ALGÈBRE LINÉAIRE (RÉVISION)

Exercices d'application

Ex 1 Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, et F et G deux sous-espaces vectoriels de E .
Montrer : $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si $F \subset G$ ou $G \subset F$.

Ex 2 Dans $\mathbb{R}^3$ rapporté à la base canonique (e_1, e_2, e_3) , on pose

$$F = \text{Vect}(e_1, e_2) \text{ et } G = \text{Vect}(e_2, e_3).$$

Caractériser les sous-espaces supplémentaires de F et de G .
Déterminer un supplémentaire commun à F et G .

Ex 3 Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ de dimension finie $n \geq 1$, et F_1 et F_2 deux sous-espaces vectoriels de E de même dimension.
Montrer qu'il existe un sous-espace vectoriel G de E tel que : $E = F_1 \oplus G = F_2 \oplus G$

Ex 4

- 1) Montrer que pour $(k, n) \in \mathbb{Z}^2$, $\int_0^{2\pi} e^{ikt} e^{-int} dt = \begin{cases} 2\pi & \text{si } k = n \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$
- 2) Pour $k \in \mathbb{Z}$, on définit une fonction f_k de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ en posant $f_k(t) = e^{ikt}$, $t \in \mathbb{R}$.
Soit $p < n$ dans $\mathbb{Z}$, montrer que $(f_p, \dots, f_n)$ est libre dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.
- 3) Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on pose pour $t \in \mathbb{R}$, $c_k(t) = \cos(kt)$ et $s_k(t) = \sin(kt)$.
Dédurre de la question précédente que $(c_1, \dots, c_n, s_1, \dots, s_n)$ forme une famille libre.

Ex 5 CENTRALE 2012 Si $k \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_k : x \in \mathbb{R} \mapsto \sin(kx)$ et $g_k : x \in \mathbb{R} \mapsto \sin^k(x)$.
Montrer que les familles $(f_k)_{k \geq 1}$ et $(g_k)_{k \geq 1}$ sont libres.

Ex 6 X 2010 Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in [0, 2\pi[$ distincts et, pour $k \in \{1, \dots, n\}$, $f_k = x \mapsto e^{i\lambda_k x}$.
Montrer que la famille $(f_1, \dots, f_n)$ est libre.

Ex 7 CCP 2017 G. Perier Soit $E = \{P \in \mathbb{R}_n[X] \mid P(0) = 0 \text{ et } P'(0) = 0\}$ ($n \geq 2$).

- 1) Montrer que E est un espace vectoriel et donner sa dimension.
- 2) Vérifier que $u : \begin{cases} E & \longrightarrow & \mathbb{R}_{n-2}[X] \\ P & \longmapsto & P(X+1) + P(X-1) - 2P(X) \end{cases}$ est un isomorphisme.

Ex 8 Effet sur les familles libres et génératrices

Soient E, F deux espaces vectoriels et $f : E \rightarrow F$ linéaire.
On suppose qu'il existe une famille génératrice de E .

- 1) Montrer que f est injective si et seulement si f transforme toute famille libre de E en une famille libre de F .
- 2) Montrer que f est surjective si et seulement s'il existe une famille génératrice de E transformée par f en une famille génératrice de F .

Ex 9 Version dimension quelconque

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ telle que pour tout $x \in E$, $(x, u(x))$ est une famille liée.

- 1) Montrer l'existence et l'unicité d'une application $\lambda : E \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{K}$ telle que

$$\forall x \in E \setminus \{0\}, u(x) = \lambda(x)x$$

- 2) Soit x et y deux vecteurs non nuls de E . Montrer que si (x, y) est une famille liée alors $\lambda(x) = \lambda(y)$.
- 3) Soit x et y deux vecteurs non nuls de E . Montrer que si (x, y) est une famille libre alors $\lambda(x) = \lambda(y)$.
INDICATION : On pourra considérer $\lambda(x+y)$.
- 4) En déduire l'existence d'un scalaire $\lambda_0 \in \mathbb{K}$ tel que $\forall x \in E, u(x) = \lambda_0 x$ c'est-à-dire que u est l'homothétie $\lambda_0 \text{id}_E$.
- 5) Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que u est une homothétie vectorielle si et seulement si pour tout $x \in E$, $(x, u(x))$ est une famille liée.

