{L}^{-kn(m-|s|)} \mathbb{E}_{p,s}.$$

*Démonstration.* — Le 1. découle des définitions.

Il faut tout d'abord remarquer que nous avons  $M(l_1, \dots, l_m) = 0$  si et seulement si  $M(l_1, \dots, l_i + ln, \dots, l_m) = 0$  pour tout  $i$  et tout  $l$  entier. Le 2. découle alors de l'égalité suivante :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{p_1, \dots, p_j + kn, \dots, p_m} &= \sum_{\substack{(l_1, \dots, l_m) \in \text{Ker } M \\ 0 < l_i \leq p_i \quad i \neq j \\ 0 < l_j \leq p_j + kn}} \mathbb{L}^{\sum_{i=1}^m -l_i} \\ &= \sum_{\substack{(l_1, \dots, l_m) \in \text{Ker } M \\ 0 < l_i \leq p_i \quad i \neq j \\ 0 < l_j \leq kn}} \mathbb{L}^{\sum_{i=1}^m -l_i} + \mathbb{L}^{-kn} \sum_{\substack{(l_1, \dots, l_m) \in \text{Ker } M \\ 0 < l_i \leq p_i}} \mathbb{L}^{\sum_{i=1}^m -l_i}. \end{aligned}$$

Le 3. s'en déduit par récurrence et le 4. en compilant 2. et 3. □

**Corollaire 9.2.** — Nous avons

$$\sum_{p \geq 0} \mathbb{E}_p(\mathbb{L}^m T)^p = \sum_{p=1}^n \sum_{s \in \mathcal{S}_m} (\mathbb{L}^m T)^p \frac{\mathbb{E}_{p,s}}{(\mathbb{L}^{-n} - 1)^{|s|}} \sum_{j=0}^{|s|} \frac{\binom{|s|}{j} (-1)^j}{1 - (\mathbb{L}^j T)^n}.$$

*Démonstration.* — Nous avons

$$\begin{aligned} \sum_{p \geq 0} \mathbb{E}_p(\mathbb{L}^m T)^p &= \sum_{p=1}^n \sum_{k \geq 0} (\mathbb{L}^m T)^{kn+p} \mathbb{E}_{p+kn} \\ &= \sum_{p=1}^n (\mathbb{L}^m T)^p \sum_{s \in \mathcal{S}_m} \sum_{k \geq 0} (\mathbb{L}^m T)^{nk} \left( \frac{\mathbb{L}^{-kn} - 1}{\mathbb{L}^{-n} - 1} \right)^{|s|} \mathbb{L}^{-kn(m-|s|)} \mathbb{E}_{p,s}. \end{aligned}$$

Le résultat est alors direct en développant  $\left( \frac{\mathbb{L}^{-kn} - 1}{\mathbb{L}^{-n} - 1} \right)^{|s|}$  et sommant sur  $k$ . □

Pour calculer les séries où apparaissent les  $\mathbb{F}_{k,p}$  nous pouvons remarquer, comme tous les  $a_i(k) \geq 1$ , que

$$\mathbb{F}_{k,p} = \sum_{\substack{(l_1, \dots, l_m) \in \text{Ker } M \\ 0 < l_i \\ b_k(l) \leq p}} \mathbb{L}^{-\sum_{i=1}^m l_i} .$$

Donc nous avons

$$\begin{aligned} \sum_{p \geq 0} \mathbb{F}_{k,p} (\mathbb{L}^m T)^p &= \sum_{p \geq 0} \sum_{\substack{(l_1, \dots, l_m) \in \text{Ker } M \\ 0 < l_i \\ b_k(l) \leq p}} \mathbb{L}^{-\sum_{i=1}^m l_i} (\mathbb{L}^m T)^p \\ &= \sum_{\substack{(l_1, \dots, l_m) \in \text{Ker } M \\ 0 < l_i}} \sum_{p \geq b_k(l)} \mathbb{L}^{-\sum_{i=1}^m l_i} (\mathbb{L}^m T)^p \\ &= \sum_{\substack{(l_1, \dots, l_m) \in \text{Ker } M \\ 0 < l_i}} \frac{\mathbb{L}^{-\sum_{i=1}^m l_i} (\mathbb{L}^m T)^{b_k(l)}}{1 - \mathbb{L}^m T} \\ &= \sum_{r_i \geq 0} \sum_{\substack{(l_1, \dots, l_m) \in \text{Ker } M \\ 0 < l_i \leq n}} \frac{\mathbb{L}^{-\sum_{i=1}^m l_i} (\mathbb{L}^m T)^{b_k(l)}}{1 - \mathbb{L}^m T} \mathbb{L}^{-n \sum_{i=1}^m r_i} (\mathbb{L}^m T)^{n b_k(r)} . \end{aligned}$$

