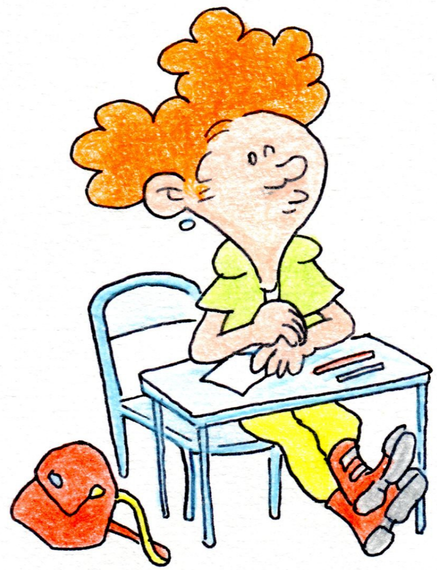
LE COUP DE FLEMME DE PROÉTALE



PROÉTALE,
C'EST ELLE.

L'ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE

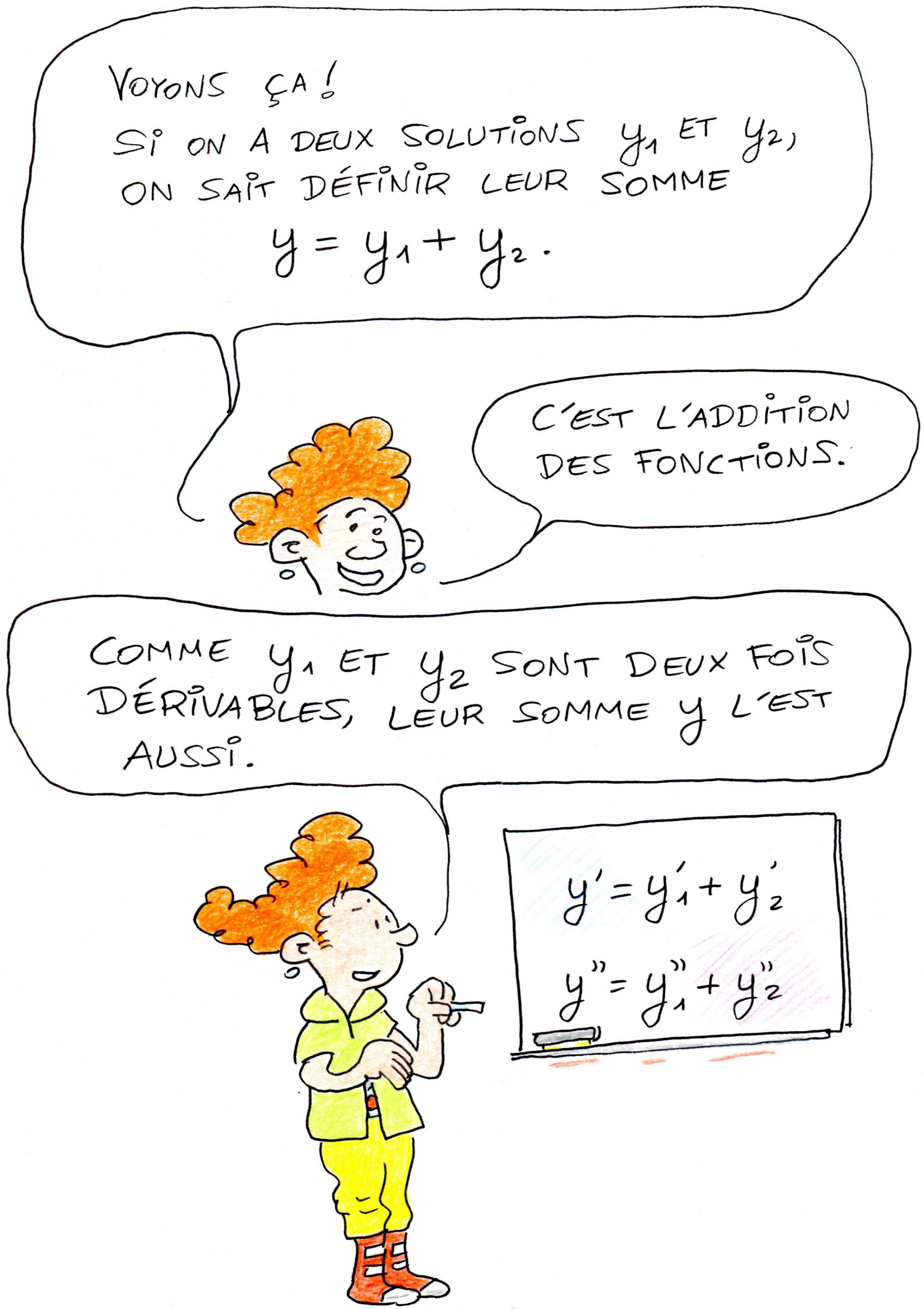
$$a y'' + b y' + c y = 0 .$$

LES DONNÉES a, b ET c ÉTAIENT DES RÉELS. L'INCONNUE y ÉTAIT UNE FONCTION RÉELLE DÉFINIE SUR $\mathbb{R}$ ET DEUX FOIS DÉRIVABLE. ON NOTAIT y' LA DÉRIVÉE ET y'' LA DÉRIVÉE SECONDE.

