PROPRIÉTÉS DE RÉGULARITÉ DES MORPHISMES D'ALGÈBRES ANALYTIQUES

par

Guillaume Rond

Résumé. — Nous faisons un survol des propriétés de régularité des morphismes d'algèbres analytiques. En particulier nous étudions la conservation de l'injectivité d'un morphisme d'algèbres analytiques par passage aux complétés.

1. Préliminaires

1.1. Séries convergentes et théorème de préparation. —

Définition 1.1. — *Soit* $\mathbb{k}$ *un corps valué (pas nécessairement complet) et soit* $n \in \mathbb{N}$. *Une série formelle* $f = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} f_\alpha x_1^{\alpha_1} ... x_n^{\alpha_n} \in \mathbb{k}[[x_1, ..., x_n]]$ *est dite convergente si il existe une constante* $R > 0$ *telle que*

$$\sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} |f_\alpha| R^{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n} < +\infty.$$

Le sous-ensemble de $\mathbb{k}[[x_1, ..., x_n]]$ *formé des séries convergentes est un sous-anneau de l'anneau* $\mathbb{k}[[x_1, ..., x_n]]$, *et est noté* $\mathbb{k}\{x_1, ..., x_n\}$.
On notera $\mathcal{O}_n$ *l'anneau* $\mathbb{k}\{x_1, ..., x_n\}$ *et* $\mathcal{F}_n$ *l'anneau* $\mathbb{k}[[x_1, ..., x_n]]$ *quand aucune confusion ne sera possible.*

Définition 1.2. — *Soit* $\mathbb{k}$ *un corps valué. Une algèbre analytique sur* $\mathbb{k}$ *est une* $\mathbb{k}$*-algèbre* A *isomorphe à un quotient* $\mathcal{O}_n/I$ *où* $n \in \mathbb{N}$ *et* I *est un idéal propre de* $\mathcal{O}_n$.
Une $\mathbb{k}$*-algèbre formelle est une* $\mathbb{k}$*-algèbre* A *isomorphe à un quotient* $\mathcal{F}_n/I$ *où* $n \in \mathbb{N}$ *et* I *est un idéal propre de* $\mathcal{F}_n$.

Les algèbres analytiques et formelles sont des anneaux locaux nœthériens [**Ho**].
Si A est un anneau local on notera $\mathfrak{m}_A$ son idéal maximal, et $\widehat{A}$ son complété pour la topologie $\mathfrak{m}_A$-adique. Si $\varphi : A \longrightarrow B$ est un morphisme d'anneaux locaux (i.e. $\varphi(\mathfrak{m}_A) \subset \mathfrak{m}_B$), on note $\widehat{\varphi} : \widehat{A} \longrightarrow \widehat{B}$ le morphisme d'anneaux locaux induit par completion.
On a alors le théorème suivant :

Théorème 1.3 **(Théorème de préparation de Weierstrass)**
Soient $d \in \mathbb{N}$ et $f \in \mathcal{O}_n$ tels que $f(0, ..., 0, x_n) = x_n^d g(x_n)$ avec $g(0) \neq 0$. Alors il existe $a_i \in \mathcal{O}_{n-1}$, pour $0 \leq i \leq d-1$, avec $a_i(0) = 0$ pour tout i, et $u(x) \in \mathcal{O}_n$ avec $u(0) \neq 0$ tels que

$$f(x_1, ..., x_n) = u(x_1, ..., x_n)\left(x_n^d + a_{d-1}(x_1, ..., x_{n-1})x_n^{d-1} + \cdots + a_0(x_1, ..., x_{n-1})\right).$$

De plus une telle écriture est unique.
Le résultat analogue reste vrai si l'on remplace respectivement $\mathcal{O}_n$ et $\mathcal{O}_{n-1}$ par $\mathcal{F}_n$ et $\mathcal{F}_{n-1}$.

Définition 1.4. — *On appelle polynôme de Weierstrass de degré d en la variable x_n tout élément $f \in \mathcal{O}_n$ tel que*

$$f = x_n^d + a_{d-1}(x_1, ..., x_{n-1})x_n^{d-1} + \cdots + a_0(x_1, ..., x_{n-1})$$

avec $a_i(0) = 0$ pour $1 \leq i \leq p-1$.

Remarque 1.5. — *Soit $f \in \mathbb{k}[[x_1, ..., x_{n-1}]][x_n]$ un polynôme de Weierstrass en la variable x_n. Alors il existe $u \in \mathbb{k}[[x_1, ..., x_n]]$ inversible tel que $uf \in \mathbb{k}\{x_1, ..., x_n\}$ si et seulement si $f \in \mathbb{k}\{x_1, ..., x_n\}$. Ceci résulte de l'unicité de la décomposition de Weierstrass de uf.*

Théorème 1.6 **(Théorème de division de Weierstrass)**. — *Soient $f \in \mathcal{O}_n$ et $g \in \mathcal{O}_n$ un polynôme de Weierstrass de degré d en la variable x_n. Alors il existe $q \in \mathcal{O}_n$ et $r \in \mathcal{O}_n$, r étant un polynôme de Weierstrass en x_n de degré inférieur strictement à g, tels que $f = qg+r$. Le résultat analogue reste vrai si l'on remplace respectivement $\mathcal{O}_n$ et $\mathcal{O}_{n-1}$ par $\mathcal{F}_n$ et $\mathcal{F}_{n-1}$.*

Théorème 1.7 **(Théorème de préparation de Weierstrass bis)**
Soient A et B deux algèbres analytiques (resp. formelles) sur un corps $\mathbb{k}$ valué. Soit $\varphi : A \longrightarrow B$ un morphisme de $\mathbb{k}$-algèbres locales. Les conditions suivantes sont équivalentes :
i) B est finie sur A (i.e. B est un A-module de type fini par φ).
ii) B est quasi-finie sur A (i.e. $B/\mathfrak{m}_A B$ est un espace vectoriel de dimension finie sur $A/\mathfrak{m}_A$).

1.2. Propriétés conservées par passage aux complétés [Ho]. —

Corollaire 1.8. — *Soit $\varphi : A \longrightarrow B$ un morphisme d'algèbres analytiques. Alors B est finie sur A si et seulement si $\widehat{B}$ est finie sur $\widehat{A}$.*

Démonstration. — En effet, d'après le théorème 1.7, B est finie sur A si et seulement si $B/\mathfrak{m}_B$ est finie sur $A/\mathfrak{m}_A$. Or $\widehat{B}/\mathfrak{m}_{\widehat{B}} \simeq B/\mathfrak{m}_B$ et $\widehat{A}/\mathfrak{m}_{\widehat{A}} \simeq A/\mathfrak{m}_A$. En appliquant alors le théorème de préparation pour les algèbres de séries formelles, on obtient le résultat. □

Corollaire 1.9. — *Soit $\varphi : A \longrightarrow B$ un morphisme d'algèbres analytiques. Alors*
i) φ est surjectif si et seulement si $\widehat{\varphi}$ est surjectif.
ii) Si $\widehat{\varphi}$ est injectif, alors φ est injectif.
iii) φ est un isomorphisme si et seulement si $\widehat{\varphi}$ l'est.

Démonstration. — Tout d'abord, si φ ou $\widehat{\varphi}$ est surjectif, alors B est finie sur A ou $\widehat{B}$ est finie sur $\widehat{A}$, et donc B est finie sur A et $\widehat{B}$ est finie sur $\widehat{A}$ d'après le corollaire précédent. Comme $B/\mathfrak{m}_B \simeq \widehat{B}/\mathfrak{m}_{\widehat{B}}$ en utilisant le lemme de Nakayama on obtient la première assertion.
Si $\widehat{\varphi}$ est injectif, φ est alors clairement injectif.

Si φ est un isomorphisme alors $\widehat{\varphi^{-1}}$ est l'inverse de $\widehat{\varphi}$ qui est donc un isomorphisme. Si $\widehat{\varphi}$ est un isomorphisme, alors φ est injectif et surjectif d'après ce qui précède, donc φ est un isomorphisme. □

Dans **[Gr]**, A. Grothendieck conjecture qu'un morphisme injectif d'algèbres analytiques induit toujours un morphisme injectif sur les complétés. Plus généralement, on peu se demander si un morphisme injectif $\varphi : A \longrightarrow B$ d'algèbres analytiques vérifie $\widehat{\varphi}^{-1}(A) = B$. Un problème similaire est de se savoir, lorsque l'image d'une série formelle est convergente, si c'est alors l'image d'une série convergente : i.e. si $\varphi : A \longrightarrow B$ est un morphisme d'algèbres analytiques, a-t-on toujours $\widehat{\varphi}(\widehat{A}) \cap B = \varphi(A)$? Il faut attendre le papier **[Ga1]** de A. Gabrielov pour avoir une réponse qui se trouve être négative à ces questions. Le but de cet article est de donner une présentation des réponses connues (négatives en général, positives dans certains cas) à ces questions.

1.3. Fonction de Chevalley. — Dans l'article **[Ch]** est montré le résultat suivant :

***Théorème 1.10* (lemme de Chevalley).** — *Soit* $(A, \mathfrak{m})$ *un anneau local complet et soit* $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite décroissante d'idéaux de* A *telle que* $\cap_n I_n = (0)$*. Alors il existe une fonction* $\lambda : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ *telle que pour tout entier* $n \in \mathbb{N}$*,* $I_{\lambda(n)} \subset \mathfrak{m}^n$*.*

On en déduit alors le résultat suivant (en appliquant le théorème précédent à la suite $(\varphi^{-1}(\mathfrak{m}_B^n))_n$ d'idéaux de $A/\mathrm{Ker}(\widehat{\varphi})$) :

Corollaire 1.11. — *Soit* $\widehat{\varphi} : A \longrightarrow B$ *un morphisme d'algèbres formelles sur* $\Bbbk$*. Alors il existe une fonction* $\lambda : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ *telle que*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \varphi^{-1}(\mathfrak{m}_B^{\lambda(n)}) \subset Ker(\widehat{\varphi}) + \mathfrak{m}_A^n.$$

La plus petite fonction λ *vérifiant cette relation est appelée fonction de Chevalley du morphisme* $\widehat{\varphi}$*. C'est une fonction croissante* $\beta : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$*.*

Une question naturelle qui se pose est alors de savoir quelle peut être la croissance de la fonction de Chevalley d'un morphisme d'algèbres formelles.

