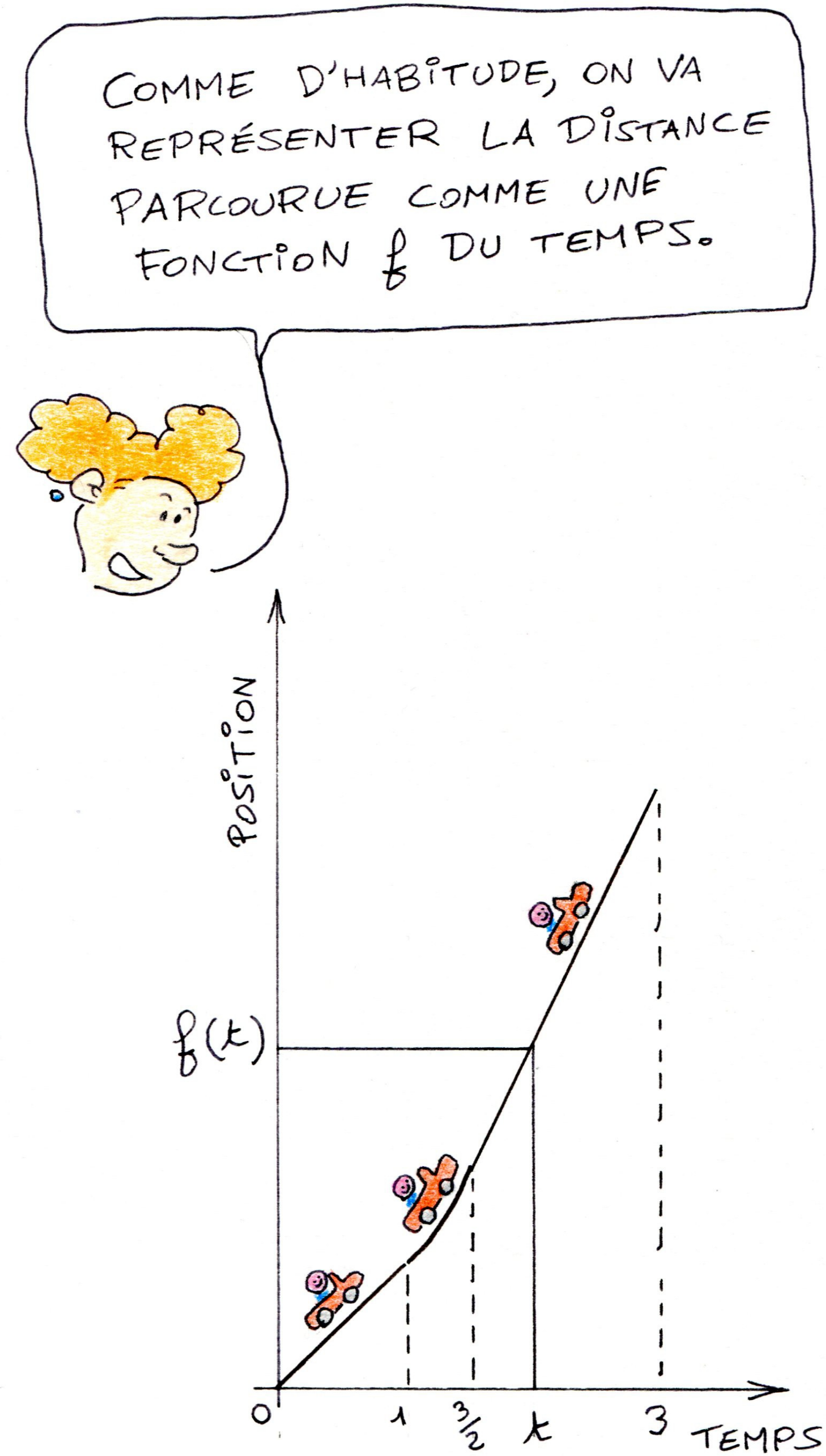
COURS 3 : VITESSE MOYENNE ET VITESSE INSTANTANÉE


DISONS QUE C'EST LA VITESSE QUE TU LIS SUR LE COMPTEUR DE LA VOITURE, LA VITESSE INSTANTANÉE.
PAS TRÈS MATHÉMATIQUE, COMME DÉFINITION.


