

EXERCICE 1

Soient a, b, c et d quatre réels.
Pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, on pose:

$$f(x, y, z) = (x + ay + bz, cy + dz).$$

- (i) Vérifier que l'application $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ est linéaire.
- (ii) Écrire la matrice de f dans les bases canoniques.
- (iii) L'application f est-elle injective ?
- (iv) À quelle condition, portant sur les réels a, b, c et d , l'application f est-elle surjective ?

VÉRIFIONS QUE f EST LINÉAIRE.
COMME D'HABITUDE, IL Y A DEUX
PROPRIÉTÉS À VÉRIFIER.

OK. ON PREND DEUX
VECTEURS DANS L'ESPACE
DE DÉPART.



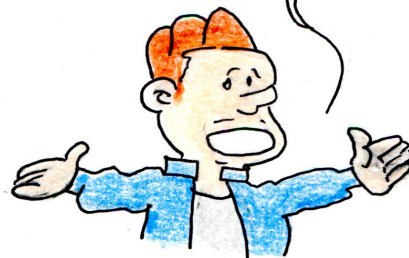
TU LES APPELLES COMMENT, TES VECTEURS ?

DÍSONS v_1 ET v_2 .

ET AUSSI ?



BEN... C'EST TOUT. ILS
S'APPELLENT v_1 ET v_2 .

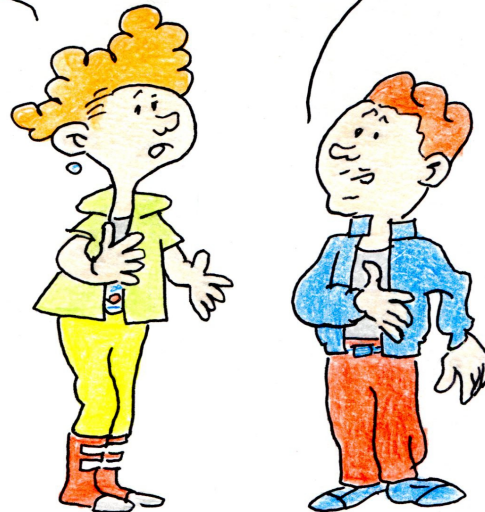


OUI, SI ON TRAVAILLE DANS UN ESPACE
VECTORIEL E DONT ON NE SAIT RIEN.

ALORS ON APPELLE BIEN LES
VECTEURS v_1 ET v_2 . SAUF QUE LÀ,
L'ESPACE DE DÉPART EST UN ESPACE
VECTORIEL PARTICULIER. L'APPLICATION f
VA DE $\mathbb{R}^3$ VERS $\mathbb{R}^4$ DONC E EST ÉGAL
À $\mathbb{R}^3$. LÀ, v_1 ET v_2 SONT DES TRIPLETS.

ET ALORS ? JE PEUX BIEN LES
APPELER v_1 ET v_2 QUAND MÊME.

ABSOLUMENT ! MAIS
C'EST UN PEU ABSTRAIT.



SI TU LES APPELLES (x_1, y_1, z_1)
ET (x_2, y_2, z_2) , ÇA SERA PLUS CONCRET
ET DONC PLUS PRATIQUE POUR LES
CALCULS.



OK. J'ÉCRIS.



SOIENT $v_1 = (x_1, y_1, z_1)$ ET
 $v_2 = (x_2, y_2, z_2)$ DEUX ÉLÉMENTS
DE $\mathbb{R}^3$.

ENSUITE ON
DOIT CALCULER
 $f(v_1 + v_2)$.



ET DONC, DÉJÀ
CALCULER $v_1 + v_2$.



$$\begin{aligned}v_1 + v_2 &= (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2) \\f(v_1 + v_2) &= f(x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2) \\&= (x_1 + x_2 + a(y_1 + y_2) + b(z_1 + z_2), c(y_1 + y_2) + d(z_1 + z_2)) \\&= (x_1 + ay_1 + bz_1, cy_1 + dz_1) + (x_2 + ay_2 + bz_2, cy_2 + dz_2) \\&= f(v_1) + f(v_2)\end{aligned}$$

PREMIÈRE PROPRIÉTÉ : OK ! VOYONS LA
SECONDE.



JE PRENDS UN VECTEUR v DANS L'ESPACE
DE DÉPART ET UN RÉEL λ .



