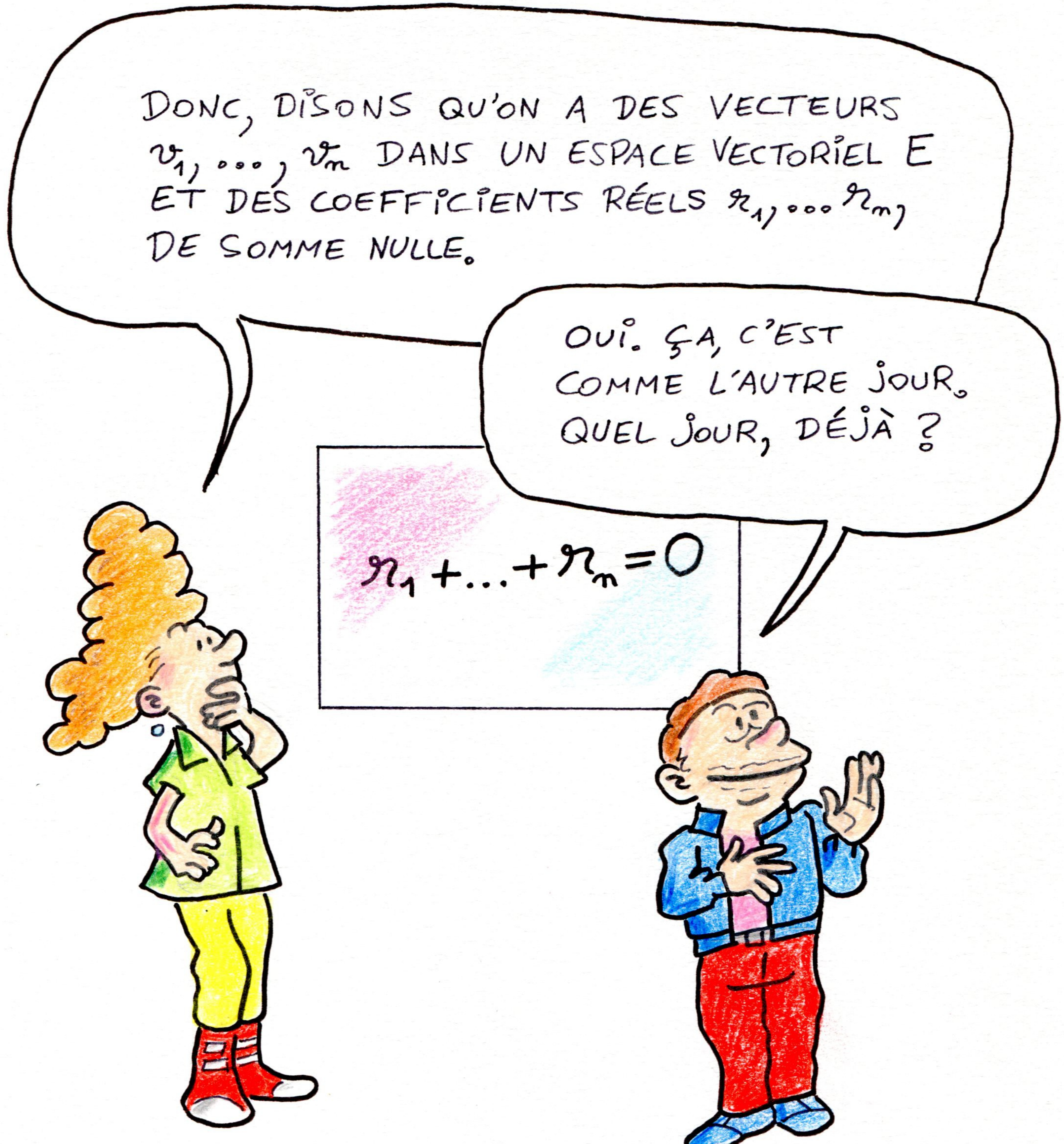
Episode 4 :

