Probabilités

Exercices d'application

Ex 1 Soit $\mathscr{A}$ une tribu d'événements d'un espace probabilisable Ω et $(A_n)_{n\geqslant 1}$ une famille de $\mathscr{A}$. Décrire à l'aide des opérations ou comparaisons ensemblistes usuelles les situations ou les événements suivants (on écrira quelque chose du genre : « $\omega \in E$ » où E est un ensemble à déterminer).

1) L'un au moins des événements A_1, A_2, A_3 est réalisé.
2) L'un seulement des événements A_1 et A_2 est réalisé.
3) A_1 et A_2 se réalisent mais pas A_3.
4) À chaque fois que A_1 est réalisé, A_2 l'est aussi.
5) A_1 et A_2 ne se produisent jamais ensemble.
6) A_1 ou A_2 se produisent toujours.
7) Tous les événements $(A_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ se réalisent.
8) L'un au moins des A_i se réalise.
9) Tous les événements A_i se réalisent à partir du rang i_0
10) Tous les événements A_i se réalisent à partir d'un certain rang.
11) Une infinité d'événements A_i se réalisent.
12) Seul un nombre fini d'événements A_i se réalise.

Sol. 1) : 1) $\omega \in A_1 \cup A_2 \cup A_3$.
2) $\omega \in (A_1 \setminus A_2) \cup (A_2 \setminus A_1)$.
3) $\omega \in (A_1 \cap A_2) \setminus A_3$.
4) $A_1 \subset A_2$.
5) $A_1 \cap A_2 = \varnothing$.
6) $A_1 \cup A_2 = \Omega$.
7) $\omega \in \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$.
8) $\omega \in \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$.
9) $\omega \in \bigcap_{i=i_0}^{\infty} A_i$.
10) $\exists N \in \mathbb{N} \qquad \omega \in \bigcap_{i=N}^{\infty} A_i$.
11) $\omega \in \bigcap_{n} \bigcup_{k\geqslant n} A_n$.
12) $\omega \in \bigcup_{n} \bigcap_{k\geqslant n} \overline{A_n}$.

Ex 2 Quatre entarteurs ont une probabilité, respectivement, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$ et $\frac{2}{5}$ de toucher leur cible.
Bernard-Henri Levy arrive près d'eux. Quelle est la probabilité qu'il soit entarté ?

Sol. 2) : La probabilité qu'il ne soit *pas* entarté est donnée par

$$q = \left(1-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{5}\right)\cdot\left(1-\frac{2}{5}\right) = \frac{9}{50}.$$

On en déduit que BHL sera entarté avec la probabilité $\frac{41}{50}$, soit plus de 80%. On ricane d'avance.

Ex 3 Soient A et B deux événements indépendants. Calculer $\mathbb{P}(A\cup B)$ en fonction de $a = \mathbb{P}(A)$ et $b = \mathbb{P}(B)$.

Sol. 3) :

$$\mathbb{P}(A\cup B) = \mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A\cap B) = a+b-ab.$$

Ex 4 *Paradoxe du chevalier de Méré.*
Antoine Gombaud, chevalier de Méré était un noble à la cour de Louis XIV, grand amateur de jeu de dés. Son problème était le suivant : lorsque l'on joue aux dés, est-il avantageux de parier d'obtenir au moins un 6 en quatre lancers ? Est-il avantageux de parier d'obtenir au moins un double 6 en vingt-quatre lancers de deux dés ?

1) Est-il avantageux d'obtenir au moins un 6 en lançant un dé quatre fois de suite ? (Autrement dit la probabilité est-elle supérieure à 1/2 ?).
2) Est-il avantageux d'obtenir au moins un double 6 en lançant deux dés $4\times 6 = 24$ fois ?

Remarque historique Blaise Pascal, avec qui le chevalier de Méré a entretenu une correspondance, a effectué le calcul de la deuxième probabilité, détrompant le chevalier de Méré. La réponse de Pascal figure dans une lettre destinée à Fermat.

Sol. 4) : Dans le premier cas, la probabilité est $1-(5/6)^4 = 0,5177$.
Dans le second elle est $1-(35/36)^2 = 0,49144...$
C'est Pascal qui a corrigé l'erreur du Chevalier de Méré.

Ex 5 Un étudiant fait en moyenne une faute d'orthographe tous les 500 mots.
Quelle est la probabilité qu'il ne fasse pas plus de 5 fautes dans un devoir comptant 2000 mots ?

Sol. 5) : On considère que les fautes sont des événements indépendants.
De plus, la probabilité de faire une faute à un mot vaut $\dfrac{1}{500}$.
Soit X la variable aléatoire égale au nombre de fautes dans un devoir de 2000 mots : $X \hookrightarrow \mathcal{B}(2000, \dfrac{1}{500})$.
Remarque
On peut approcher la loi binomiale par la loi de Poisson $\mathcal{P}(4)$
(les experts prétendent que c'est parceque $2000 \geqslant 30$, $\dfrac{1}{500} \leqslant 0,1$, et $4 < 15$).
Donc $\mathbb{P}(X \leqslant 5) \approx e^{-4}\displaystyle\sum_{k=0}^{5}\frac{4^k}{k!} \approx 0,785$ par une table de loi de Poisson.

Ex 6 Le problème du tricheur.
Un population contient une proportion $p \in [0,1]$ de tricheurs. On fait tirer une carte d'un jeu de 52 cartes à un individu choisi au hasard dans la population, s'il s'agit d'un tricheur, cet individu retournera un as. Quelle est la probabilité que l'individu retourne un as ?