MAIS v EST UN TRIplet
DONC JE L'APPELLE :

(x, y, z) .

C'EST PLUS CONCRET !



SCRATCH
SCRATCH

SOIENT $v = (x, y, z)$ UN
ÉLÉMENT DE $\mathbb{R}^3$ ET λ UN RÉEL.



JE DOIS CALCULER $f(\lambda v)$.

JE COMMENCE PAR CALCULER λv .

$$\lambda v = (\lambda x, \lambda y, \lambda z)$$

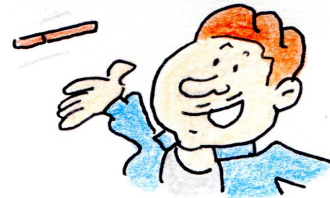
$$f(\lambda v) = f(\lambda x, \lambda y, \lambda z)$$

$$= (\lambda x + a\lambda y + b\lambda z, c\lambda y + d\lambda z)$$

$$= \lambda (x + ay + bz, cy + dz)$$

$$= \lambda f(v).$$

CONCLUSION : L'APPLICATION f
EST LINÉAIRE !!!



L'APPLICATION f VA DE $\mathbb{R}^3$ VERS $\mathbb{R}^2$. DONC,
QUELLE EST LA TAILLE DE SA MATRICE ?

TAILLE $(2,3)$. ELLE A DEUX
LIGNES ET TROIS COLONNES.

ÉVIDEMMENT, LA
MATRICE DE f
DÉPEND DES BASES
CHOISIES.

MAIS ICI ON TRAVAILLE
DANS LES BASES
CANONIQUES DONC
C'EST FACILE.

$$f(x, y, z) = (x + ay + bz, cy + dz)$$

DANS LA 1^{ère} LIGNE, TU RANGES LES
COEFFICIENTS DE x, y ET z DANS LA 1^{ère}
COMPOSANTE. ET, BIEN SÛR, DANS LA 2^{de}
LIGNE, TU METS LEURS COEFFICIENTS
DANS LA 2^{de} COMPOSANTE.

$$\text{Mat}_{\text{can}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & c & d \end{pmatrix}$$

MAINTENANT, VOYONS SI f EST INJECTIVE.

ALORS... UNE APPLICATION LINÉAIRE EST INJECTIVE SI ET SEULEMENT SI LA DIMENSION DE SON NOYAU EST NULLE.

ET LE NOYAU, C'EST QUOI ?

ATTENDS QUE JE TROUVE LA PAGE.



LE NOYAU DE f EST LA PARTIE DE L'ESPACE DÉPART FORMÉE DES ÉLÉMENTS v DONT L'IMAGE $f(v)$ EST ÉGALE AU VECTEUR NUL DE L'ESPACE D'ARRIVÉE.

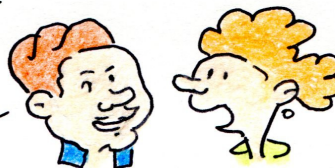


C'EST TRÈS BIEN MAIS IL FAUT RENDRE ÇA PLUS CONCRET.

L'ESPACE DE DÉPART,
C'EST $\mathbb{R}^3$ DONC,
L'ÉLÉMENT v DE $\mathbb{R}^3$,
JE L'APPELLE (x, y, z) .

ET LE VECTEUR
NUL DE L'ESPACE
D'ARRIVÉE, IL
S'APPELLE $(0, 0)$
CAR L'ESPACE
D'ARRIVÉE,
C'EST $\mathbb{R}^2$.

ÇA, C'EST
DU
CONCRET.



AU
TRAVAIL!

SOIT (x, y, z) UN ÉLÉMENT
DE $\mathbb{R}^3$. CET ÉLÉMENT
APPARTIENT À $\ker(f)$ SI
ET SEULEMENT S'IL
VÉRIFIE :

$$f(x, y, z) = (0, 0).$$

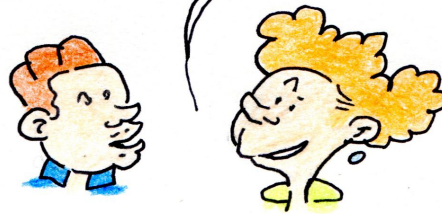
CETTE ÉQUATION VECTORIELLE ÉQUIVAUT
AU SYSTÈME SUIVANT :

$$\begin{cases} x + ay + bz = 0 \\ cy + dz = 0 \end{cases}$$

D'INCONNUES x, y ET z .

