EXERCICE 3

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ défini par la formule

$$f(x,y) = (y, x+y),$$

valable pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

On rappelle que, si $n \geq 1$ est un entier, f^n désigne la composée $\underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{n \text{ copies}}$.

(1) Vérifier que f est linéaire.

(2) Calculer les endomorphismes f^2, f^3 et f^4.

(3) Déterminer la matrice de f dans la base canonique.

(4) Déterminer les matrices dans la base canonique des endomorphismes f^2, f^3 et f^4

(5) Notons B la famille formée des deux vecteurs

$$\left(1, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \text{ et } \left(1, \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right).$$

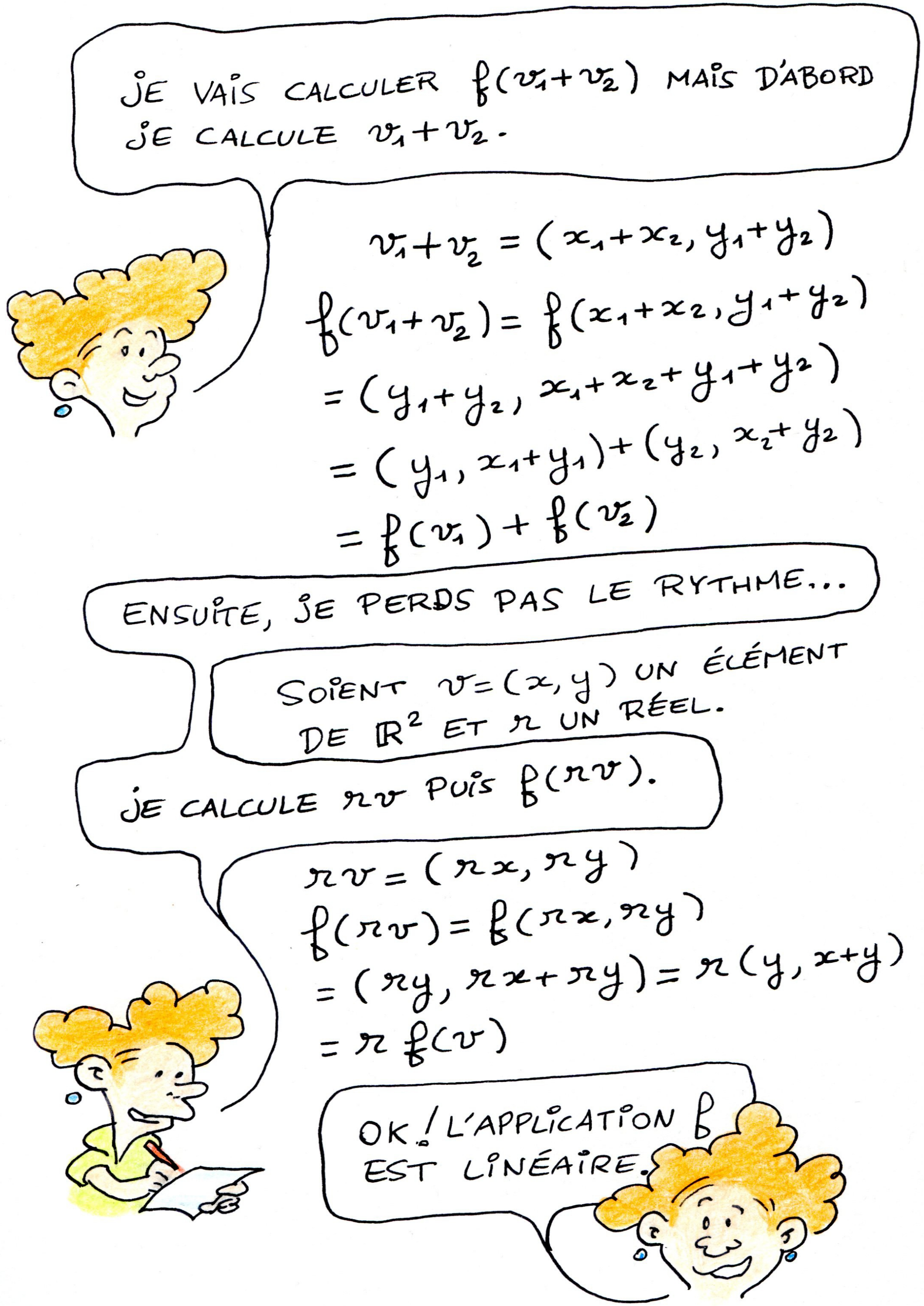
Vérifier que B est une base de $\mathbb{R}^2$.

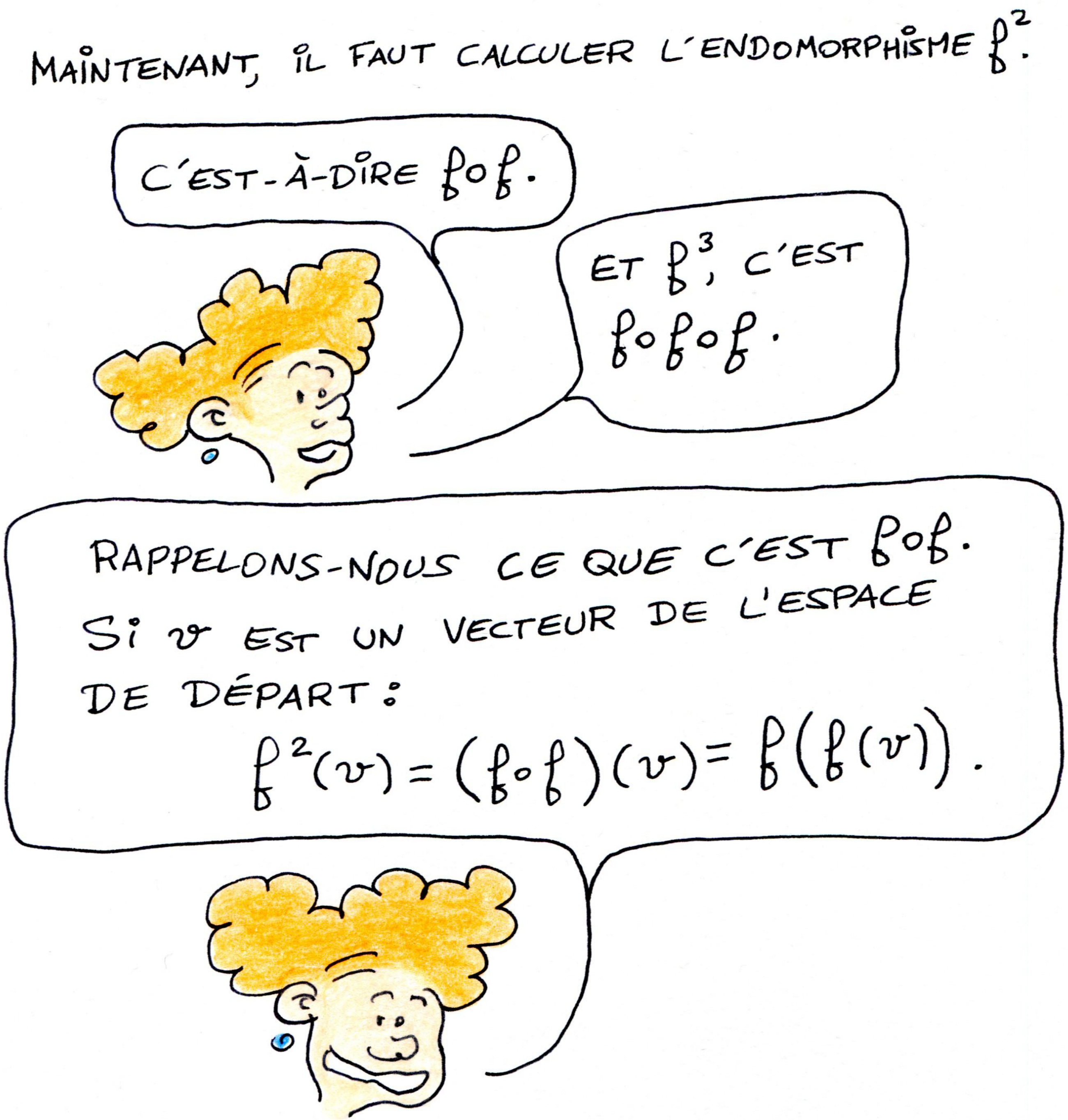
(6) Calculer la matrice de f dans la base B.