Car  $(l_1 + nr_1, \dots, l_m + nr_m) \in \text{Ker } M \iff (l_1, \dots, l_m) \in \text{Ker } M$ . Nous avons donc

$$\begin{aligned} &\sum_{p \geq 0} \mathbb{F}_{k,p} (\mathbb{L}^m T)^p = \\ &= \sum_{\substack{(l_1, \dots, l_m) \in \text{Ker } M \\ 0 < l_i \leq n}} \frac{\mathbb{L}^{-\sum_{i=1}^m l_i} (\mathbb{L}^m T)^{b_k(l)}}{1 - \mathbb{L}^m T} \prod_{i=1}^m \frac{1}{1 - \mathbb{L}^{n(a_i(k)-1)} T^{n a_i(k)}} . \end{aligned}$$

Nous pouvons alors en déduire le

**Théorème 9.3.** — Soit  $(X, 0)$  est un germe irréductible à singularité quasi-ordinaire tel que  $a_i(1) \geq 1$  pour tout  $i \in \{1, \dots, m\}$ . Alors nous avons

$$(14) \quad \begin{aligned} P_{\text{géom}, X, 0}(T) &= \sum_{j=1}^m \binom{m}{j} \frac{(-1)^{j+1}}{1 - \mathbb{L}^{m-j} T} \\ &+ (\mathbb{L} - 1)^m \sum_{p=1}^n \sum_{s \in \mathcal{S}_m} (\mathbb{L}^m T)^p \frac{\mathbb{E}_{p,s}}{(\mathbb{L}^{-n} - 1)^{|s|}} \sum_{j=0}^{|s|} \frac{\binom{|s|}{j} (-1)^j}{1 - (\mathbb{L}^j T)^n} , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P_{\text{arit},X,0}(T) &= \sum_{j=1}^m \binom{m}{j} \frac{(-1)^{j+1}}{1 - \mathbb{L}^{m-j}T} \\
 (15) \quad &+ \frac{1}{n} (\mathbb{L} - 1)^m \sum_{p=1}^n \sum_{s \in \mathcal{S}_m} (\mathbb{L}^m T)^p \frac{\mathbb{E}_{p,s}}{(\mathbb{L}^{-n} - 1)^{|s|}} \sum_{j=0}^{|s|} \frac{\binom{|s|}{j} (-1)^j}{1 - (\mathbb{L}^j T)^n} \\
 &+ (\mathbb{L} - 1)^m \sum_{k=1}^g \binom{n_k - n_{k-1}}{n} \frac{\mathbb{H}_k}{1 - \mathbb{L}^m T} \prod_{i=1}^m \frac{1}{1 - \mathbb{L}^{n(ma_i(k)-1)} T^{na_i(k)}}
 \end{aligned}$$

où  $\mathbb{E}_{p,s}$  et  $\mathbb{E}_{\underline{p},s}$  sont définis lemme 9.1 et

$$\mathbb{H}_k := \sum_{\substack{(l_1, \dots, l_m) \in \text{Ker } M \\ 0 < l_i \leq n}} \mathbb{L}^{-\sum_{i=1}^m l_i} (\mathbb{L}^m T)^{b_k(l)}$$

**Remarque 9.4.** — En particulier, les pôles de la série géométrique sont tous de la forme  $\mathbb{L}^{-j}$  pour un entier  $j$  compris entre 0 et  $m$ , alors que certains pôles de la série arithmétique peuvent dépendre des exposants caractéristiques (voir par exemple le cas des courbes planes).

### 9.1. Exemples

9.1.1. *Courbes planes.* — Considérons un germe de courbe plane de caractéristique  $(\beta_0 = n, \beta_1, \dots, \beta_g)$  [24]. Nous avons alors  $n = n, m = 1$  et  $g = g$ . De plus

$$l \in \text{Ker } M \iff l \in n\mathbb{Z} .$$

Nous obtenons alors

$$\begin{aligned}
 P_{\text{géom},X,0}(T) &= \frac{1}{1 - T} + \frac{\mathbb{L} - 1}{1 - \mathbb{L}T} \frac{T^n}{1 - T^n} \\
 \text{et } P_{\text{arit},X,0}(T) &= \frac{1}{1 - T} + \frac{\mathbb{L} - 1}{1 - \mathbb{L}T} \sum_{k=0}^g \binom{n_k - n_{k-1}}{n} \frac{\mathbb{L}^{\beta_k - n} T^n}{1 - \mathbb{L}^{\beta_k - n} T^n} .
 \end{aligned}$$

On retrouve là le résultat de Denef et Loeser [7].

9.1.2. *L’hypersurface définie par  $Z^2 - X^3Y^3 = 0$ .* — Soit l’hypersurface de  $\mathbb{C}^3$  définie par  $Z^2 - X^3Y^3 = 0$ . La série fractionnaire associée est  $\xi = X^{3/2}Y^{3/2}$ . Dans ce cas nous avons  $n = 2, m = 2, g = 1, n_1 = 2$  et

$$\begin{aligned}
 M : \mathbb{Z}^2 &\longrightarrow \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}} \\
 (l_1, l_2) &\longmapsto 3l_1 + 3l_2
 \end{aligned}$$

Nous avons

$$(l_1, l_2) \in \text{Ker } M \iff l_1 + l_2 \in \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}} .$$