BON, 'FAUT RÉSOUDRE UN SYSTÈME. JE VOUDRAIS UTILISER L'ÉQUATION $cy + dz = 0$ COMME PIVOT POUR ÉLIMINER y .

ON VA DONC SE PLACER DANS LE CAS $c \neq 0$, DANS UN PREMIER TEMPS.



1^{er} CAS : $c \neq 0$.

ALORS LE SYSTÈME ÉQUIVAUT $\tilde{A}$:

$$\begin{cases} x + \left(b - \frac{ad}{c}\right) z = 0 \\ cy + dz = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \left(\frac{ad}{c} - b\right) z \\ y = -\frac{d}{c} z. \end{cases}$$

ON A UTILISÉ z COMME PARAMÈTRE. LES AUTRES INCONNUES SONT DES FONCTIONS LINÉAIRES DE z . LA DIMENSION DE L'ESPACE DES SOLUTIONS VAUT DONC 1, DANS CE 1^{er} CAS.

BON ! MAINTENANT, IL FAUT REGARDER
L'AUTRE CAS.



PFF.

2nd CAS : $c = 0$.

ALORS LE SYSTÈME S'ÉCRIT :

$$\begin{cases} x + ay + bz = 0 \\ dz = 0. \end{cases}$$

LÀ IL FAUT DISTINGUER LES CAS $d=0$
ET $d \neq 0$. ET CES CAS SONT, EN FAÏT,
DES SOUS-CAS.

QUEL BORDEL !



1^{er} SOUS-CAS : $d \neq 0$ (ET $c=0$)

ALORS LE SYSTÈME ÉQUIVAUT $\tilde{A}$:

$$\begin{cases} x + ay = 0 \\ dz = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -ay \\ z = 0. \end{cases}$$

ON A UTILISÉ y COMME PARAMÈTRE.
LES AUTRES INCONNUES SONT DES
FONCTIONS LINÉAIRES DE y . LA
DIMENSION DE L'ESPACE DES SOLUTIONS
VAUT DONC 1, DANS CE SOUS-CAS.

2nd SOUS-CAS : $d=0$ (ET $c=0$)
ALORS LE SYSTÈME ÉQUIVAUT $\tilde{A}$:

$$\begin{cases} x + ay + bz = 0 \\ 0 = 0. \end{cases}$$

BON, LE $0=0$, ON PEUT L'OUBLIER !

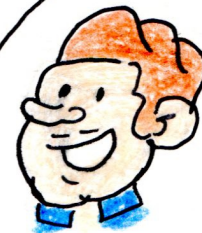


$$x = -ay - bz$$

ON A UTILISÉ y ET z COMME PARAMÈTRES.
L'AUTRE INCONNUE x EST UNE FONCTION
LINÉAIRE DE (y, z) . LA DIMENSION DE
L'ESPACE DES SOLUTIONS VAUT DONC 2,
DANS CE DERNIER CAS.

BILAN : LA DIMENSION DE $\ker(f)$
VAUT 1 SI $(c, d) \neq (0, 0)$ ET ELLE
VAUT 2 SI $(c, d) = (0, 0)$. ELLE
N'EST NULLE DANS AUCUN DES CAS !

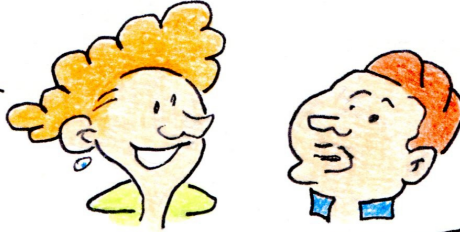
DONC f N'EST PAS
INJECTIVE!!!



EN FAÏT, ON A FAÏT BIEN PLUS
QUE DE PROUVER LA
NON-INJECTIVITÉ DE f . ON A
CALCULÉ LA DIMENSION DE SON
NOYAU. ET ÇA VA AUSSI NOUS
PERMETTRE DE VOIR SI f EST
SURJECTIVE !