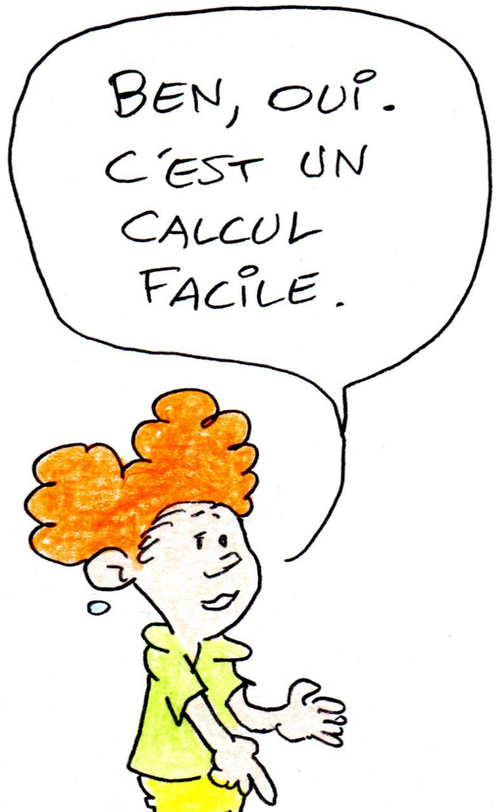
DIRE QUE y EST UNE SOLUTION DE L'ÉQUA. DIFF. ÇA VEUT DIRE QUE LES TROIS FONCTIONS y, y' ET y'' VÉRIFIENT :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad a y''(t) + b y'(t) + c y(t) = 0 .$$


MAIS ON ÉCRIVAIT JUSTE :
$a y'' + b y' + c y = 0$
POUR ABRÉGER.
ÇA, C'ÉTAIT LE COURS DE L'AN DERNIER. CETTE ANNÉE, ON VA DIRE UN TRUC EN PLUS : LES SOLUTIONS DE CETTE ÉQUA. DIFF. FORMENT UN **ESPACE VECTORIEL**.
?


VOYONS ÇA !
SI ON A DEUX SOLUTIONS y_1 ET y_2, ON SAIT DÉFINIR LEUR SOMME
$y = y_1 + y_2$.
C'EST L'ADDITION DES FONCTIONS.
COMME y_1 ET y_2 SONT DEUX FOIS DÉRIVABLES, LEUR SOMME y L'EST AUSSI.
$y' = y_1' + y_2'$
$y'' = y_1'' + y_2''$

EST-CE QUE y EST UNE SOLUTION ?