Sol. 6) : T =« l'individu est un tricheur ».
On a $\mathbb{P}(\text{retour d'un as}) = \mathbb{P}(\text{retour d'un as}|\ T) \times \mathbb{P}(T) + \mathbb{P}(\text{retour d'un as}|\ \overline{T}) \times \mathbb{P}(\overline{T})$
soit $p + \dfrac{4}{52}(1-p) = \boxed{\dfrac{1+12p}{13}.}$

Ex 7 **Tournoi potentiellement infini**
Trois joueurs A, B et C s'affrontent dans des parties à deux successives avec les règles suivantes
• à chaque partie deux joueurs s'affrontent et chacun peut gagner avec la même probabilité
• le gagnant de la partie précédente et le joueur n'ayant pas participé s'affrontent à la partie suivante
• est déclaré vainqueur (et le jeu s'arrête) lorsqu'un joueur gagne deux parties successives.

1) Pour $n \geqslant 1$, on note F_n =« le jeu comporte au moins n parties ».
Décrire l'événement $\displaystyle\bigcap_{n\geqslant 1} F_n$.

2) Exprimer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(F_n)$ en terme de probabilité.

3) Pour $n \geqslant 1$, on note T_n =« le jeu se termine à la n^e partie ».
- **a)** Comparer T_n, F_n et F_{n+1}.
- **b)** Que vaut pour $n \geqslant 2$, $\mathbb{P}(T_n \mid F_n)$?
- **c)** Montrer que pour $n \geqslant 2$, $\mathbb{P}(T_n) = \dfrac{1}{2}\mathbb{P}(F_n)$ puis que $\mathbb{P}(F_{n+1}) = \dfrac{1}{2}\mathbb{P}(F_n)$.
- **d)** En déduire que pour $n \geqslant 2$, $\mathbb{P}(F_n) = \dfrac{1}{2^{n-2}}$.

4) Montrer que le jeu se termine en un nombre fini d'étapes presque sûrement.

5) **On suppose dans cette question et la suivante que les joueurs** A **et** B **s'affrontent en premier**.
On suppose que le joueur A gagne la première partie.
On note N le nombre de parties du tournoi (c'est une variable aléatoire).
Montrer que {N est multiple de 3} = {le joueur C gagne}
Montrer que la probabilité que le joueur C gagne à la fin de ce tournoi vaut $\dfrac{2}{7}$.

6) On ne suppose plus que le joueur A gagne la première partie, calculer la probabilité pour chacun des joueurs de gagner le tournoi.

Sol. 7) :

1) $\boxed{\displaystyle\bigcap_{n\geqslant 1} F_n = \text{« le jeu ne s'arrête jamais »}}$

2) La suite d'événements $(F_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante donc par continuité décroissante,
$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(F_n) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{n\geqslant 1} F_n\right).$$

3)
- **a)** $T_n = F_n \setminus F_{n+1}$
- **b)** Pour $n \geqslant 2$, $\mathbb{P}(T_n \mid F_n) = \dfrac{1}{2}$ car il y a une chance sur deux que celui qui avait gagné l'avant-dernière partie gagne la dernière partie.

c) $\mathbb{P}(T_n) = \mathbb{P}(T_n \mid F_n) \times \mathbb{P}(F_n) = \dfrac{1}{2}\mathbb{P}(F_n)$ car $F_n \cap T_n = T_n$.

Or $\mathbb{P}(T_n) = \mathbb{P}(F_n) - \mathbb{P}(F_{n+1})$ donc $\mathbb{P}(F_{n+1}) = \dfrac{1}{2}\mathbb{P}(F_n)$.

d) $\mathbb{P}(F_2) = 1$, donc par récurrence immédiate, pour $n \geqslant 2$, $\mathbb{P}(F_n) = \dfrac{1}{2^{n-2}}$.

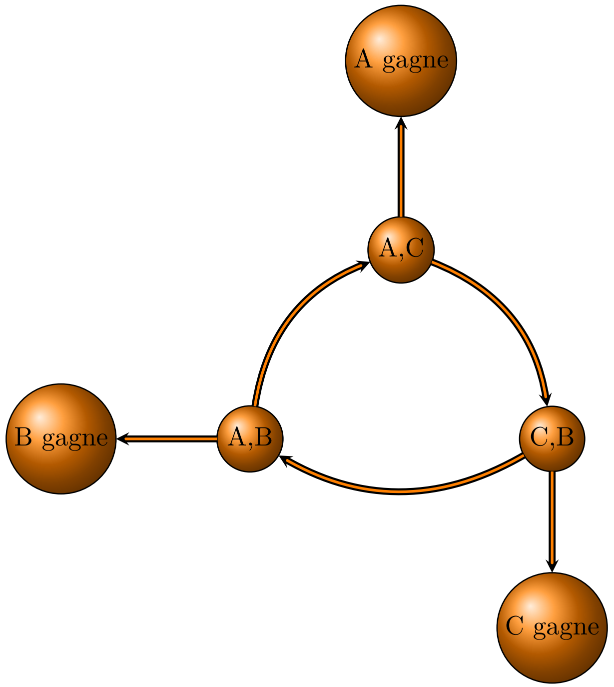
4) $\mathbb{P}\left(\bigcap_{n\geqslant 1} F_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(F_n) = 0$ donc $\mathbb{P}\left(\bigcup_{n\geqslant 1} \overline{F_n}\right) = 1$.

Or $\bigcup_{n\geqslant 1} \overline{F_n}$ =« le jeu se termine en un nombre fini d'étapes ».

Autre approche : « le jeu se termine en un nombre fini d'étapes »= $\bigcup_{n\geqslant 2} T_n$.