COMME D'HABITUDE, ON VA REPRÉSENTER LA DISTANCE PARCOURUE COMME UNE FONCTION f DU TEMPS.
POSITION
f(t)
0
1
3/2
t
3
TEMPS

PREMIER INTERVALLE :

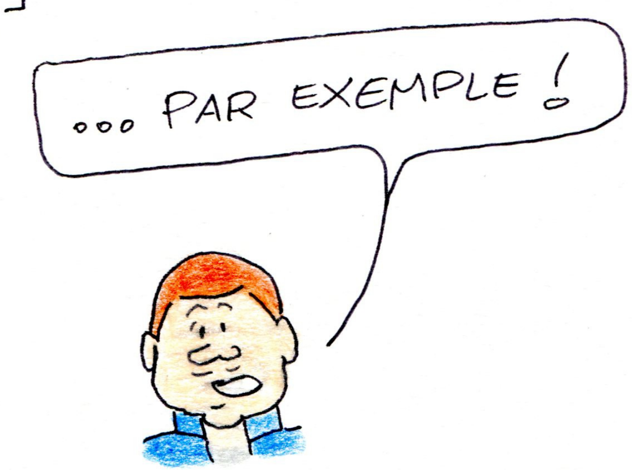
SUR L'INTERVALLE $[0, 1]$, ON POSE $f(t) = t$.

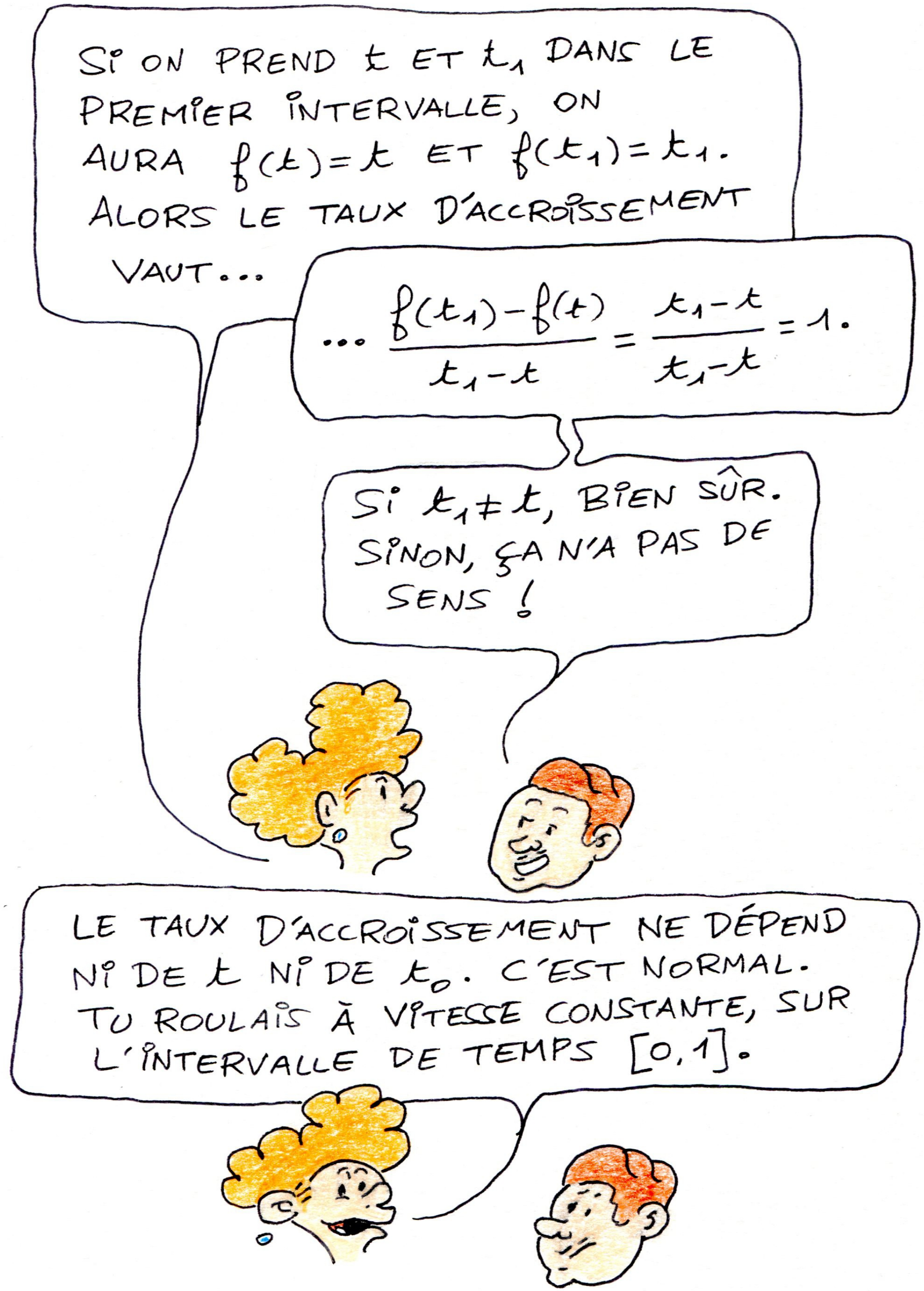
DEUXIÈME INTERVALLE :

