

### EXERCICE 3

Soit  $f$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^2$  défini par la formule

$$f(x, y) = (y, x + y),$$

valable pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ .

On rappelle que, si  $n \geq 1$  est un entier,  $f^n$  désigne la composée  $\underbrace{f \circ \dots \circ f}_{n \text{ copies}}$ .

(1) Vérifier que  $f$  est linéaire.

(2) Calculez les endomorphismes  $f^2$ ,  $f^3$  et  $f^4$ .

(3) Déterminer la matrice de  $f$  dans la base canonique.

(4) Déterminer les matrices dans la base canonique des endomorphismes  $f^2$ ,  $f^3$  et  $f^4$ .

(5) Notons  $B$  la famille formée des deux vecteurs  $\left(1, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$  et  $\left(1, \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$ .

Vérifier que  $B$  est une base de  $\mathbb{R}^2$ .

- (6) Calculer la matrice de  $f$  dans la base  $B$ .
- (7) Pour tout entier  $n \geq 1$ , calculer la matrice de  $f^n$  dans la base  $B$ .
- (8) Pour tout entier  $n \geq 1$ , calculer l'endomorphisme  $f^n$  et sa matrice dans la base canonique.

BON ALORS, POUR LA LINÉARITÉ, JE FAIS COMME D'HABITUDE. JE PRENDS DEUX VECTEURS DANS L'ESPACE DE DÉPART.

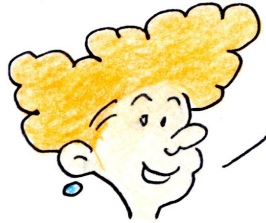


C'EST L'ESPACE  $\mathbb{R}^2$  DONC LES VECTEURS SONT DES COUPLES  $(x_1, y_1)$  ET  $(x_2, y_2)$ .

SOIENT  $v_1 = (x_1, y_1)$  ET  $v_2 = (x_2, y_2)$  DEUX ÉLÉMENTS DE  $\mathbb{R}^2$ .



J'É VAIS CALCULER  $f(v_1+v_2)$  MAIS D'ABORD  
J'É CALCULE  $v_1+v_2$ .



$$\begin{aligned}v_1+v_2 &= (x_1+x_2, y_1+y_2) \\f(v_1+v_2) &= f(x_1+x_2, y_1+y_2) \\&= (y_1+y_2, x_1+x_2+y_1+y_2) \\&= (y_1, x_1+y_1) + (y_2, x_2+y_2) \\&= f(v_1) + f(v_2)\end{aligned}$$

ENSUITE, J'É PERDS PAS LE RYTHME...

SOIENT  $v=(x, y)$  UN ÉLÉMENT  
DE  $\mathbb{R}^2$  ET  $\alpha$  UN RÉEL.

J'É CALCULE  $\alpha v$  PUIS  $f(\alpha v)$ .

$$\begin{aligned}\alpha v &= (\alpha x, \alpha y) \\f(\alpha v) &= f(\alpha x, \alpha y) \\&= (\alpha y, \alpha x + \alpha y) = \alpha (y, x+y) \\&= \alpha f(v)\end{aligned}$$



OK! L'APPLICATION  $f$   
EST LINÉAIRE.



MAINTENANT, IL FAUT CALCULER L'ENDOMORPHISME  $f^2$ .

C'EST-À-DIRE  $f \circ f$ .



ET  $f^3$ , C'EST  
 $f \circ f \circ f$ .