(7) Pour tout entier $n \geq 1$, calculer la matrice de f^n dans la base B.

(8) Pour tout entier $n \geq 1$, calculer l'endomorphisme f^n et sa matrice dans la base canonique.

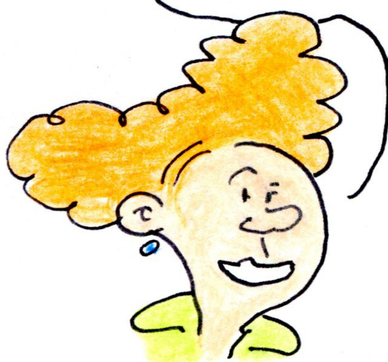
Soient $v_1 = (x_1, y_1)$ et $v_2 = (x_2, y_2)$ deux éléments de $\mathbb{R}^2$.


JE VAIS CALCULER $f(v_1+v_2)$ MAIS D'ABORD JE CALCULE v_1+v_2.
$v_1+v_2=(x_1+x_2,y_1+y_2)$
$f(v_1+v_2)=f(x_1+x_2,y_1+y_2)$
$=(y_1+y_2,x_1+x_2+y_1+y_2)$
$=(y_1,x_1+y_1)+(y_2,x_2+y_2)$
$=f(v_1)+f(v_2)$
ENSUITE, JE PERDS PAS LE RYTHME...
SOIENT $v=(x,y)$ UN ÉLÉMENT DE $\mathbb{R}^2$ ET r UN RÉEL.
JE CALCULE rv PUIS $f(rv)$.
$rv=(rx,ry)$
$f(rv)=f(rx,ry)$
$=(ry,rx+ry)=r(y,x+y)$
$=rf(v)$
OK ! L'APPLICATION f EST LINÉAIRE.

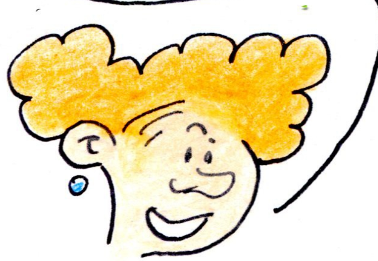

MAINTENANT, IL FAUT CALCULER L'ENDOMORPHISME f^2.
C'EST-À-DIRE $f \circ f$.
ET f^3, C'EST $f \circ f \circ f$.
RAPPELONS-NOUS CE QUE C'EST $f \circ f$. SI v EST UN VECTEUR DE L'ESPACE DE DÉPART : $f^2(v) = (f \circ f)(v) = f(f(v))$.

Soit $v = (x, y)$ un élément de $\mathbb{R}^2$.

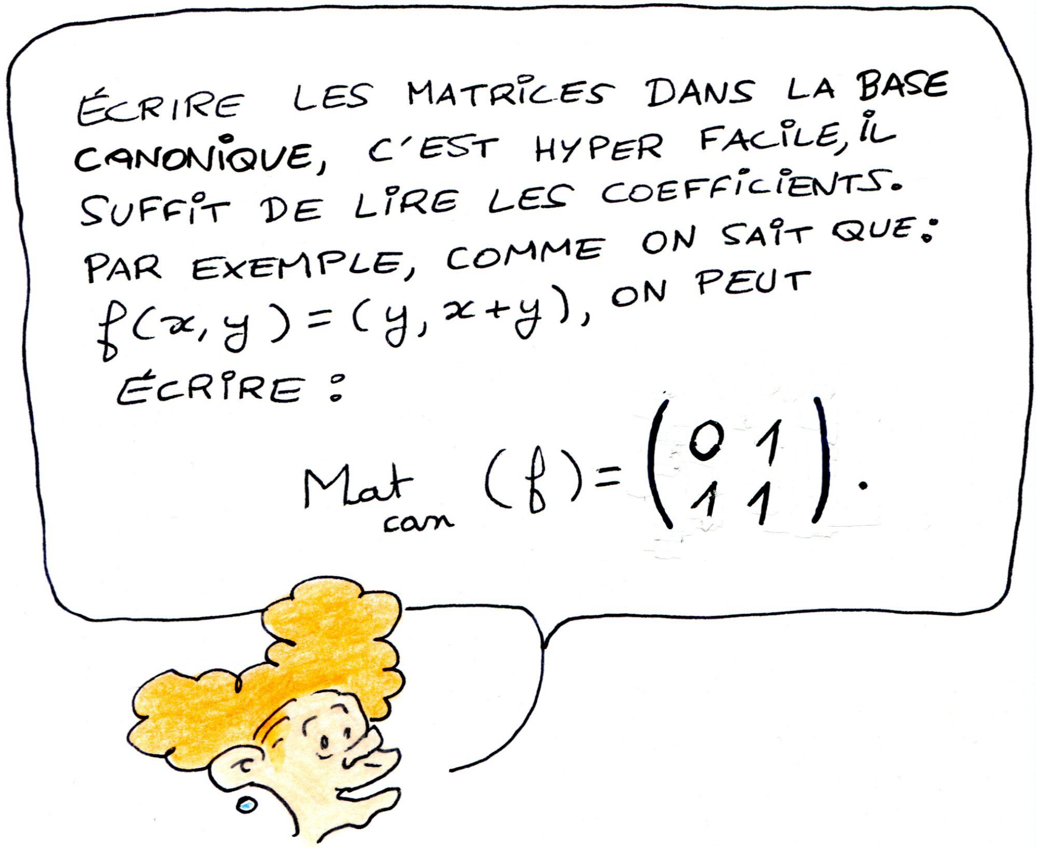
$$f^2(v) = f(f(v)) = f(y, x+y)$$
$$= (x+y, y+x+y) = (x+y, x+2y)$$



$$f^3(v) = f(f^2(v))$$
$$= f(x+y, x+2y)$$
$$= (x+2y, x+y+x+2y)$$
$$= (x+2y, 2x+3y)$$



$$f^4(v) = f(x+2y, 2x+3y)$$
$$= (2x+3y, 3x+5y)$$



$f^2(x,y)=(x+y,\ x+2y)$, DONC :

$$\underset{can}{\mathrm{Mat}}(f^2)=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}.$$

$f^3(x,y)=(x+2y,\ 2x+3y)$, DONC :

$$\underset{can}{\mathrm{Mat}}(f^3)=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 3\end{pmatrix}.$$

$f^4(x,y)=(2x+3y,\ 3x+5y)$, DONC :

