

EXERCICE 4

Posons :

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ; x + y + z = 0\}$$

$$B = \{(x, x, x) ; x \in \mathbb{R}\}.$$

- (1) Vérifier que A et B sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.
- (2) Déterminer une base de A .
- (3) Déterminer une base de B .
- (4) Démontrer que A et B sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.

AU PREMIER SEMESTRE, IL FALLAIT
VÉRIFIER TOUS LES AXIOMES POUR
PROUVER QUE A (OU B) ÉTAIT
UN SOUS-ESPACE VECTORIEL. MAIS
ON A MAINTENANT UN NOUVEL
OUTIL : LES APPLICATIONS
LINÉAIRES.



LE NOYAU D'UNE APPLICATION
LINÉAIRE EST UN SOUS-ESPACE
VECTORIEL. SI ON A L'IDÉE
DE REGARDER L'APPLICATION
LINÉAIRE

$$f: \begin{cases} \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y, z) \mapsto x + y + z \end{cases}$$

ON VOIT QUE SON NOYAU

$$\ker(f) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; f(x, y, z) = 0\}$$

EST ÉGAL À A.

DONC A EST UN SOUS-
ESPACE VECTORIEL DE $\mathbb{R}^3$.

VOYONS B.



APRÈS LE NOYAU, L'IMAGE !



L'IMAGE D'UNE APPLICATION
LINÉAIRE EST UN SOUS-ESPACE
VECTORIEL. ICI, ON PEUT
REGARDER L'APPLICATION
LINÉAIRE

$$g: \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ x \mapsto (x, x, x). \end{cases}$$

ON VOIT QUE SON IMAGE

$$\text{im}(g) = \{ g(x), x \in \mathbb{R} \}$$

EST ÉGALE À B QUI EST DONC
UN SOUS-ESPACE VECTORIEL DE $\mathbb{R}^3$.

CHERCHONS DES BASES DE
CES SOUS-ESPACES VECTORIELS
A ET B.



L'ÉQUATION DE A ÉQUIVAUT $\tilde{A}$:

$$z = -x - y$$

$$A = \{ (x, y, -x-y); (x, y) \in \mathbb{R}^2 \}$$

$$= \{ x(1, 0, -1) + y(0, 1, -1); (x, y) \in \mathbb{R}^2 \}$$

ON VOIT QUE A EST ENGENDRÉ
PAR $(1, 0, -1)$ ET $(0, 1, -1)$. CES
DEUX VECTEURS NE SONT PAS
COLINÉAIRES DONC ILS FORMENT
UNE FAMILLE LIBRE. COMME
CETTE FAMILLE LIBRE
ENGENDRE A, ELLE EST UNE
BASE DE A.

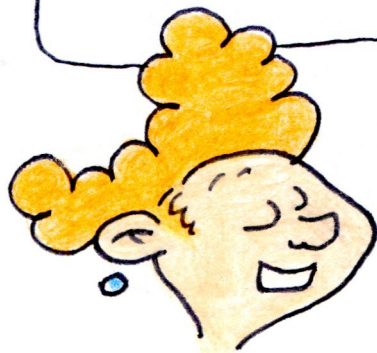
ET EN PARTICULIER, ON EN
DÉDUIT QUE $\dim(A) = 2$.



$$B = \{ (x, x, x) ; x \in \mathbb{R} \}$$
$$= \{ x(1, 1, 1) ; x \in \mathbb{R} \}$$

ON VOIT QUE B EST ENGENDRÉ
PAR $(1, 1, 1)$. COMME CE
VECTEUR N'EST PAS NUL, IL
FORME UNE FAMILLE LIBRE.
CETTE FAMILLE LIBRE ENGENDRE
 B DONC ELLE EST UNE BASE
DE B .

ET DONC $\dim(B) = 1$.

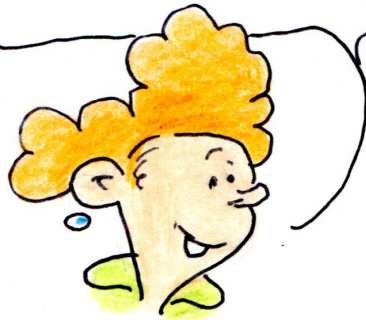


POUR PROUVER QUE A ET B
SONT SUPPLÉMENTAIRES
DANS $\mathbb{R}^3$, IL FAUT VÉRIFIER
DEUX CHOSES :

① QUE L'INTERSECTION $A \cap B$
NE CONTIENT PAS D'AUTRE VECTEUR
QUE LE VECTEUR NUL DE $\mathbb{R}^3$.