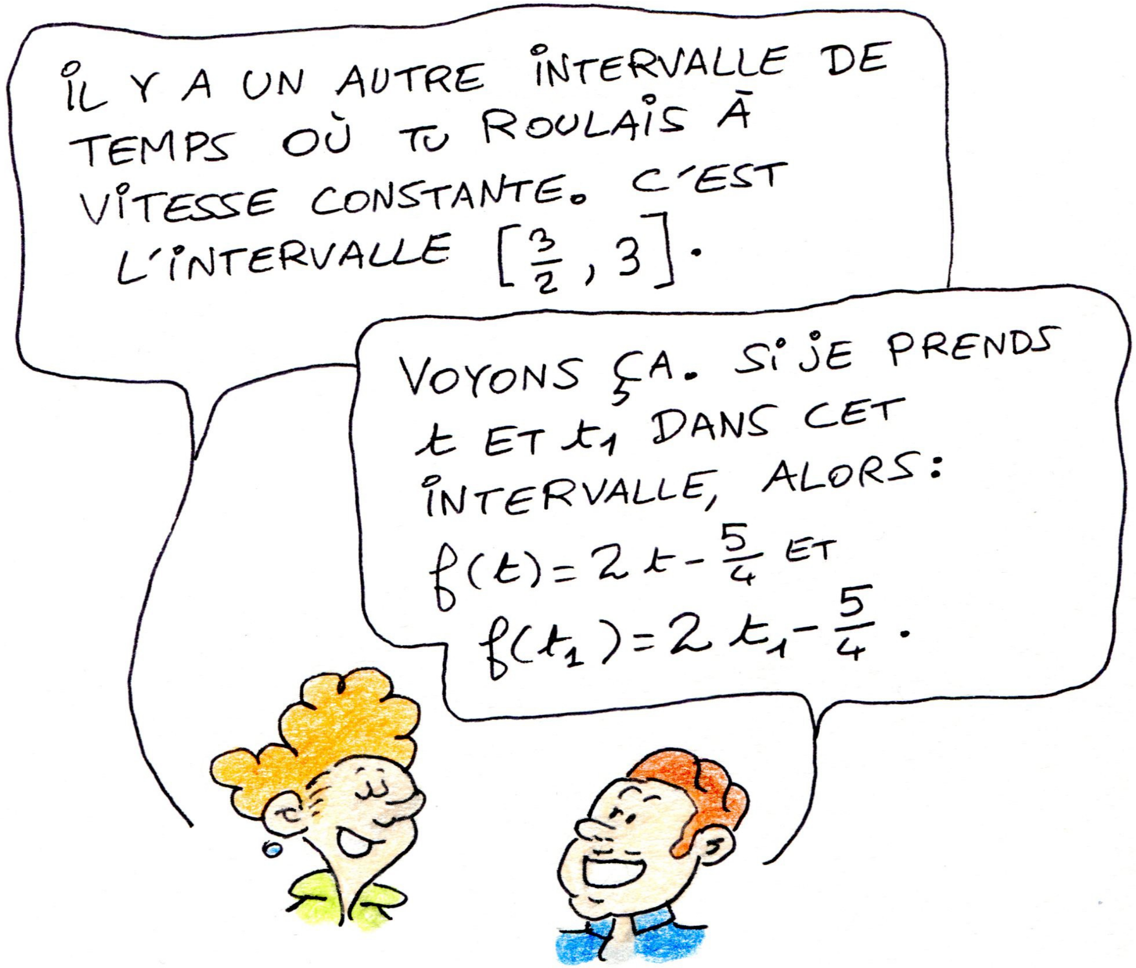
SUR $[1, \frac{3}{2}]$, ON POSE $f(t) = t^2 - t + 1$.