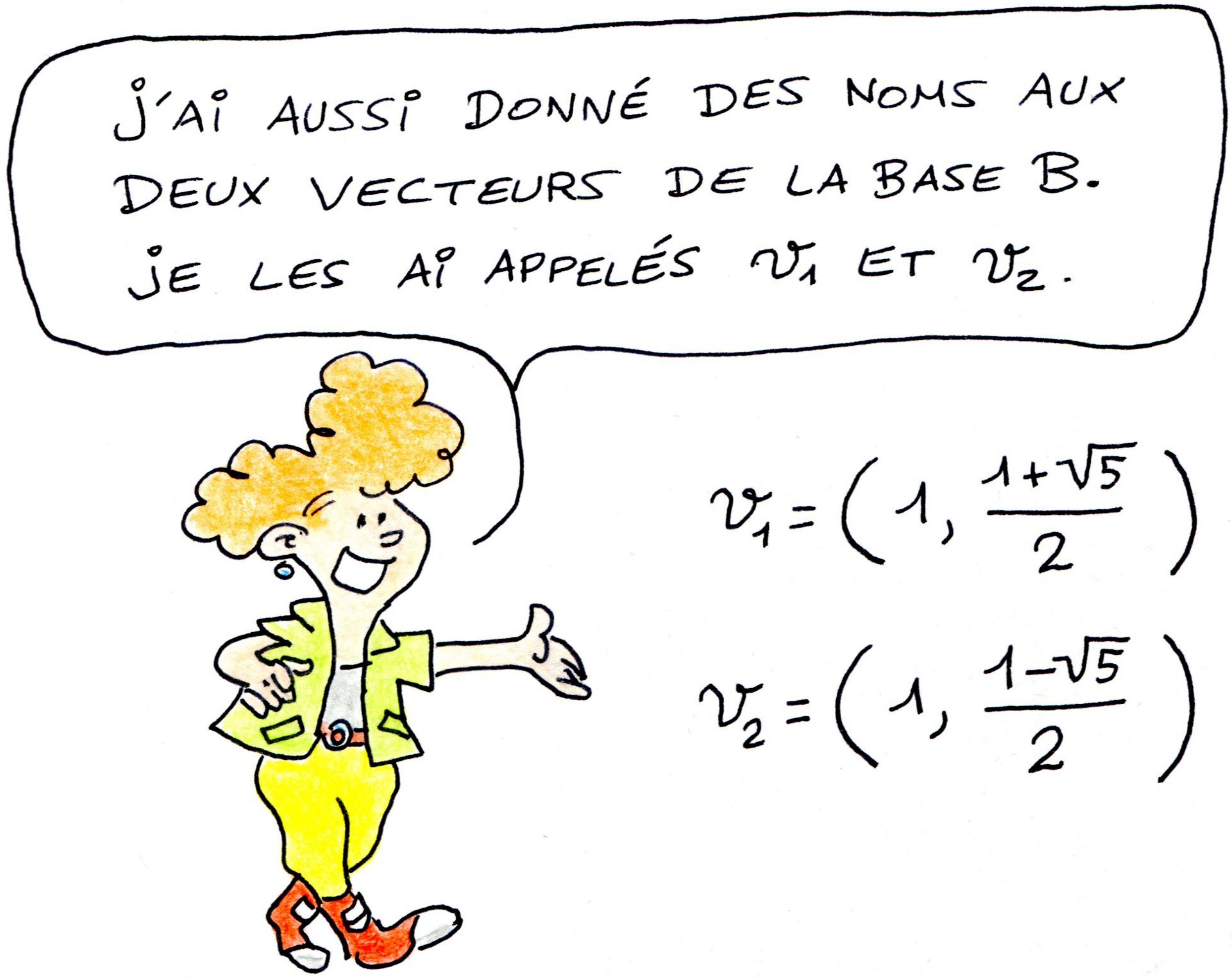
$$\underset{can}{\mathrm{Mat}}(f^4)=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 3 & 5\end{pmatrix}.$$

LES DEUX VECTEURS $\left(1, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$ ET $\left(1, \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$ NE SONT PAS COLINÉAIRES DONC ILS FORMENT UNE FAMILLE LIBRE. LE NOMBRE DE VECTEURS ÉTANT ÉGAL À LA DIMENSION DE L'ESPACE $\mathbb{R}^2$, CETTE FAMILLE LIBRE EST UNE BASE.

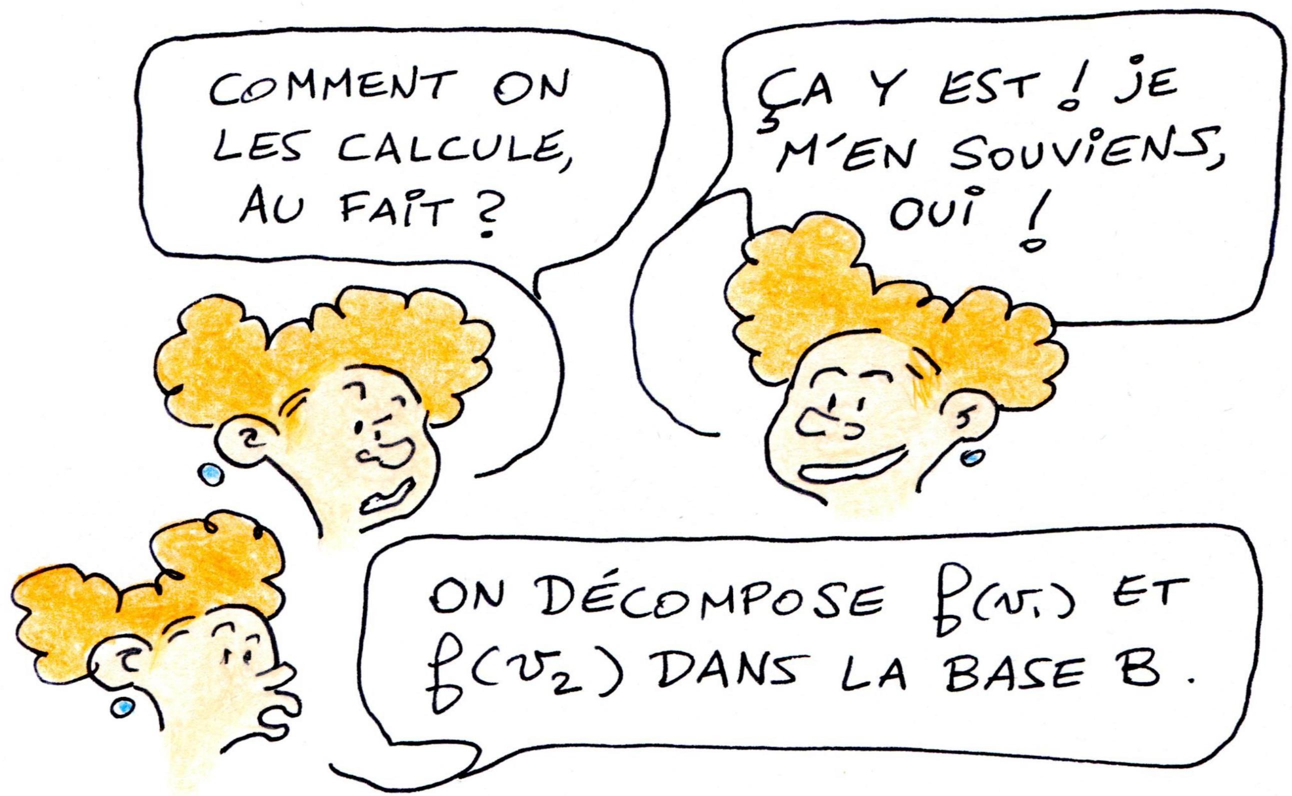
COMMENÇONS PAR LA TAILLE. LA MATRICE DE f DANS LA BASE $\mathcal{B}$ EST CARRÉE DE TAILLE 2 PUISQUE f EST UN ENDOMORPHISME DE $\mathbb{R}^2$.