Soit  $p \in \{1, 2\}$ , nous avons

$$\mathbb{E}_{1,(0,0)} = \mathbb{E}_{1,(1,0)} = \mathbb{E}_{1,(0,1)} = \mathbb{L}^{-2},$$

$$\mathbb{E}_{2,(0,0)} = \mathbb{E}_{2,(0,1)} = \mathbb{E}_{2,(1,0)} = \mathbb{E}_{2,(1,1)} = \mathbb{E}_{1,(1,1)} = \mathbb{L}^{-2} + \mathbb{L}^{-4}.$$

D'où

$$(1 + \mathbb{L})^2 P_{\text{géom},X,0}(T) = \frac{-2\mathbb{L}}{1-T} + \frac{(1+\mathbb{L})^2}{1-\mathbb{L}T} - \frac{(1-\mathbb{L})^2}{1+\mathbb{L}T} + \frac{1+\mathbb{L}^2}{1-\mathbb{L}^2T}.$$

Dans ce cas, la série géométrique a 4 pôles en  $T : 1, \mathbb{L}^{-1}, -\mathbb{L}^{-1}$  et  $\mathbb{L}^{-2}$ .

### Références

- [1] S. ABHYANKAR – On the ramification of algebraic functions, *Amer. J. Math.* **77** (1955), p. 575–592.
- [2] E. ARTAL BARTOLO, P. CASSOU-NOGUÈS, I. LUENGO & A. MELLE HERNÁNDEZ – Quasi-ordinary power series and their zeta functions, *Mem. Amer. Math. Soc.* **178** (2005).
- [3] H. COBO PABLOS & P. D. GONZÁLEZ-PÉREZ – en préparation.
- [4] J. DENEFF – The rationality of the Poincaré series associated to the  $p$ -adic points on a variety, *Invent. Math.* **77** (1984), p. 1–23.
- [5] J. DENEFF & F. LOESER – Motivic Igusa zeta functions, *J. Algebraic Geom.* **7** (1998), p. 505–537.
- [6] ———, Germs of arcs on singular algebraic varieties and motivic integration, *Invent. Math.* **135** (1999), p. 201–232.
- [7] ———, Definable sets, motives and  $p$ -adic integrals, *J. Amer. Math. Soc.* **14** (2001), p. 429–469.
- [8] ———, Geometry on arc spaces of algebraic varieties, in *European Congress of Mathematics, Vol. I (Barcelona, 2000)*, Progr. Math., vol. 201, Birkhäuser, 2001, p. 327–348.
- [9] W. FULTON – *Introduction to toric varieties*, Annals of Mathematics Studies, vol. 131, Princeton University Press, 1993, The William H. Roever Lectures in Geometry.
- [10] Y.-N. GAU – Embedded topological classification of quasi-ordinary singularities, *Mem. Amer. Math. Soc.* **74** (1988), p. 109–129.
- [11] P. D. GONZÁLEZ-PÉREZ – The semigroup of a quasi-ordinary hypersurface, *J. Inst. Math. Jussieu* **2** (2003), p. 383–399.
- [12] ———, Toric embedded resolutions of quasi-ordinary hypersurface singularities, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **53** (2003), p. 1819–1881.
- [13] M. J. GREENBERG – Rational points in Henselian discrete valuation rings, *Publ. Math. I.H.É.S.* **31** (1966), p. 59–64.
- [14] T. C. HALES – What is motivic measure?, *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)* **42** (2005), p. 119–135.
- [15] M. KONTSEVICH – Cours à Orsay, 7 décembre 1995.
- [16] M. LEJEUNE-JALABERT – La série de Denef-Loeser d'une branche plane, notes informelles, 2001.
- [17] M. LEJEUNE-JALABERT & A. J. REGUERA – The Denef-Loeser series for toric surface singularities, in *Proceedings of the International Conference on Algebraic Geometry and Singularities (Spanish) (Sevilla, 2001)*, vol. 19, 2003, p. 581–612.
- [18] M. LEJEUNE-JALABERT & A. J. REGUERA-LÓPEZ – Arcs and wedges on sandwiched surface singularities, *Amer. J. Math.* **121** (1999), p. 1191–1213.

- [19] J. LIPMAN – Quasi-ordinary singularities of embedded surfaces, Thèse, Université de Harvard, 1965.
- [20] ———, Topological invariants of quasi-ordinary singularities, *Mem. Amer. Math. Soc.* **74** (1988), p. 1–107.
- [21] J. NICAISE – Arcs and resolution of singularities, *Manuscripta Math.* **116** (2005), p. 297–322.
- [22] ———, Motivic generating series for toric surface singularities, *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* **138** (2005), p. 383–400.
- [23] J. PAS – Uniform  $p$ -adic cell decomposition and local zeta functions, *J. reine angew. Math.* **399** (1989), p. 137–172.
- [24] O. ZARISKI – *Le problème des modules pour les branches planes*, École Polytechnique, 1973, Cours donné au Centre de Mathématiques de l'École Polytechnique, Paris, Octobre-Novembre 1973.

---

G. ROND, Department of Mathematics, University of Toronto, Toronto, Ontario, Canada M5S 3G3  
E-mail : rond@picard.ups-tlse.fr