Episode 2 :

Les isométries d'un espace euclidien

APRÈS ÊTRE DEVENUS DES EXPERTS DE LA GÉOMETRIE AFFINE, PROÉTALE ET FILIPPO ONT DÉCIDÉ DE SE TOURNER VERS UN AUTRE SUJET : LES ISOMÉTRIES.

... DÈS QU'ILS AURONT
FINI LEUR LECTURE !

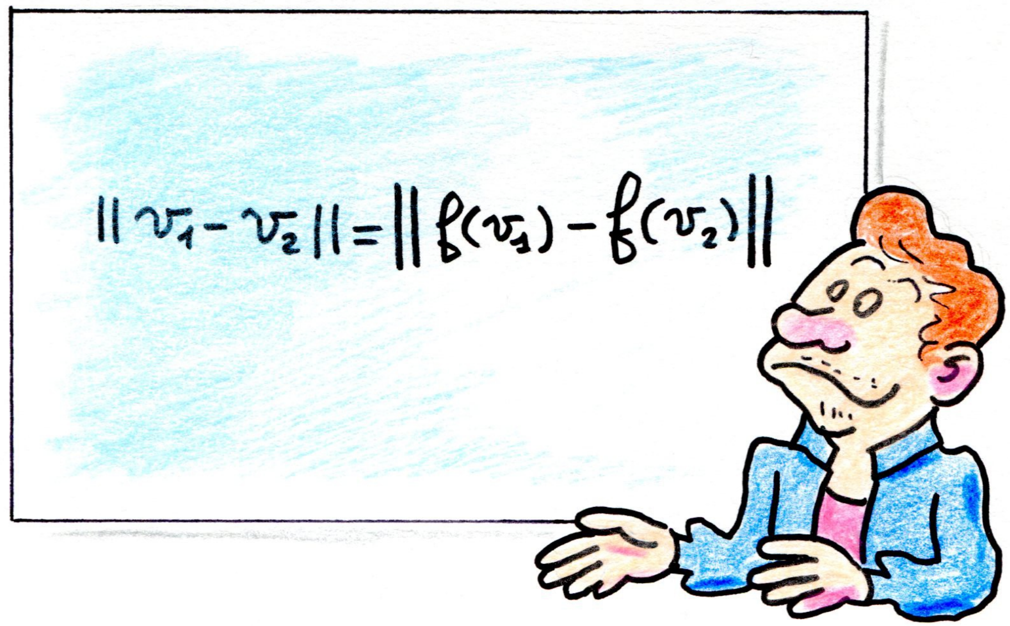

BON, ON S'Y MET !
VAS-Y. COMMENCE.