POSONS :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix}.$$


J'AI AUSSI DONNÉ DES NOMS AUX DEUX VECTEURS DE LA BASE B. JE LES AI APPELÉS v_1 ET v_2.
$v_1 = \left(1, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$
$v_2 = \left(1, \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$

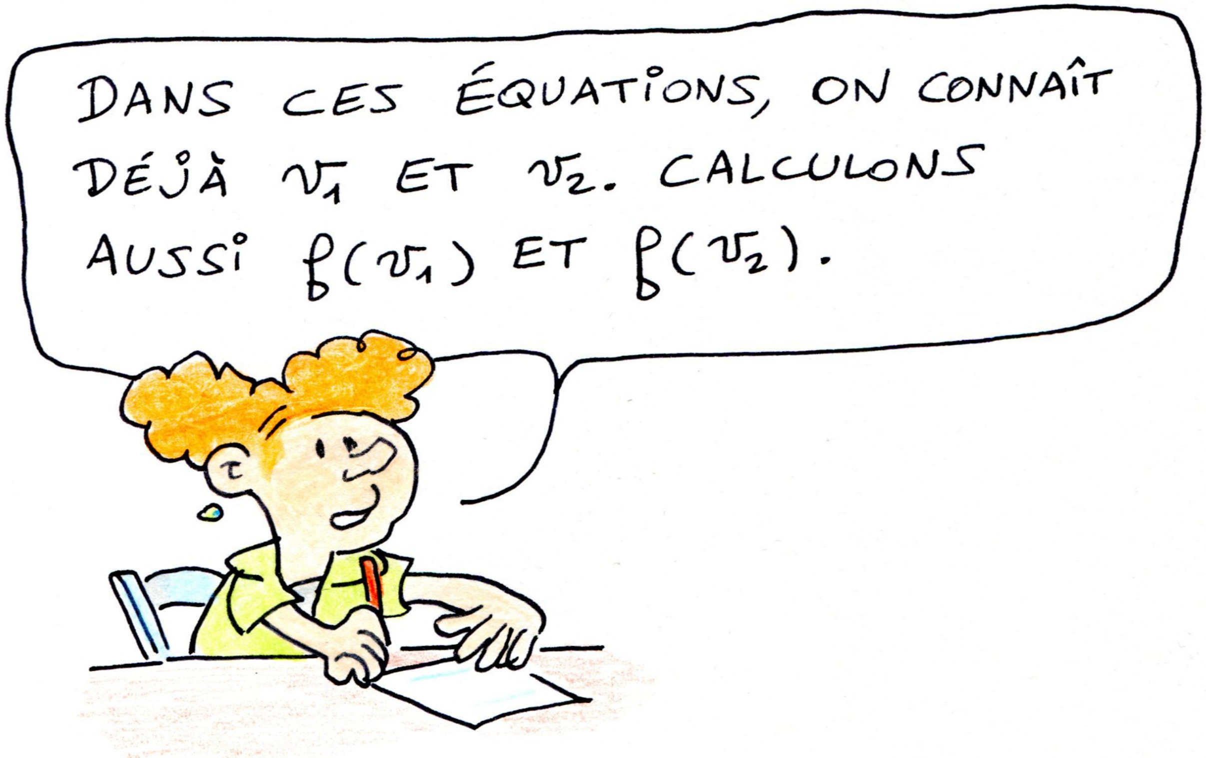
LES COEFFICIENTS DE LA MATRICE DE f S'APPELAIENT LES $a_{i,j}$.



AUTREMENT DIT, ON ÉCRIT :

$$f(v_1) = a_{1,1}\, v_1 + a_{2,1}\, v_2$$

$$f(v_2) = a_{1,2}\, v_1 + a_{2,2}\, v_2 .$$



ON SE RAPPELLE QUE :

$$f(x,y)=(y\,,\ x+y).$$

DONC:

$$f(v_1)=f\left(1,\ \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$$

$$=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2},\ 1+\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$$

$$=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2},\ \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)$$

ET, DE MÊME ...

$$f(v_2)=\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2},\ \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)$$

LES DEUX ÉQUATIONS VECTORIELLES :

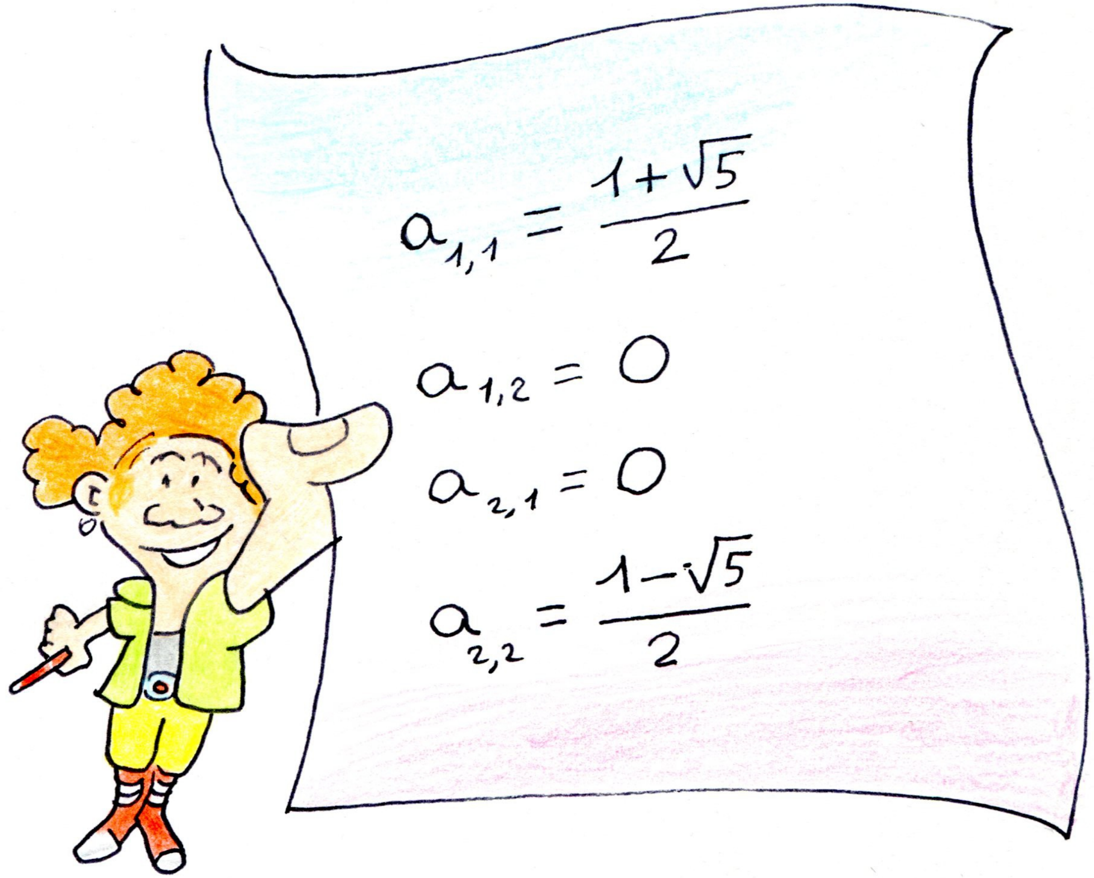
$$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right) = a_{1,1}\left(1, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + a_{2,1}\left(1, \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$$

$$\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right) = a_{1,2}\left(1, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + a_{2,2}\left(1, \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$$

