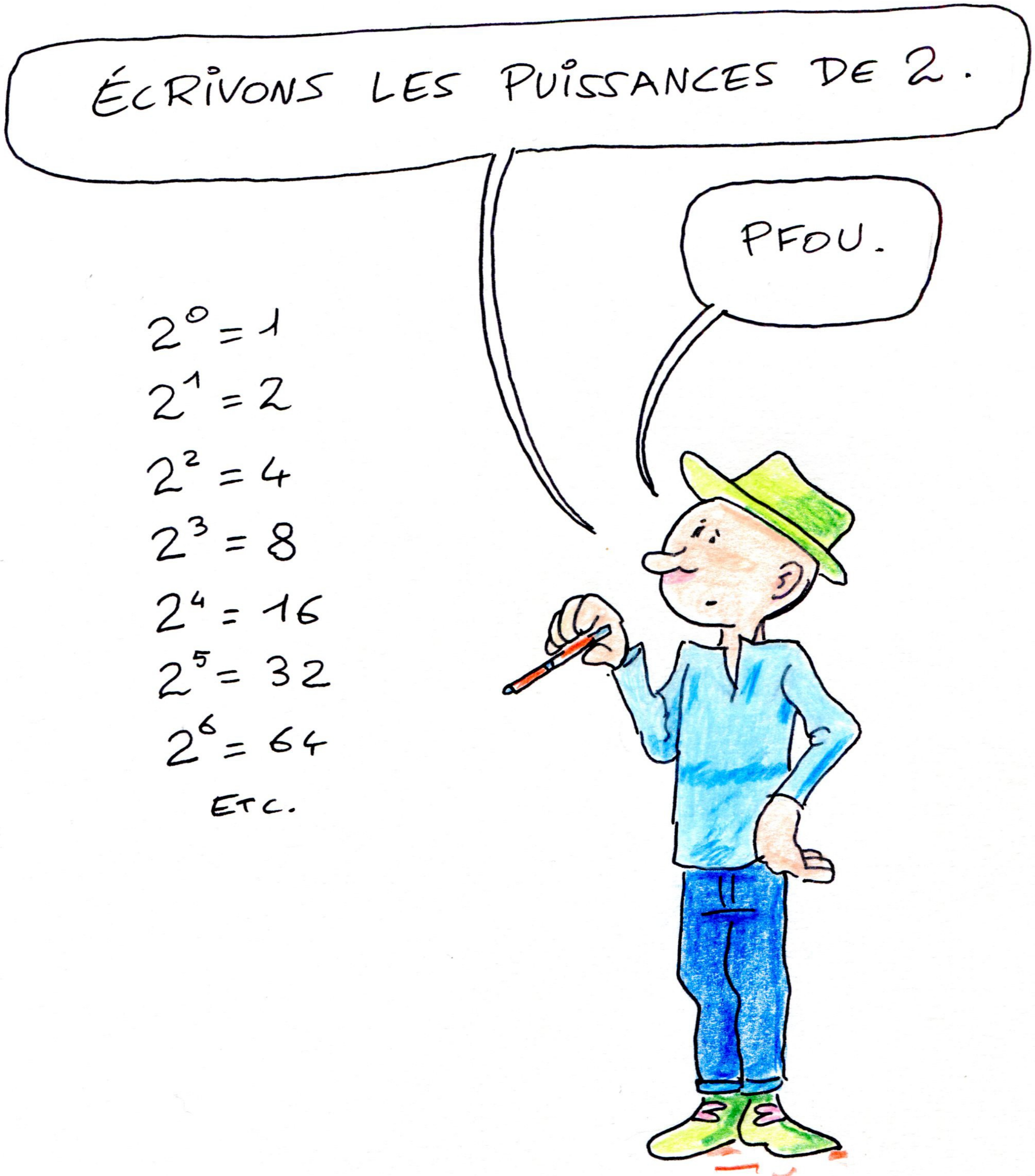
COMPARAISON ENTRE LES PUISSANCES DE 2 ET LES PUISSANCES DE 10


ÉCRIVONS LES PUISSANCES DE 2.
PFOU.
$2^0 = 1$
$2^1 = 2$
$2^2 = 4$
$2^3 = 8$
$2^4 = 16$
$2^5 = 32$
$2^6 = 64$
ETC.