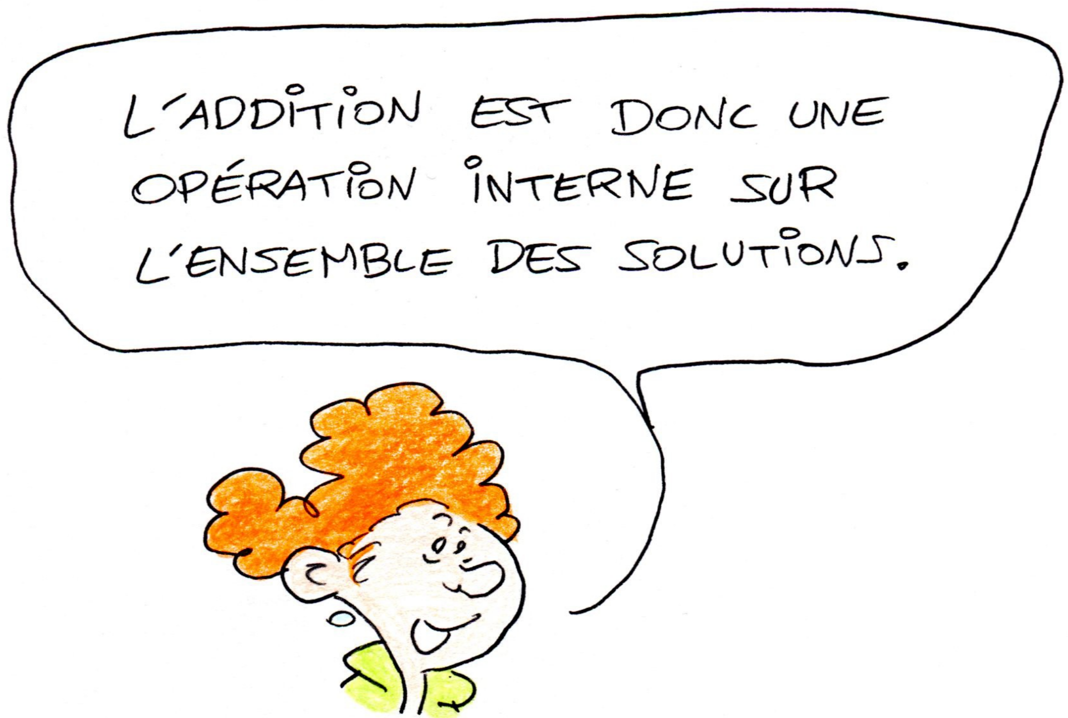


$$ay'' + by' + cy$$

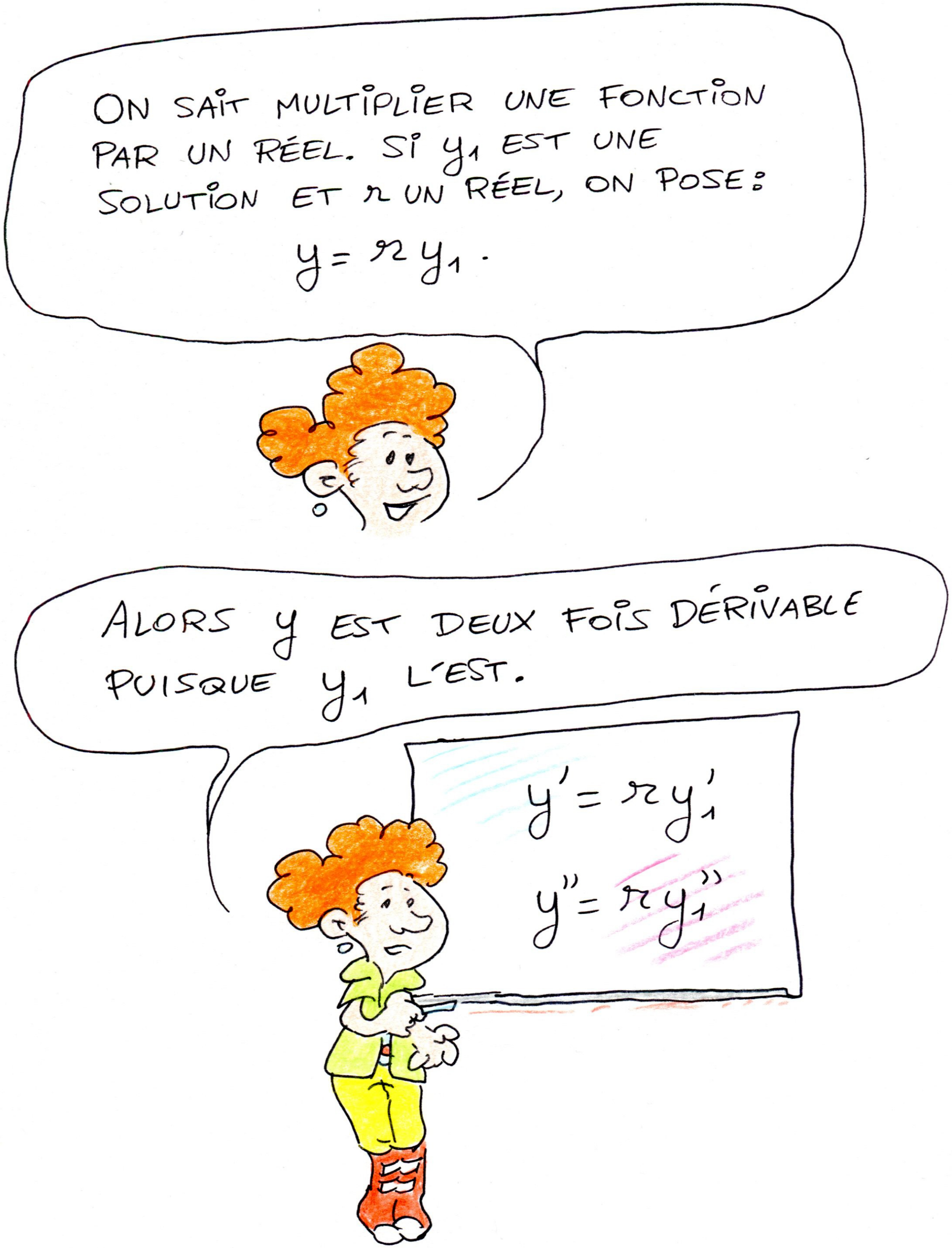
$$= ay_1'' + by_1' + cy_1 + ay_2'' + by_2' + cy_2$$

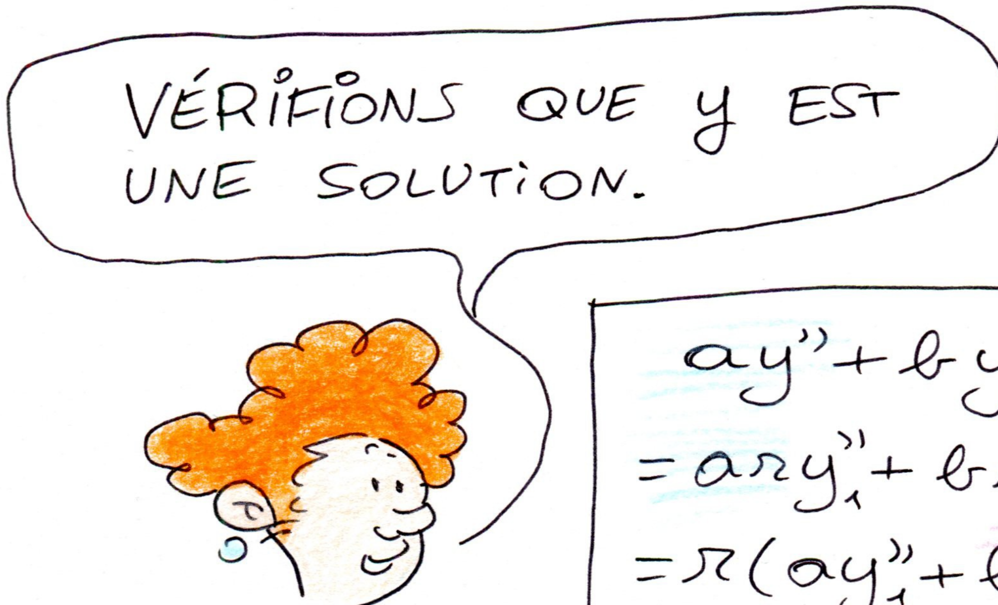
$$= 0 + 0 = 0$$

LA SOMME DE DEUX SOLUTIONS
EST UNE SOLUTION.



MAINTENANT, IL FAUT AUSSI UNE
MULTIPLICATION EXTERNE.


ON SAIT MULTIPLIER UNE FONCTION PAR UN RÉEL. SI y_1 EST UNE SOLUTION ET r UN RÉEL, ON POSE :
$y = r y_1$.
ALORS y EST DEUX FOIS DÉRIVABLE PUISQUE y_1 L'EST.
$y' = r y_1'$
$y'' = r y_1''$



$$
\begin{aligned}
&ay'' + by' + cy \\
&= ary_1'' + bry_1' + cry_1 \\
&= r(ay_1'' + by_1' + cy_1) \\
&= r \times 0 = 0.
\end{aligned}
$$

ON A DONC AUSSI UNE MULTIPLICATION EXTERNE.

POUR PROUVER QUE L'ENSEMBLE DES SOLUTIONS MUNI DE CES DEUX OPÉRATIONS EST UN ESPACE VECTORIEL, IL FAUT VÉRIFIER HUIT AXIOMES.