ÉQUIVALENT À UN SYSTÈME DE QUATRE ÉQUATIONS NUMÉRIQUES :

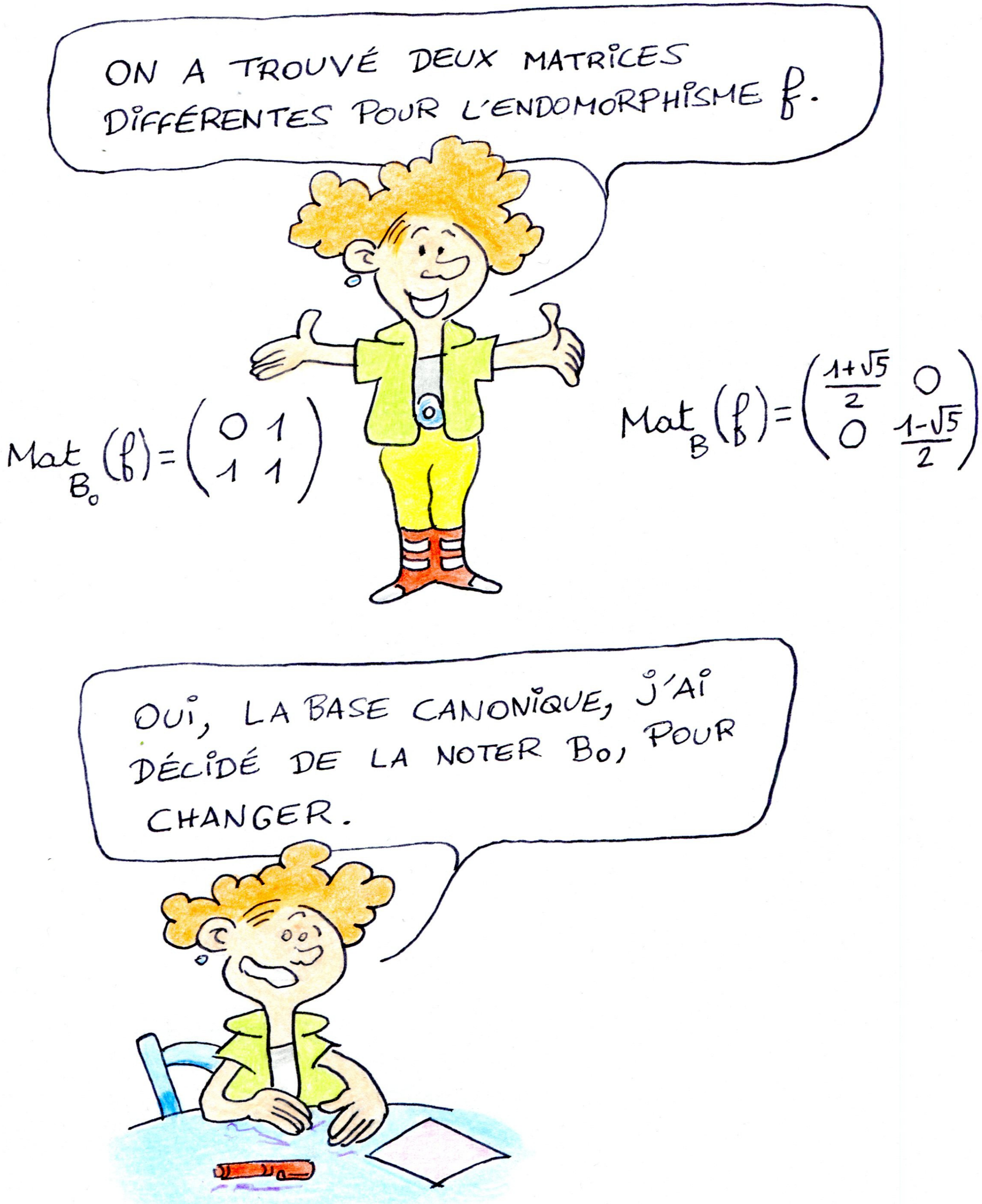
$$\begin{cases} \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} = a_{1,1} + a_{2,1} \\[2ex] \dfrac{3+\sqrt{5}}{2} = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\, a_{1,1} + \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\, a_{2,1} \\[2ex] \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} = a_{1,2} + a_{2,2} \\[2ex] \dfrac{3-\sqrt{5}}{2} = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\, a_{1,2} + \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\, a_{2,2} \, . \end{cases}$$

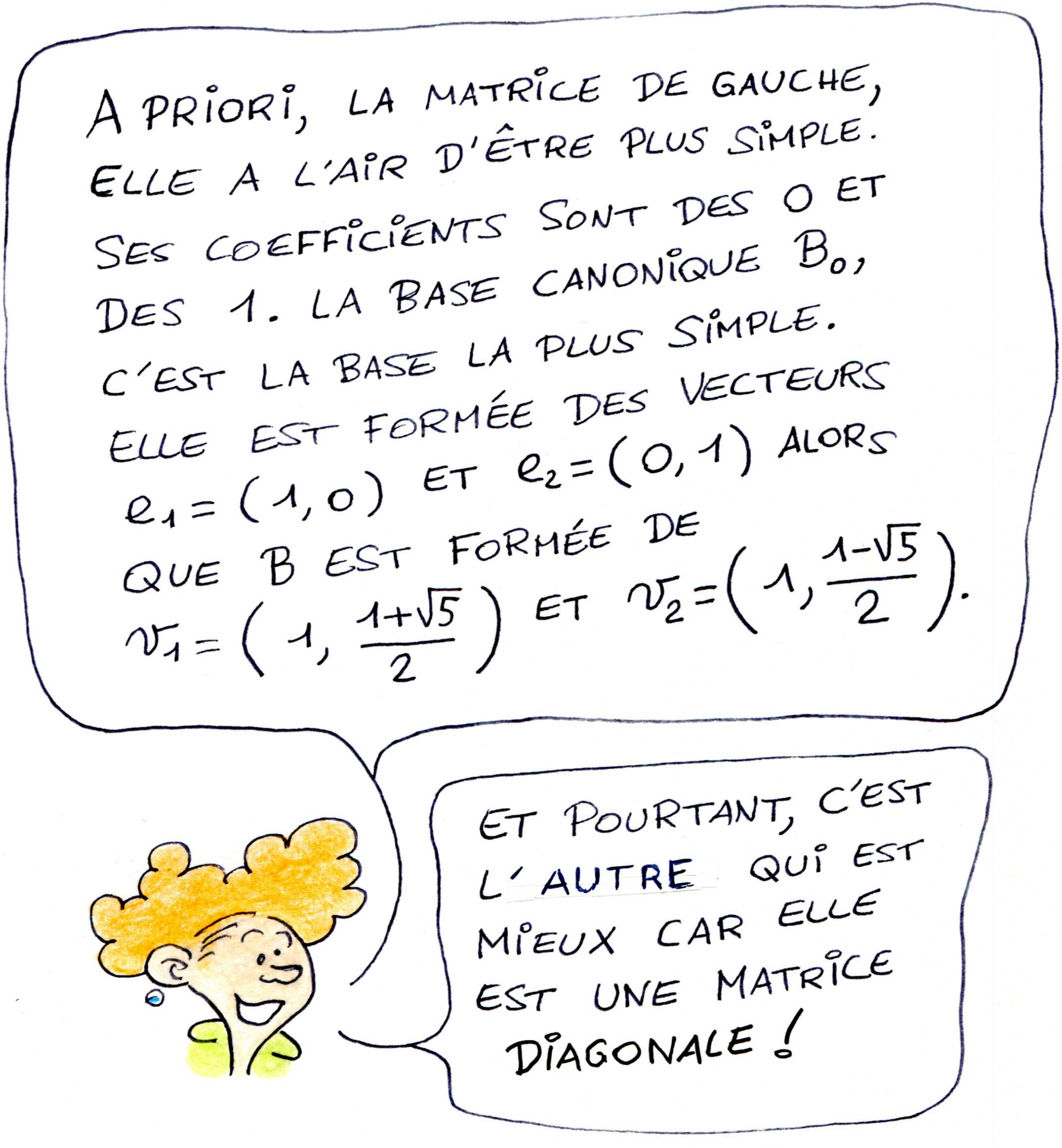
APRÈS PLEIN DE CALCULS, PROÉTALE A RÉUSSI À RÉSOUDRE LE SYSTÈME :