RAPPELONS-NOUS CE QUE C'EST  $f \circ f$ .  
SI  $v$  EST UN VECTEUR DE L'ESPACE  
DE DÉPART :

$$f^2(v) = (f \circ f)(v) = f(f(v)).$$



Soit  $v = (x, y)$  UN ÉLÉMENT DE  $\mathbb{R}^2$ .

$$\begin{aligned} f^2(v) &= f(f(v)) = f(y, x+y) \\ &= (x+y, y+x+y) = (x+y, x+2y) \end{aligned}$$

VOILÀ POUR  $f^2$ . MAINTENANT, JE FAIS  $f^3$ .



$$\begin{aligned} f^3(v) &= f(f^2(v)) \\ &= f(x+y, x+2y) \\ &= (x+2y, x+y+x+2y) \\ &= (x+2y, 2x+3y) \end{aligned}$$

ET PAREIL POUR  $f^4$ .



$$\begin{aligned} f^4(v) &= f(x+2y, 2x+3y) \\ &= (2x+3y, 3x+5y) \end{aligned}$$

ÉCRIRE LES MATRICES DANS LA BASE  
CANONIQUE, C'EST HYPER FACILE, IL  
SUFFIT DE LIRE LES COEFFICIENTS.  
PAR EXEMPLE, COMME ON SAIT QUE:  
 $f(x, y) = (y, x+y)$ , ON PEUT  
ÉCRIRE :

$$\text{Mat}_{\text{can}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$



$$f^2(x, y) = (x+y, x+2y), \text{ DONC :}$$

$$\text{Mat}_{\text{can}}(f^2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$f^3(x, y) = (x+2y, 2x+3y), \text{ DONC :}$$

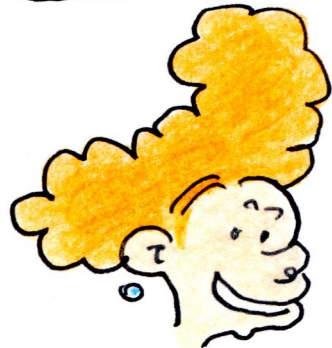
$$\text{Mat}_{\text{can}}(f^3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$f^4(x, y) = (2x+3y, 3x+5y), \text{ DONC :}$$

$$\text{Mat}_{\text{can}}(f^4) = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}.$$



QUAND ON A UNE FAMILLE DE DEUX  
VECTEURS, PAS BESOIN DE CALCULS  
POUR VOIR SI C'EST UNE BASE !



LES DEUX VECTEURS  $\left(1, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$   
ET  $\left(1, \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$  NE SONT PAS

COLINÉAIRES DONC ILS FORMENT  
UNE FAMILLE LIBRE. LE NOMBRE  
DE VECTEURS ÉTANT ÉGAL À  
LA DIMENSION DE L'ESPACE  $\mathbb{R}^2$ ,  
CETTE FAMILLE LIBRE EST  
UNE BASE.

COMMENÇONS PAR LA TAILLE. LA MATRICE DE  $f$  DANS LA BASE  $B$  EST CARRÉE DE TAILLE 2 PUISQUE  $f$  EST UN ENDOMORPHISME DE  $\mathbb{R}^2$ .

POSONS :

$$\text{Mat}_B(f) = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix}.$$

COMME ON NE CONNAÎT PAS LES COEFFICIENTS, JE LEUR AI DONNÉ DES NOMS :  $a_{1,1}$ ,  $a_{1,2}$ ,  $a_{2,1}$  ET  $a_{2,2}$ .



C'EST PLUS CONCRET.

J'AI AUSSI DONNÉ DES NOMS AUX  
DEUX VECTEURS DE LA BASE B.  
JE LES AI APPELÉS  $v_1$  ET  $v_2$ .



$$v_1 = \left( 1, \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)$$

$$v_2 = \left( 1, \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)$$

LES COEFFICIENTS DE LA MATRICE  
DE  $\mathcal{P}$  S'APPELAIENT LES  $a_{i,j}$ .

COMMENT ON  
LES CALCULE,  
AU FAÏT ?

ÇA Y EST ! JE  
M'EN SOUVIENS,  
OUI !

ON DÉCOMPOSE  $\mathcal{P}(v_1)$  ET  
 $\mathcal{P}(v_2)$  DANS LA BASE  $B$ .