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n\geqslant 2} T_n\right) = \sum_{n=2}^{+\infty} \mathbb{P}(T_n) = 1.$$

5) On fait un petit schéma pour s'en convaincre.



$\mathbb{P}(T_n) = \mathbb{P}(F_n) - \mathbb{P}(F_{n+1}) = \dfrac{1}{2^{n-2}} - \dfrac{1}{2^{n-1}}$.

$$\mathbb{P}(C \text{ gagne}) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(T_{3n}) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{3n-2}} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{3n-1}} = \frac{2}{7}$$

6) $\mathbb{P}(C) = \mathbb{P}(C \mid A \text{ en premier}) \times \mathbb{P}(A \text{ en premier}) + \mathbb{P}(C \mid B \text{ en premier}) \times \mathbb{P}(B \text{ en premier})$
$= \dfrac{2}{7} \times \dfrac{1}{2} + \dfrac{2}{7} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{2}{7}$ (ce qui se comprend aisément vu la symétrie du rôle joué par A et B.

$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B)$ et $\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) = 1$ donc $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = \dfrac{1}{2} \times \left(1 - \dfrac{2}{7}\right) = \dfrac{5}{14}$.

Ex 8 **a)** Montrer la *formule du crible de Poincaré*

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{1\leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leqslant n} \mathbb{P}\left(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cdots \cap A_{i_k}\right).$$

b) Un facteur possède n lettres adressées à n destinataires distincts. Il est totalement ivre et poste au hasard une lettre par boîte.
i) Quelle est la probabilité d'obtenir la bonne répartition ?
ii) Quelle est la probabilité qu'une lettre au moins arrive à la bonne adresse ? Donner la limite lorsque n tend vers $+\infty$.
iii) Quelle est la probabilité qu'aucune lettre n'arrive à destination ?
iv) Quel est le nombre d_n de manières différentes de poser les lettres de telle sorte qu'aucune n'arrive à destination ?

Sol. 8) : 1) Avec les fonctions indicatrices = le plus rapide sinon par récurrence sur k.

$$\mathbb{1}_{\bigcup_{i=1}^{n} A_i} = 1 - \prod_{i=1}^{n} (1 - \mathbb{1}_{A_i}) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{1\leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leqslant n} \mathbb{1}_{A_{i_1} \cap A_{i_2} \cdots \cap A_{i_k}}$$

et on passe à l'espérance.
2)
i) $\dfrac{1}{n!}$
ii) Soit A_i l'évènement : "la lettre i est dans la boîte i". L'evènement E : "une lettre au moins est à la bonne adresse" est $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$. Lui appliquer la formule du crible. $p_n =$

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \binom{n}{k} \frac{(n-k)!}{n!} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{1}{k!} \underset{n\to+\infty}{\to} 1 - e^{-1} \simeq 0,632$$

iii) $1 - p_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{1}{k!} \underset{n \to +\infty}{\to} e^{-1}$

iv) $d_n = n! \cdot (1 - p_n) = n! \cdot \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{1}{k!}$.

Ex 9 X 2017 RMS

Une urne contient une boule blanche et une deuxième boule aléatoire, blanche ou noire, chaque couleur ayant une probabilité 1/2. On effectue deux tirages successifs sans remise. Calculer la probabilité d'obtenir une boule blanche au deuxième tirage sachant que le premier tirage a donné une boule blanche.

Sol. 9) : Définissons les événements suivants
B_1 = « on tire une boule blanche à la première étape »,
B_2 = « on tire une boule blanche à la deuxième étape »
et la variable aléatoire X valant N ou B suivant que la boule aléatoire est noire ou blanche.

$\mathbb{P}(B_2 \mid B_1) = \dfrac{\mathbb{P}(B_2 \wedge B_1)}{\mathbb{P}(B_1)}$

$\mathbb{P}(B_1) = \mathbb{P}(B_1 \mid X = N) \times \frac{1}{2} + \mathbb{P}(B_1 \mid X = B) \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$.

$\mathbb{P}(B_2 \wedge B_1) = \mathbb{P}(B_2 \wedge B_1 \wedge X = B) = \mathbb{P}(B_2 \wedge B_1 \mid X = B) \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

Donc $\mathbb{P}(B_2 \mid B_1) = \dfrac{1/2}{3/4} = \dfrac{2}{3}$

Ex 10 Dans une urne, il y a 10 boules blanches et 5 boules noires.
Soit $i \in [\![1, 10]\!]$ fixé.

1) On suppose dans cette question que le tirage est avec remise.
Pour $k \in [\![i, +\infty[\![$, on définit la probabilité p_k qu'au k-ième tirage, une i-ème boule blanche soit tirée
(on a donc, en particulier, tiré $i - 1$ boules blanches auparavant)

- **a)** Calculer p_i et p_{i+1}.
- **b)** (☕) Calculer p_k pour $k \geqslant i$ de manière générale.

2) Dans cette question, le tirage est **sans** remise.
Pour $k \in [\![i, i+5]\!]$, on définit la probabilité q_k qu'au k-ième tirage, une i-ème boule blanche soit tirée.

- **a)** Calculer q_i et q_{i+1}.
- **b)** (☕) Calculer q_k pour $k \in [\![i, i+5]\!]$ de manière générale.

Sol. 10) : **1)** Tous les tirages sont indépendants les uns des autres. La probabilité d'avoir une boule blanche est donc $10/15 = 2/3$.

a) $p_i = \left(\frac{2}{3}\right)^i$ et $p_{i+1} = i \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^i$ (position de LA boule noire).

b) Ainsi, un tirage favorable vérifie

la k-ième est blanche et, sur les $k - 1$ premiers, $i - 1$ sont blanches et les autres noires donc

$$\boxed{p_k = \binom{k-1}{i-1} \left(\frac{2}{3}\right)^i \left(\frac{1}{3}\right)^{k-i}}$$

On peut représenter des événements par des **mots** `BNNBNB` etc.