2. Interprétation en terme d'approximation de Artin cylindrique

Soit $\varphi : \Bbbk\{x_1, ..., x_n\}/I \longrightarrow \Bbbk\{y_1, ..., y_m\}$ un morphisme injectif d'algèbres analytiques. Notons $\varphi' : \Bbbk\{x_1, ..., x_n\} \longrightarrow \Bbbk\{y_1, ..., y_m\}$ le morphisme induit. Notons x et y les multivariables $(x_1, ..., x_n)$ et $(y_1, ..., y_m)$. Alors $\widehat{\varphi}$ est injectif si et seulement si $\mathrm{Ker}(\widehat{\varphi'}) = I\Bbbk[[x]] = \mathrm{Ker}(\varphi')$. Pour étudier la première question, on peut donc supposer que $\varphi : \Bbbk\{x\} \longrightarrow \Bbbk\{y\}$ et étudier le problème de savoir quand est-ce que $\mathrm{Ker}(\widehat{\varphi})$ est engendré par $\mathrm{Ker}(\varphi)$.
On peut remarquer que $\mathrm{Ker}(\varphi)\Bbbk[[x]] = \overline{\mathrm{Ker}(\varphi)} := \cap_{c\in\mathbb{N}} (\mathrm{Ker}(\varphi) + (x)^c\Bbbk[[x]])$ est la clôture de $\mathrm{Ker}(\varphi)$ dans $\Bbbk[[x]]$ pour la topologie de Krull de cet anneau. Notons $\varphi_i(y) := \varphi(x_i)(y) \in \Bbbk\{y\}$ pour $1 \leq i \leq n$. Soit $\overline{f} \in \mathrm{Ker}(\widehat{\varphi})$. Le développement de Taylor de $\overline{f}(x)$ nous donne

$$\overline{f}(x) = \overline{f}(x) - \overline{f}(\varphi(y)) = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n} \frac{1}{\alpha_1!...\alpha_n!}\overline{f}^{(\alpha)}(\varphi(y))(x_1 - \varphi_1(y))^{\alpha_1}...(x_n - \varphi_n(y))^{\alpha_n}.$$

Donc il existe $\overline{g}_i \in \Bbbk[[x, y]]$, pour $1 \leq i \leq n$, tels que

$$\overline{f}(x) + \sum_{i=1}^{n}(x_i - \varphi_i(y))\overline{g}_i(x, y) = 0.$$

Alors $\overline{f} \in \overline{\mathrm{Ker}(\varphi)}$ si et seulement si pour tout $c \in \mathbb{N}$ il existe $f_c \in \mathrm{Ker}(\varphi)$ tel que $\overline{f}(x) - f_c(x) \in (x)^c$. En regardant le développement de Taylor des f_c, on voit que $\overline{f} \in \overline{\mathrm{Ker}(\varphi)}$ si et seulement si il existe $f_c(x) \in \Bbbk\{x\}$ et $g_{i,c}(x, y) \in \Bbbk\{x, y\}$, pour tout $c \in \mathbb{N}$, tels que

$$f_c(x) + \sum_{i=1}^{n}(x_i - \varphi_i(y))g_{i,c}(x, y) = 0 \quad \forall c \in \mathbb{N}$$

$$\text{et} \quad f_c(x) - \overline{f}(x) \in (x)^c \quad \forall c \in \mathbb{N}.$$

Considérons maintenant $P(F_i, G_j) \in \Bbbk\{x, y\}[F_1, ..., F_r, G_1, ..., G_s]$. Nous dirons que P possède la propriété d'approximation cylindrique par rapport à x si :

$$\forall \overline{f}_i \in \Bbbk[[x]],\ \forall \overline{g}_j \in \Bbbk[[x, y]],\ \text{tels que } P(\overline{f}_i, \overline{g}_j) = 0,\ \forall c \in \mathbb{N},$$

$$\exists f_i \in \Bbbk\{x\},\ \exists g_j \in \Bbbk\{x, y\} \text{ tels que } P(f_i, g_j) = 0,$$

$$\text{et } \overline{f}_i - f_i \in (x)^c,\ \overline{g}_j - g_j \in (x, y)^c \text{ pour tous } 1 \leq i \leq r,\ 1 \leq j \leq s.$$

On déduit alors de la remarque précédente la proposition suivante (en fait la remarque nous donne légèrement moins que cette propositon ; pour la preuve complète de cette proposition voir [**Ro2**]) :

Proposition 2.1. — *Soit l'équation suivante :*

$$F(x) + \sum_{i=1}^{n}(x_i - \varphi_i(y))G_i(x, y) = 0 \tag{E1}$$

Alors Ker$(\widehat{\varphi})$ = *Ker*$(\varphi)\Bbbk[[x]]$ *si et seulement si l'équation (E1) possède la propriété d'approximation cylindrique.*

On peut généraliser cela de la manière suivante :

Proposition 2.2. — [**Ro2**] *Soit l'équation suivante :*

$$F(x) + \sum_{i=1}^{n}(x_i - p_i(y))G_i(x, y) + h(y) = 0 \tag{E2}$$

où $h \in \Bbbk\{y\}$. *Alors l'équation (E2) possède la propriété d'approximation cylindrique si et seulement si* $h \in \varphi(\Bbbk\{x\})$.
En particulier toutes les équations (E2), pour $h \in \Bbbk\{y\}$, *possèdent la propriété d'approximation cylindrique par rapport à* x *si et seulement si* $\widehat{\varphi}(\Bbbk[[x]]) \cap \Bbbk\{y\} = \varphi(\Bbbk\{x\})$.

3. Quelques exemples

3.1. Exemple de Osgood [Os]. — Soit $\varphi\ :\ \mathbb{C}\{x_1,\, x_2,\, x_3\} \longrightarrow \mathbb{C}\{y_1,\, y_2\}$ défini par

$$\varphi(x_1) = y_1, \quad \varphi(x_2) = y_1y_2, \quad \varphi(x_3) = y_1y_2e^{y_2}.$$

Soit $f \in \mathrm{Ker}(\widehat{\varphi})$ que l'on écrit sous la forme $f = \sum_{d=0}^{+\infty} f_d$ où f_d est un polynôme homogène de degré d pour tout $d \in \mathbb{N}$. Alors $0 = \widehat{\varphi}(f) = \sum_d y_1^d f_d(1,\, y_2,\, y_2e^{y_2})$. Donc $f_d = 0$ pour tout $d \in \mathbb{N}$ car 1, y_2 et $y_2e^{y_2}$ sont algébriquement indépedants sur $\mathbb{C}$. Donc $\mathrm{Ker}(\widehat{\varphi}) = (0)$ et de même $\mathrm{Ker}(\varphi) = (0)$.

Notons $\Phi\ :\ (\mathbb{C}^2,\, 0) \longrightarrow (\mathbb{C}^3,\, 0)$ le morphisme de germes d'espaces analytiques induit par φ. On voit ici que la dimension complexe du germe $(\mathrm{Im}(\Phi),\, 0)$ est égale à 2, mais que le plus petit germe d'espace formel (i.e. défini comme lieu des zéros de séries formelles) ou analytique (i.e. défini comme lieu des zéro de séries convergentes) contenant ce germe image est le germe $(\mathbb{C}^3,\, 0)$ qui est de dimension 3 sur $\mathbb{C}$. L'image de Φ est donc loin d'être analytique. en particulier le morphisme Φ n'est pas propre (par un théorème de Remmert qui assure le caractère analytique de l'image d'un germe d'espace analytique complexe par un morphisme propre [**Re**]).

3.2. Exemple de Gabrielov [Ga1]. — Son exemple est construit à partir de celui de Osgood. On peut remarquer que "$\varphi\left(x_3 - x_2e^{\frac{x_2}{x_1}}\right) = 0$". Cependant $x_3 - x_2e^{\frac{x_2}{x_1}}$ n'est pas un élément de $\mathbb{C}\{x_1,\, x_2,\, x_3\}$, mais on peut l'approcher par des polynômes homogènes :
Notons

$$f_n := \left(x_3 - x_2\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{i!}\frac{x_2^i}{x_1^i}\right)x_1^n \in \mathbb{C}[x_1,\, x_2,\, x_3],\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Alors

$$\varphi(f_n) = y_1^{n+1}y_2\sum_{i=n+1}^{+\infty}\frac{y_2^i}{i!},\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

On voit alors que $(n+1)!\varphi(f_n)$ est une série convergente dont tous les coefficients sont de norme plus petite que 1. De plus si le coefficient de $y_1^k y_2^l$ dans le développement de $\varphi(f_n)$ est non nul alors $k = n+1$. Donc $h := \sum_n (n+1)!\varphi(f_n)$ est une série convergente puisque tous ces coefficients sont de norme plus petite que 1 (chaque monôme non nul de h provient d'un seul $\varphi(f_n)$). Or $\widehat{\varphi}$ étant injective, l'unique antécédant que h par $\widehat{\varphi}$ est nécessairement $\widehat{g} := \sum_n (n+1)!f_n$. Or

$$\sum_n (n+1)!f_n = (\sum_n (n+1)!x_1^n)x_3 + g(x_1,\, x_2)$$

et $\sum_n (n+1)!x_1^n$ est une série divergente, donc $\widehat{g} \in \mathbb{C}[[x]]\backslash\mathbb{C}\{x\}$, et $\widehat{\varphi}(\widehat{g}) = h \in \mathbb{C}\{y\}$.
On voit donc que $\varphi(\Bbbk\{x\}) \subsetneq \widehat{\varphi}(\Bbbk[[x]]) \cap \Bbbk\{y\}$.

Considérons maintenant le morphisme $\psi\ :\ \mathbb{C}\{x_1,\, x_2,\, x_3,\, x_4\} \longrightarrow \mathbb{C}\{y_1,\, y_2\}$ défini par

$$\psi(x_1) = y_1, \quad \psi(x_2) = y_1y_2, \quad \psi(x_3) = y_1y_2e^{y_2}, \quad \psi(x_4) = h(y_1,\, y_2).$$

Alors $x_4 - \widehat{g}(x_1, x_2, x_3) \in \mathrm{Ker}(\widehat{\psi})$. Par ailleurs le morphisme induit par $\widehat{\psi}$ sur le quotient $\mathbb{C}[[x_1, ..., x_4]]/(x_4 - \widehat{g}(x_1, x_2, x_3))$ est isomorphe à $\widehat{\varphi}$ qui est injectif. Donc on a l'égalité $\mathrm{Ker}(\widehat{\psi}) = (x_4 - \widehat{g}(x_1, x_2, x_3))$.
Comme $\mathrm{Ker}(\psi)$ est un idéal premier de $\mathbb{C}\{x\}$, $\mathrm{Ker}(\psi)\mathbb{C}[[x]]$ est un idéal premier de $\mathbb{C}[[x]]$ (cf. théorème 4.5 [**To1**]) inclus dans $\mathrm{Ker}(\widehat{\psi})$. Supposons que $\mathrm{Ker}(\psi) \neq (0)$, alors $\mathrm{Ker}(\psi)\mathbb{C}[[x]] = \mathrm{Ker}(\widehat{\psi})$ car $\mathrm{ht}(\mathrm{Ker}(\widehat{\psi})) = 1$. Donc $\mathrm{Ker}(\widehat{\psi})$ est engendré par une série convergente, notée $f \in \mathbb{C}\{x_1, ..., x_4\}$. Comme $\mathrm{Ker}(\widehat{\psi}) = (x_4 - \widehat{g}(x_1, x_2, x_3))$, il existe $u(x) \in \mathbb{C}[[x]]$, $u(0) \neq 0$, tel que $f = u.(x_4 - \widehat{H}(x_1, x_2, x_3)$. Or, en applicant le théorème de préparation de Weierstrass analytique à f par rapport à x_4 et en utilisant l'unicité dans le théorème de préparation de Weierstrass formel, on voit que $u(x)$ et $x_4 - \widehat{g}(x_1, x_2, x_3)$ doivent être convergents ce qui est impossible car $\widehat{g}$ est une séries convergente. Donc $\mathrm{Ker}(\psi) = (0)$ alors que $\mathrm{Ker}(\widehat{\psi}) \neq (0)$.

Notons $\Psi : (\mathbb{C}^2, 0) \longrightarrow (\mathbb{C}^4, 0)$ le morphisme de germes d'espaces analytiques induit par ψ. On voit ici que la dimension complexe du germe $(\mathrm{Im}(\Phi), 0)$ est encore égale égale à 2, le plus petit germe d'espace formel contenant le germe image est de dimension 3 sur $\mathbb{C}$ et le plus petit germe d'espace analytique contenant le germe image est $(\mathbb{C}^4, 0)$ qui est de dimension 4 sur $\mathbb{C}$.