LES PUISSANCES DE 10, C'EST PLUS SIMPLE.

$10^0 = 1$

$10^1 = 10$

$10^2 = 100$

$10^3 = 1000$

$10^4 = 10000$

ETC.


EST-CE QU'ON PEUT ÉCRIRE 10 COMME UNE PUISSANCE DE 2, D'APRÈS TOI ?
BEN, NON.
ET POURTANT ON VA LE FAIRE QUAND MÊME !
??


TU AS RAISON !
LE NOMBRE 10, ON NE PEUT PAS L'ÉCRIRE 2^n AVEC n ENTIER.
MAIS ON PEUT L'ÉCRIRE 2^r AVEC r RÉEL.

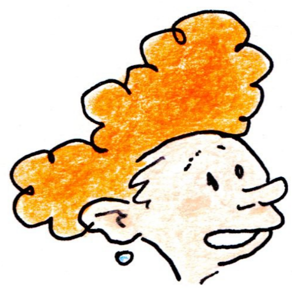

ON A MÊME
r = 3, 32...
C'EST UNE BLAGUE ! TU AS DIT UN NOMBRE AU HASARD !
ÇA SE VOIT TROP.


VOYONS. TU SAIS QUE 10 EST COMPRIS ENTRE 2^3 ET 2^4 ?
ATTENDS. $2^3 = 8$ ET $2^4 = 16$. LE NOMBRE 10 EST BIEN COMPRIS ENTRE 8 ET 16. JUSQUE LÀ, JE SUIS D'ACCORD.
JE VALIDE.

ON ÉCRIT **10** SOUS LA FORME

$$10 = 2^r.$$

LE RÉEL r EST DONC COMPRIS ENTRE 3 ET 4.