2) **a)** Plusieurs explications simples sont possibles.

$\boxed{q_i}$

- **Explication n°1**

On utilise la formule des probabilités composées.

$$\begin{aligned} q_i &= \mathbb{P}(B_1 \cap B_2 \cap \cdots \cap B_i) \\ &= \mathbb{P}(B_1) \times \mathbb{P}(B_2 \mid B_1) \times \mathbb{P}(B_3 \mid B_1 \cap B_2) \times \cdots \times \mathbb{P}(B_i \mid B_1 \cap B_2 \cap \cdots \cap B_{i-1}) \\ &= \frac{10}{15} \times \frac{9}{14} \times \cdots \times \frac{10 - i + 1}{15 - i + 1}. \end{aligned}$$

- **Explication n°2**

On modélise par des mots écrits de 15 lettres avec des lettres différentes $B_1, \cdots, B_{10}$ et $N_1, \cdots, N_5$ et on réalise que l'on a équiprobabilité donc

$$\begin{aligned} q_i &= \frac{\left[\binom{10}{i} \times i!\right] \times (15 - i)!}{15!} \\ &= \frac{\binom{15-i}{10-i}}{\binom{15}{10}} \end{aligned}$$

- **Explication n°3** (la meilleure à mon goût)

On modélise par des mots écrits de 15 lettres des lettres B et N **sans différencier les boules. On se persuade que chaque mot a autant de chance de se réaliser qu'un autre, donc que l'on a bien une situation d'équiprobabilité.**

Les i premières boules sont blanches, on place ce qui reste.

$$q_i = \frac{\binom{15-i}{10-i}}{\binom{15}{10}}.$$

$\boxed{q_{i+1}}$

On reprend la représentation en mots de la troisième explication. Il y a $\binom{15}{10}$ mots possibles.
On a une boule noire à placer avant la i-ème boule ce qui fait i placements possibles.

$$q_{i+1} = \frac{i\cdot\binom{15-i-1}{10-i}}{\binom{15}{10}}.$$

Soit $k \in [\![i, i+5]\!]$. Un tirage vérifie « on a tiré la i-ième boule au k-ième tirage » si l'on a :
une boule blanche en position k ;
$i-1$ boules blanches parmi $k-1$ avant ;
$10-i$ boules blanches parmi les $15-k$ derniers.
Ainsi,

$$\boxed{q_k = \frac{\binom{k-i}{i-1}\cdot\binom{15-k}{10-i}}{\binom{15}{10}}}$$

Exercices d'approfondissement

Ex 11 Mines 2018 R. Dehont
(Borel Cantelli)
Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'événements mutuellement indépendants sur $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$. On pose $A = \bigcap_{p\in\mathbb{N}}\bigcup_{n\geqslant p} A_n$.

1) Montrer que A est un événement.
Ecrire « en français » une condition sur les (A_n) pour que A soit réalisé.

2) On suppose que la série $\sum_{n\geqslant 0}\mathbb{P}(A_n)$ converge.
Montrer que $\mathbb{P}(A) = 0$.
(remarque l'hypothèse de mutuelle indépendance ne sert pas ici)

3) On suppose que la série $\sum_{n\geqslant 0}\mathbb{P}(A_n)$ diverge.
Montrer que $\mathbb{P}(A) = 1$.
Indication utiliser que $e^{-x} \geqslant 1 - x$.

Sol. 11) :

1) une infinité d'événement A_n sont réalisés.

2) Par continuité décroissante

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{p\in\mathbb{N}}\bigcup_{n\geqslant p} A_n\right) = \lim_{p\to+\infty}\mathbb{P}\left(\bigcup_{n\geqslant p} A_n\right)$$

Or $\mathbb{P}\left(\bigcup_{n\geqslant p} A_n\right) \leqslant \sum_{n=p}^{+\infty}\mathbb{P}(A_n) = R_{p-1} \underset{p\to+\infty}{\to} 0$ (reste de la série convergente).

Ainsi, $\mathbb{P}\left(\bigcap_{p\in\mathbb{N}}\bigcup_{n\geqslant p} A_n\right) = 0$.

3) Regardons $\overline{A} = \bigcup_{p\in\mathbb{N}}\bigcap_{n\geqslant p}\overline{A_n}$.
Par continuité croissante,

$$\mathbb{P}\left(\overline{A}\right) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{p\in\mathbb{N}}\bigcap_{n\geqslant p}\overline{A_n}\right) = \lim_{p\to+\infty}\mathbb{P}\left(\bigcap_{n\geqslant p}\overline{A_n}\right).$$

Or par continuité décroissante,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\bigcap_{n\geqslant p}\overline{A_n}\right) &= \lim_{N\to+\infty}\mathbb{P}\left(\bigcap_{n=p}^{N}\overline{A_n}\right)\\ &= \lim_{N\to+\infty}\prod_{n=p}^{N}\mathbb{P}\left(\overline{A_n}\right)\\ &= \lim_{N\to+\infty}\prod_{n=p}^{N}\left(1-\mathbb{P}\left(A_n\right)\right)\end{aligned}$$

Or $1-\mathbb{P}(\mathrm{A}_n) \leqslant \exp(-\mathbb{P}(\mathrm{A}_n))$, donc

$$\prod_{n=p}^{\mathrm{N}}(1-\mathbb{P}(\mathrm{A}_n)) \leqslant \exp\left(-\sum_{n=p}^{\mathrm{N}}\mathbb{P}(\mathrm{A}_n)\right) \underset{\mathrm{N}\to+\infty}{\to} 0 \text{ car } \lim_{x\to+\infty} e^{-x}=0.$$

Ainsi, $\mathbb{P}\left(\overline{\mathrm{A}}\right)=0$ donc $\mathbb{P}(\mathrm{A})=1$.