On voit donc que cet exemple répond par la négative aux deux questions posées à la fin de la partie 1.2. Il y a néanmoins un cas important, que nous verrons dans la partie suivante, où la réponse est positive.
On voit aussi que l'équation (E1) associée à ψ, dans la partie 2, n'a pas la propriété d'approximation cylindrique. Ceci répond aussi par la négative à la question de M. Artin [**Ar1**] qui était de savoir si toute équation comme en 2 admettait la propriété d'approximation cylindrique (voir aussi [**Be1**]).

3.3. Exemple de fonction de Chevalley à croissance donnée [Ro1]. — Là encore cet exemple est inspiré par l'exemple de Osgood et une remarque de Abhyankar [**Ab**]. Soient $\alpha : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ une fonction croissante et $\Bbbk$ un corps. Soit $(n_i)_i$ une suite d'entiers telle que $n_{i+1} > \alpha(n_i + 1)$ pour tout i et telle que la série convergente $\xi(Y) := \sum_{i \geq 1} Y^{n_i}$ soit transcendante sur $\Bbbk(Y)$ (cf. [**ML-S**] pour l'existence d'une telle série). On définit alors le morphisme $\varphi : \Bbbk\{x_1, x_2, x_3\} \longrightarrow \Bbbk\{y_1, y_2\}$ de la manière suivante :

$$(\varphi(x_1), \varphi(x_2), \varphi(x_3)) = (y_1, y_1 y_2, y_1 \xi(y_2)).$$

On montre, de la même manière que l'exemple de Osgood, que $\widehat{\varphi}$ est injective. En effet, soit $f \in \mathrm{Ker}(\widehat{\varphi})$. On peut écrire $f = \sum_d f_d$, où f_d est homogène de degré d. Alors $\widehat{\varphi}(f) = \sum y_1^d f_d(1, y_2, \xi(y_2)) = 0$. Donc $f_d(1, y_2, \xi(y_2)) = 0$ pour tout d. Comme $1, y_2, \xi(y_2)$ sont algébriquement indépendants sur $\Bbbk$, ceci implique $f_d = 0$ pour tout d et donc $f = 0$.
Pour tout entier i on peut définir :

$$\overline{f}_i := x_1^{n_i - 1} x_3 - \left(x_2^{n_1} x_1^{n_i - n_1} + \cdots + x_2^{n_{i-1}} x_1^{n_i - n_{i-1}} + x_2^{n_i} \right).$$

On a alors :

$$\varphi(\overline{f}_i) = y_1^{n_i} \xi(y_2) - y_1^{n_i} \sum_{k=1}^{i} y_2^{n_k} \in (y)^{n_i + n_{i+1}} \subset (y)^{\alpha(n_i + 1)}$$

mais $\overline{f}_i \notin (x)^{n_i+1}$ pour tout i. Donc la fonction de Chevalley β de φ vérifie $\beta(n_i+1) > \alpha(n_i+1)$ pour tout $i \in \mathbb{N}$. On obtient donc $\limsup \frac{\beta(n)}{\alpha(n)} \geq 1$.
Donc, pour toute fonction croissante α, il existe un morphisme d'algèbres analytiques dont la fonction de Chevalley croît plus vite. En particulier, il existe de tels morphismes dont la fonction de Chevalley n'est même pas constructible, puisqu'il existe des fonctions dont la croissance est plus grande que toute fonction constructible. Là encore, cet exemple montre que la question posée à la fin de la partie 1.3 n'a pas de réponse générale satisfaisante.

4. Définitions, outils et théorème principal

Il existe néanmoins un cas important où les questions précédentes ont une réponse positive ou satisfaisante. C'est le cas des morphismes *réguliers* au sens de Gabrielov. Avant de définir ces morphismes, nous allons d'abord donner quelques définitions. Ensuite nous allons donner deux exemples particuliers où les réponses aux questions précédentes sont positives avant d'étudier le cas des morphismes réguliers. Pour les preuves des lemmes ci-dessous on pourra se reporter à [**Ro1**] par exemple.

Définition 4.1. — *Soit $\varphi : A \longrightarrow B$ un morphisme d'algèbres analytiques sur $\mathbb{k}$ où $Gr_{\mathfrak{m}_B}B$ est intègre (ce qui est la cas par exemple si B est régulier). Dans ce cas, ord_B, défini par $ord_B(f) := \max\{n \in \mathbb{N} \ / \ f \in \mathfrak{m}_B^n\}$ est une valuation. Par abus de notation notons encore φ le morphisme induit sur $A/Ker(\varphi)$, et notons alors $\nu := ord_B \circ \varphi$ la valuation définie sur le corps des fractions de $A/Ker(\varphi)$. Notons $\mathbb{k}_\nu$ le corps résiduel de ν, i.e. $\mathbb{k}_\nu := A_\nu/\mathfrak{m}_\nu$ où A_ν est l'anneau de valuation de ν et $\mathfrak{m}_\nu$ son idéal maximal, et $tr.deg_{\mathbb{k}}\nu$ le degré de transcendance de $\mathbb{k} \longrightarrow \mathbb{k}_\nu$.*
Si $\varphi(\mathfrak{m}_A) = \{0\}$, alors on pose $r_1(\varphi) := 0$; dans le cas contraire on pose $r_1(\varphi) := tr.deg_{\mathbb{k}}\nu + 1$. Par ailleurs on pose

$$r_2(\varphi) := dim\left(\frac{\widehat{A}}{Ker(\widehat{\varphi})}\right)$$

$$r_3(\varphi) := dim\left(\frac{A}{Ker(\varphi)}\right).$$

Lemme 4.2. — *On a toujours $r_1(\varphi) \leq r_2(\varphi) \leq r_3(\varphi)$.*

Démonstration. — La première inégalité provient de l'inégalité d'Abhyankar pour une valuation. La seconde provient du fait que $\mathrm{ht}(\mathrm{Ker}(\varphi)) = \mathrm{ht}(\mathrm{Ker}(\varphi)\widehat{A}) \leq \mathrm{ht}(\mathrm{Ker}(\widehat{\varphi}))$. □

Définition 4.3. — *Soit $\varphi : A \longrightarrow B$ un morphisme d'algèbres analytiques comme précédemment. Nous dirons que φ est régulier au sens de Gabrielov si $r_1(\varphi) = r_3(\varphi)$.*

Nous allons voir que ces morphismes répondent de manière positive ou satisfaisante à toutes les questions posées dans l'introduction (cf. théorème 4.10).
Nous avons ensuite les deux lemmes suivants très utiles :

Lemme 4.4. — *Soit $\varphi : A \longrightarrow B$ un morphisme de $\mathbb{k}$-algèbres analytiques où B est régulier. Alors $r_1(\varphi) = r_1(\widehat{\varphi})$.*

Lemme 4.5. — *Soit $\varphi : A \longrightarrow B$ et $\sigma : A' \longrightarrow A$ des morphismes de $\Bbbk$-algèbres analytiques où B est régulier. Si σ est fini et injectif alors $r_1(\varphi \circ \sigma) = r_1(\varphi)$.*

Nous pouvons donner une caractérisation de r_1 : pour $f \in \Bbbk[[y_1, ..., y_m]]$, nous notons $\mathrm{in}(f)$ le terme de plus bas degré dans le développement en série formelle de f. On définit un ordre total $<$ sur $\mathbb{N}^m$ de la manière suivante : pour tous α, $\beta \in \mathbb{N}^m$, on a $\alpha < \beta$ dès que $(|\alpha|, \alpha_1, ..., \alpha_m) < (|\beta|, \beta_1, ..., \beta_m)$ pour l'ordre lexicographique à gauche, où $|\alpha| := \alpha_1 + \cdots + \alpha_m$. Cet ordre induit un ordre sur les monômes de $\Bbbk[[y_1, ..., y_m]]$. Si $M = a_\alpha y^\alpha$ est un monôme, on définit $\exp(M) := \alpha$. Pour tout $f \in \Bbbk[[y_1, ..., y_m]]$, on définit $\mathrm{in}_<(f)$ comme étant le monôme de plus bas ordre dans le développement en série formelle de f et $\exp(f) := \exp(\mathrm{in}_<(f))$.

Proposition 4.6. — *Soit $\varphi : \Bbbk[[x_1, ..., x_n]] \longrightarrow \Bbbk[[y_1, ..., y_m]]$ un morphisme de $\Bbbk$-algebres formelles. Soit C le plus petit cône contenant $\exp(\varphi(f))$ pour tout $f \in \Bbbk[[x_1, ..., x_n]]$. Alors $r_1(\varphi) = dim(C)$.*

Proposition 4.7. — *Soit $\varphi : \Bbbk[[x_1, ..., x_n]] \longrightarrow \Bbbk[[y_1, ..., y_m]]$, $\psi_1 : \Bbbk[[y_1, ..., y_m]] \longrightarrow \Bbbk[[z_1, ..., z_r]]$ et $\psi_2 : \Bbbk[[z_1, ..., z_r]] \longrightarrow \Bbbk[[x_1, ..., x_n]]$ des morphismes de $\Bbbk$-algèbres formelles. Si $r_1(\psi_1) = m$ (resp. $r_1(\psi_2) = n$) alors $r_1(\psi_1 \circ \varphi) = r_1(\varphi)$ (resp. $r_1(\varphi \circ \psi_2) = r_1(\varphi)$).*

Finalement on peut donner une interprétation plus géométrique de r_1 dans le cas où car $(\Bbbk) = 0$: si $(A, \mathfrak{m})$ est une $\Bbbk$-algèbre locale, on note $\Omega^1_{\Bbbk}(A)$ le A-module des différentielles de Kähler, et $\overline{\Omega}^1_{\Bbbk}(A) := \frac{\Omega^1_{\Bbbk}(A)}{\cap_{i=0}^{\infty}\mathfrak{m}_A^i\Omega^1_{\Bbbk}(A)}$ le A-module séparé des différentielles de Kähler. Si $\varphi : A \longrightarrow B$ est un morphisme de $\Bbbk$-algèbres locales, alors il existe un unique morphisme $\varphi^1 : \overline{\Omega}^1_{\Bbbk}(A) \longrightarrow \overline{\Omega}^1_{\Bbbk}(B)$ compatible avec les dérivations canoniques $A \longrightarrow \overline{\Omega}^1_{\Bbbk}(A)$ et $B \longrightarrow \overline{\Omega}^1_{\Bbbk}(B)$.