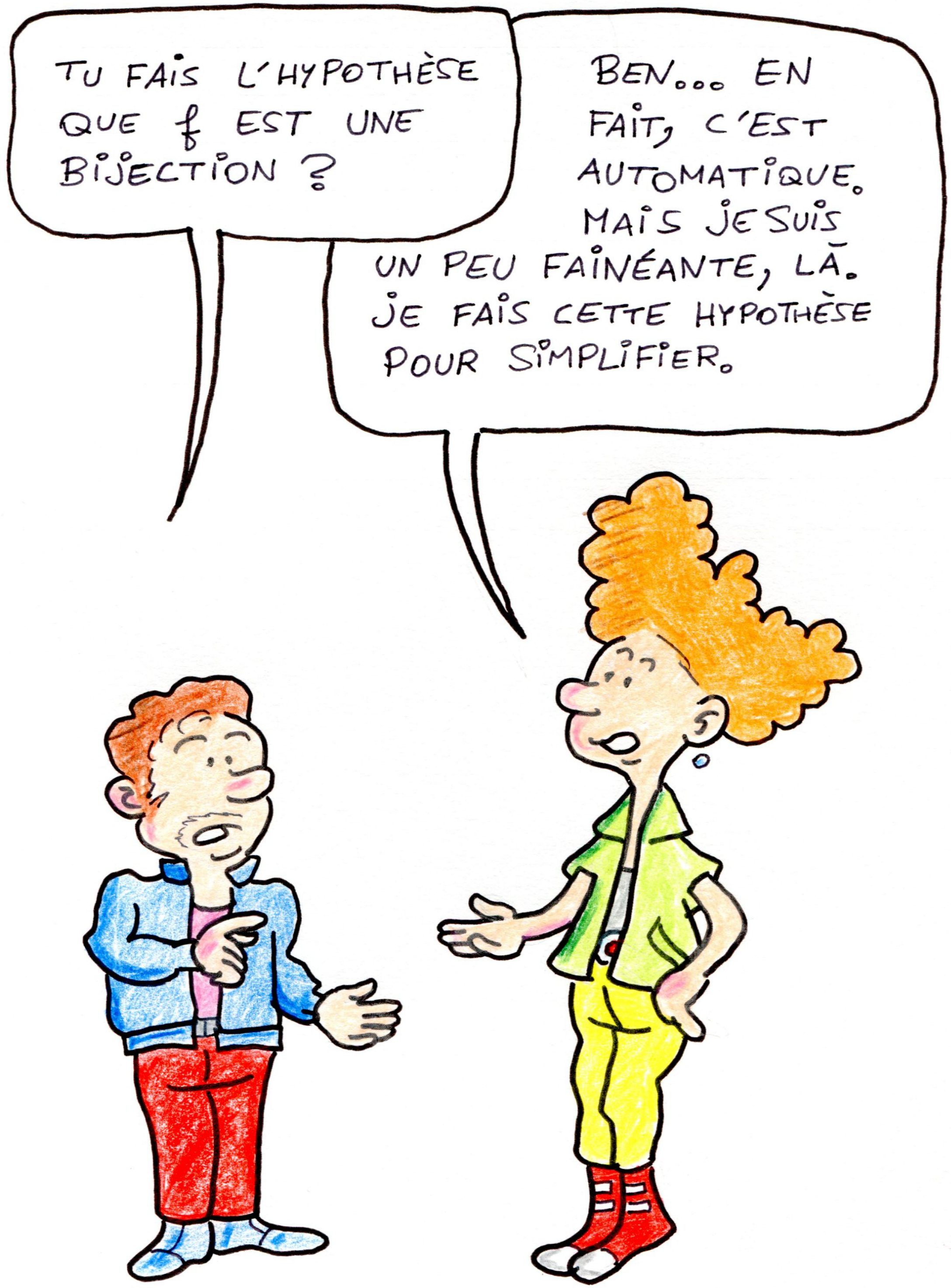

DISONS QUE E EST UN ESPACE EUCLIDIEN. UNE BIJECTION f DE E VERS E EST UNE ISOMÉTRIE SI ELLE PRÉSERVE LES DISTANCES.


ON SE RAPPELLE QUE LA DISTANCE ENTRE v_1 ET v_2, C'EST $\|v_1 - v_2\|$.


DIRE QUE f PRÉSERVE LES DISTANCES, ÇA SIGNIFIE QUE, POUR TOUS POINTS v_1 ET v_2 DE E, LA DISTANCE ENTRE v_1 ET v_2 EST ÉGALE À LA DISTANCE ENTRE $f(v_1)$ ET $f(v_2)$.
$f(v_2)$
$f(v_1)$
v_1
v_2
$\|v_1 - v_2\| =$

ET FILIPPO SE PLONGEA AVEC ADMIRATION DANS LA CONTEMPLATION DE L'ÉQUATION DES ISOMÉTRIES.