Ex 12 *Une application du lemme de Borel-Cantelli.*
Sur un ensemble dénombrable probabilisé, il n'existe pas de suite infinie de parties A_n, $n\in\mathbb{N}$, indépendantes dans leur ensemble et de même probabilité $p\in]0,1[$.

Application
Il n'existe pas d'ensemble *dénombrable* Ω et de probabilité P sur $\mathscr{P}(\Omega)$, de suite de variables aléatoires X_n, $n\in\mathbb{N}$, sur Ω indépendantes et de même loi non triviale. En effet, la loi étant non triviale, il existe U une partie de $\mathbb{R}$ telle que $\mathbb{P}(\mathrm{X}_0\in\mathrm{U})\in]0,1[$. Notons, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\mathrm{A}_n=\mathrm{X}_n^{-1}(\mathrm{U})$. Alors toutes les parties A_n de Ω sont indépendantes et de même probabilité d'où la contradiction.

Sol. 12) : Indication Montrer que l'ensemble des ω appartenant à une infinité des A_k (i.e. pour lesquels il existe une infinité *d'indices* k tels que $\omega\in\mathrm{A}_k$) est de probabilité 1. Soit ω l'un d'entre eux. Montrer que $\mathrm{P}(\omega)=0$.
Comme $\sum_n \mathrm{P}(\mathrm{A}_n)=+\infty$, d'après le lemme de Borel-Cantelli fort (le deuxième point), l'ensemble des ω appartenant à une infinité des A_k (i.e. pour lesquels il existe une infinité *d'indices* k tels que $\omega\in\mathrm{A}_k$) est de probabilité 1. Soit ω l'un d'entre eux. Alors $\omega\in\mathrm{A}_{k_1}\cap\mathrm{A}_{k_2}\cap\ldots$ (une infinité d'indices distincts). Mais alors, par indépendance des A_{k_j},

$$\mathrm{P}(\omega)=\prod_{j\in\mathbb{N}}\mathrm{P}(\mathrm{A}_{k_j})=0,$$

car toutes ces probabilités sont *égales* et entre 0 et 1 strictement.
Mais l'ensemble des ω appartenant à une infinité des A_k étant dénombrable, il serait de probabilité nulle, contradiction.

Ex 13
Ruine du joueur
Deux joueurs, nommés A et B, s'affrontent dans une sanglante partie de *pile* ou *face*. Le joueur A dispose au départ de n euros, le joueur B de $\mathrm{N}-n$ euros. Le jeu se déroule en une succession de manches opposant A et B ; à chaque manche, A gagne avec la probabilité $p\in]0,1[$. Le perdant d'une manche donne un euro au vainqueur, et le jeu s'arrête avec la ruine d'un joueur.
On note a_n la probabilité que A gagne le jeu quand sa fortune de départ est de n euros.

1) Trouver une relation de récurrence entre a_n, a_{n-1} et a_{n+1}.
2) En déduire a_n. On séparera les cas $p\neq 1/2$ et $p=1/2$.
3) En déduire que la partie se termine presque sûrement.

Sol. 13) : **1)** C'est subtil car de manière cachée on change d'univers en changeant la valeur de n au départ, d'où ma notation $\mathbb{P}_n$.
Notons A l'événement « A gagne » et G_1 : « A gagne la première manche ».
La clé (un peu arnaque car c'est plus subtil qu'il y parait) est de dire que pour $n\in[\![1,\mathrm{N}-1]\!]$,

$$\mathbb{P}_n(\mathrm{A}\mid\mathrm{G}_1)=\mathbb{P}_{n+1}(\mathrm{A})\text{ et }\mathbb{P}_n(\mathrm{A}\mid\overline{\mathrm{G}_1})=\mathbb{P}_{n-1}(\mathrm{A})$$

D'où

$$\begin{aligned}a_n=\mathbb{P}_n(\mathrm{A})&=\mathbb{P}_n(\mathrm{A}\mid\mathrm{G}_1)\,\mathbb{P}(\mathrm{G}_1)+\mathbb{P}_n(\mathrm{A}\mid\overline{\mathrm{G}_1})\,\mathbb{P}(\overline{\mathrm{G}_1})\\&=p\,a_{n+1}+q\,a_{n-1}.\end{aligned}$$

$a_n=(1-p)\,a_{n-1}+p\,a_{n+1}$ de polynôme caractéristique $p\mathrm{X}^2-\mathrm{X}+1-p$.
Les racines sont 1 et $\lambda=\dfrac{1-p}{p}$.

2) $a_0=0$ et $a_\mathrm{N}=1$ et on cherche a_n pour $n\in[\![0,\mathrm{N}]\!]$.
Si $p=1/2$, on a $a_n=\alpha n+\beta$ et donc

$$\forall n\in[\![0,\mathrm{N}]\!]\qquad a_n=\frac{n}{\mathrm{N}}.$$

Si $p\neq 1/2$, on recherche les solutions sous la forme

$$a_n=\alpha+\beta\left(\frac{1-p}{p}\right)^n$$

ce qui, avec les conditions $a_0=0$ et $a_\mathrm{N}=1$ donne, en

$$a_n=\frac{1-\lambda^n}{1-\lambda^\mathrm{N}}.$$

On vérifie que, si $p\to 1/2$, alors $\lambda\to 1$ et un développement limité redonne le résultat précédent.