Lemme 4.8. — *Supposons que car $(\Bbbk) = 0$. Alors $r_1(\varphi) = rang_B(B\varphi^1(\overline{\Omega}^1_{\Bbbk}(A)))$.*

Démonstration. — À ce stade, il n'est pas très évident que ces deux termes sont égaux. Tout d'abord, si $\varphi : A \longrightarrow B$ est un morphisme d'algèbres analytiques où B est régulier, alors B est isomorphe à $\mathcal{O}_m$, et il existe un morphisme injectif fini $\mathcal{O}_n \longrightarrow A$. D'après le lemme 4.5, il suffit de montrer le résultat pour $\varphi : \mathcal{O}_n \longrightarrow \mathcal{O}_m$. Pour montrer cela, on peut alors utiliser le théorème 4.9 donné un peu plus loin. En effet, avec les notations de ce théorème, σ_1^1 et σ_2^1 sont des applications linéaires de rangs n et m respectivement, et $\overline{\varphi}^1 \circ \sigma_1^1 = \sigma_2 \circ \varphi^1$, donc le rang de φ^1 est égal au rang de $\overline{\varphi}^1$. Or il est clair que le rang de $\overline{\varphi}^1$, i.e. $\mathrm{rang}_{\mathcal{O}_m}(\mathcal{O}_m\overline{\varphi}^1(\overline{\Omega}^1_{\Bbbk}(\mathcal{O}_n)))$, vaut r.
Par ailleurs il facile de calculer $r_1(\widehat{\varphi})$: on a

$$\frac{\mathcal{O}_{n\nu}}{m_\nu} = \Bbbk\left(\frac{x_r}{x_{r-1}}, ..., \frac{x_2}{x_1}\right),$$

donc le rang de $r_1(\overline{\varphi}^1) = r$. D'autre part, il n'est pas très difficile de voir que σ_1 et σ_2 ne changent pas r_1 en utilisant le corollaire 4.7, et donc que $r_1(\varphi) = r_1(\widehat{\varphi})$ (cf. [**Ro4**]). On en déduit le résultat.

□

En particulier, si $\Bbbk = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, notons $\Phi : (X, 0) \longrightarrow (Y, 0)$ le morphisme d'espaces analytiques induit par φ. Alors $r_1(\varphi)$ est le rang jacobien générique de Φ et est égal à la dimension sur $\Bbbk$ du germe image. De plus, $r_2(\varphi)$ est la dimension du plus petit germe d'espace formel défini sur $\Bbbk$ et $r_3(\varphi)$ est la dimension du plus petit germe d'espace analytique défini sur $\Bbbk$.

Maintenant nous donnons l'énoncé d'un résultat très utile de monomialisation d'un morphisme entre anneaux de séries convergentes (resp. formelles, resp. algébriques). Celui-ci a été montré en caractéristique nulle dans [**E-H**] puis en caractéristique positive dans [**Ro1**].

Théorème 4.9. — [**E-H**][**Ro1**] *Soit $\varphi : \mathcal{O}_n \longrightarrow \mathcal{O}_m$ un morphisme de $\Bbbk$-algèbres analytiques. Alors il existe $\sigma_1 : \mathcal{O}_n \longrightarrow \mathcal{O}_n$, $\sigma_2 : \mathcal{O}_m \longrightarrow \mathcal{O}_m$ et $\overline{\varphi} : \mathcal{O}_n \longrightarrow \mathcal{O}_m$ vérifiant les propriétés suivantes :*

i) Le morphisme σ_1 est la composition de $\Bbbk$-automorphismes de $\mathcal{O}_n$, de morphismes χ_d ($d \in \mathbb{N}^*$ est un nombre premier) definis par $\chi_d(x_1) = x_1^d$, and $\chi_d(x_i) = x_i$ $\forall i \neq 1$, et du morphisme q defini par $q(x_1) = x_1x_2$ et $q(x_i) = x_i$ pour $i \neq 1$.

ii) Le morphisme σ_2 est la composition de $\Bbbk$-automorphismes de $\mathcal{O}_m$ et du morphisme q defini par $q(y_1) = y_1y_2$ et $q(y_i) = y_i$ pour $i \neq 1$.

iii) Le morphisme $\overline{\varphi}$ vérifie

$$\overline{\varphi}(x_i) = y_i^{p^{\alpha_i}} v_i \text{ où les } v_i \text{ sont inversibles et } \alpha_i \in \mathbb{N}, \text{ pour } i \leq r, \text{ si } car(\Bbbk) = p > 0$$

$$\text{ou } \overline{\varphi}(x_i) = y_i \text{ pour } i \leq r, \text{ si } car(\Bbbk) = 0$$

$$\text{et } \overline{\varphi}(x_{r+1}) = 0.$$

De plus $r = r_1(\varphi)$.

iv) Le diagramme suivant est commutatif :

$$(\star) \qquad \begin{array}{ccc} \mathcal{O}_n & \xrightarrow{\varphi} & \mathcal{O}_m \\ \downarrow{\scriptstyle \sigma_1} & & \downarrow{\scriptstyle \sigma_2} \\ \mathcal{O}_n & \xrightarrow{\overline{\varphi}} & \mathcal{O}_m \end{array}$$

Ce théorème reste vrai si on remplace respectivement $\mathcal{O}_n$ et $\mathcal{O}_m$ par $\mathcal{F}_n$ et $\mathcal{F}_m$ ou par $\mathcal{N}_n$ et $\mathcal{N}_m$ (voir partie 5.1 pour les définitions de ces deux derniers anneaux).

Finalement voici le théorème qui résume toutes les propriétés des morphismes réguliers :

Théorème 4.10. — *Soit $\Bbbk$ un corps valué et $\varphi : A \longrightarrow B$ un morphisme d'algèbres analytiques où B est régulier. Considérons les propriétés suivantes :*

(i) $r_1(\varphi) = r_2(\varphi)$.

(ii) $r_1(\varphi) = r_2(\varphi) = r_3(\varphi)$.

(iii) $\exists a \geq 1,\ b \geq 0$ tels que $\widehat{\varphi}^{-1}(\mathfrak{m}_B^{an+b}) \subset Ker(\widehat{\varphi}) + \mathfrak{m}_A^n$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

(iv) $\widehat{\varphi}(\widehat{A}) \cap B = \varphi(A)$.

Alors on a les implications suivantes :

(i)$\Longleftrightarrow$(ii)$\Longleftrightarrow$ (iii) $\Longrightarrow$(iv) pour tout corps valué $\Bbbk$.

(iv)$\Longrightarrow$(iii) si $\Bbbk$ est un corps valué de caractéristique nulle.

Historiquement, A. Gabrielov a d'abord montré $(i) \Longrightarrow (ii)$ pour $\Bbbk = \mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}$ [**Ga1**] (la réciproque étant triviale). C'est cette implication qui est traditionnellement appelée "théorème de Gabrielov" dans ce contexte. Sa preuve étant très compliquée, d'autres auteurs ont essayé de donner une preuve correcte de ce résultat [**To3**], [**Sp1**]. Finalement cette implication a été montré sur un corps de caractéristique quelconque par l'auteur [**Ro3**]. On peut interpréter cette implication de la manière suivante : si $(X, 0)$ est un germe irréductible d'espace formel dont un morceau est l'image d'un germe d'espace analytique par un germe d'application analytique, alors $(X, 0)$ est en fait un germe d'espace analytique.
L'équivalence $(ii) \Longleftrightarrow (iii)$ a été d'abord prouvée par S. Izumi pour $\Bbbk = \mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}$ [**Iz2**] puis quand $\Bbbk$ est un corps de caractéristique nulle [**Iz5**] puis sur un corps quelconque par l'auteur [**Ro1**]. L'implication $(iii) \Longrightarrow (iv)$ est bien connue (voir ci-dessous). L'implication inverse a été montrée par P. Eakin et G. Harris dans le cas où A est régulier [**E-H**], puis par P. Milman [**Mi**] pour A quelconque.
Nous allons donner dans cet article uniquement un aperçu des démonstrations de $(i) \Longleftrightarrow (ii) \Longleftrightarrow (iii) \Longrightarrow (iv)$ (cf. partie 6).

5. Deux "bons" exemples

Nous pouvons donner maintenant deux exemples importants de morphismes réguliers. Le second est un cas particulier du théorème 4.10, mais sa démonstration est beaucoup plus simple, et ce résultat sert ensuite dans la démonstration du théorème 4.10.

5.1. Cas des morphismes algébriques. — Notons $\mathcal{N}_n := \Bbbk\langle x_1, ..., x_n\rangle$ le sous-anneau de $\mathcal{F}_n$ formé des séries formelles qui sont algébriques sur $\Bbbk[x_1, ..., x_n]$. On a clairement $\mathcal{N}_n \subset \mathcal{O}_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On appelle $\Bbbk$-algèbre hensélienne toute $\Bbbk$-algèbre isomorphe à un quotient $\mathcal{N}_n/I$ où $n \in \mathbb{N}$ et I est un idéal de $\mathcal{N}_n$. Si $\varphi : \mathcal{N}_n/I \longrightarrow \mathcal{N}_m/J$ un morphisme d'algèbres henséliennes, on note $\tilde{\varphi} : \mathcal{O}_n/I\mathcal{O}_n \longrightarrow \mathcal{O}_m/J\mathcal{O}_m$ le morphisme d'algèbres analytiques induit. Si $\varphi : A \longrightarrow B$ est un morphisme d'algèbres henséliennes, on défini $r_4(\varphi) := \dim(A/\mathrm{Ker}(\varphi))$. De même on note $r_i(\varphi) := r_i(\tilde{\varphi})$ pour $1 \leq i \leq 3$. On a évidemment $r_1(\varphi) \leq r_2(\varphi) \leq r_3(\varphi) \leq r_4(\varphi)$.
On peut déjà remarquer que tout polynôme P à coefficients dans $\mathcal{N}_{n+m}$ possède la propriété d'approximation cylindrique (cf. [**KPPRM**] ou [**Sp2**]). C'est-à-dire que toute solution $(f_i, g_j) \in \mathcal{F}_n^r \times \mathcal{F}_{n+m}^s$ de l'équation $P(F_i, G_j) = 0$ peut être approchée par des solutions dans $\mathcal{N}_n^r \times \mathcal{N}_{n+m}^s$. En utilisant la proposition 2.2 qui reste valable dans le cadre hensélien, on voit que tout morphisme $\varphi : \mathcal{N}_n \longrightarrow \mathcal{N}_m$ vérifie $\widehat{\varphi}(\mathcal{F}_n) \cap \mathcal{N}_m = \varphi(\mathcal{N}_n)$. En fait on peut montrer plus que cela :

Théorème 5.1. — *Soit $\varphi : A \longrightarrow \mathcal{N}_m$ un morphisme de $\Bbbk$-algèbres henséliennes. Alors $r_1(\varphi) = r_4(\varphi)$.*

Démonstration. — On peut remplacer φ par le morphisme induit $A/\mathrm{Ker}(\varphi) \longrightarrow B$ car ni r_1 ni r_4 ne changent, donc on suppose que φ est injectif. Ensuite il existe un morphisme $\mathcal{N}_n \longrightarrow A$ fini et injectif et le morphisme induit $\mathcal{N}_n \longrightarrow \mathcal{N}_m$ a les mêmes rangs r_1 et r_2 que φ (cf. lemme 4.5). On peut donc supposer que φ est injective et $A = \mathcal{N}_n$.
On applique ensuite le théorème 4.9 qui reste valable si l'on remplace $\mathcal{O}_n$ et $\mathcal{O}_m$ par $\mathcal{N}_n$ et

$\mathcal{N}_m$. On a donc un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \mathcal{N}_n \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\sigma_1"] & \mathcal{N}_m \arrow[d, "\sigma_2"] \\ \mathcal{N}_n \arrow[r, "\overline{\varphi}"] & \mathcal{N}_m \end{tikzcd}$$

On voit que $\sigma_2 \circ \varphi$ est injectif, donc $\overline{\varphi} \circ \sigma_1$ est injectif. Il suffit alors de montrer que si on a un morphisme $\overline{\varphi} : \mathcal{N}_n \longrightarrow \mathcal{N}_m$ qui n'est pas injectif tel que $\varphi = \overline{\varphi} \circ \sigma$, où σ un morphisme de l'un des trois types du théorème 4.9, alors φ n'est pas injectif. Ceci se fait facilement en vérifiant cela pour chacun des trois types en question. □

Remarque 5.2. — *Si car*$(\Bbbk) = 0$ *et si* B *est intègre, l'existence d'une résolution des singularités pour* B *nous donne l'existence d'un morphisme injectif* $B \longrightarrow \mathcal{N}_m$ *tel que* $r_1 = m = dim(B)$. *On en déduit que le théorème précédent reste vrai si car*$(\Bbbk) = 0$ *et* B *est intègre.*

Corollaire 5.3. — **[To2][Be2][Mi][Ro4]** *Soit* $\varphi : \mathcal{O}_n/I\mathcal{O}_n \longrightarrow \mathcal{O}_m/J\mathcal{O}_m$ *un morphisme de* $\Bbbk$*-algèbres analytiques où* I *est un idéal de* $\mathcal{N}_n$, J *un idéal de* $\mathcal{N}_m$ *et tel que* $\varphi(x_i) \in \mathcal{N}_m/J$ *pour tout* $1 \leq i \leq n$. *Supposons que car*$(\Bbbk) = 0$ *ou que* $J = (0)$. *Alors* $r_1(\varphi) = r_3(\varphi)$.