AXIOME 1 : **COMMUTATIVITÉ.**

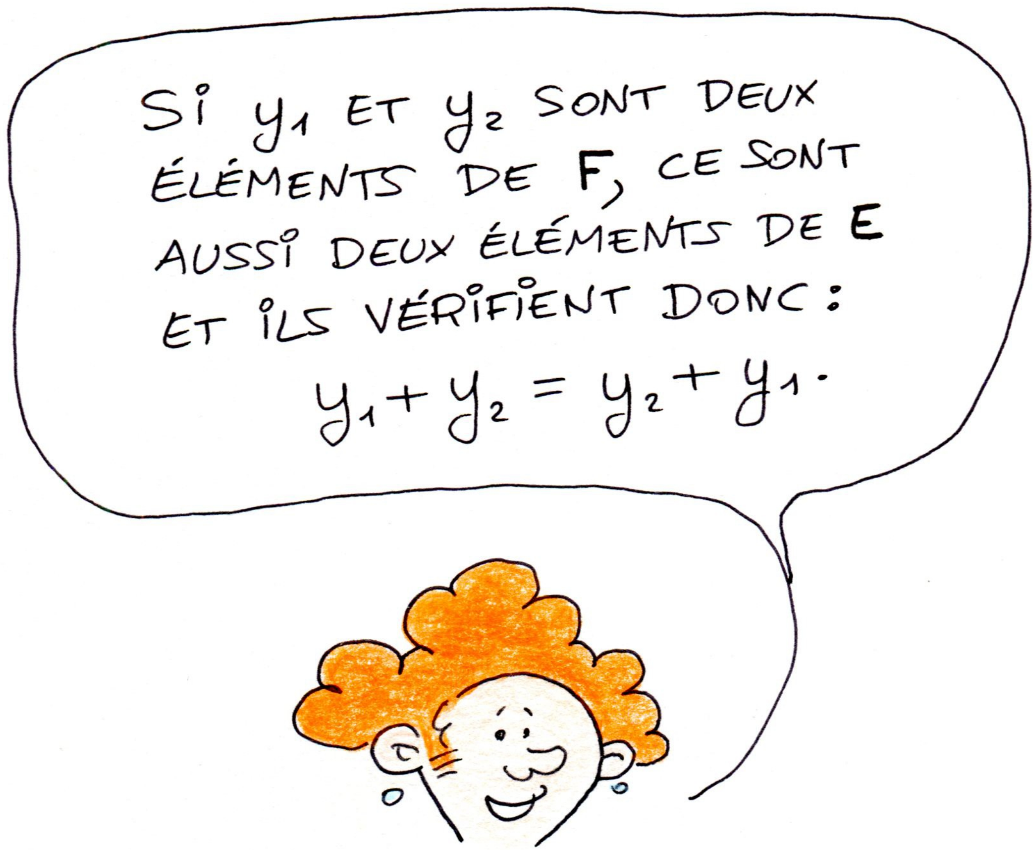
SI y_1 ET y_2 SONT DEUX SOLUTIONS, ALORS :

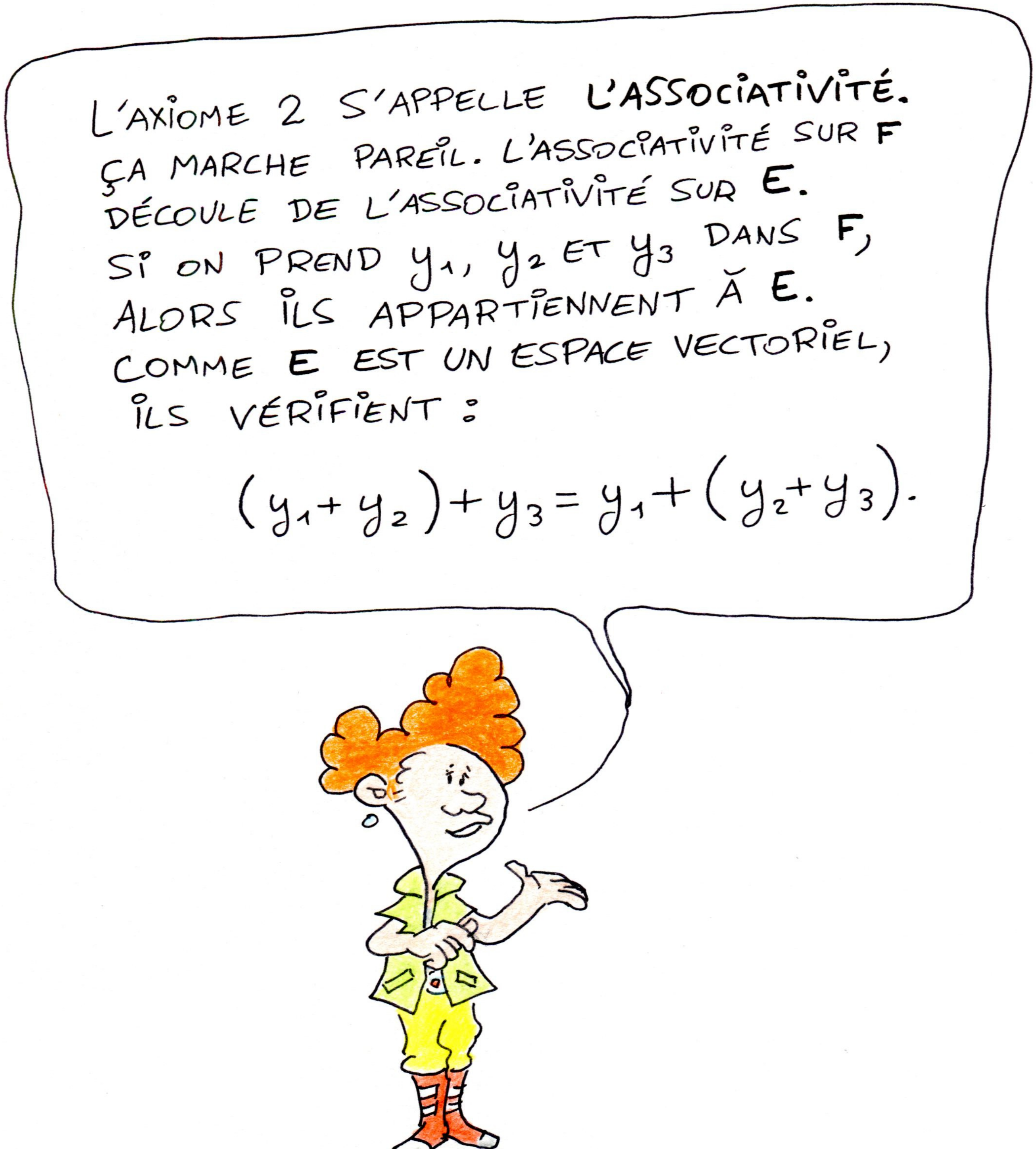
$$y_1 + y_2 = y_2 + y_1.$$

ON A VU EN COURS QUE L'ENSEMBLE
DES FONCTIONS RÉELLES DÉFINIES
SUR $\mathbb{R}$ EST UN ESPACE VECTORIEL.
L'IDENTITÉ $f+g=g+f$ EST VÉRIFIÉE
POUR TOUT COUPLE (f,g) D'ÉLÉMENTS
DE CET ENSEMBLE ET, EN PARTICULIER,
ÇA RESTE VRAI SI f ET g SONT DANS
LE SOUS-ENSEMBLE DES SOLUTIONS
DE L'ÉQUA. DIFF.