ET DONC :

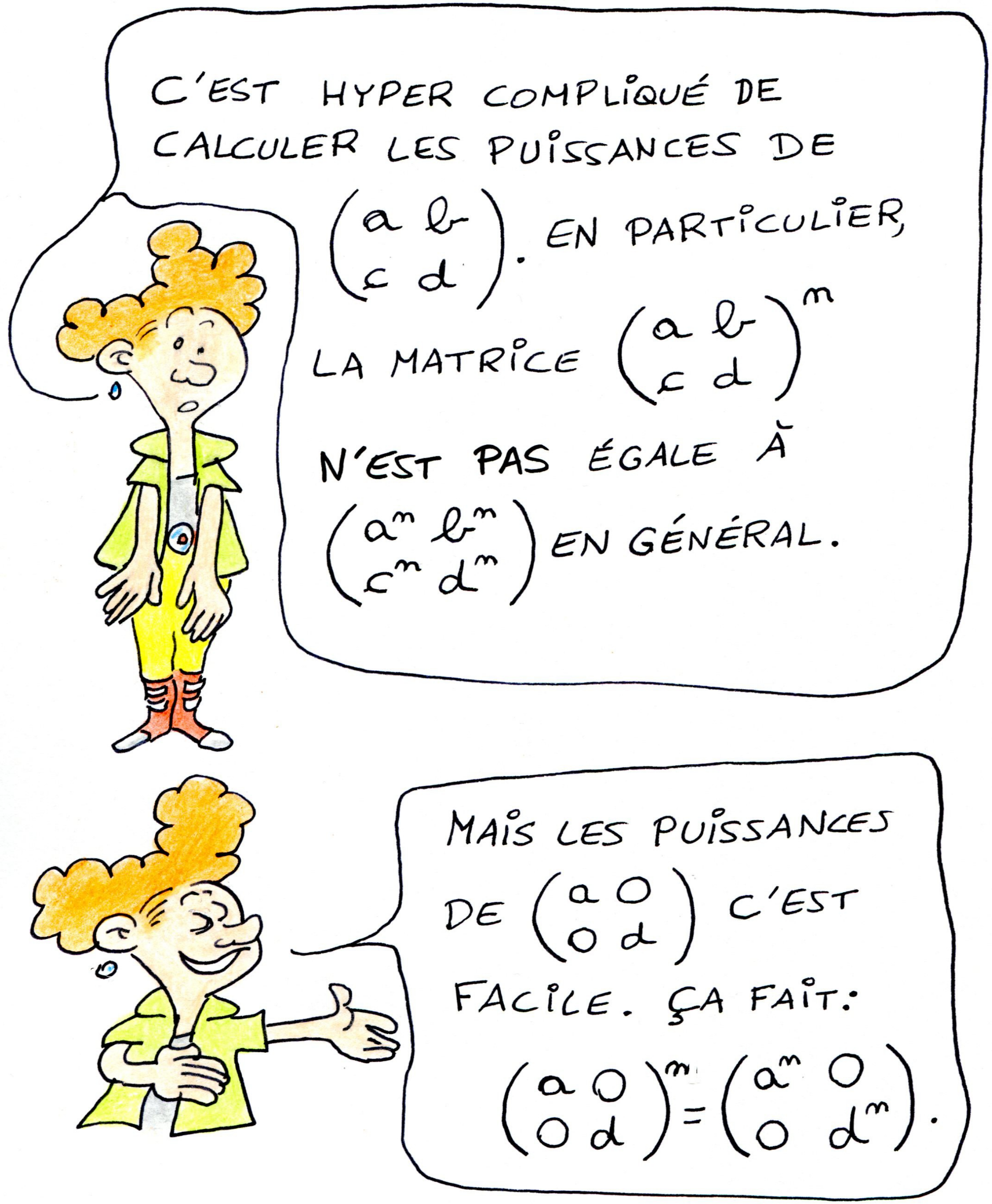
$$\mathrm{Mat}_B(f) = \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}.$$

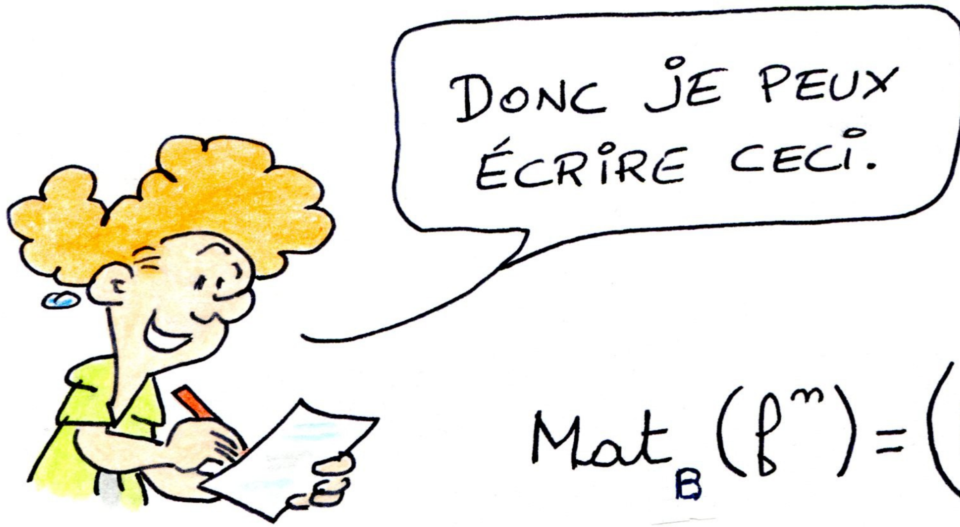

ON A TROUVÉ DEUX MATRICES DIFFÉRENTES POUR L'ENDOMORPHISME f.
$\mathrm{Mat}_{B_0}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
$\mathrm{Mat}_{B}(f) = \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}$
OUI, LA BASE CANONIQUE, J'AI DÉCIDÉ DE LA NOTER B_0, POUR CHANGER.


A PRIORI, LA MATRICE DE GAUCHE, ELLE A L'AIR D'ÊTRE PLUS SIMPLE. SES COEFFICIENTS SONT DES 0 ET DES 1. LA BASE CANONIQUE B_0, C'EST LA BASE LA PLUS SIMPLE. ELLE EST FORMÉE DES VECTEURS $e_1 = (1, 0)$ ET $e_2 = (0, 1)$ ALORS QUE B EST FORMÉE DE $v_1 = \left(1, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$ ET $v_2 = \left(1, \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$.
ET POURTANT, C'EST L'AUTRE QUI EST MIEUX CAR ELLE EST UNE MATRICE DIAGONALE !

