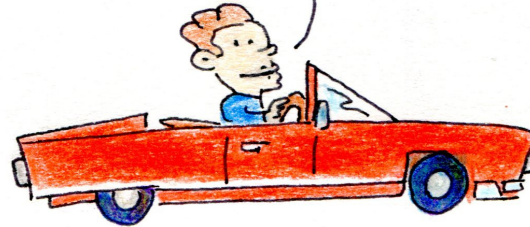


COURS 3 : VITESSE MOYENNE ET VITESSE INSTANTANÉE

POUR LE MOMENT, ON A VU LA NOTION
DE VITESSE MOYENNE.

OUAIS. C'EST LA DISTANCE
PARCOURUE DIVISÉE PAR
LE TEMPS DE PARCOURS.



IL Y A AUSSI LA NOTION DE VITESSE
INSTANTANÉE.

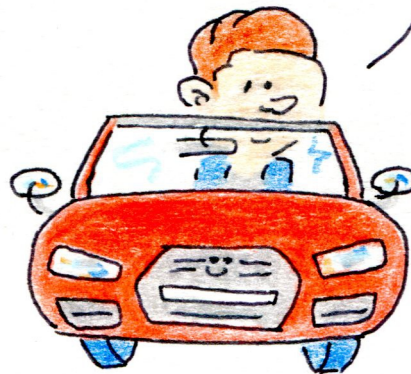
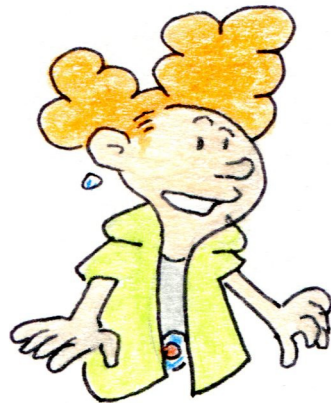
C'EST PAS LA MÊME
CHOSE.



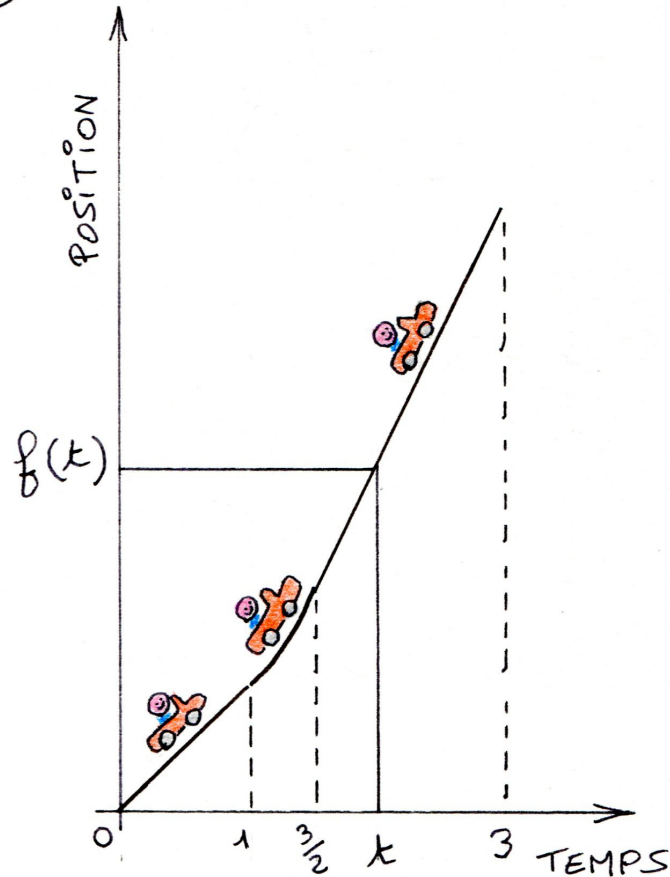
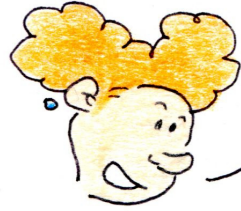
C'EST... VOYONS...
COMMENT DIRE ?

DISONS QUE C'EST LA VITESSE
QUE TU LIS SUR LE COMPTEUR
DE LA VOITURE, LA VITESSE
INSTANTANÉE.

PAS TRÈS MATHÉMATIQUE,
COMME DÉFINITION.



COMME D'HABITUDE, ON VA
REPRÉSENTER LA DISTANCE
PARCOURUE COMME UNE
FONCTION f DU TEMPS.