Ex 10 Soit $f : E \rightarrow F$ une application linéaire et E_1, E_2 deux sous-espaces vectoriels de E , F_1, F_2 deux sous-espaces vectoriels de F . Que pouvez-vous dire de $f(E_1 + E_2)$, $f(E_1 \cap E_2)$, $f^{-1}(F_1 + F_2)$, $f^{-1}(F_1 \cap F_2)$?

Ex 11 Vrai ou Faux ?

Soit E un $\mathbb{R}$ -e.v. (non nécessairement de dimension finie), et f et g deux endomorphismes de E .

- 1) $f \circ f = 0 \Leftrightarrow f = 0$.
- 2) $\text{Im}(g \circ f) \subset \text{Im} g$.
- 3) $\text{Im} g \subset \text{Im}(g \circ f)$.
- 4) $\text{Ker}(g \circ f) \subset \text{Ker} f$.
- 5) $\text{Ker} f \subset \text{Ker}(g \circ f)$.
- 6) $\text{Im} f \subset \text{Ker} f \Leftrightarrow f^2 = 0$.
- 7) $\text{Im} f \cap \text{Ker} f = f(\text{Ker} f^2)$.
- 8) Si f est injective, alors f est bijective.
- 9) $f(\text{Ker}(g \circ f)) = \text{Ker} g \cap \text{Im} f$.

Exercices d'entraînement

Ex 12 *Un peu de manipulation abstraite sur les projecteurs...*

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, et p et q deux projecteurs de E

- 1) Montrer les équivalences :
 $p + q$ projecteur $\Leftrightarrow p \circ q + q \circ p = 0 \Leftrightarrow p \circ q = q \circ p = 0$.
- 2) On suppose ces propositions équivalentes réalisées, exprimer $\text{Im}(p + q)$ en fonction de $\text{Im}(p)$ et $\text{Im}(q)$, et $\text{Ker}(p + q)$ en fonction de $\text{Ker}(p)$ et $\text{Ker}(q)$.

Ex 13 *X 2015* Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie, $f, g \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que

$$\text{Im } g \subset \text{Im } f \iff \exists h \in \mathcal{L}(E), g = f \circ h.$$

Ex 14 Soit E un espace vectoriel et u et v deux endomorphismes de E tels que :

$$u \circ v = u \text{ et } v \circ u = v$$

Montrer que u et v sont des projecteurs de E et ont même noyau. Etudier la réciproque.

Ex 15 *X 2011* Soit $\Phi : P \in \mathbb{R}_n[X] \mapsto P(X+1) \in \mathbb{R}_n[X]$.

- 1) Montrer que $\Phi - \text{id}$ est nilpotent.
- 2) Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ de degré n . Montrer que $(P, \Phi(P), \dots, \Phi^n(P))$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Ex 16 Soit $n \geq 2$. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E , $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension n ; pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on pose $e'_j = \sum_{i=1}^n e_i - e_j$. Montrer que la famille $\mathcal{B}' = (e'_1, \dots, e'_n)$ est une base de E . Donner les matrices de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ et de $\mathcal{B}'$ à $\mathcal{B}$.

Ex 17 Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\varphi : \begin{cases} \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_2[X] \\ P & \longmapsto & (X^2 + 1)P' - (2X - \alpha)P. \end{cases}$

- 1) Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.
- 2) Discuter selon les valeurs de α le rang de φ .
- 3) Lorsque φ n'est pas de rang 3, donner une base de $\text{Ker } \varphi$ et une base de $\text{Im } \varphi$, puis montrer que $\text{Ker } \varphi \oplus \text{Im } \varphi = \mathbb{R}_2[X]$.

Ex 18 *X 2014* Soit (v_1, v_2, v_3) une famille libre de vecteurs de $\mathbb{R}^3$. Est-ce encore une famille libre si on voit les vecteurs dans $\mathbb{C}^3$?