3) Le même raisonnement donne, en notant b_n la probabilité que B gagne sachant que sa fortune de départ est n, la même expression en changeant p en $1-p$ ou, ce qui revient au même, λ et λ^{-1} :

$$b_n=\frac{1-\left(\dfrac{p}{1-p}\right)^n}{1-\left(\dfrac{p}{1-p}\right)^\mathrm{N}}=\frac{1-\lambda^{-n}}{1-\lambda^{-\mathrm{N}}}$$

et alors, en réduisant au même dénominateur :

$$a_n + b_{\mathrm{N}-n} = 1.$$

Ex 14

Un candidat est soumis à une série de questions indépendantes. Ce dernier a une chance sur trois de répondre correctement à chacune des questions. Le test est terminé lorsqu'il répond **consécutivement** à k questions ($k \geqslant 1$).
Soit $n \geqslant 1$, on pose $p_n = \mathbb{P}\,(\text{le test s'arrête après } n \text{ questions posées})$.

1) Donner p_n pour $1 \leqslant n \leqslant k$.
2) Montrer que pour $n \geqslant k$, $p_{n+1} = \dfrac{2}{3}\displaystyle\sum_{i=0}^{k-1}\dfrac{p_{n-i}}{3^i}$.
3) Dans la cas $k = 2$, donner p_n.
4) (rab M. Rezzouk) Quelle est la probabilité que le test dure indéfiniment ?
5) (rab M. Rezzouk) On note T la variable aléatoire donnant le nombre de questions posées avant de terminer le jeux.
(on définit bien cette variable aléatoire presque sûrement d'après ce qui précède).
En admettant que T admet une espérance, calculer $\mathbb{E}\mathrm{T}$.

Sol. 14) :

1) Pour $n \in [\![1, k-1]\!]$, $p_n = 0$.
$p_k = \dfrac{1}{3^k}$.
2) On introduit $\mathrm{E}_i =$« première réponse **incorrecte** à la i^e question » pour $i \geqslant 1$.
On a $\mathbb{P}\,(\mathrm{E}_i) = \left(\dfrac{1}{3}\right)^{i-1}\dfrac{2}{3}$.
On remarque (point-clé) que pour $n \geqslant k$,
$\mathbb{P}$(test passé à la $(n+1)^e$ question| E_i)= $\mathbb{P}\,(\mathrm{T}_{n+1} \mid \mathrm{E}_i) = p_{n+1-i}$.
De plus $\mathrm{T}_{n+1} = \displaystyle\bigsqcup_{i=1}^{k}(\mathrm{T}_{n+1} \cap \mathrm{E}_i)$.
Donc, pour $n \geqslant k$,
$$p_{n+1} = \sum_{i=1}^{k}\mathbb{P}(\text{test passé à la } (n+1)^e \text{ question}|\ \mathrm{E}_i)\times\mathbb{P}(\mathrm{E}_i) + 0 = \frac{2}{3}\sum_{i=1}^{k}\frac{p_{n+1-i}}{3^{i-1}},$$
ce que se réindexe en $p_{n+1} = \dfrac{2}{3}\displaystyle\sum_{i=0}^{k-1}\dfrac{p_{n-i}}{3^i}$.

3) On a $p_{n+1} = \dfrac{2}{3}p_n + \dfrac{2}{9}p_{n-1}$ donc (...)
$$p_n = \frac{\sqrt{3}-1}{4\sqrt{3}}\left(\frac{1+\sqrt{3}}{3}\right)^n + \frac{\sqrt{3}+1}{4\sqrt{3}}\left(\frac{1-\sqrt{3}}{3}\right)^n.$$

4) La probabilité que le test se termine en un temps fini est $\mathrm{S} = \displaystyle\sum_{n=k}^{+\infty}p_n$.
On a $\mathrm{S} \in]0, 1]$. Montrons que $\mathrm{S} = 1$, donc que le test se termine presque sûrement.
On a pour $n \geqslant k$, $p_{n+1} = \dfrac{2}{3}\displaystyle\sum_{i=0}^{k-1}\dfrac{p_{n-i}}{3^i}$. et $p_k = \dfrac{1}{3^k}$ et 0 avant, donc en sommant
$$\begin{aligned}\mathrm{S} &= \frac{1}{3^k} + \frac{2}{3}\mathrm{S}\sum_{i=0}^{k-1}\frac{1}{3^i}\\ &= \frac{1}{3^k} + \frac{2}{3}\frac{1-1/3^k}{2/3}\mathrm{S}\end{aligned}$$
soit $\dfrac{1}{3^k} = \mathrm{S}\dfrac{1}{3^k}$ donc $\mathrm{S} = 1$.

5) Notons $p = \dfrac{1}{3}$ et $q = 1-p$, on a pour $n \geqslant k$, $p_{n+1} = q\displaystyle\sum_{i=0}^{k-1}p_{n-i}\cdot p^i$, $p_0 = \cdots = p_{k-1} = 0$ et $p_k = p^k$.
En supposant la convergence, on a
$$\begin{aligned}\mathbb{E}\mathrm{T} = \sum_{n=k}^{+\infty}np_n &= kp^k + \sum_{n=k}^{+\infty}(n+1)p_{n+1}\\ &= kp^k + q\sum_{i=0}^{k-1}\left(p^i\cdot\sum_{n=k}^{+\infty}(n+1)p_{n-i}\right)\\ &= kp^k + q\sum_{i=0}^{k-1}\left(p^i\cdot\left[\sum_{n=k}^{+\infty}(n-i)p_{n-i} + \sum_{n=k}^{+\infty}(i+1)p_{n-i}\right]\right)\\ &= kp^k + q\sum_{i=0}^{k-1}\left(p^i\cdot[\mathbb{E}\mathrm{T} + (i+1)]\right)\\ &= kp^k + \mathbb{E}\mathrm{T}\cdot(1-p^k) + (1-p)\sum_{i=0}^{k-1}\left(p^i\cdot(i+1)\right)\end{aligned}$$