Notons **E** l'ensemble des fonctions réelles définies sur $\mathbb{R}$ et notons **F** l'ensemble des solutions de l'équa. diff.

LA COMMUTATIVITÉ DE L'ADDITION SUR **F** DÉCOULE DONC DE LA COMMUTATIVITÉ DE L'ADDITION SUR **E**.




L'AXIOME 2 S'APPELLE L'ASSOCIATIVITÉ.
ÇA MARCHE PAREIL. L'ASSOCIATIVITÉ SUR F DÉCOULE DE L'ASSOCIATIVITÉ SUR E.
SI ON PREND y_1, y_2 ET y_3 DANS F, ALORS ILS APPARTIENNENT À E.
COMME E EST UN ESPACE VECTORIEL, ILS VÉRIFIENT :
$(y_1+y_2)+y_3=y_1+(y_2+y_3)$.


TROISIÈME AXIOME :...
HEU...
JE COMMENCE UN PEU À FATIGUER.
ATTENDS ...


AH OUI. AXIOME 3: L'EXISTENCE DE **L'ÉLÉMENT NEUTRE** DE L'ADDITION.

IL Y A UN ÉLÉMENT NEUTRE DANS **E**. EN GÉNÉRAL, ON LE NOTE 0_E. ICI, C'EST LA **FONCTION NULLE** PARCE QUE **E** EST UN ESPACE DE FONCTIONS.

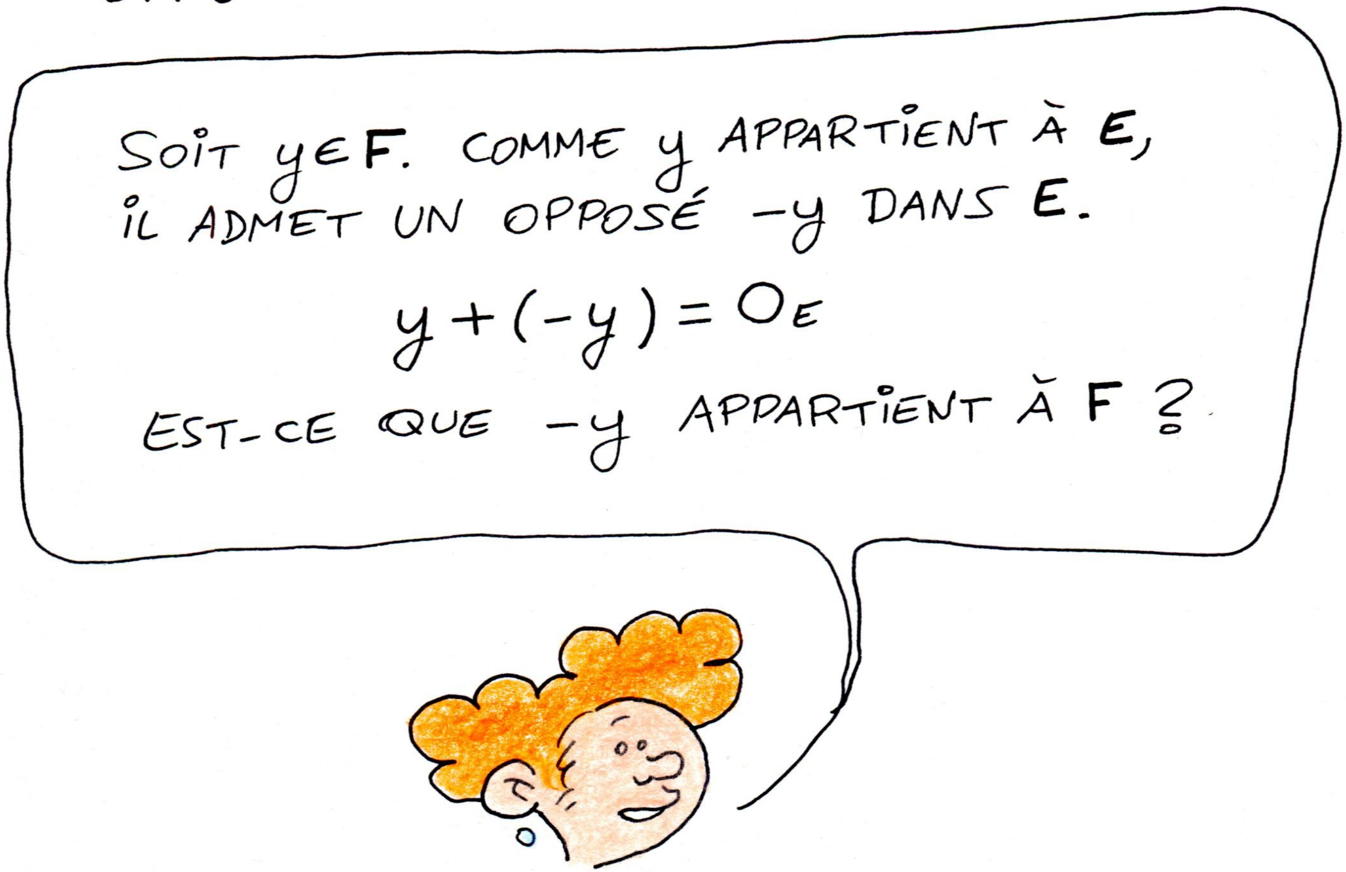
TOUT D'ABORD, VÉRIFIONS QUE 0_E APPARTIENT BIEN À **F**, C'EST-À-DIRE QUE SI ON POSE $y = 0_E$, ALORS ON DOIT VÉRIFIER QUE y EST DEUX FOIS DÉRIVABLE ET QU'ELLE SATISFAIT LA CONDITION SUIVANTE :