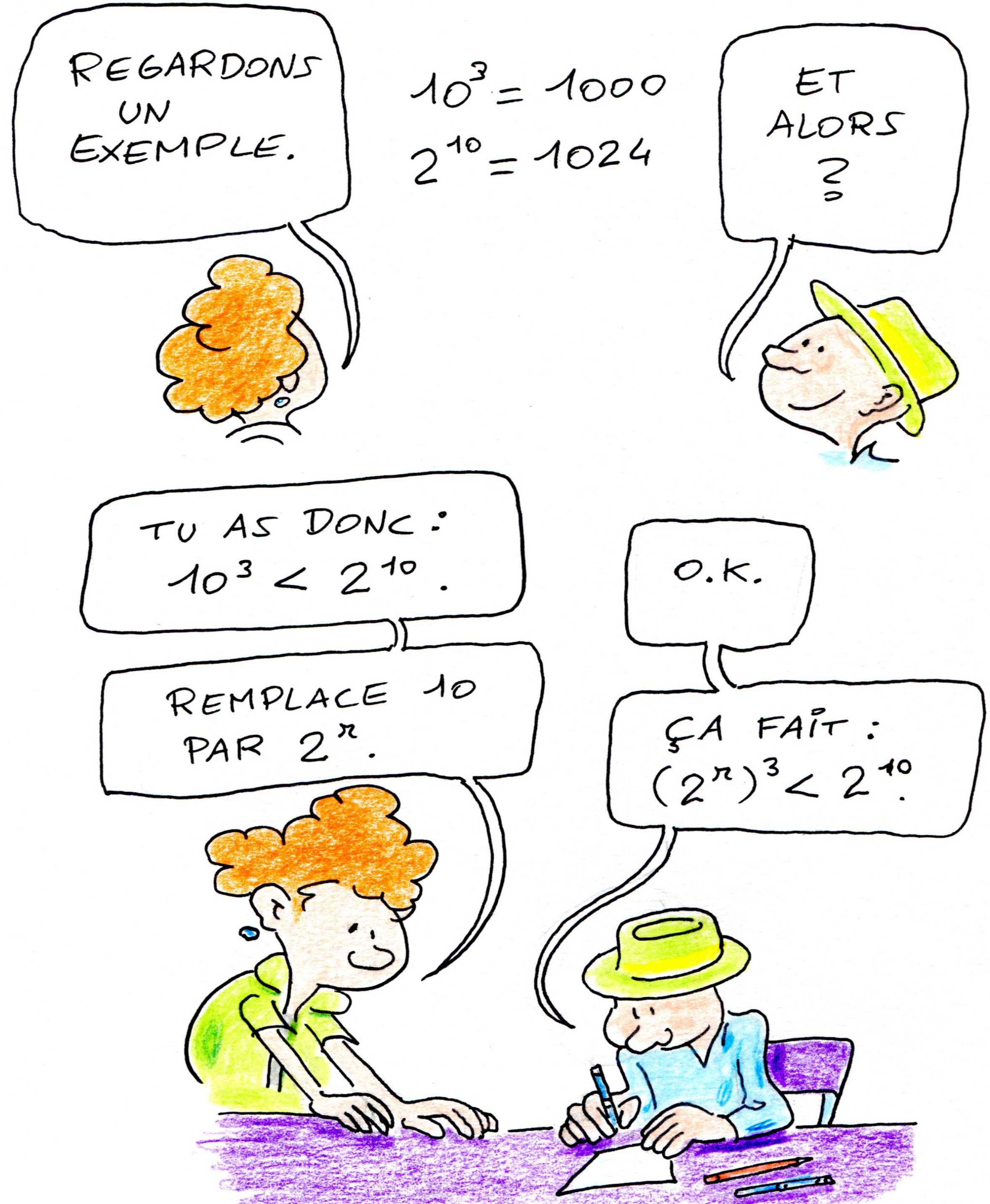


$$\begin{array}{ccccc} 8 & < & 10 & < & 16 \\ \parallel & & \parallel & & \parallel \\ 2^3 & & 2^r & & 2^4 \end{array}$$

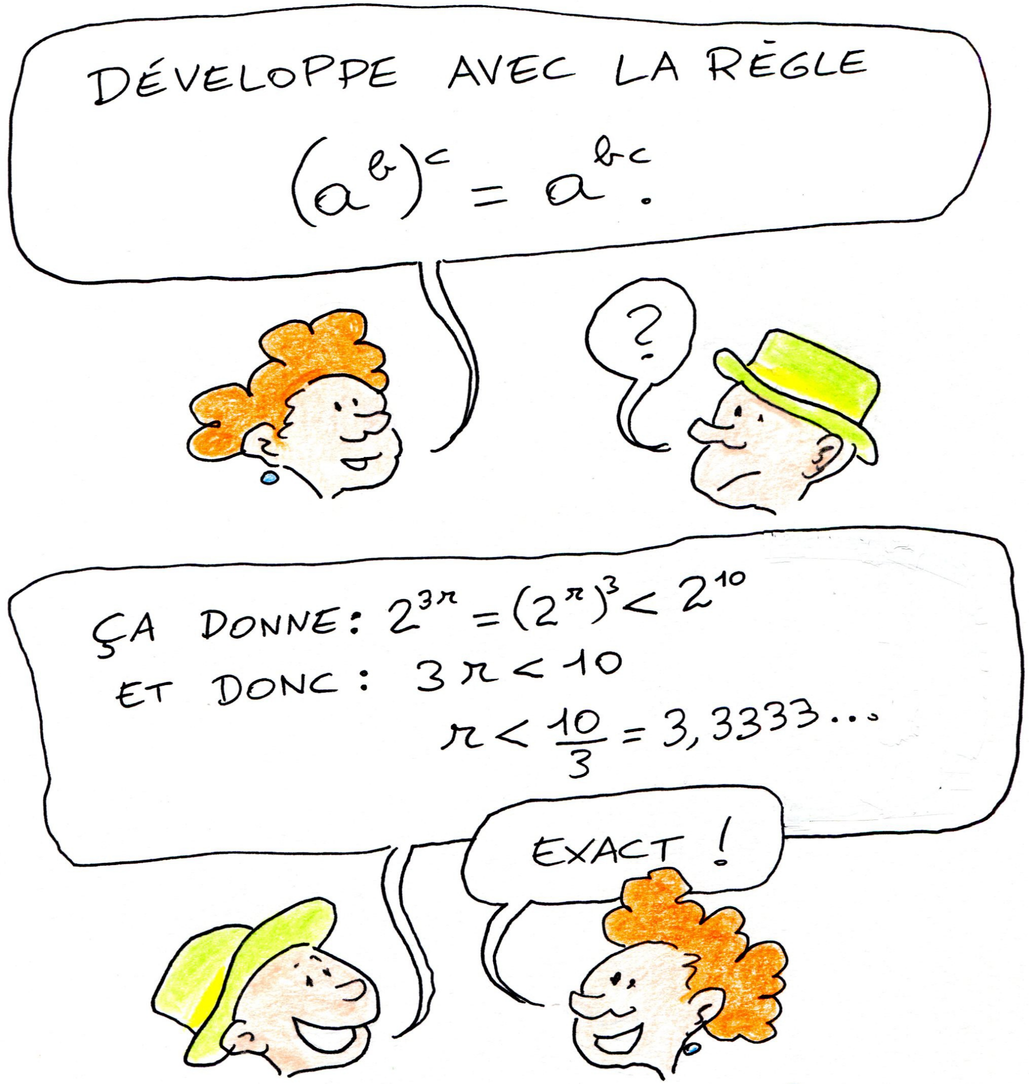
LE RÉEL r VAUT DONC « TROIS VIRGULE QUELQUE CHOSE »

