

L'utilité du brouillon

Exercice.

Prouver que la fonction f
définie sur le droite réelle
par $f(x) = x^2$ est continue en 7.

ATTENTION ! NE REGARDEZ
PAS LES SOLUTIONS AVANT
D'AVOIR CHERCHÉ LONGTEMPS.



DIS-MOI CE QUE ÇA
VEUT DIRE, LE FAÏT
QUE f SOIT CONTINUE
EN z ?

ÇA JE SAÏS.
C'EST DANS
MON COURS.



ÇA VEUT DIRE QUE QUEL QUE SOIT
LE RÉEL $\epsilon > 0$ QUE TU CHOÏSSES,
IL EXISTE UN RÉEL $\alpha > 0$ QUE JE
PEUX CHOÏSIR TEL QUE, QUEL QUE
SOIT LE RÉEL $x \in [z - \alpha, z + \alpha]$ QUE
TU CHOÏSSES, ON AURA :

$$|f(x) - f(z)| \leq \epsilon.$$

BEN OK. VOILÀ.
PROUVONS ÇA !



Soit $\varepsilon > 0$ un réel.

NON ! C'EST
PAS "SOIT ε ".
C'EST "QUEL
QUE SOIT ε "

ATTENDS.
TU EN ES
SÛR ?

REGARDE. JE NE
SUIS PAS FOU !
C'EST ÉCRIT DANS
LA DÉFINITION :
"QUEL QUE
SOIT".

OUI, D'ACCORD. MAIS TU OUBLIES
UNE CHOSE ...

ET J'OUBLIE
QUOI ?

LE CONTEXTE.

LE CONTEXTE, C'EST PAS D'ÉCRIRE LA DÉFINITION DE "CONTINUE". C'EST DE RÉSOUDRE UN EXERCICE.

ET CET EXERCICE, C'EST PRÉCISÉMENT DE PROUVER QUE f EST CONTINUE. AUTREMENT DIT, ON DOIT DÉMONTRER QUE, QUEL QUE SOIT $\epsilon > 0$, UNE CERTAINE PROPRIÉTÉ EST VRAIE. C'EST-À-DIRE QU'ELLE EST VRAIE POUR TOUS LES $\epsilon > 0$.

Oui.

MAIS EN FAIT, J'ÉCRIS JUSTE "SOIT $\epsilon > 0$ ". ET JE NE VAIS DONC DÉMONTRER LA PROPRIÉTÉ QUE POUR UN SEUL $\epsilon > 0$

C'EST QUOI L'EMBROUILLE ?



IMAGINE QUE JE DÉMONTRE LA
PROPRIÉTÉ POUR CET ϵ SANS
DIRE QUEL ϵ C'EST ET DONC
SANS UTILISER AUCUNE
SPÉCIFICITÉ DE CET ϵ ,
ALORS... TU VOIS LE TRUC ?
MÊME SI, EN APPARENCE, JE
N'ÉTUDE QU'UN SEUL ϵ , MA
DÉMONSTRATION VAUT POUR TOUS.



J'ÉCRIS JUSTE "SOÏT"
MAÏS ÇA DÉMONTRE
"QUEL QUE SOÏT".

J'AI RIEN
COMPRIS MAÏS
ÇA VA. JE
TE CROIS SUR
PAROLE.



SOÏT $\epsilon > 0$ UN RÉEL.

BON. JE CONTINUE À LIRE MA DÉFINITION. "IL EXISTE UN $\alpha > 0$ ".

J'IMAGINE QUE J'ÉCRIS PAS ÇA. ÇA SERAIT TROP FACILE.



C'EST À TOI DE PROUVER QU'IL EXISTE UN BON α . ET POUR ÇA, TU DOIS D'ABORD DEVINER QUEL EST CE BON α .

DEVINER? J'AI LE DROIT D'UTILISER UNE **BOULE DE CRISTAL**? HEIN?

MIEUX! TU AS LE DROIT D'UTILISER UN **BROUILLON**!

SÉRIEUX! T'ES SÛRE QUE C'EST MIEUX?



AU BROUILLON, JE CALCULE $|f(x) - f(7)|$
ET J'ESSAIE DE VOIR SI C'EST MAJORÉ
PAR ε .



$$\begin{aligned}|f(x) - f(7)| &= |x^2 - 7^2| \\ &= |(x-7)(x+7)| \\ &= |x-7| |x+7|.\end{aligned}$$

ON DOIT PROUVER QUE C'EST
MAJORÉ PAR ε SI x EST PROCHE
DE 7.



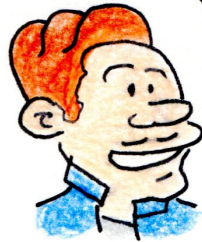
VOYONS,
VOYONS.



SI x EST PROCHE DE 7, ALORS
 $|x-7|$ EST PETIT.

EXACT. ET $|x+7|$?

SI x EST PROCHE
DE 7, ALORS $|x+7|$
EST PROCHE DE 14.