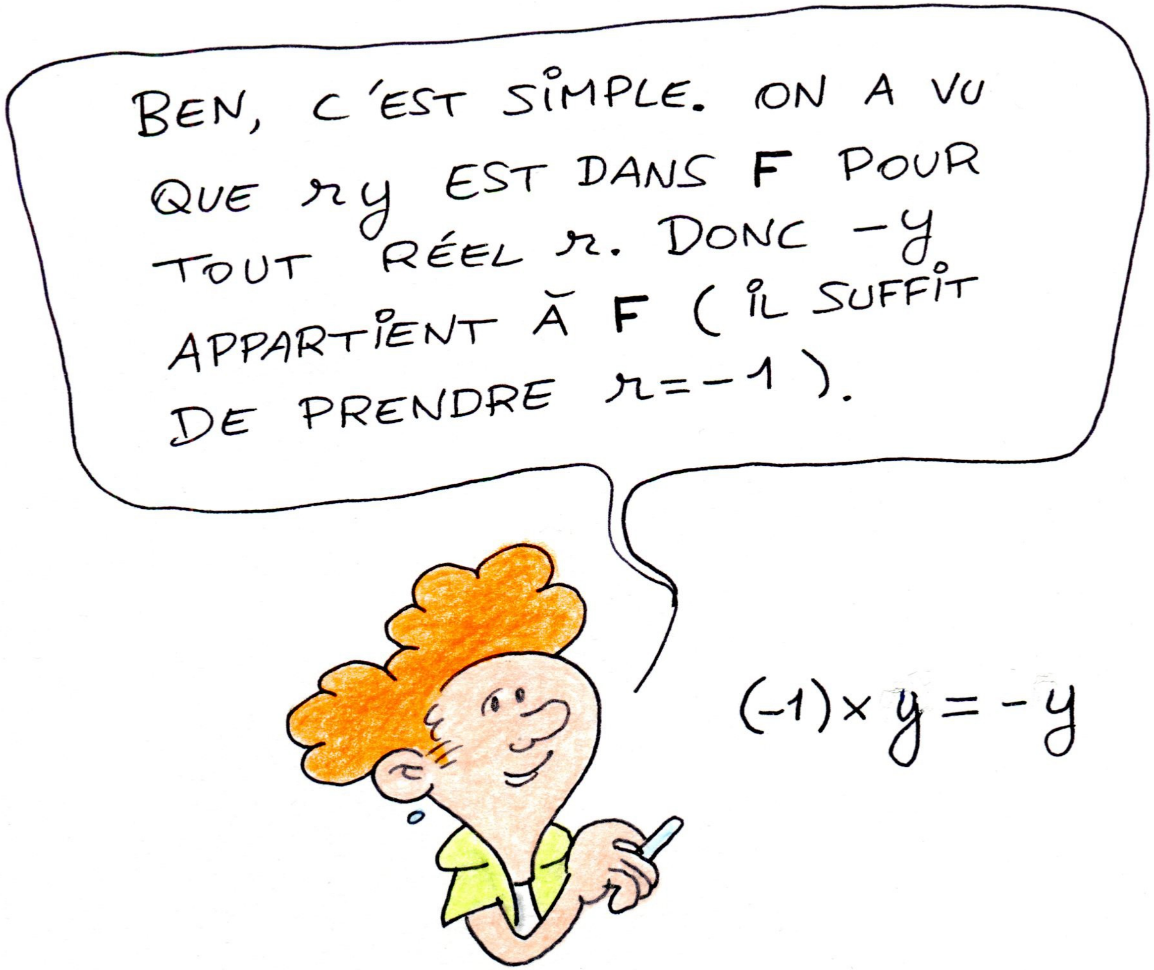
$$a y'' + b y' + c y = 0.$$

D'ACCORD, 0_E APPARTIENT À **F**.


MAINTENANT, LE FAIT QUE 0_E SOIT L'ÉLÉMENT NEUTRE DE **F** DÉCOULE DU FAIT QU'IL EST L'ÉLÉMENT NEUTRE DE **E**. L'IDENTITÉ :
$$f + 0_E = f$$
EST VRAIE POUR TOUT ÉLÉMENT f DE **E** DONC, EN PARTICULIER, ELLE EST VRAIE POUR TOUT ÉLÉMENT f DE **F**.
O.K. AXIOME SUIVANT.

AXIOME 4 : L'EXISTENCE DU **VECTEUR OPPOSÉ**.

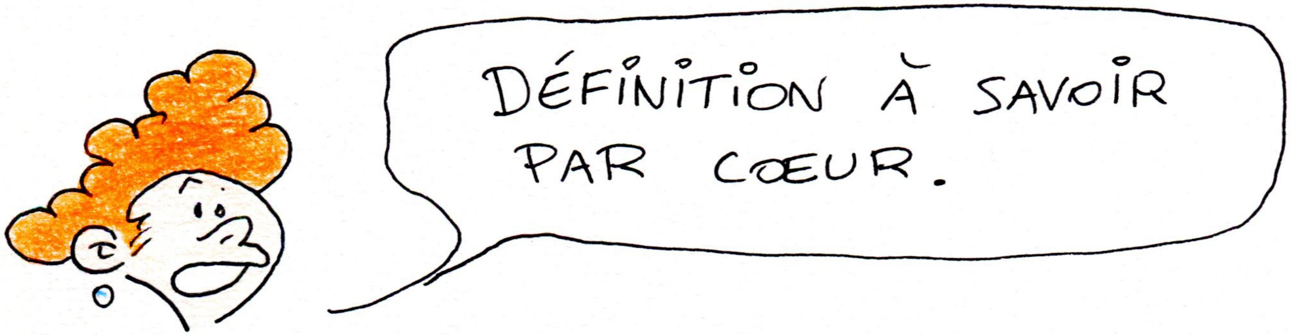



BEN, C'EST SIMPLE. ON A VU QUE ry EST DANS **F** POUR TOUT RÉEL r. DONC $-y$ APPARTIENT À **F** (IL SUFFIT DE PRENDRE $r=-1$).
$(-1)\times y=-y$

LÀ, PROÉTALE ACCUSE LE COUP, VISIBLEMENT.