DÉFINISSONS f AVEC DES FORMULES
MATHÉMATIQUES.



PREMIER INTERVALLE :

SUR L'INTERVALLE $[0, 1]$, ON POSE $f(t) = t$.

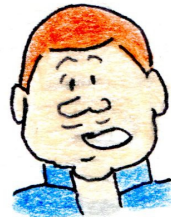
DEUXIÈME INTERVALLE :

SUR $[1, \frac{3}{2}]$, ON POSE $f(t) = t^2 - t + 1$.

TROISIÈME INTERVALLE :

SUR $[\frac{3}{2}, 3]$, ON POSE $f(t) = 2t - \frac{5}{4}$.

... PAR EXEMPLE !



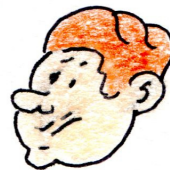
SI ON PREND t ET t_1 DANS LE
PREMIER INTERVALLE, ON
AURA $f(t) = t$ ET $f(t_1) = t_1$.
ALORS LE TAUX D'ACCROISSEMENT
VAUT...

$$\dots \frac{f(t_1) - f(t)}{t_1 - t} = \frac{t_1 - t}{t_1 - t} = 1.$$

SI $t_1 \neq t$, BIEN SÛR.
SINON, ÇA N'A PAS DE
SENS !



LE TAUX D'ACCROISSEMENT NE DÉPEND
NI DE t NI DE t_0 . C'EST NORMAL.
TU ROULAIS À VITESSE CONSTANTE, SUR
L'INTERVALLE DE TEMPS $[0, 1]$.



IL Y A UN AUTRE INTERVALLE DE TEMPS OÙ TU ROULAIS À VITESSE CONSTANTE. C'EST L'INTERVALLE $[\frac{3}{2}, 3]$.

VOYONS ÇA. SI JE PRENDS t ET t_1 DANS CET INTERVALLE, ALORS:

$$f(t) = 2t - \frac{5}{4} \text{ ET } f(t_1) = 2t_1 - \frac{5}{4}.$$



$$\begin{aligned} \frac{f(t_1) - f(t)}{t_1 - t} &= \frac{2t_1 - \frac{5}{4} - (2t - \frac{5}{4})}{t_1 - t} \\ &= \frac{2t_1 - 2t}{t_1 - t} \\ &= 2. \end{aligned}$$

DONC, PENDANT L'INTERVALLE DE
TEMPS $[0, 1]$, JE ROULAIS À
VITESSE CONSTANTE ÉGALE À 1
ET PENDANT $[\frac{3}{2}, 3]$, JE ROULAIS
À VITESSE CONSTANTE ÉGALE À 2.

ET ENTRE LES DEUX ?
PENDANT L'INTERVALLE
DE TEMPS $[1, \frac{3}{2}]$...

ENTRE LES DEUX, JE
ROULAIS À VITESSE
VARIABLE.

EXACT !



SI ON PREND t ET t_1 DANS
L'INTERVALLE $[1, \frac{3}{2}]$, ON A :

$$f(t) = t^2 - t + 1$$

$$f(t_1) = t_1^2 - t_1 + 1.$$



TAUX D'ACCROISSEMENT :

$$\frac{f(t_1) - f(t)}{t_1 - t} = \frac{t_1^2 - t_1 + 1 - (t^2 - t + 1)}{t_1 - t}$$

$$= \frac{t_1^2 - t^2 - (t_1 - t)}{t_1 - t}$$

$$= \frac{t_1^2 - t^2}{t_1 - t} - 1$$

$$= \frac{(t_1 - t)(t_1 + t)}{t_1 - t} - 1$$

$$= t_1 + t - 1.$$

ON VOIT QUE
LE RÉSULTAT
DÉPEND
DE t ET DE t_1 .



LA VITESSE MOYENNE ENTRE t ET t_1
VAUT :

$$t_1 + t - 1.$$

NOTEZ QU'ON PEUT AVOIR $t_1 > t$
OU $t_1 < t$ (MAIS PAS $t_1 = t$).

SI t_1 EST PROCHE DE t , ALORS
L'INTERVALLE DE TEMPS EST
PETIT ET DANS CE CAS, ON VA
DIRE QUE LA VITESSE MOYENNE
ENTRE t ET t_1 EST PROCHE
DE CE QU'ON VA APPELER LA
VITESSE INSTANTANÉE À
L'INSTANT t .