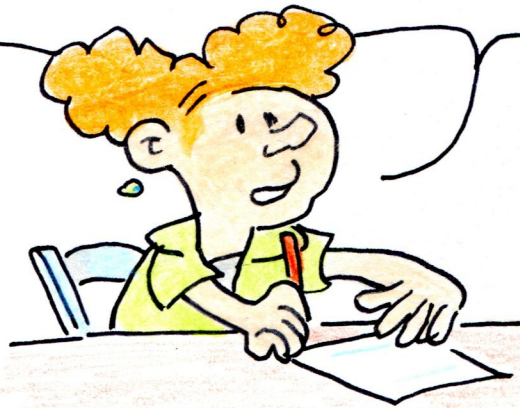


AUTREMENT DIT, ON ÉCRIT :

$$f(v_1) = a_{1,1}v_1 + a_{2,1}v_2$$

$$f(v_2) = a_{1,2}v_1 + a_{2,2}v_2 .$$

DANS CES ÉQUATIONS, ON CONNAÎT DÉJÀ  $v_1$  ET  $v_2$ . CALCULONS AUSSI  $f(v_1)$  ET  $f(v_2)$ .



ON SE RAPPELLE QUE :

$$f(x, y) = (y, x + y).$$

DONC :

$$f(v_1) = f\left(1, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$$

$$= \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}, 1 + \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$$

$$= \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)$$



ET, DE MÊME ...



$$f(v_2) = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)$$

LES DEUX ÉQUATIONS VECTORIELLES :

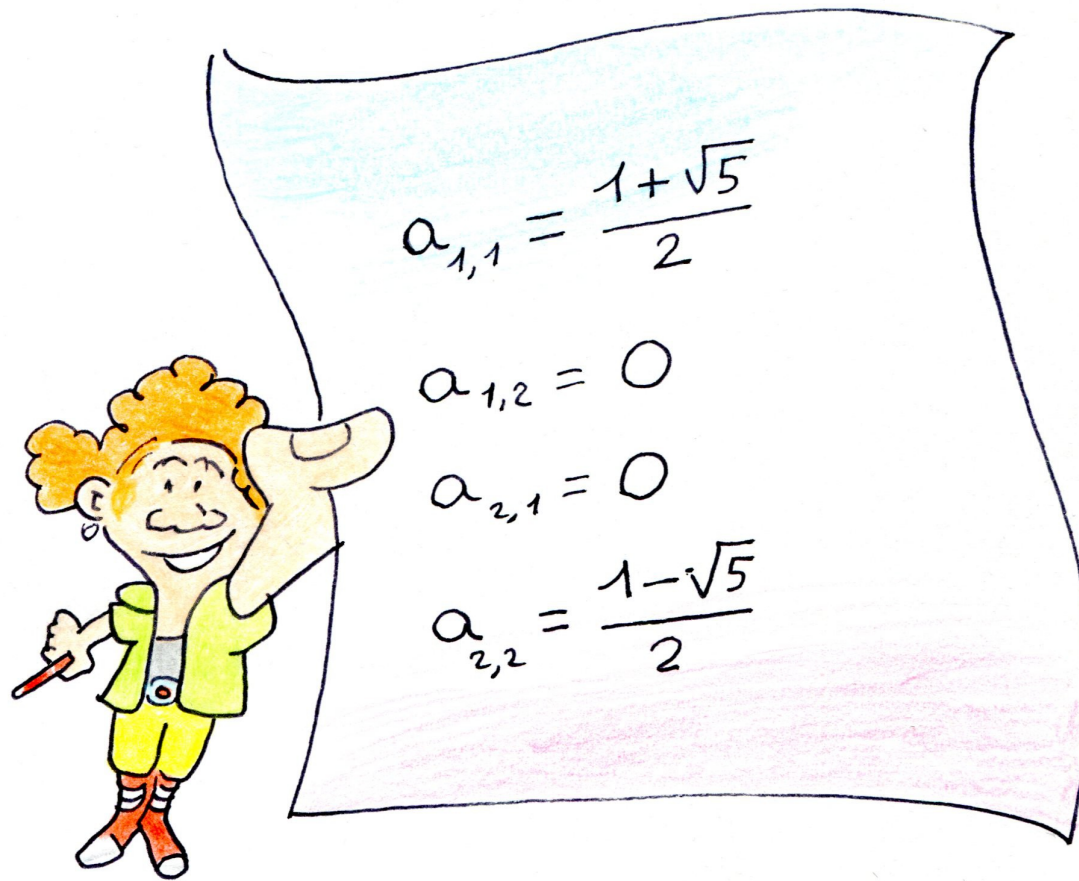
$$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right) = a_{1,1} \left(1, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + a_{2,1} \left(1, \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$$

$$\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right) = a_{1,2} \left(1, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + a_{2,2} \left(1, \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$$