TROISIÈME INTERVALLE :

SUR $[\frac{3}{2}, 3]$, ON POSE $f(t) = 2t - \frac{5}{4}$.

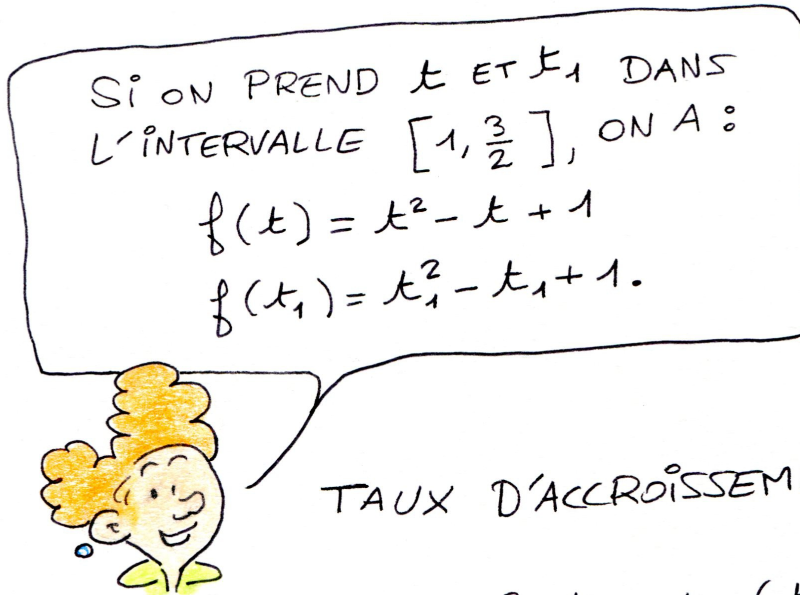



SI ON PREND t ET t_1 DANS LE PREMIER INTERVALLE, ON AURA $f(t)=t$ ET $f(t_1)=t_1$. ALORS LE TAUX D'ACCROISSEMENT VAUT...
... $\frac{f(t_1)-f(t)}{t_1-t} = \frac{t_1-t}{t_1-t} = 1$.
SI $t_1 \neq t$, BIEN SÛR. SINON, ÇA N'A PAS DE SENS !
LE TAUX D'ACCROISSEMENT NE DÉPEND NI DE t NI DE t_0. C'EST NORMAL. TU ROULAIS À VITESSE CONSTANTE, SUR L'INTERVALLE DE TEMPS $[0,1]$.