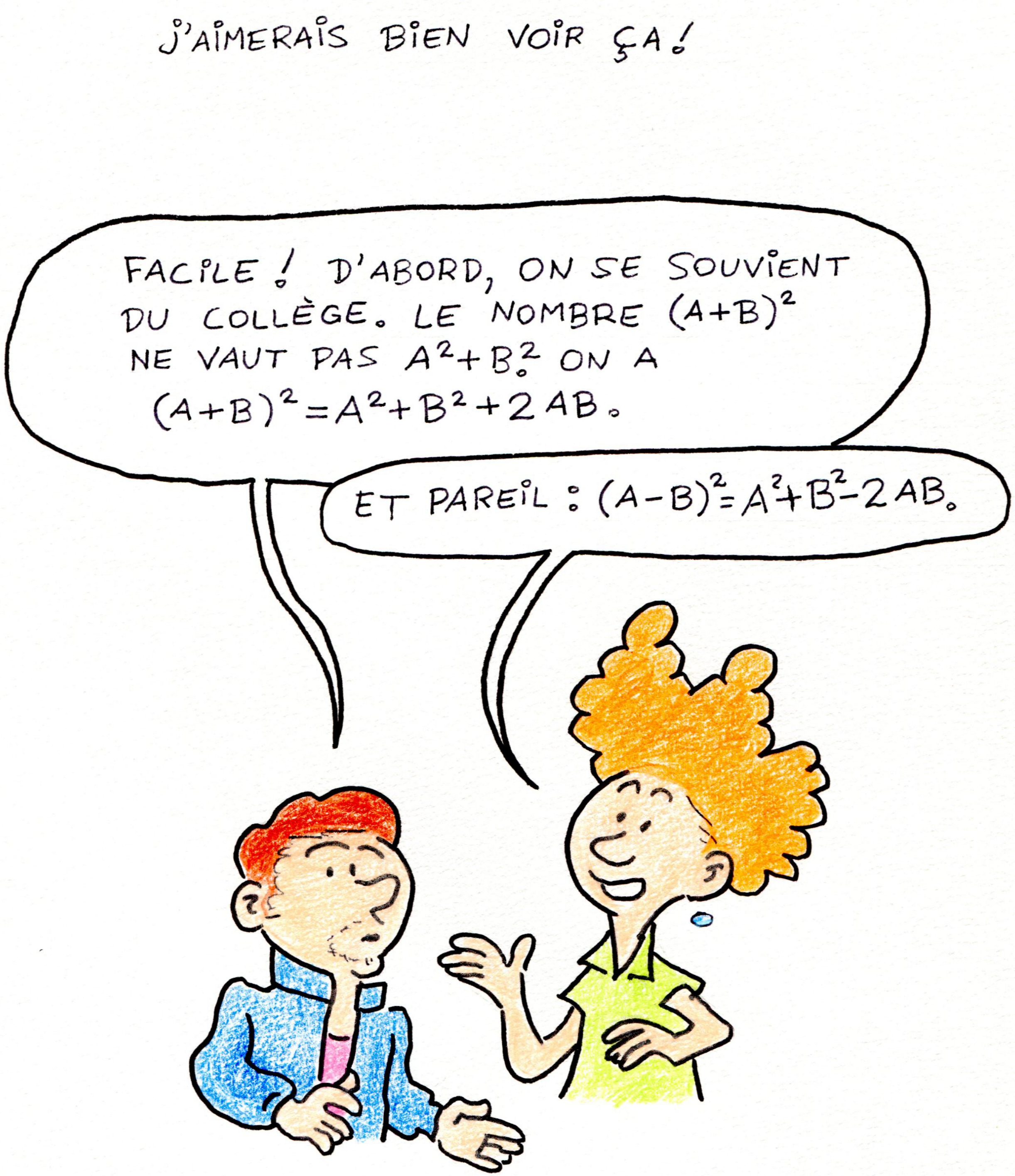
Caractérisation métrique des relations affines