ÉQUIVALENT À UN SYSTÈME DE QUATRE ÉQUATIONS NUMÉRIQUES :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1+\sqrt{5}}{2} = a_{1,1} + a_{2,1} \\ \frac{3+\sqrt{5}}{2} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} a_{1,1} + \frac{1-\sqrt{5}}{2} a_{2,1} \\ \frac{1-\sqrt{5}}{2} = a_{1,2} + a_{2,2} \\ \frac{3-\sqrt{5}}{2} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} a_{1,2} + \frac{1-\sqrt{5}}{2} a_{2,2} \end{array} \right.$$

APRÈS PLEIN DE CALCULS, PROÉTALE  
A RÉUSSI À RÉSOUDRE LE SYSTÈME :



ET DONC :

$$\text{Mat}_{\mathbb{B}}(P) = \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}.$$



ON A TROUVÉ DEUX MATRICES  
DIFFÉRENTES POUR L'ENDOMORPHISME  $f$ .

$$\text{Mat}_{B_0}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$



$$\text{Mat}_B(f) = \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}$$

OUI, LA BASE CANONIQUE, J'AI  
DÉCIDÉ DE LA NOTER  $B_0$ , POUR  
CHANGER.



A PRIORI, LA MATRICE DE GAUCHE,  
ELLE A L'AIR D'ÊTRE PLUS SIMPLE.  
SES COEFFICIENTS SONT DES 0 ET  
DES 1. LA BASE CANONIQUE  $B_0$ ,  
C'EST LA BASE LA PLUS SIMPLE.  
ELLE EST FORMÉE DES VECTEURS  
 $e_1 = (1, 0)$  ET  $e_2 = (0, 1)$  ALORS  
QUE  $B$  EST FORMÉE DE  
 $v_1 = \left(1, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$  ET  $v_2 = \left(1, \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$ .



ET POURTANT, C'EST  
L'AUTRE QUI EST  
MIEUX CAR ELLE  
EST UNE MATRICE  
DIAGONALE !

UNE MATRICE DIAGONALE EST UNE  
MATRICE CARRÉE DONT TOUS LES  
COEFFICIENTS NON NULS SONT  
SITUÉS SUR LA DIAGONALE  
DESCENDANTE. PAR EXEMPLE, EN  
TAILLE 2, UNE MATRICE CARRÉE  
QUELCONQUE S'ÉCRIT :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

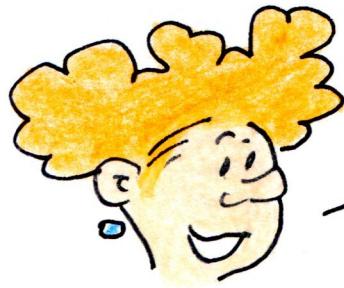
ET UNE MATRICE DIAGONALE  
S'ÉCRIT :

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}.$$



POURQUOI SONT-ELLES MIEUX  
QUE LES AUTRES, LES MATRICES  
DIAGONALES ?

BEN, ELLES SONT  
PLUS PRATIQUES  
POUR LE CALCUL  
DES PUISSANCES.





C'EST HYPER COMPLIQUÉ DE  
CALCULER LES PUISSANCES DE

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ . EN PARTICULIER,

LA MATRICE  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^m$

N'EST PAS ÉGALE À

$\begin{pmatrix} a^m & b^m \\ c^m & d^m \end{pmatrix}$  EN GÉNÉRAL.