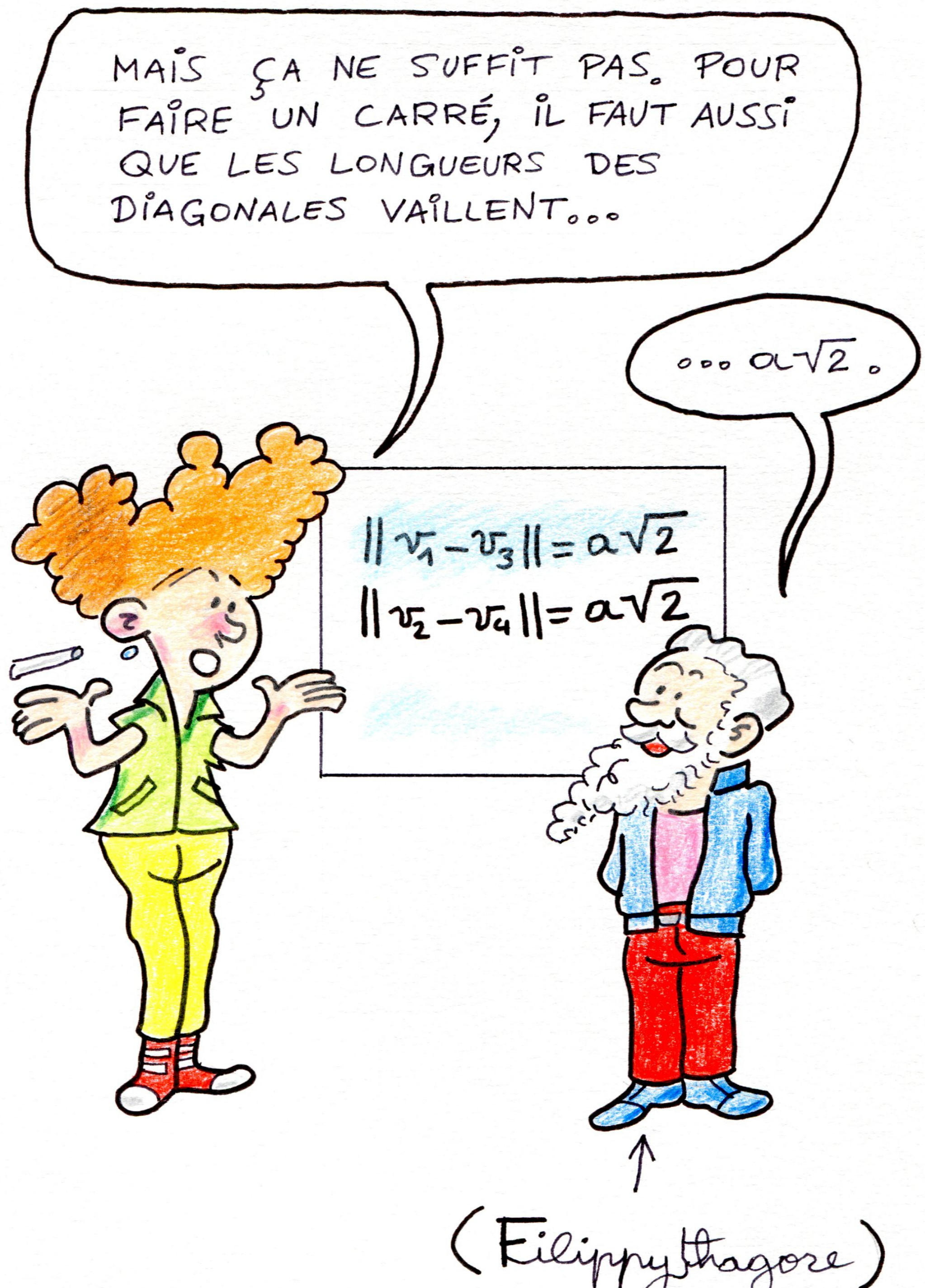

TU FAIS L'HYPOTHÈSE QUE f EST UNE BIJECTION ?
BEN... EN FAIT, C'EST AUTOMATIQUE. MAIS JE SUIS UN PEU FAINÉANTE, LÀ. JE FAIS CETTE HYPOTHÈSE POUR SIMPLIFIER.