BILAN : $|x-7|$ EST PETIT
ET $|x+7|$ N'EST PAS TROP
GRAND DONC ON IMAGINE
BIEN QUE LEUR PRODUIT EST
PETIT. C'EST UNE BONNE
PISTE.



COMMENÇONS PAR $|x+7|$. IL N'EST PAS TROP GRAND CAR IL EST PROCHE DE 14 SI x EST PROCHE DE 7.

TU POURRAIS ÊTRE PLUS PRÉCISE ?

OUI !



SI $|x-7| \leq 1$, ALORS :

$$\begin{aligned} |x+7| &= |x-7+14| \\ &\leq |x-7| + 14 \\ &\leq 15 \end{aligned}$$

ET DONC :

$$|x-7||x+7| \leq 15 |x-7|.$$



ON VOUDRAIT DONC AVOIR $15|x-7| \leq \varepsilon$.
ÇA REVIENT À PRENDRE $|x-7| \leq \frac{\varepsilon}{15}$.



OK. ON A DÉMONTRÉ AU BROUILLON
L'INÉGALITÉ $|f(x) - f(7)| \leq \varepsilon$.

MAIS POUR ÇA, ON A FAIT
DEUX HYPOTHÈSES :

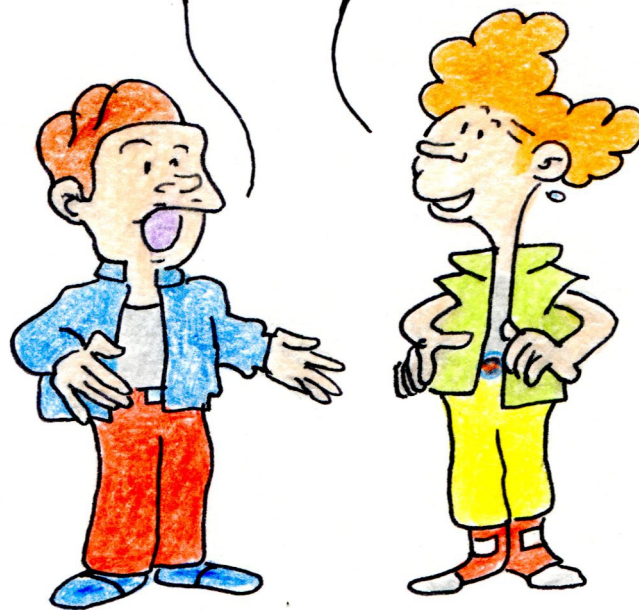
$$|x-7| \leq 1 \text{ ET } |x-7| \leq \frac{\varepsilon}{15}.$$



DIRE QUE $|x-7|$ EST À LA FOIS
PLUS PETIT QUE 1 ET QUE $\frac{\varepsilon}{15}$,
ÇA SE RÉSUME EN DISANT
QUE $|x-7|$ EST PLUS PETIT
QUE LE PLUS PETIT DE CES DEUX
NOMBRES.

DONC, LÀ, ON A ASSEZ RÉFLÉCHI
AU BROUILLON. ET ON PEUT
REPRENDRE LA RÉDACTION ?

EXACT.



DONC ON N'ÉCRIT PAS "IL EXISTE α ".
IL VAUT MIEUX DIRE QUEL α ON A
CHOISI : C'EST LE PLUS PETIT DES
DEUX NOMBRES 1 ET $\frac{e}{15}$.

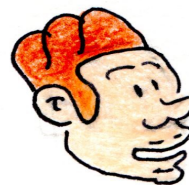


ET IL FAUT MAINTENANT PARLER DE x .

ON N'ÉCRIT PAS
"QUEL QUE SOIT x "
MAIS "SOIT x ".

ENSUITE, ON RECOPIE
LE CALCUL FAIT AU
BROUILLON, MAIS DANS
L'ORDRE LOGIQUE.

VOICI LA RÉDACTION,
À LA PAGE SUIVANTE.



SOLUTION.

SOIT $\varepsilon > 0$ UN RÉEL. NOTONS α LE PLUS PETIT DES DEUX NOMBRES 1 ET $\frac{\varepsilon}{15}$. SOIT x UN RÉEL APPARTENANT À $[7 - \alpha, 7 + \alpha]$. AUTREMENT DIT, x VÉRIFIE : $|x - 7| \leq \alpha$. ALORS ON A :

$$\begin{aligned} |f(x) - f(7)| &= |x^2 - 7^2| \\ &= |(x - 7)(x + 7)| \\ &= |x - 7| |x + 7| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{15} |x + 7| \quad \left(\text{car } |x - 7| \leq \alpha \leq \frac{\varepsilon}{15} \right) \\ &= \frac{\varepsilon}{15} |x - 7 + 14| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{15} (|x - 7| + 14) \quad \left(\text{par inégalité triangulaire} \right) \\ &\leq \frac{15\varepsilon}{15} \quad \left(\text{car } |x - 7| \leq \alpha \leq 1 \right) \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

CONCLUSION.

LA FONCTION f EST CONTINUE EN 7.