MAIS LES PUISSANCES

DE  $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$  C'EST

FACILE. ÇA FAIT:

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}^m = \begin{pmatrix} a^m & 0 \\ 0 & d^m \end{pmatrix}.$$



DONC JE PEUX  
ÉCRIRE CECI.

$$\text{Mat}_B(f^m) = \left( \text{Mat}_B(f) \right)^m$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}^m$$

$$= \begin{pmatrix} \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^m & 0 \\ 0 & \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^m \end{pmatrix}$$

POUR CALCULER  $\text{Mat}_{B_0}(f^m)$ , C'EST PLUS COMPLIQUÉ CAR LA MATRICE  $\text{Mat}_{B_0}(f)$  N'EST PAS DIAGONALE.

ON VA UTILISER LA FORMULE DE CHANGEMENT DE BASE.



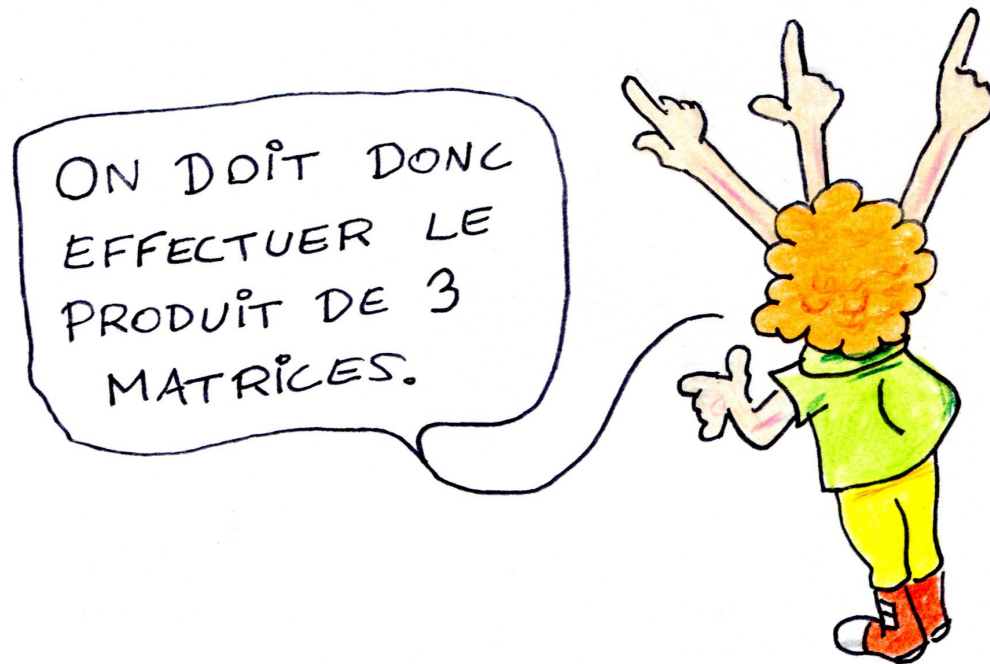
ET DONC ON VA DEVOIR SE RAPPELER CETTE FORMULE.



EH BIEN  
...

# FORMULE DE CHANGEMENT DE BASE (POUR L'ENDOMORPHISME $f^m$ ).

$$\text{Mat}_{B_0}(f^m) = P_{B_0, B} \text{Mat}_B(f^m) P_{B, B_0}$$





C'EST QUOI, LES MATRICES  $P_{B_0, B}$   
ET  $P_{B, B_0}$  ?

ON APPELLE ÇA LES MATRICES  
DE PASSAGE. IL Y EN A UNE  
DES DEUX QUI EST FACILE À  
CALCULER.