MOI, J'AI TROP LA FLEMME.


OU ALORS, JE POURRAIS UTILISER LES SOUS-ESPACES VECTORIELS.
LES QUOI ?



SOIT $(E, +, \cdot)$ UN ESPACE VECTORIEL. UNE PARTIE F DE E EST UN **SOUS-ESPACE VECTORIEL** SI ELLE SATISFAIT LES CONDITIONS SUIVANTES :

1 STABILITÉ POUR L'ADDITION.

SI u ET v SONT DEUX ÉLÉMENTS DE F, ALORS $u+v$ APPARTIENT À F.

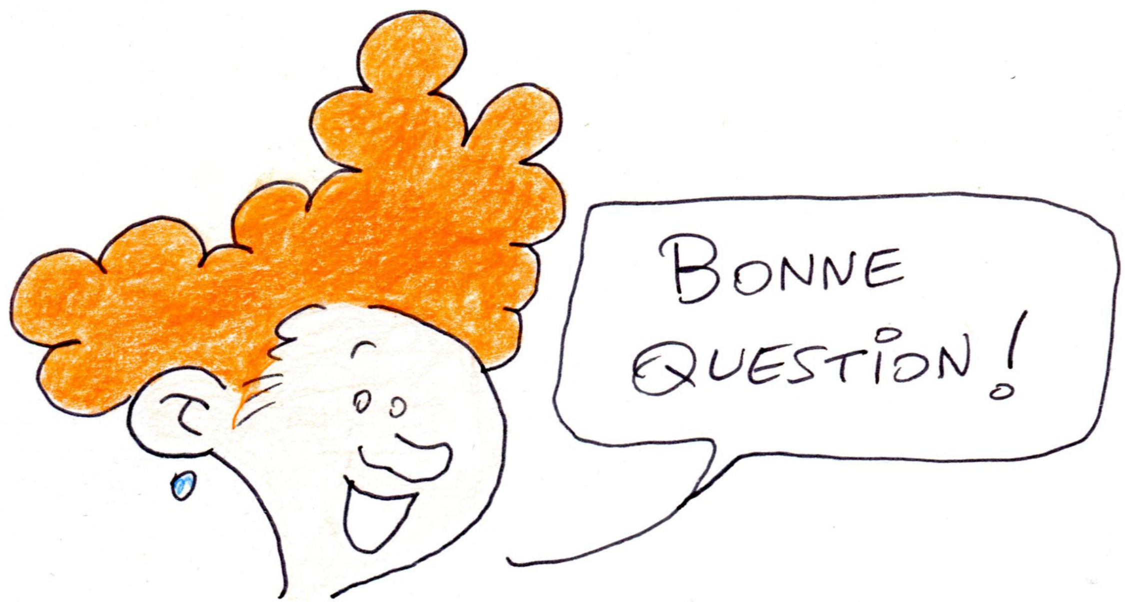
2 Stabilité pour la multiplication externe.

Si v est un élément de F et r un réel, alors rv appartient à F.

3 Le vecteur nul 0_E de E appartient à F.


L'INTÉRÊT DE TOUT ÇA EST QUE F EST ALORS LUI-AUSSI UN ESPACE VECTORIEL.

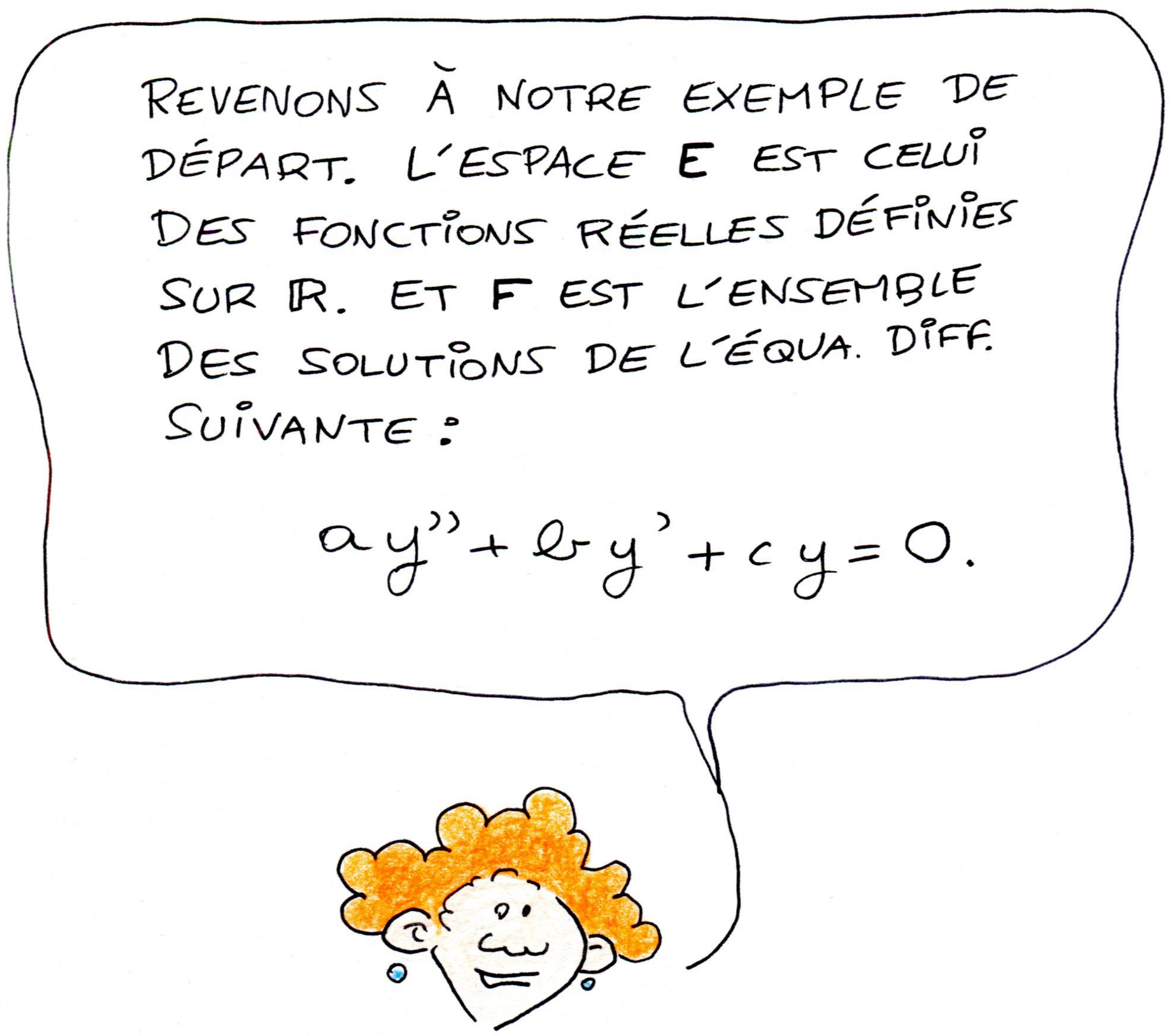
POUR FAIRE UN ESPACE VECTORIEL, IL FAUT DEUX OPÉRATIONS. QUELLES SONT LES OPÉRATIONS DE $\mathbf{F}$?