Démonstration. — Soit $\pi : \mathcal{O}_n \longrightarrow \mathcal{O}_n/I$ la projection canonique. On peut donc remplacer φ par $\varphi \circ \pi : \mathcal{O}_n \longrightarrow \mathcal{O}_m/J\mathcal{O}_m$ que l'on note encore φ. On note $\varphi^h : \mathcal{N}_n \longrightarrow \mathcal{N}_m/J$ le morphisme d'algèbres henséliennes associé et l'on voit que $r_1(\varphi^h) = r_4(\varphi^h)$ d'après le théorème précédent. Donc $r_3(\varphi) = r_3(\varphi^h) = r_1(\varphi^h) = r_1(\varphi)$. □

5.2. Le cas de la dimension 2. —

Théorème 5.4. — **[Ab-vdP][Ro1]** *Soit* $\varphi : A \longrightarrow B$ *un morphisme de* $\Bbbk$*-algèbres analytiques où* A *est un domaine d'intégrité de dimension 2 et* B *est régulier. Alors* φ *est injective si et seulement si* $r_1(\varphi) = 2$.

Idée de la démonstration. — Si $r_1(\varphi) = 2$, alors $r_3(\varphi) = 2$ et φ est injectif. C'est l'implication inverse qui n'est pas triviale.
On peut déjà se ramener au cas où $A = \mathcal{O}_2$ et $B = \mathcal{O}_m$. On applique alors le théorème 4.9 au morphisme φ. On a alors l'existence d'un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \mathcal{O}_2 \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\sigma_1"] & \mathcal{O}_m \arrow[d, "\sigma_2"] \\ \mathcal{O}_2 \arrow[r, "\overline{\varphi}"] & \mathcal{O}_m \end{tikzcd}$$

Si σ_1 est uniquement une composition de $\Bbbk$-automorphismes de $\mathcal{O}_2$ et de morphismes χ_d ($d \in \mathbb{N}^*$ est un nombre premier) definis par $\chi_d(x_1) = x_1^d$, and $\chi_d(x_i) = x_i \ \forall i \neq 1$, et si φ est injectif, alors il n'est pas très difficile de voir que $\overline{\varphi}$ est encore injectif et donc $r_1(\varphi) = 2$.
L'idée est alors d'analyser la preuve du théorème 4.9 pour voir que, si φ est injective, on

peut construire un diagramme commutatif similaire au précédent, où σ_1 est uniquement une composition de $\Bbbk$-automorphismes et de morphismes χ_d, et où $\overline{\varphi}$ est défini par

$$\overline{\varphi}(x_1) = y_1^a y_2^b u$$

$$\overline{\varphi}(x_2) = y_1^c y_2^d v$$

où la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est de rang 2 et u et v sont inversibles. Donc $r_1(\overline{\varphi}) = 2$, d'où $r_1(\varphi) = 2$ aussi d'après le corollaire 4.7. □

Corollaire 5.5. — *Soit $\varphi : A \longrightarrow B$ un morphisme de $\Bbbk$-algèbres analytiques où A est un domaine d'intégrité de dimension inférieure ou égale à 2 et B est régulier. Alors $r_1(\varphi) = r_2(\varphi) = r_3(\varphi)$.*

Démonstration. — Si $\dim(A) = 0$, il n'y a rien à montrer.
Si $\dim(A) = 1$, et si $r_1(\varphi) = 0$, alors $\mathrm{Ker}(\varphi) = \mathfrak{m}_A$ donc $r_3(\varphi) = 0$. Si $r_1(\varphi) = 1$ alors $r_3(\varphi) = 1$.
Si $\dim(A) = 2$ et si $r_1(\varphi) = 0$, ceci signifie que $\mathrm{Ker}(\varphi) = \mathfrak{m}_A$, donc $r_3(\varphi) = 0$. Si $r_3(\varphi) = 2$, alors φ est injective et donc $r_1(\varphi) = 2$ d'après le théorème précédent. Finalement si $r_1(\varphi) = 1$, $r_3(\varphi) = 1$ nécessairement car $r_3(\varphi) = 2$ implique $r_1(\varphi) = 2$. □

Remarque 5.6. — *La remarque 5.2 reste valable ici, et on peut donc supposer que B est simplement intègre si car$(\Bbbk) = 0$.*

6. Idées de preuve du théorème 4.10

Nous n'allons donner ici que des aperçus des démonstrations en évitant certains détails techniques, sauf la démonstration de $[(i) \Longleftrightarrow (ii)] \Longrightarrow [(ii) \Longrightarrow (iv)]$ qui est facile.

6.1. Idée de démonstration de $(i) \Longrightarrow (ii)$. — Soit φ un morphisme comme dans l'énoncé avec $r_1(\varphi) = r_2(\varphi)$. Supposons que $r_2(\varphi) < r_3(\varphi)$. On va montrer que l'on obtient alors une contradiction ce qui prouvera le résultat voulu.
Tout d'abord, par des techniques classiques, on peut construire, à partir de ce morphisme, un nouveau morphisme $\varphi : \Bbbk\{x_1, ..., x_{r+1}\} \longrightarrow \Bbbk\{y_1, ..., y_r\}$ qui est injectif (i.e. $r_3(\varphi) = r+1$) et tel que $r_1(\varphi) = r_2(\varphi) = r$. D'après le corollaire 5.5, on pourra supposer que $r \geq 2$. Comme $\mathrm{ht}(\mathrm{Ker}(\widehat{\varphi})) = 1$ et que $\mathcal{F}_{r+1}$ est factoriel, l'idéal premier $\mathrm{Ker}(\widehat{\varphi})$ est principal. Puis, quitte à faire un changement linéaire de coordonnées, on peut supposer que cet idéal est engendré par un polynôme de Weierstrass en la variable x_{r+1}.
Ensuite on utilise le théorème 4.9 avec les notations de celui-ci. Comme σ_2 et $\widehat{\sigma}_2$ sont injectives, et parce que $r_1(\varphi) = r_1(\sigma_2 \circ \varphi)$ (corollaire 4.7), on voit que l'on peut remplacer φ par $\sigma_2 \circ \varphi$ sans rien changer aux hypothèses sur φ.

On obtient alors le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{k}\{x\} \arrow[r, "\varphi_0:=\varphi"] \arrow[d, "\psi_1"] & \mathbb{k}\{y\} \\
\mathbb{k}\{x\} \arrow[ur, "\varphi_1"] \arrow[d, "\psi_2"] & \\
\vdots \arrow[d, "\psi_k"] & \\
\mathbb{k}\{x\} \arrow[uuur, "\varphi_l:=\overline{\varphi}"] &
\end{tikzcd}$$

où ψ_i, pour $1 \leq i \leq l$, est un morphisme de l'un des types suivants :
Type A : $\mathbb{k}$-automorphismes de $\mathbb{k}\{x\}$,
Type B : χ_d (d est un nombre premier) defini par $\chi_d(x_1) = x_1^d$, et $\chi_d(x_i) = x_i \ \forall i \neq 1$,
Type C : q defini par $q(x_1) = x_1 x_2$ et $q(x_i) = x_i$ pour $i \neq 1$.

On s'aperçoit facilement que $\text{Ker}(\widehat{\varphi}_i)$ est un idéal principal non nul. On peut montrer, en faisant une analyse de la preuve du théorème précédent dans le cas qui nous intéresse, que l'on peut supposer que $\text{Ker}(\widehat{\varphi}_i)$ est engendré par un polynôme de Weierstrass en la variable x_{r+1} pour tout i.
On montre ensuite par induction que si $\text{Ker}(\widehat{\varphi}_i)$ est engendré par une série convergente, alors $\text{Ker}(\widehat{\varphi}_{i-1})$ l'est aussi. Comme $\text{Ker}(\widehat{\varphi}_l)$ est engendré par x_{r+1}, ceci suffit pour montrer que $\text{Ker}(\widehat{\varphi})$ est engendré par une série convergente et donc que φ n'est pas injective contrairement à l'hypothèse, ce qui est la contradiction cherchée. Pour montrer cette induction, on va étudier séparément les trois types de morphismes ci-dessus.
Pour les morphismes de type A, c'est trivial. Pour les morphismes de type B (i.e. $\psi_i = \chi_d$), il y a deux cas à considérer : soit d est un nombre premier différent de $\text{car}\,(\mathbb{k})$. Dans ce cas si $\widehat{f}$ est un générateur de $\text{Ker}(\widehat{\varphi}_{i-1})$, on a $\widehat{\psi}_i(\widehat{f}) = f_1...f_s \in \text{Ker}(\widehat{\varphi}_i)$, où les f_i sont irréductibles. Comme $\widehat{f}$ est irréductible, on voit assez facilement que les f_j sont conjugués sous l'action du groupe des racines d-ièmes de l'unité qui agit par multiplication sur la variable x_1. Comme $\text{Ker}(\widehat{\varphi}_i)$ est engendré par une série convergente irréductible (c'est un idéal premier), alors l'un des f_j engendre cet idéal, et donc, pour un certain j_0, il existe u_{j_0} inversible tel que $u_{j_0} f_{j_0}$ est convergent. Du fait que les f_j sont conjugués sous l'action précédente, on voit que, pour tout j, il existe u_j inversible tel que $u_j f_j$ est convergent. On voit donc qu'il existe u inversible tel que $u\widehat{\psi}_i(\widehat{f})$ est convergent. Il n'est pas très difficile de voir que si l'on appelle v la série inversible dont les monômes non nuls de son développement sont exactement les monômes non nuls de u dont la puissance de x_1 est divisible d, on a encore $v\widehat{\psi}_i(\widehat{f})$ convergent. Dans ce cas $v = \psi_i(w)$ où w est inversible, et $w\widehat{f}$ est une série convergente qui engendre $\text{Ker}(\widehat{\varphi}_i)$.
Si $d = \text{car}\,(\mathbb{k}) > 0$, alors notons encore $\widehat{f}$ un générateur de $\text{Ker}(\widehat{\varphi}_{i-1})$. On a encore $\widehat{\psi}_i(\widehat{f}) = f_1...f_s \in \text{Ker}(\widehat{\varphi}_i)$, où les f_i sont irréductibles. Or $f_1^d \in \text{Im}(\widehat{\psi}_i)$ car $d = \text{car}\,(\mathbb{k})$. Notons g la

pré-image de f_1^d par $\widehat{\psi}_i$. Alors f_1^d divise à la fois $\widehat{\psi}_i(g)$ et $\widehat{\psi}_i(\widehat{f}^d)$. Donc $\widehat{\psi}_i(g)$ et $\widehat{\psi}_i(\widehat{f}^d)$ ne sont pas premiers entre eux, donc g et $\widehat{f}^d$ non plus. Comme $\widehat{f}$ est irréductible, $\widehat{f}$ divise alors g, donc $f_1...f_s$ divise f_1^d. Donc, pour $1 \leq j \leq s$, il existe u_j inversible tel que $f_j = u_j f_1$. Supposons, quitte à permuter les indices comme précédemment, que $(f_1) = \mathrm{Ker}(\widehat{\varphi}_i)$ qui est un idéal engendré par une série convergente. Alors il existe u inversible tel que uf_1 soit convergent. Donc, pour $1 \leq j \leq s$, uu_jf_j est convergent. On conclut alors comme dans le cas $d \neq \mathrm{car}\,(\mathbb{k})$.