Une **matrice diagonale** est une matrice carrée dont tous les coefficients non nuls sont situés sur la diagonale descendante. Par exemple, en taille 2, une matrice carrée quelconque s'écrit :
$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$
et une matrice diagonale s'écrit :
$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}.$$

POURQUOI SONT-ELLES MIEUX QUE LES AUTRES, LES MATRICES DIAGONALES ?


C'EST HYPER COMPLIQUÉ DE CALCULER LES PUISSANCES DE $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. EN PARTICULIER, LA MATRICE $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^n$ N'EST PAS ÉGALE À $\begin{pmatrix} a^n & b^n \\ c^n & d^n \end{pmatrix}$ EN GÉNÉRAL.
MAIS LES PUISSANCES DE $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$ C'EST FACILE. ÇA FAIT: $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} a^n & 0 \\ 0 & d^n \end{pmatrix}$.

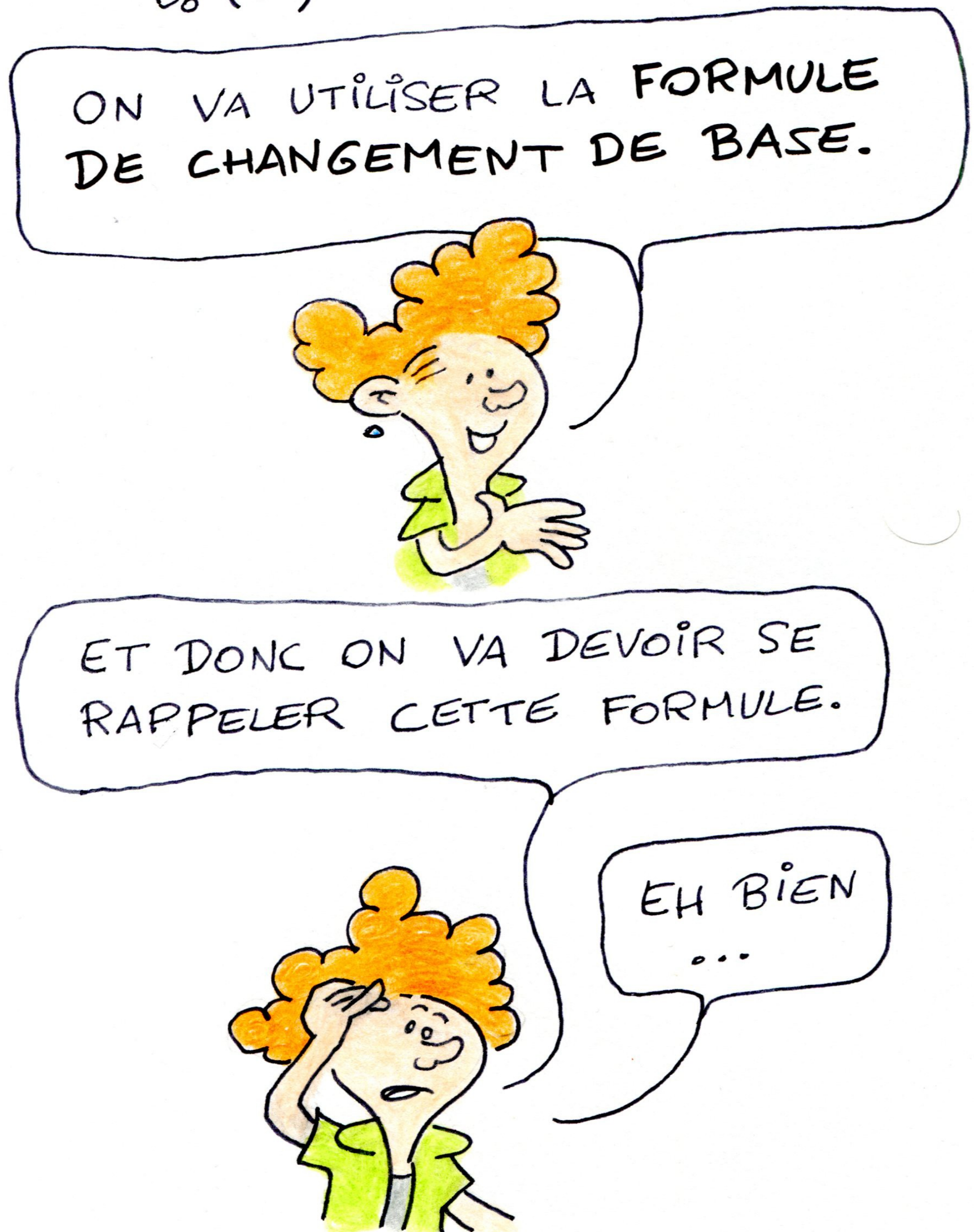


$$\mathrm{Mat}_B(f^n) = \left(\mathrm{Mat}_B(f)\right)^n$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}^n$$

$$= \begin{pmatrix} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n & 0 \\ 0 & \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \end{pmatrix}$$

POUR CALCULER $\mathrm{Mat}_{B_0}(f^n)$, C'EST PLUS COMPLIQUÉ CAR LA MATRICE $\mathrm{Mat}_{B_0}(f)$ N'EST PAS DIAGONALE.



FORMULE DE CHANGEMENT DE BASE (POUR L'ENDOMORPHISME f^n).

$$\mathrm{Mat}_{B_0}(f^n) = P_{B_0,B}\,\mathrm{Mat}_B(f^n)\,P_{B,B_0}$$

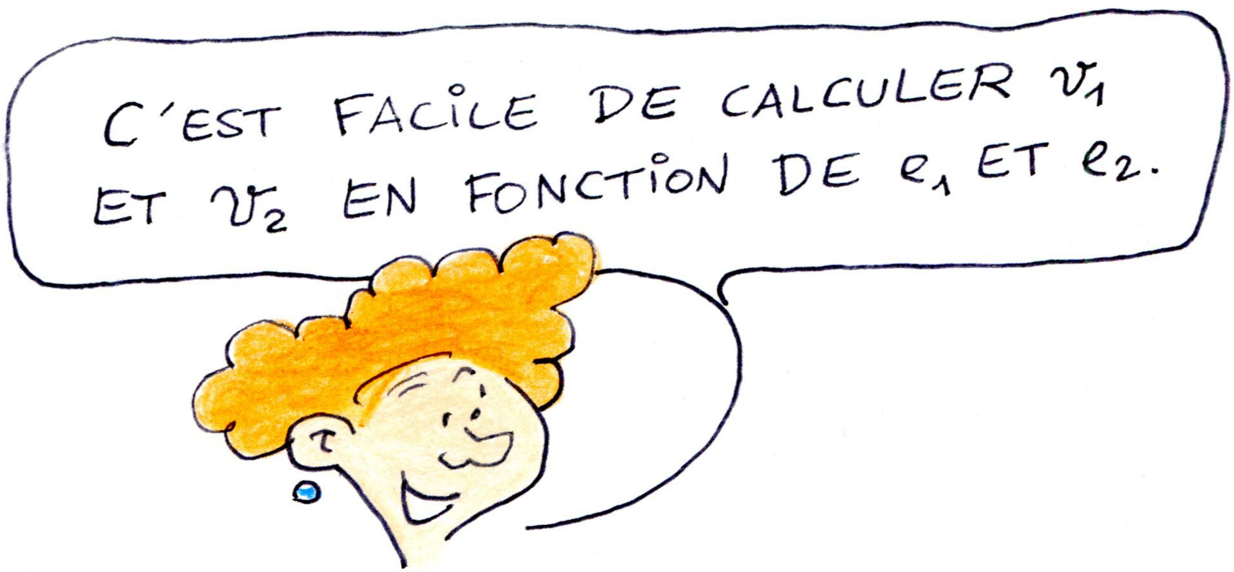

C'EST QUOI, LES MATRICES $P_{B_0,B}$ ET P_{B,B_0} ?
ON APPELLE ÇA LES **MATRICES DE PASSAGE**. IL Y EN A UNE DES DEUX QUI EST FACILE À CALCULER.