Ex 19 *MINES 2014* Soient A et B dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $AB - BA$ soit de rang 1. Montrer que $A(\text{Im } B) \subset \text{Im } B$ ou $A(\text{Ker } B) \subset \text{Ker } B$.

Ex 20 *MINES 2006* On considère la suite $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de polynômes définie par $P_0 = 1$, et pour $n \geq 1$, $P_n(X) = \frac{X - n + 1}{n} P_{n-1}(X)$.

Montrer que $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une base de $\mathbb{R}$.

Montrer que les composantes de $P(X)$ dans cette base sont dans $\mathbb{Z}$ si et seulement si $P(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$.

Ex 21 *X 2013* Soit E un espace vectoriel de dimension finie n .

- 1) On considère une famille $H_1, H_2, \dots, H_m$ de m hyperplans de E . Trouver une minoration de la dimension de $H_1 \cap \dots \cap H_m$.
- 2) Même question si l'on remplace « hyperplans » par « sous-espaces de dimension fixée p ».
- 3) À quelle condition sur m et p est-on certain que l'intersection n'est pas réduite à $\{0\}$?

Indication : Manipulation de formules de Grassmann, recherche de contre-exemples.

Ex 22 *X 2014* Soient E un espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer : $\dim(\text{Ker}(f)) \leq \dim(\text{Ker}(f \circ f)) \leq 2 \dim(\text{Ker}(f))$.

Exercices d'approfondissement

Ex 23 *TPE 2018 E. Martins* Soient E et F deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de dimensions finies. Soient $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, E)$ telles que

$$f \circ g \circ f = f \text{ et } g \circ f \circ g = g.$$

- 1) a) Soit A, B et C trois $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de dimensions finies, soit $u \in \mathcal{L}(A, B)$ et $v \in \mathcal{L}(B, C)$, montrer que

$$\text{rg}(v \circ u) \leq \text{rg}(v) \text{ et } \text{rg}(v \circ u) \leq \text{rg}(u).$$

- b) Comparer $\text{rg}(f)$ et $\text{rg}(g)$.
- 2) Montrer que $\text{Im } g$ et $\text{Ker } f$ sont supplémentaires dans E .
- 3) On suppose que $\dim E = \dim F = \text{rg } f = n$. Montrer que $g \circ f = \text{id}_E$. Que peut-on en déduire ?

Ex 24 CENTRALE 2015 Soit E un espace vectoriel de dimension n et A un sous-espace vectoriel de E .

- 1) Montrer que $\mathcal{A} = \{u \in \mathcal{L}(E) \mid A \subset \text{Ker}(u)\}$ est un espace vectoriel et en donner la dimension.
- 2) Montrer que $\mathcal{A} = \{u \in \mathcal{L}(E) \mid u(A) \subset A\}$ est un espace vectoriel et en donner la dimension.
- 3) On considère maintenant deux sous-espaces vectoriels F et G de E et l'application définie par

$$\Phi : \begin{cases} \mathcal{L}(E) & \longrightarrow & \mathcal{L}(F, E) \times \mathcal{L}(G, E) \\ u & \longmapsto & (u|_F, u|_G) \end{cases}$$

Montrer que si $E = F \oplus G$, Φ est un isomorphisme.

- 4) Dans le cas général, trouver $\text{Ker } \Phi$ et $\text{rg}(\Phi)$. En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que Φ soit surjective.

Même question pour Φ injective.

- 5) On suppose Φ injective.
Montrer qu'il existe F' et G' tels que $F = (F \cap G) \oplus F'$ et $G = (F \cap G) \oplus G'$.
(question de cours)
Quelle est la dimension de $\mathcal{C} = \{u \in \mathcal{L}(E) \mid u(F) \subset F \text{ et } u(G) \subset G\}$?