La difficulté provient des morphismes de type C. Là encore, si $\widehat{f}$ est un générateur de $\mathrm{Ker}(\widehat{\varphi}_{i-1})$, on a $\widehat{\psi}_i(\widehat{f}) \in \mathrm{Ker}(\widehat{\varphi}_i)$, et comme $\mathrm{Ker}(\widehat{\varphi}_i)$ est engendré par une série convergente irréductible (c'est un idéal premier), alors $\widehat{\psi}_i(\widehat{f})$ a un facteur irréductible convergent. Il nous faut montrer le résultat suivant qui nous permet de conclure :

Théorème 6.1. — *Soit un entier $r \geq 2$. Soit ψ : $\mathbb{k}\{x_1, ..., x_{r+1}\} \longrightarrow \mathbb{k}\{x_1, ..., x_{r+1}\}$ défini par $q(x_i) = x_i$ pour tout $i \neq 1$ et $q(x_1) = x_1x_2$. Soit $\widehat{f} \in \mathbb{k}[[x_1, ..., x_r]][x_{r+1}]$ un polynôme de Weierstrass irréductible. Si $\widehat{\psi}(\widehat{f})$ a un facteur irréductible convergent, alors $\widehat{\psi}(\widehat{f})$ et $\widehat{f}$ sont convergents.*

Voici l'idée de la preuve de ce résultat : on peut déjà montrer que $\widehat{\psi}(\widehat{f})$ est un produit de facteurs irréductibles qui sont des polynômes de Weierstrass en x_{r+1}, et que au moins l'un d'entre eux, noté g, est convergent. Notons $\tilde{x} := (x_1, ..., x_{n-1})$. Notons alors, pour $1 \leq i \leq i_0$,

$$g_i = x_{r+1}^{d_i} + \sum_{j<d_i} a_{i,\,j}(\tilde{x})x_{r+1}^j$$

ces différents facteurs : $\widehat{\psi}(\widehat{f}) = \prod_1^{i_0} g_i$. Or $\widehat{f}$ est un polynôme de Weierstrass : $\widehat{f} = x_{r+1}^d + \sum_{j<d} a_j(\tilde{x})x_{r+1}^j$. Notons $b_j := \widehat{\psi}(a_j)$ pour $1 \leq j \leq d$. On voit que la relation $\widehat{\psi}(\widehat{f}) = \prod_1^{i_0} g_i$ est équivalente aux relations polynomiales suivantes :

$$\sum_{j_1+\cdots+j_s=k} a_{1,\,j_1}...a_{s,\,j_s} - b_k = 0, \quad 0 \leq k \leq d-1.$$

On peut remarquer que $\mathbb{k}[[x]]$ est isomorphe à $\mathbb{k}[[u,\,v]]/(u_1 - u_2v)$, $u := (u_1, ..., u_{r+1})$, où l'isomorphisme est défini par

$$u_i \longmapsto x_i \ \forall i \neq 1, \ u_1 \longmapsto x_1x_2, \ v \longmapsto x_1.$$

Remarquons qu'avec cette écriture, $\widehat{\psi}(\mathbb{k}[[x]])$ est isomorphe au sous-anneau $\mathbb{k}[[u]] \subset \mathbb{k}[[u,\,v]]/(u_1 - u_2v)$. Notons A^h son hensélisé, i.e. l'anneau des éléments de $\mathbb{k}[[u,\,v]]/(u_1 - u_2v)$ algébriques sur $\mathbb{k}[[u]]$ (remarquons que $v \in A^h$). Notons $\tilde{u} := (u_1, ..., u_r)$ et $\tilde{A}^h$ l'hensélisé de $\mathbb{k}[[\tilde{u}]]$ dans $\mathbb{k}[[\tilde{u},\,v]]/(u_1 - u_2v)$. Considérons alors les équations polynomiales en les variables $A_{i,\,j}$ à coefficients dans $\tilde{A}^h$:

$$\sum_{j_1+\cdots+j_s=k} A_{1,\,j_1}...A_{s,\,j_s} - b_k = 0, \quad 0 \leq k \leq d-1.$$

Ce système a des solutions $a_{i,\,j}$ dans $\mathbb{k}[[\tilde{u},\,v]]/(u_1 - u_2v)$ qui peuvent, d'après le théorème d'approximation de Artin ([**Ar2**] ou [**Sp2**]), être approchées aussi près que l'on veut par des solutions dans $\tilde{A}^h$. On a donc l'existence de $a'_{i,\,j} \in \tilde{A}^h$ tels que

$$\sum_{j_1+\cdots+j_s=k} a'_{1,\,j_1}...a'_{s,\,j_s} - b_k = 0, \quad 0 \leq k \leq d-1.$$

Ceci nous donne $\widehat{\psi}(\widehat{f}) = \prod_1^{i_0} g'_i$ où les g'_i sont les polynômes de Weierstrass

$$g'_i = x_{r+1}^{d_i} + \sum_{j<d_i} a'_{i,\,j}(\tilde{x})x_{r+1}^j \in \left(\tilde{A}^h\right)[u_{r+1}] \subset A^h.$$

Comme $\mathbb{k}[[u,\,v]]/(u_1 - u_2v)$ est un anneau factoriel, la décomposition de $\widehat{\psi}(\widehat{f})$ en facteurs irréductibles est unique, donc on peut supposer que $g_i = g'_i$ pour tout i. Donc g, le facteur irréductible convergent de $\widehat{\psi}(\widehat{f})$ vérifie

$$g \in \frac{\mathbb{k}\{u,\,v\}}{(u_1 - u_2v)} \cap A^h.$$

Notons C^h l'hensélisé de $\mathbb{k}\{u\}$ dans $\mathbb{k}[[u,\,v]]/(u_1 - u_2v)$. On utilise alors le lemme suivant :

Lemme 6.2. —

$$\frac{\mathbb{k}\{u,\,v\}}{(u_1 - u_2v)} \cap A^h \subset C^h.$$

Fixons alors $Q(T) := c_0T^r + c_1T^{r-1} + \cdots + c_r \in (\mathbb{k}\{u\})[T]$ est un polynôme irréductible tel que $Q(g) = 0$. Notons respectivement $\mathbb{K}$ et $\mathbb{K}_{A^h}$ les corps de fractions de $\mathbb{k}[[u]]$ et de A^h. On a $g \in A^h$ et $Q(T) \in \mathbb{k}[[u]][T]$. Soit $\mathbb{L}$ une extension normale de $\mathbb{K}$ engendrée par $\mathbb{K}_{A^h}$. Par propriété de l'hensélisé, $\mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{L}$ est une extension galoisienne, de groupe de Galois noté G. L'idée est alors de voir que les autres racines de Q sont les conjugués de g sous l'action de G. Leur produit est égal à $(-1)^r c_r/c_0$. Comme $\widehat{\psi}(\widehat{f})$ est irréductible dans $\mathbb{k}[[u]]$ (i.e. $\widehat{f}$ est irréductible dans $\mathbb{k}[[x]]$) et que g divise $\widehat{\psi}(\widehat{f})$ dans $\mathbb{k}[[u,\,v]]/(u_1 - u_2v)$, alors $\widehat{\psi}(\widehat{f})$ divise h dans A^h, donc $\widehat{\psi}(\widehat{f})$ divise c_r qui est convergent. On en déduit alors facilement, du théorème de préparation, que $\widehat{\psi}(\widehat{f})$ est convergent, et donc que $\widehat{f}$ est convergent.

Pour prouver le lemme précédent, on procède comme suit : Soit $P(T) := \overline{c}_0T^r + \overline{c}_1T^{r-1} + \cdots + \overline{c}_r \in \mathbb{k}[[u]][T]$ un polynôme irréductible ayant g comme racine. On a alors

$$\tilde{f} := \overline{c}_0g^r + \overline{c}_1g^{r-1} + \cdots + \overline{c}_r = \overline{h}(u_1 - u_2v)$$

dans $\mathbb{k}[[u,\,v]]$ pour un certain $\overline{h}$. Soit M le sous-$\mathbb{k}\{u\}$-module de $\mathbb{k}[[u,\,v]]$ engendré par les g^i pour $0 \leq i \leq r$. M est un module fini, donc $\widehat{M}$, sa complétion pour la topologie (u)-adique, est isomorphe à $M \otimes_{\mathbb{k}\{u\}} \mathbb{k}[[u]]$. Notons J l'idéal de $\mathbb{k}[[u,\,v]]$ engendré par $u_1 - u_2v$. On a $\tilde{f} \in \widehat{M} \cap J$. Or J est plat sur $\mathbb{k}[[u,\,v]]$ (c'est un idéal principal donc un module libre) et donc J est plat sur $\mathbb{k}[[u]]$ ($\mathbb{k}[[u,\,v]]$ est plat sur $\mathbb{k}[[u]]$), donc $\widehat{M} \cap J \subset (M \otimes_{\mathbb{k}\{u\}} \mathbb{k}[[u]]) \cap (J \otimes_{\mathbb{k}\{u\}} \mathbb{k}[[u]])$. Donc $\tilde{f} \in (M \otimes_{\mathbb{k}\{u\}} \mathbb{k}[[u]]) \cap (J \otimes_{\mathbb{k}\{u\}} \mathbb{k}[[u]]) = (M \cap J) \otimes_{\mathbb{k}\{u\}} \mathbb{k}[[u]]$. On peut donc approcher $\tilde{f}$ par des éléments de $M \cap J$. Il existe donc une relation non triviale

$$c_0(u)g(u,\,v)^r + c_1(u)g(u,\,v)^{r-1} + \cdots + c_r(u) = (u_1 - u_2v)h'$$

où les $c_i \in \mathbb{k}\{u\}$. En regardant cette relation modulo $(u_1 - u_2v)$, on voit que $g \in C^h$.

6.2. Idée de démonstration de $(ii) \Longleftrightarrow (iii)$**.** — Il suffit de montrer que $\widehat{\varphi}$ vérifie la propriété (iii) du théorème 4.10 si et seulement si $r_1(\widehat{\varphi}) = \dim(\widehat{A}/\mathrm{Ker}(\widehat{\varphi}))$ (car $(i) \Longrightarrow (ii)$). On peut donc supposer maintenant que A et B sont des $\Bbbk$-algèbres formelles. De plus on peut remplacer A par $A/\mathrm{Ker}(\varphi)$ et supposer alors que φ est injectif.
Ensuite il existe un morphisme $\sigma : \mathcal{F}_n \longrightarrow A$ injectif et fini. On a alors le lemme suivant :

Lemme 6.3. — [**Iz2**][**Ro1**] *Soit $\varphi : A \longrightarrow B$ et $\sigma : A' \longrightarrow A$ deux morphismes de $\Bbbk$-algèbres formelles où σ est fini et injectif. Alors φ vérifie la propriété (iii) du théorème 4.10 si et seulement si $\varphi \circ \sigma$ la vérifie.*

(Pour montrer la condition nécessaire dans ce lemme, on utilise le lemme d'Artin-Rees et la finitude de σ ([**Ro1**] lemme 5.2). Pour montrer la condition suffisante, on utilise une généralisation par D. Rees [**Re**] d'un théorème d'Izumi [**Iz1**].)