DİSONS QUE t EST FIXÉ ET QUE t_1 VARİE. SI t_1 S'APPROCHE DE t , ALORS $t_1 + t - 1$ S'APPROCHE DE $2t - 1$. ON DİT QUE LE TAUX D'ACCROİSSEMENT ENTRE t ET t_1 TEND VERS LA LIMİTE $2t - 1$ QUAND t_1 TEND VERS t . CETTE LIMİTE $2t - 1$ EST LA FAMEUSE VITESSE INSTANTANÉE À L'INSTANT t .

BREF, C'EST CE QUE JE LIS SUR LE COMPTEUR DE LA VOİTURE.



COURS 4 : DÉRIVÉE ET VITESSE INSTANTANÉE

ON A VU QUE LES MATHÉMATICIENS, IL NE DISENT PAS VITESSE MOYENNE MAIS TAUX D'ACCROISSEMENT. EH BIEN, LA VITESSE INSTANTANÉE, ILS APPELLENT ÇA LE NOMBRE DÉRIVÉ.



LE NOMBRE DÉRIVÉ DE f EN t EST LA LIMITE QUAND t_1 TEND VERS t DU TAUX D'ACCROISSEMENT:

$$\frac{f(t_1) - f(t)}{t_1 - t}.$$

ON LE NOTE $f'(t)$.

CETTE LIMITE EXISTE-T-ELLE
FORCÉMENT ? NON, PAS TOUJOURS.
VOICI UNE DÉFINITION PLUS
PRÉCISE.



DÉFINITION.

ON DIT QUE LA FONCTION f
EST **DÉRIVABLE** EN x SI LE
TAUX D'ACCROISSEMENT

$$\frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x}$$

ADMET UNE LIMITE FINIE
QUAND x_1 TEND VERS x .

ALORS CETTE LIMITE EST
APPELÉE LE **NOMBRE DÉRIVÉ**
DE f EN x . ON LA NOTE $f'(x)$.

DANS L'EXEMPLE DU COURS PRÉCÉDENT,
LA FONCTION f VÉRIFIAIT :

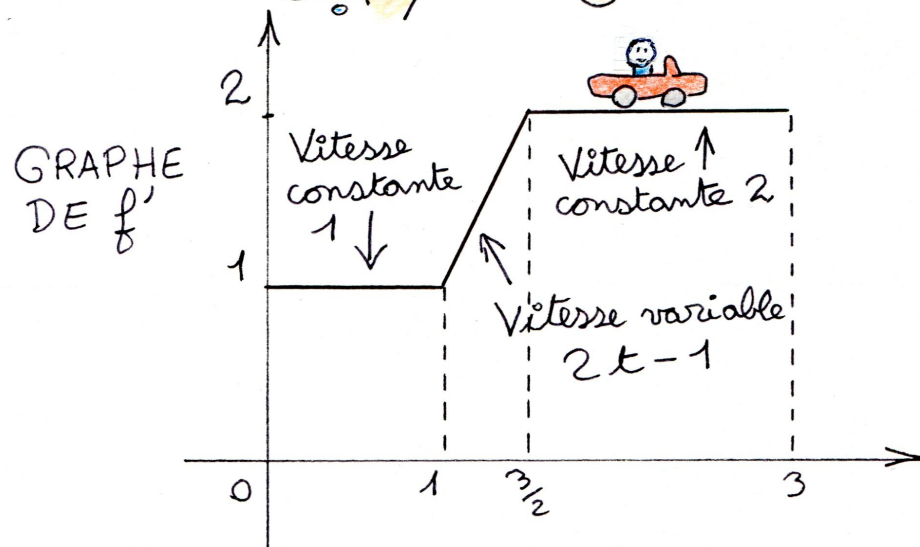
$$f'(t) = 1 \quad \text{SUR } [0, 1]$$

$$f'(t) = 2 \quad \text{SUR } \left[\frac{3}{2}, 3\right]$$

$$f'(t) = 2t - 1 \quad \text{SUR } \left[1, \frac{3}{2}\right].$$

À PARTIR DE LA FONCTION f , ON A
DONC OBTENU UNE NOUVELLE
FONCTION f' .

ET VOICI SON GRAPHE.



Si f est une fonction réelle
d'une variable réelle, alors
la fonction f' est appelée
la **DÉRIVÉE** de f . Elle est
définie en tout point où f
est dérivable.