MERCI.

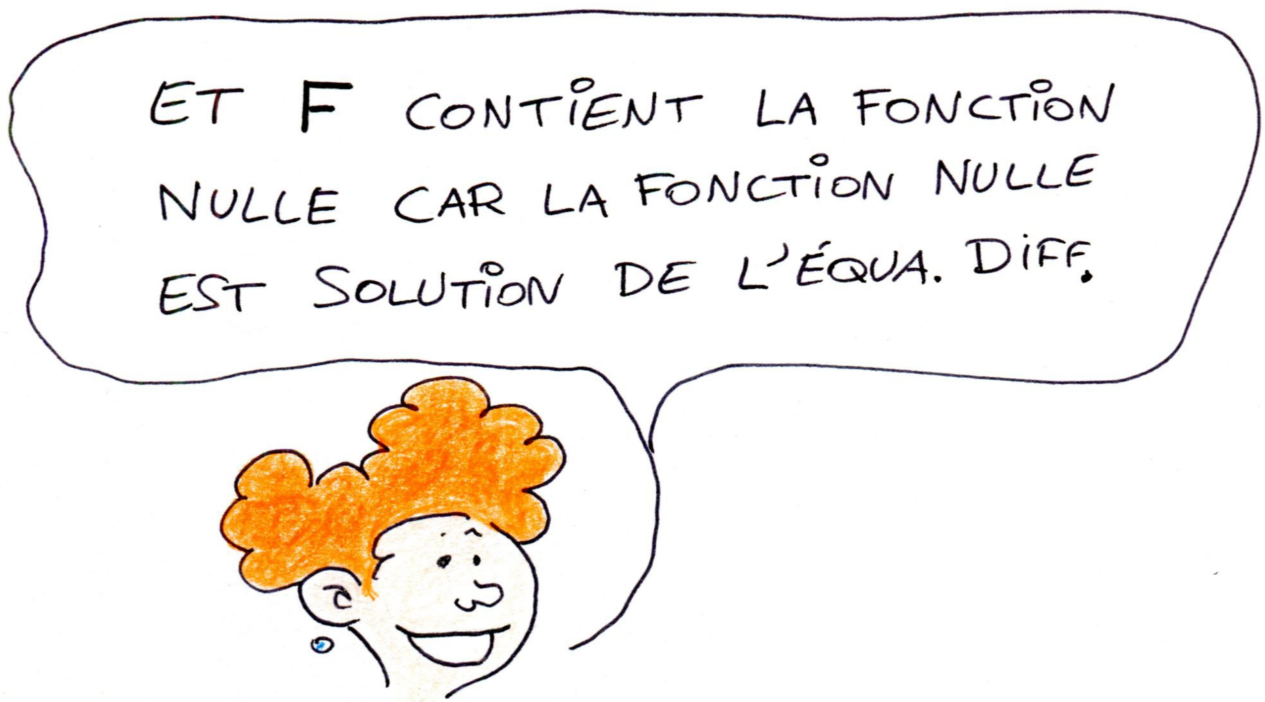

Comme F est stable pour les deux opérations de E, on peut restreindre ces opérations à F. C'est ça les deux opérations de F.
Et elles satisfont les huit axiomes ?
Oui. Ça se déduit des axiomes de E. Et pour l'existence de l'élément neutre de F, on utilise le fait que 0_E appartient à F.

ET DONC ON N'A QUE TROIS AXIOMES À VÉRIFIER AU LIEU DE HUIT.


REVENONS À NOTRE EXEMPLE DE DÉPART. L'ESPACE **E** EST CELUI DES FONCTIONS RÉELLES DÉFINIES SUR $\mathbb{R}$. ET **F** EST L'ENSEMBLE DES SOLUTIONS DE L'ÉQUA. DIFF. SUIVANTE :
$ay'' + by' + cy = 0.$

$$\forall (u,v) \in F^2 \quad u+v \in F$$

$$\forall v \in F \quad \forall r \in \mathbb{R} \quad rv \in F$$


ET F CONTIENT LA FONCTION NULLE CAR LA FONCTION NULLE EST SOLUTION DE L'ÉQUA. DIFF.

$0_E \in F$

BILAN. $\mathbf{F}$ EST UN SOUS-ESPACE VECTORIEL DE $\mathbf{E}$. ET DONC $\mathbf{F}$ EST UN ESPACE VECTORIEL (POUR LES OPÉRATIONS RESTREINTES).