On peut donc supposer que $A = \mathcal{F}_n$ et $B = \mathcal{F}_m$.
On utilise alors le théorème 4.9 pour construire le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F}_n \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\sigma_1"] & \mathcal{F}_m \arrow[d, "\sigma_2"] \\ \mathcal{F}_n \arrow[r, "\overline{\varphi}"] & \mathcal{F}_m \end{tikzcd}$$

où les notations sont celles du théorème 4.9. Il est facile de voir que σ_1 et σ_2 vérifient la propriété (iii) du théorème 4.10. Si $r_1(\varphi) = n$, alors $\overline{\varphi}$ est injectif et vérifie la propriété (iii) du théorème 4.10. Donc $\overline{\varphi} \circ \sigma_1 = \sigma_2 \circ \varphi$ est injectif et vérifie la propriété (iii) du théorème 4.10. Donc φ la vérifie aussi. On a donc montré $(ii) \Longrightarrow (iii)$.

Supposons que φ vérifie la propriété (iii) du théorème 4.10. Pour l'implication inverse, là encore on suppose que A et B sont des $\Bbbk$-algèbres formelles et que φ est injectif. On peut utiliser le théorème 4.9 pour construire le diagramme commutatif précédent. Il est clair que $\sigma_2 \circ \varphi$ vérifie encore la propriété (iii) du théorème 4.10. Notons $r := r_1(\varphi)$ et $\pi : \mathcal{F}_m \longrightarrow \mathcal{F}_r$. Alors clairement π vérifie la propriété (iii) du théorème 4.10, et $\pi \circ \overline{\varphi}$ est injectif. Donc $\pi \circ \sigma_2 \circ \varphi$ est injectif et vérifie la propriété (iii) du théorème 4.10. Il est clair que $r_1(\pi \circ \sigma_2 \circ \varphi) = r_1(\varphi)$ d'après la proposition 4.6. On peut donc supposer de plus que $r_1(\varphi) = m \leq n$.
Soient a et b tels que $\varphi^{-1}((y)^{an+b}) \subset (x)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On peut alors définir une application linéaire surjective sur $\Bbbk$: $\varphi(\mathcal{F}_n)/(y)^{an+b} \cap \varphi(\mathcal{F}_n) \longrightarrow \mathcal{F}_n/(x)^n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Or $\varphi(\mathcal{F}_n)/(y)^{an+b} \cap \varphi(\mathcal{F}_n)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}_m/(y)^{an+b}$. Donc la dimension du $\Bbbk$-espace vectoriel $\mathcal{F}_n/(x)^n$ est inférieure où égale à celle de $\mathcal{F}_m/(y)^{an+b}$. En comparant ces dimensions quand $n \longrightarrow +\infty$ on voit que $m \geq n$. Donc $r_1(\varphi) = n$.

6.3. Démonstration de $[(i) \Longleftrightarrow (ii)] \Longrightarrow [(ii) \Longrightarrow (iv)]$**.** — Soit $\varphi : \mathcal{O}_n/I \longrightarrow \mathcal{O}_m$ tel que $r_1(\varphi) = r_2(\varphi)$ et $\pi : \mathcal{O}_n \longrightarrow \mathcal{O}_n/I$ la projection canonique. Il suffit de montrer que $\widehat{\varphi} \circ \widehat{\pi}(\mathcal{F}_n) \cap \mathcal{O}_m = \varphi \circ \pi(\mathcal{O}_n)$. On peut donc supposer que $\varphi : \mathcal{O}_n \longrightarrow \mathcal{O}_m$ car $r_1(\varphi \circ \pi) = r_1(\varphi)$ par définition. Soient $f \in \widehat{\varphi}(\mathcal{F}_n) \cap \mathcal{O}_m$ et $g \in \mathcal{F}_n$ tel que $\widehat{\varphi}(g) = f$. Quitte à remplacer g par $x_1 g$, on peut supposer que $g \in (x)$ car $x_1 g \in \mathcal{O}_n$ implique que $g \in \mathcal{O}_n$. Soit $\psi : \mathcal{O}_{n+1} \longrightarrow \mathcal{O}_m$ défini par $\psi_{|\mathcal{O}_n} = \varphi$ et $\psi(x_{n+1}) = f$. Alors $\mathrm{Ker}(\widehat{\varphi}) + (x_{n+1} - g) \subset \mathrm{Ker}(\widehat{\psi})$.

Donc $r_2(\psi) \leq r_2(\varphi)$. D'un autre coté, $r_1(\psi) = r_1(\varphi)$ par définition de r_1. Donc $r_1(\psi) = r_2(\psi)$, d'où $r_2(\psi) = r_3(\psi)$ i.e. $\mathrm{Ker}(\widehat{\psi}) = \overline{\mathrm{Ker}(\psi)}$. Comme $x_{n+1}-g \in \mathrm{Ker}(\widehat{\psi})$, il existe $\varepsilon \in (x)^2$ tel que $x_{n+1}-g+\varepsilon \in \mathrm{Ker}(\psi)$. Le théorème de préparation de Weierstrass nous dit alors qu'il existe u inversible tel que $u(x_{n+1}-g+\varepsilon) = x_{n+1}-g'$ avec $g' \in \mathcal{O}_n$. En particulier $x_{n+1}-g' \in \mathrm{Ker}(\psi)$, donc $\varphi(g') = f$ ce qui montre que $f \in \varphi(\mathcal{O}_n)$.

7. Changement de corps de base

La définition de $\mathbb{k}$-algèbre analytique impose qu'une telle $\mathbb{k}$-algèbre A vérifie $A/\mathfrak{m}_A = \mathbb{k}$, ce qui peut être restrictif lorsque l'on veut faire une changement de corps de base. On aimerait alors s'autoriser les changements de corps de base dans la définition de $\mathbb{k}$-algèbre analytique. Néanmoins certains problèmes apparaissent. Par exemple, si $A \longrightarrow B$ est un morphisme injectif de $\mathbb{k}$-algèbres formelles et $\mathbb{k} \longrightarrow \mathbb{k}'$ une extension finie de corps, alors $\mathbb{k}' \otimes_{\mathbb{k}} A \longrightarrow \mathbb{k}' \otimes_{\mathbb{k}} B$ est encore un morphisme injectif de $\mathbb{k}'$-algèbres formelles. Cependant ce résultat simple devient faux dans le cadre analytique. On a en effet le résultat suivant :

Théorème 7.1. — **[Be3]** *Il existe un morphisme injectif* $\chi_{\mathbb{Q}} : \mathbb{Q}\{x_1, ..., x_5\} \longrightarrow \mathbb{Q}\{y_1, y_2\}$ *de* $\mathbb{Q}$*-algèbres analytiques tel que le morphisme de* $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$*-algèbres analytiques induit* $\chi_{\mathbb{Q}[\sqrt{2}]} : \mathbb{Q}[\sqrt{2}]\{x_1, ..., x_5\} \longrightarrow \mathbb{Q}[\sqrt{2}]\{y_1, y_2\}$ *ne soit pas injectif.*
En particulier, l'anneau local $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]\{x_1, ..., x_5\}$ *n'est pas une extension finie de* $\mathbb{Q}\{x_1, ..., x_5\}$*. Donc,* $\mathbb{Q}[\sqrt{2}] \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}\{x_1, ..., x_5\}$ *n'est pas isomorphe à* $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]\{x_1, ..., x_5\}$*.*

Démonstration. — Soit $\psi_{\mathbb{Q}} : \mathbb{Q}\{x_1, ..., x_4\} \longrightarrow \mathbb{Q}\{y_1, y_2\}$ défini comme le morphisme ψ de l'exemple de Gabrielov. Alors $\mathrm{Ker}(\widehat{\psi}_{\mathbb{Q}}) = (x_4 - \overline{g}(x_1, ..., x_3))$ car les coefficients de $\overline{g}$ sont rationnels mais $\widehat{\psi}_{\mathbb{Q}}$ est injectif. Notons $\widehat{f} := x_4 - \overline{g}(x_1, ..., x_3)$. Soit $f \in \mathbb{Q}[[x_1, ..., x_4]]$ un polynôme de Weierstrass en x_4 tel que $g := \sqrt{2}\widehat{f} - f$ a tous ses coefficients de valeur absolue inférieur à 1 et tel que $\widehat{f}$ ne divise pas f. En particulier $g \in \mathbb{Q}[\sqrt{2}]\{x_1, ..., x_4\}$ mais $g \notin \mathbb{Q}\{x_1, ..., x_4\}$. Donc

$$G(y_1, y_2) := \psi_{\mathbb{Q}[\sqrt{2}]}(g) = -\widehat{\psi}_{\mathbb{Q}}(f) \in \mathbb{Q}[[y_1, y_2]] \cap \mathbb{Q}[\sqrt{2}]\{y_1, y_2\} = \mathbb{Q}\{y_1, y_2\}.$$

Notons $\chi_{\mathbb{Q}} : \mathbb{Q}\{x_1, ..., x_5\} \longrightarrow \mathbb{Q}\{y_1, y_2\}$ l'extension de $\psi_{\mathbb{Q}}$ définie par $\chi_{\mathbb{Q}}(x_5) := G(y_1, y_2)$. Alors $x_5 - g \in \mathrm{Ker}(\chi_{\mathbb{Q}[\sqrt{2}]})$ où $\chi_{\mathbb{Q}[\sqrt{2}]} : \mathbb{Q}[\sqrt{2}]\{x_1, ..., x_5\} \longrightarrow \mathbb{Q}[\sqrt{2}]\{y_1, y_2\}$ est le morphisme de $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$-algèbres analytiques induit par $\chi_{\mathbb{Q}}$. Nous allons montrer que $\chi_{\mathbb{Q}}$ est injectif : En effet soit $\sigma \in \mathrm{Ker}(\chi_{\mathbb{Q}})$ irréductible. Alors $\sigma(x) = u(x)(x_5 - g(x_1, ..., x_4)) + \tau(x_1, ..., x_4)$ en utilisant le théorème de division de Weiertrass dans $Q[\sqrt{2}]\{x_1, ..., x_5\}$. En particulier $\tau \in \mathrm{Ker}(\psi_{\mathbb{Q}[\sqrt{2}]}) \subset \mathrm{Ker}(\psi)$. Or ψ est injectif d'après l'exemple de Gabrielov, donc $\tau = 0$. On peut écrire $\sigma = \sum_{k\geq 0} \sigma_k(x_1, ..., x_4)x_5^k$ et $u = \sum_{k\geq 0} u_k(x_1, ..., x_4)x_5^k$ avec $\sigma_0 \neq 0$, car σ est irréductible et $x_5 \notin \mathrm{Ker}(\chi_{\mathbb{Q}})$ ($\widehat{f}$ ne divisant pas f). On en déduit $\sigma_0 = u_0 g$. Notons $u_0 = h_1 + \sqrt{2}h_2$ où $h_1, h_2 \in \mathbb{Q}[[x_1, ..., x_4]]$. On en déduit $-\sigma_0 = (h_1 + \sqrt{2}h_2)(\sqrt{2}\widehat{f} - f)$. D'où $h_1 + \sqrt{2}h_2 = \frac{\sigma_0(\sqrt{2}\widehat{f}+f)}{f^2-2\widehat{f}^2}$. Donc

$$h_1 = \frac{\sigma_0 f}{f^2 - 2\widehat{f}^2} \quad \text{et} \quad h_2 = \frac{\sigma_0 \widehat{f}}{f^2 - 2\widehat{f}^2}.$$