$$\begin{aligned}\frac{f(t_1)-f(t)}{t_1-t} &= \frac{2t_1-\frac{5}{4}-\left(2t-\frac{5}{4}\right)}{t_1-t}\\ &= \frac{2t_1-2t}{t_1-t}\\ &= 2.\end{aligned}$$


DONC, PENDANT L'INTERVALLE DE TEMPS [0, 1], JE ROULAIS À VITESSE CONSTANTE ÉGALE À 1 ET PENDANT [3/2, 3], JE ROULAIS À VITESSE CONSTANTE ÉGALE À 2.
ET ENTRE LES DEUX ? PENDANT L'INTERVALLE DE TEMPS [1, 3/2]...
ENTRE LES DEUX, JE ROULAIS À VITESSE VARIABLE.
EXACT !



TAUX D'ACCROISSEMENT :

$$\frac{f(t_1) - f(t)}{t_1 - t} = \frac{t_1^2 - t_1 + 1 - (t^2 - t + 1)}{t_1 - t}$$

$$= \frac{t_1^2 - t^2 - (t_1 - t)}{t_1 - t}$$

$$= \frac{t_1^2 - t^2}{t_1 - t} - 1$$

$$= \frac{(t_1 - t)(t_1 + t)}{t_1 - t} - 1$$

$$= t_1 + t - 1.$$

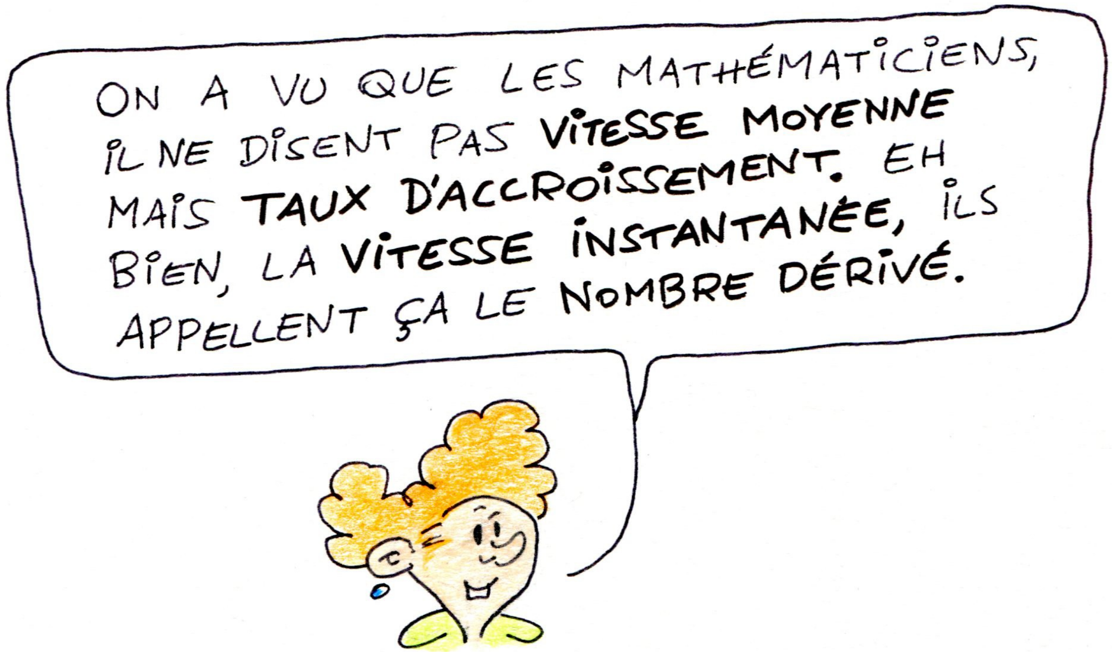
LA VITESSE MOYENNE ENTRE t ET t_1 VAUT :

$$t_1 + t - 1.$$

NOTEZ QU'ON PEUT AVOIR $t_1 > t$ OU $t_1 < t$ (MAIS PAS $t_1 = t$).


