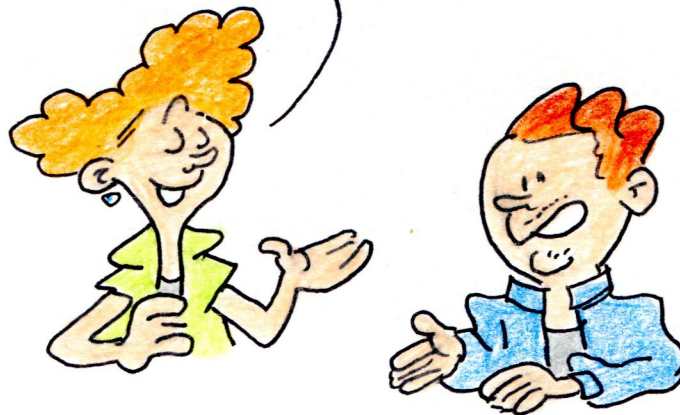


Les applications linéaires (épisode 2)

POUR FABRIQUER UN EXEMPLE, IL FAUT
DES ESPACES VECTORIELS E ET F , DES
BASES B_E ET B_F ET UNE APPLICATION
LINÉAIRE φ DE E VERS F .

POURQUOI LA LETTRE φ ?
LA SEMAINE DERNIÈRE,
ON L'APPELAIT ϕ !



OUI, MAIS ON VA CHANGER DE NOTATION.
AUJOURD'HUI, ϕ , ÇA SERA AUTRE CHOSE.

AUJOURD'HUI, f SERA UN POLYNÔME
RÉEL DE DEGRÉ INFÉRIEUR OU
ÉGAL À TROIS. AUTREMENT DIT,
UN TRUC QUI S'ÉCRIT :

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d.$$



DONC UN POLYNÔME RÉEL DE
DEGRÉ ≤ 3 S'ÉCRIT D'UNE UNIQUE
FAÇON COMME **COMBINAISON**
LINÉAIRE DE x^3 , DE x^2 , DE x ET
DE 1.

ATTENDS ! LES
COMBINAISONS LINÉAIRES,
C'EST DES CHOSES QU'ON
A VUES. C'ÉTAIT PAS
DANS DES ESPACES
VECTORIELS QUE ÇA
SE PASSAIT ?

SI ! C'EST
VRAI.

AUTREMENT DIT, LES POLYNÔMES RÉELS
DE DEGRÉ ≤ 3 FORMENT UN ESPACE
VECTORIEL E ET LES QUATRE
POLYNÔMES x^3 , x^2 , x ET 1 FORMENT
UNE BASE DE E .

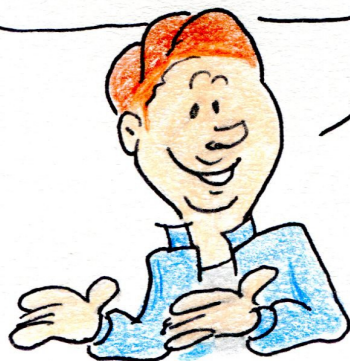
DONC E EST DE DIMENSION 4
PUISQU'IL A UNE BASE FORMÉE
DE 4 VECTEURS.



ET SI ON AVAIT PRIS
LES POLYNÔMES DE
DEGRÉ ≤ 2 ?



BEN, PAREIL ! ON AURAIT TROUVÉ UN
ESPACE VECTORIEL F DE BASE $x^2, x,$
 1 ET DE DIMENSION 3.



DONC, C'EST BON. ON
A NOS DEUX ESPACES E
ET F ET NOS BASES B_E
ET B_F . IL MANQUE
ENCORE L'APPLICATION
LINÉAIRE φ .

TU REMARQUES QUE SI $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$
APPARTIENT À E, ALORS SA DÉRIVÉE
 $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ APPARTIENT À F.

OUI. QUAND ON
DÉRIVE ÇA BAISSE
LE DEGRÉ DU
POLYNÔME.



EH BIEN ! LA VOILÀ NOTRE
APPLICATION φ DE E VERS F !
POUR TOUT ÉLÉMENT f DE E,
ON POSE : $\varphi(f) = f'$

L'APPLICATION $\varphi: \begin{cases} E \rightarrow F \\ f \mapsto f' \end{cases}$ EST-ELLE LINÉAIRE?

OUI, BIEN SÛR. C'EST LES PROPRIÉTÉS CLASSIQUES DE LA DÉRIVATION. SI f ET g APPARTIENNENT À E ET QUE λ EST UN RÉEL, ALORS ON SAIT QUE:

$$(f+g)' = f' + g'$$

$$(\lambda f)' = \lambda f'.$$

ÇA DIT BIEN QUE φ EST LINÉAIRE:

$$\varphi(f+g) = \varphi(f) + \varphi(g)$$

$$\varphi(\lambda f) = \lambda \varphi(f).$$



O.K. φ EST LINÉAIRE.

VOICI L'EXEMPLE PROMIS. ON VA CALCULER
LA MATRICE DE L'APPLICATION LINÉAIRE

$$\varphi: \begin{cases} E \rightarrow F \\ f \mapsto f' \end{cases}$$

DANS LES BASES $B_E: X^3, X^2, X, 1$ ET
 $B_F: X^2, X, 1$. ON FAIT COMMENT, DÉJÀ ?

D'ABORD, COMME $\dim(E)$ VAUT 4
ET QUE $\dim(F)$ VAUT 3, LA
MATRICE AURA 3 LIGNES ET 4
COLONNES.

IL FAUT DONC
CALCULER SES 12
COEFFICIENTS !



CALCULONS LA PREMIÈRE COLONNE. LE
PREMIER VECTEUR DE B_E EST x^3 .

SON IMAGE EST LE VECTEUR $\varphi(x^3) = 3x^2$.
QUELLES SONT LES COORDONNÉES DE $3x^2$
DANS LA BASE B_F ?

JE SAIS PLUS ...
ON FAIT COMMENT ?



C'EST SIMPLE. ON ÉCRIT $3x^2$
COMME UNE COMBINAISON
LINÉAIRE $ax^2 + bx + c$ DES
TROIS VECTEURS x^2, x ET 1 DE B_F .

ATTENDS ! SI ON POSE $(a, b, c) = (3, 0, 0)$,
ON AURA BIEN $3X^2 = aX^2 + bX + c$. NON ?

O.K. DONC LA PREMIÈRE
COLONNE DE NOTRE
MATRICE $\text{Mat}_{B_E, B_F}(\varphi)$
CONTIENT LES RÉELS 3, 0 ET 0.



$$\text{Mat}_{B_E, B_F}(\varphi) = \begin{pmatrix} 3 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \end{pmatrix}$$

IL RESTE TROIS COLONNES À REMPLIR.

Savez-vous remplir les trois
colonnes restantes ?

RÉPONSE :

$$\text{Mat}_{B_E, B_F}(\psi) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