$r = 3, \ldots$

MAIS POUR LE VOIR, IL FAUT COMPARER DES PUISSANCES DE 2 ET DE 10.



REGARDONS UN EXEMPLE.
$10^3 = 1000$
$2^{10} = 1024$
ET ALORS ?
TU AS DONC : $10^3 < 2^{10}$.
REMPLACE 10 PAR 2^x.
O.K.
ÇA FAIT : $(2^x)^3 < 2^{10}$.



DONC ON A UNE INFORMATION SUR LE RÉEL x. IL EST INFÉRIEUR À 3,3334 PAR EXEMPLE. ET ON PEUT OBTENIR DES RÉSULTATS PLUS PRÉCIS EN COMPARANT D'AUTRES PUISSANCES DE 2 ET DE 10 COMME DANS L'EXERCICE SUIVANT.

EXERCICE.

AVEC LA CALCULATRICE,
CALCULER 2^{93} ET 2^{103} PUIS
EN DÉDUIRE QUE LE RÉEL r
EST COMPRIS ENTRE $\frac{93}{28} = 3,3214\ldots$
ET $\frac{103}{31} = 3,3225\ldots$

CONCLUSION.

IL Y A UN PARADOXE CACHÉ.
DEPUIS LE COLLÈGE, ON SAIT CALCULER 2^n SI n EST ENTIER.

$$2^3 = 2 \times 2 \times 2$$
$$2^4 = 2 \times 2 \times 2 \times 2$$
$$2^n = \underbrace{2 \times \dots \times 2}_{n \text{ FOIS}}$$