L'anneau $\mathbb{Q}[[x_1, ..., x_4]]$ est factoriel, et comme $\widehat{f}$ est irréductible et que $\widehat{f}$ ne divise pas f, on en déduit que $f^2 - 2\widehat{f}^2$ divise σ_0. Notons μ le quotient de σ_0 par $f^2 - 2\widehat{f}^2$. On voit alors que $u_0 = \mu(f + \sqrt{2}\widehat{f})$. Or $f + \sqrt{2}\widehat{f}$ est un polynôme de Weierstrass qui est une série divergente (car $f - \sqrt{2}\widehat{f}$ est convergent et $\widehat{f}$ est divergent). De la remarque 1.5, on déduit que u_0 est divergent ce qui est contradictoire. Donc $\chi_{\mathbb{Q}}$ est injectif.
Si $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]\{x_1, ..., x_5\}$ était une extension finie de $\mathbb{Q}\{x_1, ..., x_5\}$, alors $h := x_5 - g$ vérifierait une relation de la forme $h^r + a_{r-1}h^{r-1} + \cdots + a_0 = 0$ où $a_i \in \mathbb{Q}\{x_1, ..., x_5\}$, pour $0 \leq i \leq r-1$, et $a_0 \neq 0$. On aurait alors $\chi_{\mathbb{Q}}(a_0) = 0$, ce qui contredit le fait que $\mathrm{Ker}(\chi_{\mathbb{Q}}) = (0)$. □

On peut néanmoins remarquer que dans un cas important (changement de base de $\mathbb{R}$ à $\mathbb{C}$ par exemple) ce genre de problème n'apparait pas :

Théorème 7.2. — **[Be3]** *Soit $\Bbbk$ un corps valué complet et $\Bbbk'$ une extension finie de $\Bbbk$. Si φ est un morphisme injectif, $\varphi : \Bbbk\{x_1, ..., x_n\} \longrightarrow \Bbbk\{y_1, ..., y_m\}$, alors l'extension de φ sur $\Bbbk'$ est encore injective.*

On peut néanmoins étendre la notion de $\Bbbk$-algèbre analytique de la manière suivante :

Définition 7.3. — *Une $\Bbbk$-algèbre analytique est un anneau local A tel qu'il existe un morphisme d'anneaux locaux $\Bbbk\{x_1, ..., x_n\} \longrightarrow A$ injectif et fini. En particulier le corps résiduel de A est une extension finie de $\Bbbk$.*

Nous n'allons pas rentrer dans les détails, mais tous les résultats précédents restent vrais avec cette nouvelle définition. La seule chose qui n'est pas vraie en général est que $\Bbbk'\{x_1, ..., x_n\}$ est une $\Bbbk$-algèbre analytique quand $\Bbbk \longrightarrow \Bbbk'$ est une extension finie de corps valués. Il faut remarquer (**[Ab-vdP]**) qu'une $\Bbbk$-algèbre analytique qui est un anneau régulier est isomorphe à $\Bbbk' \otimes_{\Bbbk} \Bbbk\{x_1, ..., x_n\}$ pour $n \in \mathbb{N}$ où $\Bbbk \longrightarrow \Bbbk'$ est finie. En particulier le théorème 4.9 reste vrai si l'on remplace $\mathcal{O}_n$ et $\mathcal{O}_m$ par $\Bbbk' \otimes_{\Bbbk} \Bbbk\{x_1, ..., x_n\}$ et $\Bbbk' \otimes_{\Bbbk} \Bbbk\{y_1, ..., y_m\}$. On peut déduire les deux résultats suivants :

Théorème 7.4. — *Soient $\varphi : \Bbbk\{x_1, ..., x_n\} \longrightarrow \Bbbk\{y_1, ..., y_m\}$ un morphisme d'algèbres analytiques injectif et $\Bbbk \longrightarrow \Bbbk'$ une extension finie de corps valués.*

(i) *Si $r_1(\varphi) = r_2(\varphi)$, alors le morphisme induit $\varphi_{\Bbbk'} : \Bbbk'\{x_1, ..., x_n\} \longrightarrow \Bbbk'\{y_1, ..., y_m\}$ est injectif.*

(ii) *Si $n \leq 2$, alors le morphisme induit $\varphi_{\Bbbk'} : \Bbbk'\{x_1, ..., x_n\} \longrightarrow \Bbbk'\{y_1, ..., y_m\}$ est injectif.*

Démonstration. — Ce résultat vient du fait que $r_1(\varphi_{\Bbbk'}) = r_1(\varphi_{\Bbbk})$ si $\Bbbk \longrightarrow \Bbbk'$ est fini, et du théorème 4.10 et du corollaire 5.5. □

Références

[Ab] S. S. Abhyankar, Two notes on formal power series, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **7**, (1956), 905-907.

[Ab-vdP] S. S. Abhyankar, M. van der Put, Homomorphisms of analytic local rings, *J. Reine Angew. Math.*, **242**, (1970), 26-60.

[Ar1] M. Artin, On the solutions of analytic equations, *Invent. Math.*, **5**, (1968), 177-291.

[Ar2] M. Artin, Algebraic approximation of structures over complete local rings, *Publ. Math. IHES*, **36**, (1969), 23-58.

[Be1] J. Becker, A counterexample to Artin approximation with respect to subrings, *Math. Ann.*, **230**, (1977), no. 2, 195-196.

[Be2] J. Becker, Exposé on a conjecture of Tougeron, *Annales de l'Institut Fourier*, **27**, no. 4, (1977), 9-27

[Be3] J. Becker, On the nonflatness of analytic tensor product, *Math. Ann.*, **243**, (1979), 1-10.

[B-Z] J. Becker, W. R. Zame, Applications of functional analysis to the solution of power series equations, *Math. Ann.*, **243**, (1979), 37-54.

[B-M1] E. Bierstone, P. Milman, Relations among analytic functions I, *Ann. Inst. Fourier*, **37**, (1987), no. 1, 187-239.

[B-M2] E. Bierstone, P. Milman, Relations among analytic functions II, *Ann. Inst. Fourier*, **37**, (1987), no. 2, 49-77.

[B-M3] E. Bierstone, P. Milman, Composite differentiable functions, *Ann. of Math.*, **116**, (1982), 541-558.

[Ch] C. Chevalley, On the theory of local rings, *Ann. of Math. (2)*, **44**, (1943), 690-708.

[E-H] P. M. Eakin, G. A. Harris, When $\Phi(f)$ convergent implies f convergent, *Math. Ann.*, **229**, (1977), 201-210.

[Ga1] A. M. Gabrielov, The formal relations between analytic functions, *Funkcional. Anal. i Prilovzen*, **5**, (1971), 64-65.

[Ga2] A. M. Gabrielov, Formal relations among analytic functions, *Izv. Akad. Naut. SSSR*, **37**, (1973), 1056-1088.

[Gr] A. Grothendieck, Techniques de construction en géométrie analytique VI, *Séminaire Henri Cartan*, **13**, no. 1, (1960-61).

[Ho] C. Houzel, Géométrie analytique locale I, *Séminaire Henri Cartan*, **13**, no. 2, exp. 18, (1960-61).

[Iz1] S. Izumi, A mesure of integrity for local analytic algebras, *Publ. RIMS, Kyoto Univ.*, **21**, (1985), 719-736.

[Iz2] S. Izumi, Gabrielov's Rank Condition is Equivalent to an Inequality of Reduced Orders, *Math. Ann.*, **276**, (1986), 81-89.

[Iz3] S. Izumi, The rank condition and convergence of formal functions, *Duke Math. J.*, **59**, (1989), 241-264.

[Iz4] S. Izumi, Increase, convergence and vanishing of functions along a Moishezon space, *J. Math. Kyoto Univ.*, **32-1**, (1992), 245-258.

[Iz5] S. Izumi, Note on Linear Chevalley Estimate for Homomorphisms of Local Algebras, *Comm. Algebra*, **24(12)**, (1996), 3885-3889.

[KPPRM] H. Kurke, G. Pfister, D. Popescu, M. Roczen, T. Mostowski, Die Approximationseigenschaft lokaler Ringe, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 634. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1978. iv+204 pp.

[ML-S] S. MacLane, O. F. G. Schilling, Zero-dimensional branches of rank one on algebraic varieties, *Ann. of Math.*, **40**, (1939).

[Mal1] B. Malgrange, Ideals of differentiable functions, Oxford university press, 1968.

[Mal2] B. Malgrange, Frobénius avec singularités, 2 Le cas général, *Invent. Math.*, **39**, (1977), 67-89.

[Mat] H. Matsumura, Commutative Ring Theory, Cambridge University Press, 1986.

[Mi] P. Milman, Polynomial and analytic homomorphisms of analytic rings, *Math. Ann.*, **232**, (1978), 247-253.

[M-T] R. Moussu, J.-CL. Tougeron, Fonctions composées analytiques et différentiables, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **282**, (1976), 1237-1240.

[Na] M. Nagata, Local Rings, Interscience, New York, (1962).

[Os] W. F. Osgood, On functions of several complex variables, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **17**, (1916), 1-8.

[Re] R. Remmert, Holomorphe und meromorphe Abbildungen komplexer Räume, *Math. Ann.*, **133**, (1957), 328-370.

[Ro1] G. Rond, Homomorphisms of local algebras in positive characteristic, ArXiv.

[Ro2] G. Rond, Approximation de Artin cylindrique et morphismes d'algêbres analytiques, submitted.

[Ro3] G. Rond, An algebraic proof of Gabrielov's theorem about analytic homomorphisms in any characteristic, submitted.

[Ro4] G. Rond, Analytic homomorphisms and transcendance theory, in preparation.

[Sp1] M. Spivakovsky, On convergence of formal functions : a simple algebraic proof of Gabrielov's theorem, *Publ. Dip. di Mat.*, Universitá di Pisa, Sezione di Geometria e Algebra, Seminario di Geometria Reale (volume dedicated to Aldo Andreotti), vol.1.41 (560) (1990), 69-77.

[Sp2] M. Spivakovsky, A new proof of D. Popescu's theorem on smoothing of ring homomorphisms, *J. Amer. Math. Soc.*, **12** (1999), no. 2, 381-444.

[To1] J.-Cl. Tougeron, Idéaux de fonctions différentiables, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Band 71, Springer-Verlag, (1972).

[To2] J.-Cl. Tougeron, Courbes analytiques sur un germe d'espace analytique et applications, *Annales de l'Institut Fourier*, **26**, no. 2, (1976), 117-131.

[To3] J.-Cl. Tougeron, Sur les racines d'un polynôme à coefficients séries formelles, *Real analytic and algebraic geometry (Trento 1988)*, 325-363, *Lectures Notes in Math.*, **1420**, (1990).

Guillaume Rond, Institut de Mathématiques de Luminy, Campus de Luminy, Case 907, 13288 MARSEILLE Cedex 9, FRANCE, rond@iml.univ-mrs.fr