ON SE RAPPELLE QUE LA BASE  $B_0$   
EST FORMÉE DES DEUX VECTEURS

$$e_1 = (1, 0) \quad e_2 = (0, 1)$$

ET QUE LA BASE  $B$  EST  
FORMÉE DES DEUX VECTEURS

$$v_1 = \left( 1, \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right) \quad v_2 = \left( 1, \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right).$$

C'EST FACILE DE CALCULER  $v_1$   
ET  $v_2$  EN FONCTION DE  $e_1$  ET  $e_2$ .



$$v_1 = e_1 + \frac{1+\sqrt{5}}{2} e_2$$

$$v_2 = e_1 + \frac{1-\sqrt{5}}{2} e_2$$

TOUT DE SUITE, ON A L'UNE  
DES DEUX MATRICES DE  
PASSAGE.



$$P_{B_0, B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1+\sqrt{5}}{2} & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}$$

MAINTENANT, IL FAUT L'AUTRE

...

DANS L'AUTRE SENS, ON DOIT  
CALCULER  $e_1$  ET  $e_2$  EN FONCTION  
DE  $v_1$  ET  $v_2$  EN RÉSOUVANT LE  
SYSTÈME D'ÉQUATIONS VECTORIELLES  
SUIVANT :

$$\begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} v_1 = e_1 + \frac{1+\sqrt{5}}{2} e_2 \\ v_2 = e_1 + \frac{1-\sqrt{5}}{2} e_2 \end{array} \right.$$

D'INCONNUES  $e_1$  ET  $e_2$ .



UTILISONS  $L_1$  COMME PIVOT  
POUR ELIMINER  $e_1$  DANS L'AUTRE  
ÉQUATION.

$$\begin{array}{l} L_1 \\ L_2 := L_2 - L_1 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} v_1 = e_1 + \frac{1+\sqrt{5}}{2} e_2 \\ v_2 - v_1 \\ = \frac{1-\sqrt{5}}{2} e_2 - \frac{1+\sqrt{5}}{2} e_2 \\ = -\sqrt{5} e_2 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} e_2 = \frac{v_1 - v_2}{\sqrt{5}} \\ e_1 = v_1 - \frac{1+\sqrt{5}}{2} e_2 \\ = v_1 - \frac{(1+\sqrt{5})(v_1 - v_2)}{2\sqrt{5}} \end{array} \right.$$

$$e_1 = \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{5}} \right) v_1 + \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{5}} \right) v_2$$

$$e_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} v_1 - \frac{1}{\sqrt{5}} v_2$$

ON A LA SECONDE MATRICE  
DE PASSAGE.



$$P_{B, B_0} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

REVENONS À LA FORMULE DE CHANGEMENT  
DE BASE :

$$\text{Mat}_{B_0}(f^m) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1+\sqrt{5}}{2} & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} \text{Mat}_B(f^m) \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}.$$



ON VA QUAND MÊME PAS  
MULTIPLIER TOUT ÇA ? SI ?

Si !

$$\text{Mat}_B \left( \rho^m \right) = \begin{pmatrix} \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^m & 0 \\ 0 & \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^m \end{pmatrix}$$

$$= \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^m \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^m \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$



$$\text{Mat}_{B_0}(P^m)$$

$$= \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^m \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1+\sqrt{5}}{2} & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

$$+ \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^m \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1+\sqrt{5}}{2} & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

$$= \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^m \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1+\sqrt{5}}{2} & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$+ \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^m \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1+\sqrt{5}}{2} & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

$$= \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^m \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

$$+ \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^m \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

BILAN.

$$\text{Mat}_{B_0}(f^m) = \begin{pmatrix} a_m & b_m \\ c_m & d_m \end{pmatrix}$$

Si ON POSE :

$$a_m = \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{5}} \right) \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^m + \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{5}} \right) \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^m$$

$$b_m = \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^m - \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^m$$

$$c_m = \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^m - \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^m$$

$$d_m = \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{5}} \right) \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^m + \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{5}} \right) \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^m.$$

ET UNE FOIS QU'ON A LA MATRICE  
DE  $f^m$  DANS LA BASE CANONIQUE,  
ON EN DÉDUIT L'EXPRESSION DE  $f^m$ .

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

$$f^m(x, y) = (a_m x + b_m y, c_m x + d_m y)$$

AVEC LES MÊMES CONSTANTES  $a_m$ ,  
 $b_m$ ,  $c_m$  ET  $d_m$ .