DISONS QUE t EST FIXÉ ET QUE t_1 VARIE. SI t_1 S'APPROCHE DE t, ALORS t_1+t-1 S'APPROCHE DE $2t-1$. ON DIT QUE LE TAUX D'ACCROISSEMENT ENTRE t ET t_1 **TEND VERS LA LIMITE $2t-1$** QUAND t_1 TEND VERS t. CETTE LIMITE $2t-1$ EST LA FAMEUSE **VITESSE INSTANTANÉE** À L'INSTANT t.
BREF, C'EST CE QUE JE LIS SUR LE COMPTEUR DE LA VOITURE.

COURS 4 : DÉRIVÉE ET VITESSE INSTANTANÉE



LE NOMBRE **DÉRIVÉ** DE f EN t EST LA LIMITE QUAND t_1 TEND VERS t DU TAUX D'ACCROISSEMENT :

$$\frac{f(t_1) - f(t)}{t_1 - t}.$$

ON LE NOTE $f'(t)$.

DÉFINITION.

ON DIT QUE LA FONCTION f EST **DÉRIVABLE** EN t SI LE TAUX D'ACCROISSEMENT

$$\frac{f(t_1) - f(t)}{t_1 - t}$$

ADMET UNE LIMITE FINIE QUAND t_1 TEND VERS t.

ALORS CETTE LIMITE EST APPELÉE LE **NOMBRE DÉRIVÉ** DE f EN t. ON LA NOTE $f'(t)$.

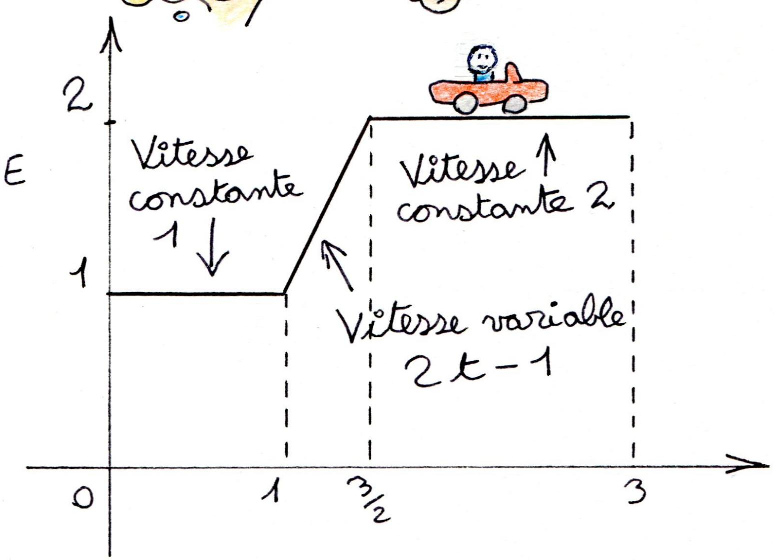
DANS L'EXEMPLE DU COURS PRÉCÉDENT, LA FONCTION f VÉRIFIAIT :

$$f'(t) = 1 \quad \text{SUR } [0, 1]$$

$$f'(t) = 2 \quad \text{SUR } \left[\frac{3}{2}, 3\right]$$

$$f'(t) = 2t - 1 \quad \text{SUR } \left[1, \frac{3}{2}\right].$$

GRAPHE DE f'



SI f EST UNE FONCTION RÉELLE D'UNE VARIABLE RÉELLE, ALORS LA FONCTION f' EST APPELÉE LA **DÉRIVÉE** DE f. ELLE EST DÉFINIE EN TOUT POINT OÙ f EST DÉRIVABLE.