Or $(1-p)\sum_{i=0}^{k-1}\left(p^i\cdot(i+1)\right)=\sum_{i=0}^{k-1}\left(p^i\cdot(i+1)\right)-\sum_{i=0}^{k-1}\left(p^{i+1}\cdot(i+1)\right)=\sum_{i=0}^{k-1}\left(p^i\cdot(i+1)\right)-\sum_{i=1}^{k}\left(p^i\cdot i\right)=\sum_{i=0}^{k-1}p^i-kp^k$

Donc $\mathbb{E}\mathrm{T}=\mathbb{E}\mathrm{T}\cdot(1-p^k)+\sum_{i=0}^{k-1}p^i$ d'où $\mathbb{E}\mathrm{T}=\frac{1}{p^k}\sum_{i=0}^{k-1}p^i=\boxed{\frac{1}{p}+\frac{1}{p^2}+\cdots+\frac{1}{p^k}}$.

Ex 15 X 2016 RMS
(utilise le **principe de réflexion**)
Lors d'une élection, 700 électeurs votent pour A et 300 pour B. Quelle est la probabilité que, pendant le dépouillement, A soit toujours strictement en tête ?

Sol. 15) : On peut considérer que le dépouillement est une marche aléatoire qui avance de un pas à droite si le bulletin rencontré est A, un pas vers le haut s'il est B. Chaque marche est représentée par un chemin en escalier, croissant de $\mathrm{O}=(0,0)$ à $\mathrm{C}=(700,300)$ (voir figure 1), et ces chemins sont équiprobables.
Un chemin où A domine toujours (strictement) commence par $\alpha=(1,0)$ et continue sans toucher la diagonale (OD). Pour compter les chemins de α à C qui ne touchent pas (OD), il suffit de compter ceux qui touchent (OD). Or le principe de réflexion nous dit que le nombre de ces derniers est égal au nombre de chemins (toujours montant ou à droite) qui vont de $\alpha'=(0,1)$ à C. Voir figure (1).
En effet, pour tout chemin joignant $\alpha=(1,0)$ au point C et coupant la diagonale (OD), on lui associe son « symétrique partiel » par rapport à la diagonale (OD), en effectuant la transformation illustrée par la figure. On considère le premier point du chemin sur la diagonale (OD) et on symétrise la première partie en gardant intacte la seconde partie du chemin. On obtient un chemin joignant $\alpha'=(0,1)$ à C.
On se convaincra que cette transformation établit une bijection entre ces chemins (qui coupent nécessairement la diagonale (OD) au moins une fois) et ceux joignant α à C et coupant la diagonale (OD).
Le nombre de ces derniers est $\binom{999}{299}$. Le nombre de chemins où A domine toujours est donc $\binom{999}{700}-\binom{999}{299}=\binom{999}{300}-\binom{999}{299}$. L'équiprobabilité montrée plus haut entraîne que la probabilité demandée est :

$$\begin{aligned}\mathrm{P}&=\frac{\binom{999}{300}-\binom{999}{299}}{\binom{1000}{300}}=1-2\times\frac{\binom{999}{299}}{\binom{1000}{300}}\\&=1-2\times\frac{3}{10}=\frac{4}{10}.\end{aligned}$$

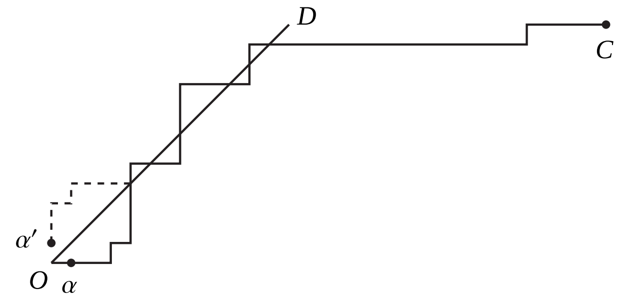


FIGURE 1 – Principe de réflexion (rectangle de 700 sur 300).

Ex 16 CENTRALE 2017 G. Curé et M. Konaté
(sans prép.) Soit $2n$ équipes de foot, n de $1^{\text{ère}}$ division, et n de 2^{nde} division.
On fait n matchs en même temps.

1) Donner la probabilité que chaque match oppose une équipe de $1^{\text{ère}}$ division à une équipe de 2^{nde} division.

2) Équivalent quand n tend vers $+\infty$.

3) Donner la probabilité que les n matchs opposent 2 équipes de même division.

4) Équivalent quand n tend vers $+\infty$.

Sol. 16) :

1) Modèle 1 : on choisit le premier match, le second etc. (on ordonne les n matchs). Cela donne

$$\binom{2n}{2}\times\binom{2n-2}{2}\times\cdots\times\binom{2}{2}=\frac{(2n)!}{2^n}\text{ cas possibles.}$$

La situation est équiprobable. Le nombre de cas favorables est $n!\times n!$ (on associe $[\![1,n]\!]$ à $[\![1,n]\!]$ de façon bijective et on mélange l'ordre des matchs).
D'où la probabilité

$$\frac{(n!)^2}{\frac{(2n)!}{2^n}}=\frac{2^n}{\binom{2n}{n}}$$

Modèle 2 (Swami) : on regarde tous les couples, il y en a $\binom{2n}{2}$ et on en prend n (mais il n'y a pas d'ordre), cela fait $\binom{\binom{2n}{2}}{n}$ mais c'est **FAUX** car une même équipe pourrait jouer dans plusieurs matchs en même temps.