② QUE LA SOMME $A+B$
EST ÉGALE À $\mathbb{R}^3$ TOUT
ENTIER.

COMMENÇONS PAR
L'INTERSECTION.



SOIT $v = (x, y, z)$ UN ÉLÉMENT
DE $A \cap B$. COMME v APPARTIENT
À A , IL VÉRIFIE :

$$0 = x + y + z.$$

PAR AILLEURS, v APPARTIENT
À B ET IL EXISTE UN RÉEL λ
TEL QUE :

$$v = (\lambda, \lambda, \lambda).$$

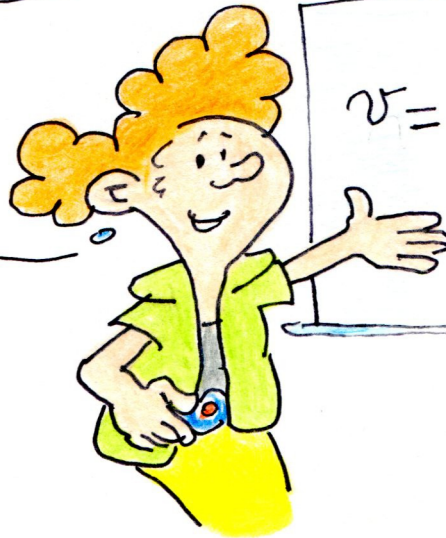
ON A DONC :

$$\begin{aligned} 0 &= \lambda + \lambda + \lambda \\ &= 3\lambda. \end{aligned}$$

ON CONCLUT QUE λ EST NUL
ET QUE v EST ÉGAL AU
VECTEUR NUL $(0, 0, 0)$ DE $\mathbb{R}^3$.

MAINTENANT, REGARDONS LA
SOMME $A+B$.

IL FAUT DÉMONTRER QUE
TOUT ÉLÉMENT v DE $\mathbb{R}^3$
EST LA SOMME D'UN
ÉLÉMENT v_1 DE A ET D'UN
ÉLÉMENT v_2 DE B .



$$v = v_1 + v_2 ?$$

Soit $v = (a, b, c)$ UN ÉLÉMENT
DE $\mathbb{R}^3$.

POUR CHANGER, ON NE L'APPELLE
PLUS (x, y, z) . ON L'APPELAÏT
 (x, y, z) QUAND IL ÉTAIT
L'INCONNUE. MAINTENANT, IL
EST LA DONNÉE ET ON
L'APPELLE (a, b, c) .



DIRE QU'UN ÉLÉMENT v_1 DE A ET
UN ÉLÉMENT v_2 DE B VÉRIFIENT:

$$v_1 + v_2 = v$$

REVIENT À DIRE TROIS CHOSES.

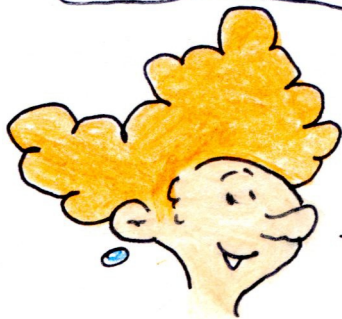
① v_1 EST UN TRIplet DE LA
FORME (x, y, z) AVEC:

$$x + y + z = 0.$$

② v_2 EST UN TRIplet DE LA
FORME (t, t, t) .

$$③ (x, y, z) + (t, t, t) = (a, b, c)$$

CELA REVIENT À DIRE QUE
LES 4 INCONNUES x, y, z, t
SONT SOLUTIONS DU SYSTÈME
SUIVANT.



$$\left\{ \begin{array}{l} x+t=a \\ y+t=b \\ z+t=c \\ x+y+z=0 \end{array} \right.$$

ON SAIT RÉSOUDRE CE
SYSTÈME.



$$\left\{ \begin{array}{l} x = \frac{2a - b - c}{3} \\ y = \frac{2b - a - c}{3} \\ z = \frac{2c - a - b}{3} \\ t = \frac{a + b + c}{3} \end{array} \right.$$

LE SYSTÈME ADMET UNE SOLUTION.
TOUT ÉLÉMENT v DE $\mathbb{R}^3$ EST
DONC LA SOMME D'UN ÉLÉMENT v_1
DE A ET D'UN ÉLÉMENT v_2 DE B .
AUTREMENT DIT, LA SOMME $A+B$
EST ÉGALE À $\mathbb{R}^3$ TOUT ENTIER.

BILAN: A ET B SONT SUPPLÉ-
MENTAIRES DANS $\mathbb{R}^3$ PUISQU'ON
A VÉRIFIÉ LES DEUX AXIOMES.



ÇA, C'EST
DU
BOULOT !