Ex 25 Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie.
Soient f et g deux endomorphismes de E . Montrer que

- 1) $\text{rg}(g \circ f) = \text{rg } g \Leftrightarrow E = \text{Im } f + \text{Ker } g$.
- 2) $\text{rg}(g \circ f) = \text{rg } f \Leftrightarrow \text{Im } f \cap \text{Ker } g = \{0\}$

Ex 26 Soit E et F deux espaces vectoriels de dimensions n et p respectivement. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ de rang r . Soit $\mathcal{F} = \{g \in \mathcal{L}(F, E) \mid f \circ g \circ f = 0\}$.
Montrer que $\mathcal{F}$ est un sous-espace de $\mathcal{L}(F, E)$. Déterminer sa dimension.

Ex 27 Soit E un espace vectoriel de dimension finie n sur $\mathbb{K}$, et $(u, v) \in \mathcal{L}(E)^2$ tel que $u \circ v = 0$ et $u + v \in \mathcal{GL}(E)$.
Montrer que $\text{rg}(u) + \text{rg}(v) = n$

Ex 28 Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$ et u un endomorphisme de E tel que $u^{n+1} = 0$.
Montrer que $u^n = 0$.
INDICATION : on raisonne par l'absurde et on suppose qu'il existe $x \in E$ tel que $u^n(x) \neq 0$.
Montrer que la famille $(x, u(x), \dots, u^n(x))$ est libre puis conclure.

Ex 29 Utilisation fine du théorème du rang

Soient E, F, G trois $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie.

- 1) Soient $f, g \in \mathcal{L}(E, F)$, Montrer que $|\text{rg } f - \text{rg } g| \leq \text{rg}(f + g) \leq \text{rg } f + \text{rg } g$.
- 2) Soient $f \in \mathcal{L}(E, F), g \in \mathcal{L}(F, G)$. Montrer que

$$\max(0, \text{rg } f + \text{rg } g - \dim F) \leq \text{rg}(g \circ f) \leq \min(\text{rg } f, \text{rg } g).$$

Ex 30 Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie et f dans $\mathcal{L}(E)$ un endomorphisme de E .

- 1) Vérifier que pour tout p dans $\mathbb{N}$, on a $\text{Ker } f^p \subset \text{Ker } f^{p+1}$ et $\text{Im } f^p \supset \text{Im } f^{p+1}$.
Montrer que les suites $(\text{Ker } f^p)_{p \in \mathbb{N}}$ et $(\text{Im } f^p)_{p \in \mathbb{N}}$ sont stationnaires à partir d'un certain rang.
- 2) Montrer que pour p dans $\mathbb{N}^*$, si $\text{Ker } f^p = \text{Ker } f^{p+1}$ alors pour tout q dans $\mathbb{N}$ on a

$$\text{Ker } f^p = \text{Ker } f^{p+q}.$$

- 3) Soit p dans $\mathbb{N}^*$. Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :

$$(1) \text{Im } f^p = \text{Im } f^{p+1}, (2) \text{Ker } f^p = \text{Ker } f^{p+1}, (3) E = \text{Ker } f^p \oplus \text{Im } f^p.$$

- 4) Donner des exemples d'endomorphismes f pour lesquels $E = \text{Ker } f \oplus \text{Im } f$.

Ex 31 Soient E un espace vectoriel de dimension n et $V_1, \dots, V_k$ des sous-espaces vectoriels de E . On suppose :

$$\dim V_1 + \dots + \dim V_k > n(k-1).$$

Montrer que l'intersection des V_i n'est pas réduite à $\{0\}$.

LES INDICATIONS

Ind. 13 : Avec $E = \text{Ker } f \oplus S$, on sait que $f|_S \rightarrow \text{Im } f$ est un isomorphisme.

Ind. 15 : Si P n'est pas constant, regarder le degré de $\Phi(P) - P$.

Ind. 18 : Ne pas se laisser impressionner : facile...

Ind. 19 : Soit $L = AB - BA$. Soit X un vecteur colonne dans $\text{Ker } B$. Dans le cas où $LX \neq 0$, examiner LX ...

Ind. 20 : Calculer P_n , voir que $P_n(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$. Degrés échelonnés. Si $P = \sum \alpha_k P_k$, m.q. $\forall k$, $\alpha_k \in \mathbb{Z}$.