SI f EST UNE APPLICATION LINÉAIRE,
LA DIMENSION DE SON IMAGE EST
APPELÉE LE RANG DE f .



L'APPLICATION LINÉAIRE f EST SURJECTIVE
SI ET SEULEMENT SI L'ESPACE D'ARRIVÉE
DE f EST ÉGAL AU SOUS-ESPACE
VECTORIEL $\text{im}(f)$. CELA REVIENT À
DIRE QUE LA DIMENSION DE L'ESPACE
D'ARRIVÉE EST ÉGALE AU RANG DE f .



PLUS EXACTEMENT, C'EST
VRAI SI ON TRAVAILLE
DANS DES ESPACES
VECTORIELS DE
DIMENSIONS FINIES.
EN DIMENSION
INFINIE, TOUT EST
PLUS COMPLIQUÉ.

NOS AMIS SONT PERPLEXES. ILS ONT
BESOIN DE CONNAÎTRE LE RANG DE $\{$
MAIS TOUT CE QU'ILS CONNAÎSSENT,
C'EST LA DIMENSION DU NOYAU.



PROÉTALE S'EST
PLONGÉE DANS
LA LECTURE
DU COURS.



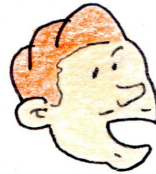
REGARDE, LÀ ! LE
THÉORÈME DU RANG.



ÇA DIT QUOI, LE
THÉORÈME DU ROND ?

DU RANG.

OUAIS, ÇA
DIT QUOI ?



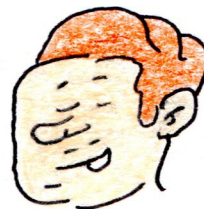
ÇA DIT QUE, SI f EST LINÉAIRE,
ALORS LA DIMENSION DE SON
ESPACE DE DÉPART EST
ÉGALE À :

$$\text{rang}(f) + \dim(\ker(f)).$$



ICI, L'ESPACE DE DÉPART EST $\mathbb{R}^3$
DONC SA DIMENSION, ON LA CONNAÎT.

ELLE VAUT 3.



DONC D'APRÈS LE THÉORÈME DU
RANG :

$$\text{rang}(f) = 3 - \dim(\ker(f)).$$



MAIS $\dim(\ker(f))$,
ON LA CONNAÎT
AUSSI.

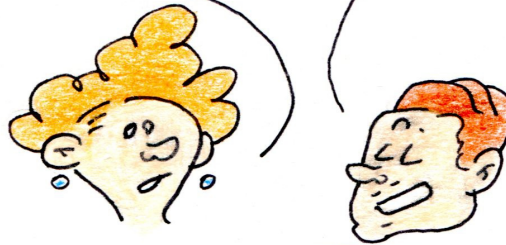
SI $(c,d) \neq (0,0)$, ON A VU QUE $\ker(f)$
EST DE DIMENSION 1 ET DONC $\text{rang}(f)$
EST ÉGAL À $3-1=2$.

ET SI $(c,d)=(0,0)$,
ALORS ON A :
 $\dim(\ker(f))=2$
ET DONC :
 $\text{rang}(f)=3-2=1$.



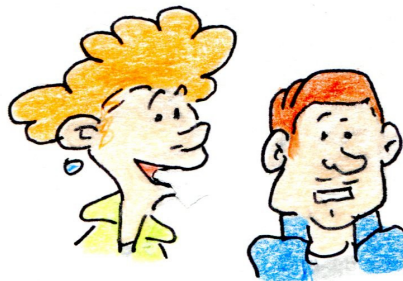
MAINTENANT, ON SAIT QUE f EST SURJECTIVE
SI ET SEULEMENT SI SON RANG EST EGAL
À LA DIMENSION DE SON ESPACE D'ARRIVÉE.

L'ESPACE D'ARRIVÉE,
C'EST $\mathbb{R}^2$. SA DIMENSION
VAUT 2.



LA CONCLUSION, C'EST QUE f EST
SURJECTIVE SI ET SEULEMENT SI
SON RANG VAUT 2.

ÇA CORRESPONDAIT
AU CAS $(c, d) \neq (0, 0)$.



VOILÀ !
EXO FINI !



L'APPLICATION LINÉAIRE f
EST SURJECTIVE SI ET
SEULEMENT SI c OU d
EST NON NUL.