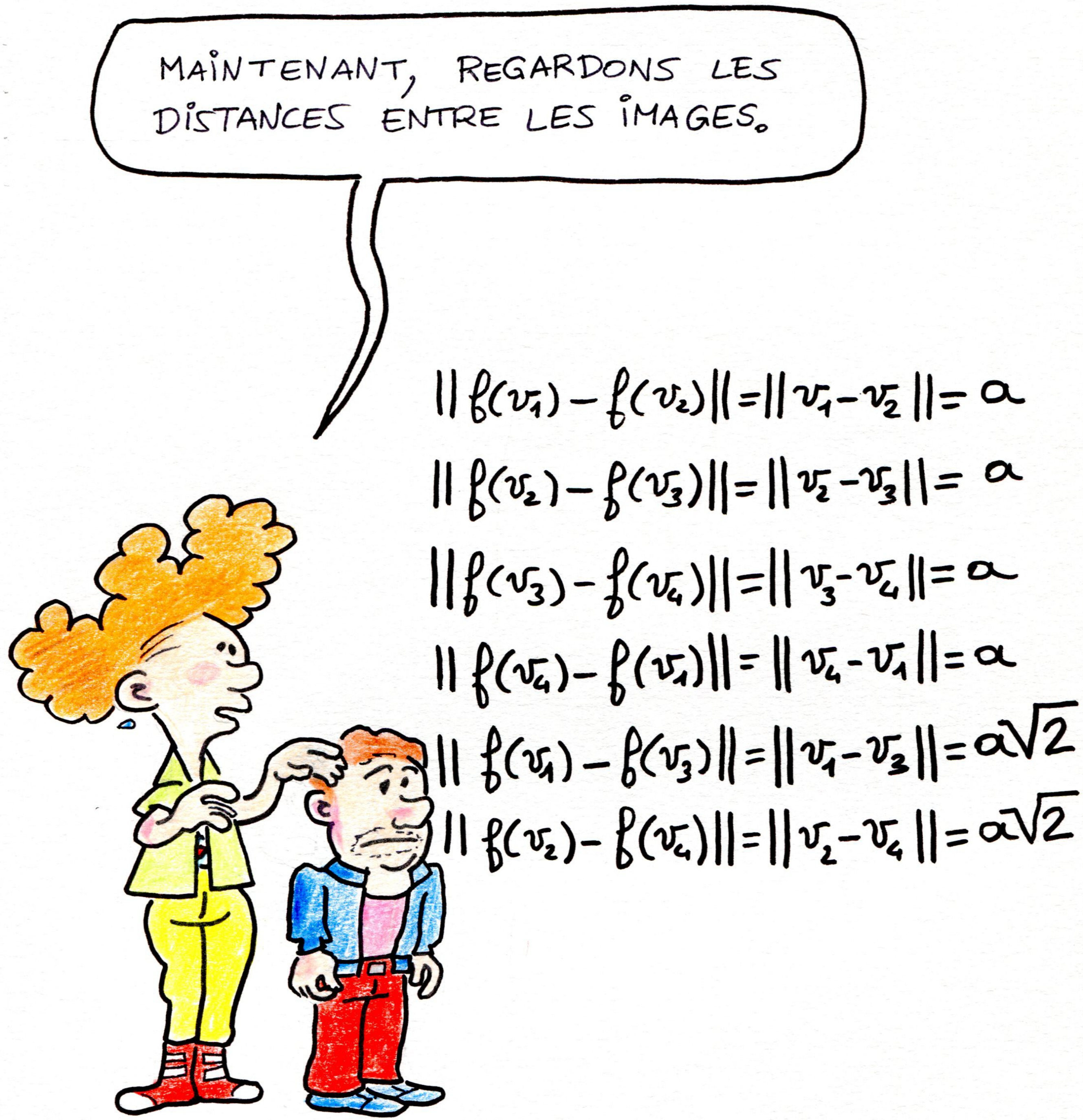

ET DONC, C'EST PAS LA MÊME HISTOIRE QUE LA SEMAINE DERNIÈRE. CETTE FOIS, L'IMAGE D'UN CARRÉ...
... EST UN CARRÉ !
v_1
v_2
v_3
v_4
$f(v_1)$
$f(v_2)$
$f(v_3)$
$f(v_4)$


LE TOUT EST DE SAVOIR POURQUOI


L'IDÉE, C'EST QU'ON PEUT CARACTÉRISER UN CARRÉ EN TERMES DE DISTANCE!
CARACTÉRISONS.


DANS UN CARRÉ D'ARÊTE a, LES LONGUEURS DES QUATRE CÔTÉS SONT ÉGALES À a.
$\|v_1 - v_2\| = a$
$\|v_2 - v_3\| = a$
$\|v_3 - v_4\| = a$
$\|v_4 - v_1\| = a$


MAIS ÇA NE SUFFIT PAS. POUR FAIRE UN CARRÉ, IL FAUT AUSSI QUE LES LONGUEURS DES DIAGONALES VAILLENT...
$\|v_1 - v_3\| = a\sqrt{2}$
$\|v_2 - v_4\| = a\sqrt{2}$
... $a\sqrt{2}$.
(Filippythagore)


MAINTENANT, REGARDONS LES DISTANCES ENTRE LES IMAGES.
$\|f(v_1)-f(v_2)\|=\|v_1-v_2\|=a$
$\|f(v_2)-f(v_3)\|=\|v_2-v_3\|=a$
$\|f(v_3)-f(v_4)\|=\|v_3-v_4\|=a$
$\|f(v_4)-f(v_1)\|=\|v_4-v_1\|=a$
$\|f(v_1)-f(v_3)\|=\|v_1-v_3\|=a\sqrt{2}$
$\|f(v_2)-f(v_4)\|=\|v_2-v_4\|=a\sqrt{2}$


ICI, ON A UTILISÉ SIX FOIS LE FAIT QUE f EST UNE ISOMÉTRIE.


ET DONC $f(v_1)$, $f(v_2)$, $f(v_3)$ ET $f(v_4)$ SONT LES SOMMETS D'UN CARRÉ COMME ON L'AVAIT DEVINÉ.
BALÈZES QU'ON EST !