ON SE RAPPELLE QUE LA BASE B_0
EST FORMÉE DES DEUX VECTEURS

$$e_1 = (1, 0) \qquad e_2 = (0, 1)$$

ET QUE LA BASE B EST
FORMÉE DES DEUX VECTEURS

$$v_1 = \left(1, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \quad v_2 = \left(1, \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right).$$



$$v_1 = e_1 + \frac{1+\sqrt{5}}{2}\, e_2$$

$$v_2 = e_1 + \frac{1-\sqrt{5}}{2}\, e_2$$

$$P_{B_0,B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1+\sqrt{5}}{2} & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}$$

MAINTENANT, IL FAUT L'AUTRE

...

DANS L'AUTRE SENS, ON DOIT CALCULER e_1 ET e_2 EN FONCTION DE v_1 ET v_2 EN RÉSOLVANT LE SYSTÈME D'ÉQUATIONS VECTORIELLES SUIVANT :

$$\begin{array}{l} L_1 \\ \\ L_2 \end{array} \quad \left\{ \begin{array}{l} v_1 = e_1 + \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} e_2 \\ \\ v_2 = e_1 + \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} e_2 \end{array} \right.$$

D'INCONNUES e_1 ET e_2.

UTILISONS L_1 COMME PIVOT POUR ELIMINER e_1 DANS L'AUTRE ÉQUATION.

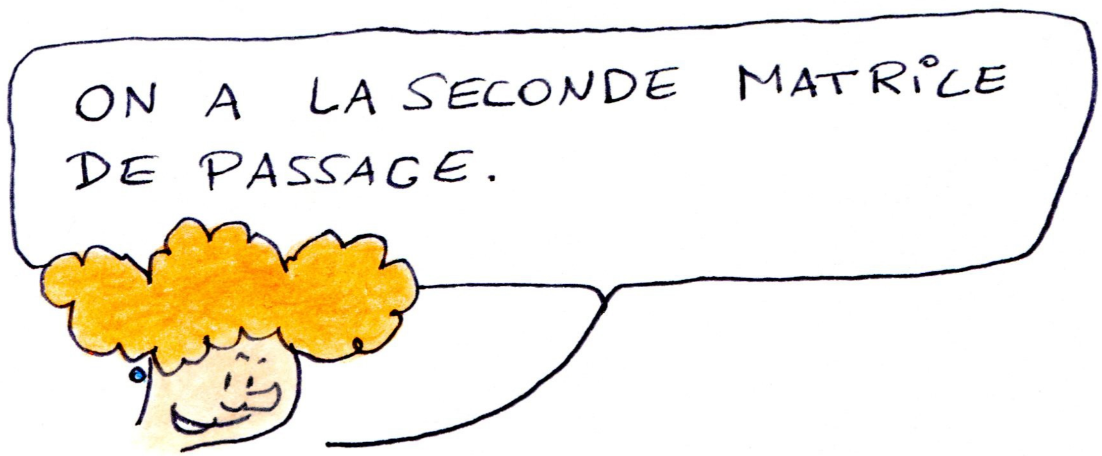
$$\begin{array}{l} L_1 \\ L_2 := L_2 - L_1 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} v_1 = e_1 + \frac{1+\sqrt{5}}{2} e_2 \\ v_2 - v_1 \\ = \frac{1-\sqrt{5}}{2} e_2 - \frac{1+\sqrt{5}}{2} e_2 \\ = -\sqrt{5}\, e_2 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} e_2 = \dfrac{v_1 - v_2}{\sqrt{5}} \\ e_1 = v_1 - \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} e_2 \end{array} \right.$$

$$= v_1 - \frac{(1+\sqrt{5})(v_1 - v_2)}{2\sqrt{5}}$$

$$e_1 = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{5}}\right) v_1 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{5}}\right) v_2$$

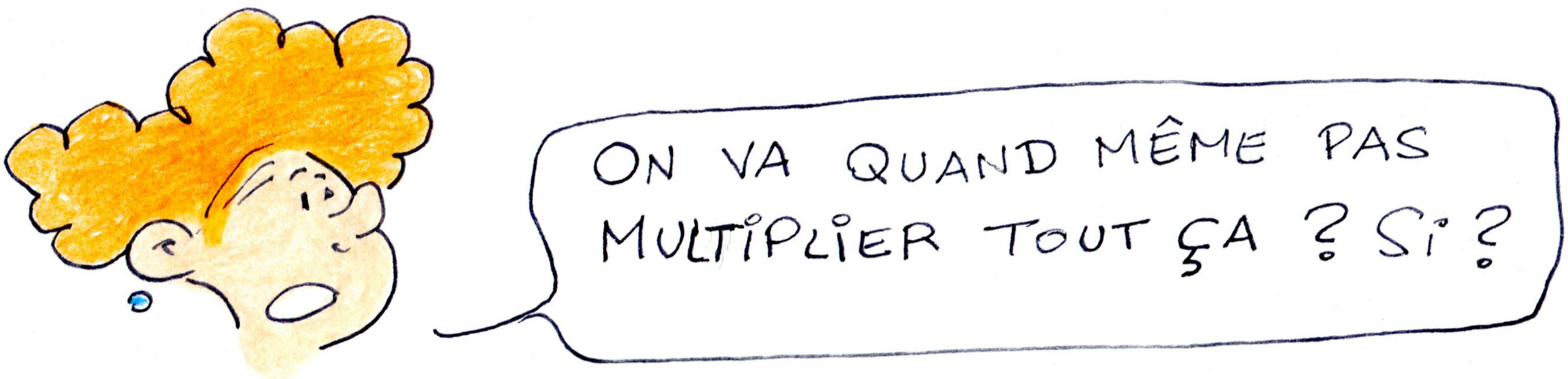
$$e_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}\, v_1 - \frac{1}{\sqrt{5}}\, v_2$$



$$P_{B,B_0} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

REVENONS À LA FORMULE DE CHANGEMENT DE BASE :

$$\mathrm{Mat}_{B_0}(f^n) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1+\sqrt{5}}{2} & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} \mathrm{Mat}_{B}(f^n) \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}.$$



Si !

$$\underset{B}{\mathrm{Mat}}(f^n) = \begin{pmatrix} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n & 0 \\ 0 & \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \end{pmatrix}$$

$$= \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\underset{B_0}{\mathrm{Mat}}(f^n)$$

$$= \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1+\sqrt{5}}{2} & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}-\frac{1}{2\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{2}+\frac{1}{2\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

$$+ \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1+\sqrt{5}}{2} & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}-\frac{1}{2\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{2}+\frac{1}{2\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

$$= \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1+\sqrt{5}}{2} & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$+ \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1+\sqrt{5}}{2} & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

$$= \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

$$+ \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

BILAN.

$$\underset{B_0}{\mathrm{Mat}}(f^n) = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}$$

SI ON POSE :

$$a_n = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{5}}\right)\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{5}}\right)\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

$$b_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

$$c_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

$$d_n = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{5}}\right)\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{5}}\right)\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

ET UNE FOIS QU'ON A LA MATRICE DE f^n DANS LA BASE CANONIQUE, ON EN DÉDUIT L'EXPRESSION DE f^n.

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

$$f^n(x,y) = (a_n x + b_n y,\ c_n x + d_n y)$$