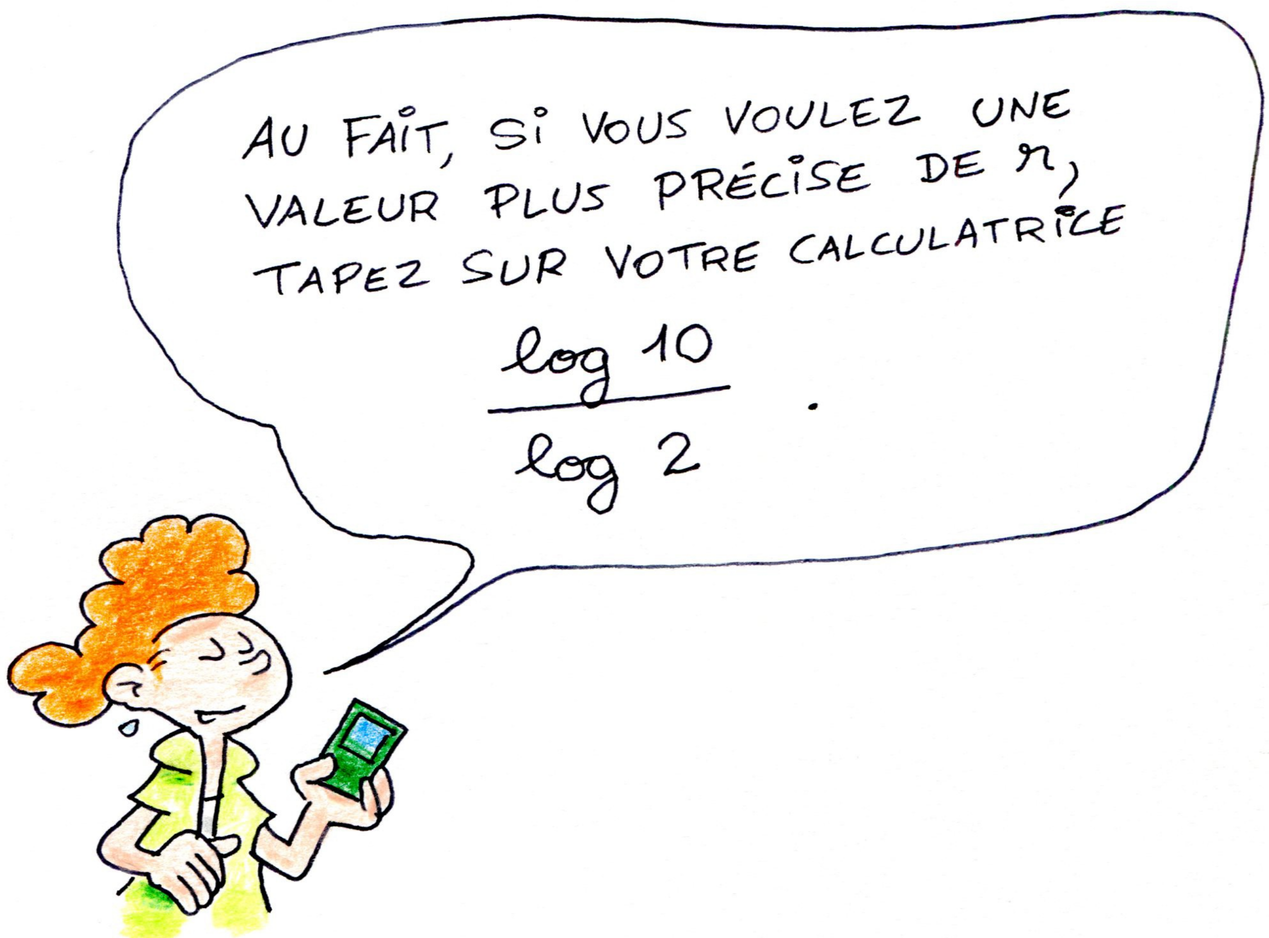
ÉVIDEMMENT, CE GENRE DE FORMULE NE FONCTIONNE PLUS POUR UN EXPOSANT $r = 3,32\ldots$ NON ENTIER. DANS CE COURS, NOUS ALLONS TOUT DE MÊME CONSIDÉRER DES EXPRESSIONS DE LA FORME

$$a^b$$

AVEC a RÉEL STRICTEMENT POSITIF ET b RÉEL QUELCONQUE.

PAR EXEMPLE :

$$\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}.$$


AU FAIT, SI VOUS VOULEZ UNE VALEUR PLUS PRÉCISE DE r, TAPEZ SUR VOTRE CALCULATRICE
$\frac{\log 10}{\log 2}$.