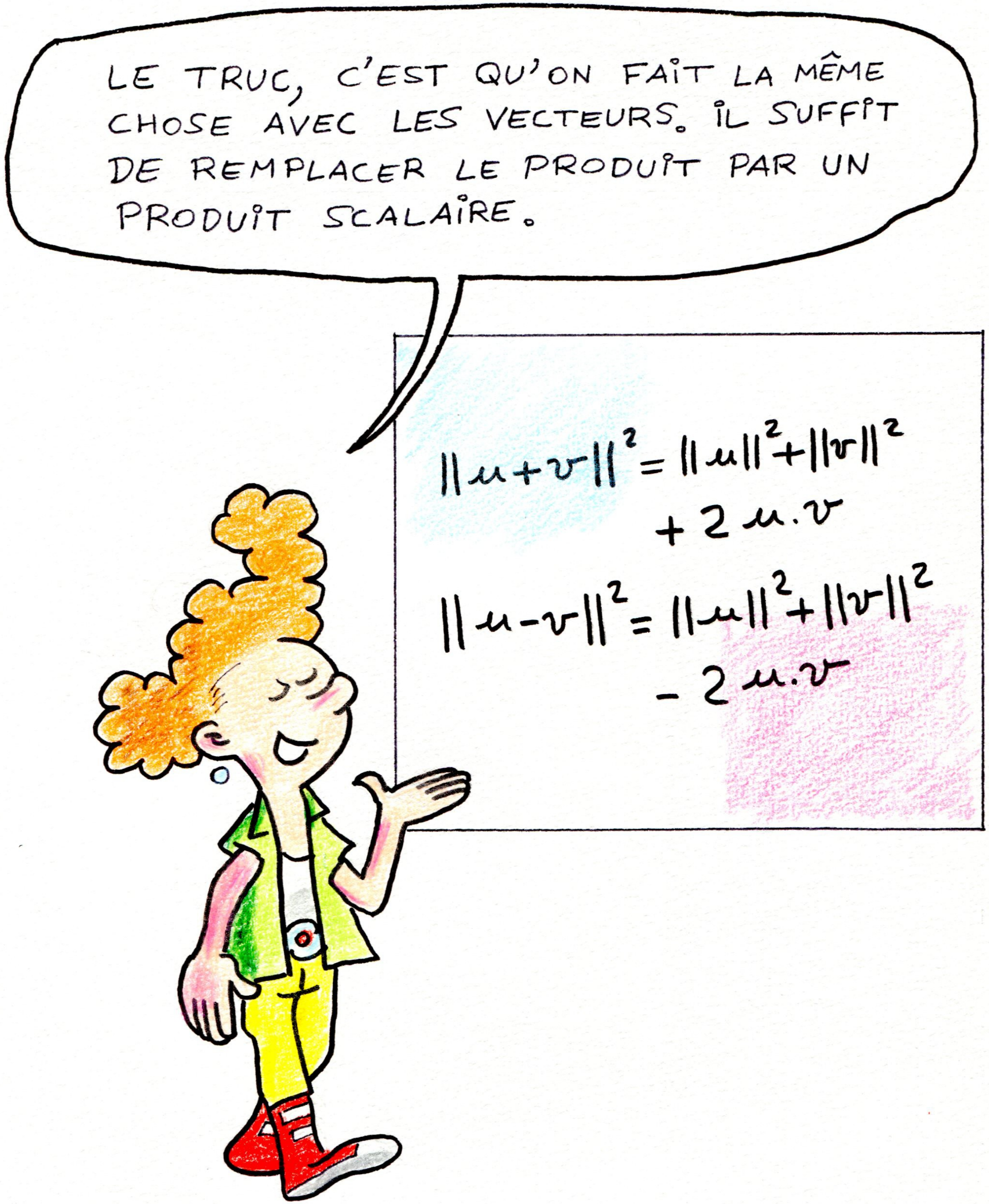

DONC, DISONS QU'ON A DES VECTEURS $v_1, \ldots, v_n$ DANS UN ESPACE VECTORIEL E ET DES COEFFICIENTS RÉELS $r_1, \ldots r_n$, DE SOMME NULLE.
$r_1 + \ldots + r_n = 0$
OUI. ÇA, C'EST COMME L'AUTRE JOUR. QUEL JOUR, DÉJÀ ?


ET ON VEUT CARACTÉRISER LA RELATION $r_1v_1+\ldots+r_nv_n=0_E$ EN TERMES DE DISTANCE.
MÊME QUE 0_E, C'ÉTAIT LE VECTEUR NUL.
$r_1v_1+\ldots+r_nv_n=0_E$


ALORS, LA CARACTÉRISATION...
HEU...
HEU AUSSI...

AIDONS UN PEU NOS AMIS. LA RELATION $r_1 v_1 + \dots + r_n v_n = 0_E$ ÉQUIVAUT AU FAIT QUE LE RÉEL $r_1 \| v - v_1 \|^2 + \dots + r_n \| v - v_n \|^2$ NE DÉPENDE PAS DU VECTEUR v PRIS DANS E.


J'AIMERAIS BIEN VOIR ÇA !
FACILE ! D'ABORD, ON SE SOUVIENT DU COLLÈGE. LE NOMBRE $(A+B)^2$ NE VAUT PAS A^2+B^2. ON A $(A+B)^2=A^2+B^2+2AB$.
ET PAREIL : $(A-B)^2=A^2+B^2-2AB$.


LE TRUC, C'EST QU'ON FAIT LA MÊME CHOSE AVEC LES VECTEURS. IL SUFFIT DE REMPLACER LE PRODUIT PAR UN PRODUIT SCALAIRE.
$\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2\,u.v$
$\|u-v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 - 2\,u.v$


DANS LE NOMBRE $r_1\|v-v_1\|^2+\ldots+r_n\|v-v_n\|^2$, ON REGARDE $\|v-v_i\|^2$. IL SE DÉCOMPOSE EN TROIS MORCEAUX QUI SONT $\|v\|^2$, $\|v_i\|^2$ ET $-2v_i\cdot v$.


ON A DONC TROIS TERMES. LE PREMIER S'APPELLE $r_1\|v\|^2+\ldots+r_m\|v\|^2 = (r_1+\ldots+r_m)\|v\|^2\ldots$
... QUI EST NUL CAR ON SUPPOSE $r_1+\ldots+r_m$ NUL.


LE DEUXIÈME S'APPELLE $r_1\|v_1\|^2+\ldots+r_m\|v_m\|^2$. IL NE DÉPEND PAS DE v.


LE TROISIÈME S'APPELLE: $-2r_1v_1.v-\ldots-2r_nv_n.v$. ON L'ÉCRIT $-2u.v$ SI ON POSE: $u=r_1v_1+\ldots+r_nv_n$. LE VECTEUR u NE DÉPEND PAS DE v.
ET LÀ, ON N'EST PLUS TRÈS LOIN.


ON VOIT QUE LE TROISIÈME (ET DONC LA SOMME) SERA CONSTANT SI ET SEULEMENT SI u EST NUL.
C'ÉTAIT BIEN ÇA QUE VOUS VOULIEZ ?
$u = 0_E$
$r_1 v_1 + \ldots + r_n v_n = 0_E$

OUI. C'EST BIEN LA CARACTÉRI-
-SATION QUE JE VOULAIS.
OK !

Fin