2) On utilise l'équivalent de Stirling, on obtient $\binom{2n}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{2^{2n}}{\sqrt{\pi n}}$ donc $\mathbb{P} = \dfrac{\sqrt{\pi n}}{2^n} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$.

3) On compte le nombre de cas favorables (en ayant ordonné les matchs).
si n est impair, la probabilité est nulle !
On suppose donc n pair, $n = 2p$.

On obtient en nombres $n-$matchs sans ordre $\left(\dfrac{\frac{(2p)!}{2^p}}{p!}\right)^2$ (on reprend le calcul précédent pour $p = n$).
Puis avec ordre, on multiplie par $n!$
Au final, la probabilité recherchée vaut

$$\mathbb{P} = \frac{\left(\dfrac{\frac{(2p)!}{2^p}}{p!}\right)^2 \times n!}{\dfrac{(2n)!}{2^n}} = \left(\frac{(2p)!}{2^p}\right)^2 \times \binom{2p}{p} \times \frac{2^{2p}}{(4p)!} = \frac{\binom{2p}{p}}{\binom{4p}{2p}}.$$

4) $\binom{2n}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{2^{2n}}{\sqrt{\pi n}}$ donc avec $n = 2p$,

$$\mathbb{P} \underset{p\to+\infty}{\sim} \frac{\dfrac{2^{2p}}{\sqrt{\pi p}}}{\dfrac{2^{4p}}{\sqrt{\pi 2p}}} = \frac{\sqrt{2}}{2^{2p}}.$$

Ex 17 MINES 2017 RMS
On répartit aléatoirement $p \geqslant 1$ jetons dans $n \geqslant 1$ cases. On note A_i l'événement « la i-ième case est vide ». Calculer $\mathbb{P}(A_1 \cup \cdots \cup A_n)$.

Sol. 17) : La probabilité vaut 1 si $p < n$.
Supposons que $p \geqslant n$. Et calculons la probabilité de l'événement contraire.
Nombre de cas possibles : les applications de $[\![1,p]\!]$ dans $[\![1,n]\!]$, n^p.
Nombre de cas favorables : nombre de **surjections** de $[\![1,p]\!]$ sur $[\![1,n]\!]$.
Notons $a(p,n)$ ce nombre.
On a

$$n^p = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a(p,k) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a(p,k) \text{ avec } a(p,0) = 0 \text{ rajouté}$$

en regardant les images des applications.
On réécrit toutes les formules que cela donne lorsque "n" varie de 0 à n.
Cela donne un système linéaire reliant les $a(p,k)$ pour p fixé et k variable de 0 à n. ($a(p,0) = 1$).
On écrit le vecteur sous la forme (dans l'ordre décroissant)

$$\mathrm{M}\begin{pmatrix} a(p,0) \\ a(p,1) \\ \vdots \\ a(p,n-1) \\ a(p,n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1^p \\ \vdots \\ (n-1)^p \\ n^p \end{pmatrix}$$

La matrice de ce système est la matrice des coefficients binomiaux de Pascal, $\in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.
Elle est triangulaire inférieure, c'est **la transposée de la matrice dans la base canonique de l'application** $P(X) \mapsto P(X+1)$ de $\mathbb{R}_n[X]$ dans lui-même.
L'application réciproque est évidente : $P(X) \mapsto P(X-1)$. Sa matrice permet d'inverser le système.

On trouve $a(p,n) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k^p$

CONCLUSION la probabilité demandée vaut

$$1 - \frac{\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k^p}{n^p} = \frac{\sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{n-k-1} \binom{n}{k} k^p}{n^p}$$

Autre méthode
On utilise la formule de Poincaré.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) &= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leqslant n} \mathbb{P}\left(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cdots \cap A_{i_k}\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \binom{n}{k} \frac{(n-k)^p}{n^p} = \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{k-1} \binom{n}{k} \frac{(n-k)^p}{n^p} \\
&= \frac{1}{n^p} \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{n-k-1} \binom{n}{k} k^p
\end{aligned}$$

Ex 18 CENTRALE 2017 RMS
Soient $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé, A et B deux événements.
Montrer que $|\mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)| \leqslant 1/4$.

Sol. 18) : J'ai souffert sur cet exercice, ne pas hésiter à tout écrire patiemment.
On a

$$a = \mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \cap \overline{B})$$
$$b = \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(\overline{A} \cap B)$$

On a

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B) &= \mathbb{P}(A \cap B) - \left(\mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \cap \overline{B})\right) \cdot \left(\mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(\overline{A} \cap B)\right) \\ &= \mathbb{P}(A \cap B)\left(1 - \mathbb{P}(A \cap B)\right) + \underset{\leqslant 0}{\alpha}\end{aligned}$$

On sait que $a(1-a) \leqslant \dfrac{1}{4}$ pour $a \in [0,1]$, donc $\mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B) \leqslant \dfrac{1}{4}$.
Dans l'autre sens,
on écrit aussi que $\Omega = \left(A \cup \overline{A}\right) \cap \left(B \cup \overline{B}\right) = (A \cap B) \cup \left(\overline{A} \cap B\right) \cup \left(A \cap \overline{B}\right) \cup \left(\overline{A} \cap \overline{B}\right)$
(si on n'y pense pas, on sèche...)
Il vient

$$1 = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}\left(\overline{A} \cap B\right) + \mathbb{P}\left(A \cap \overline{B}\right) + \mathbb{P}\left(\overline{A} \cap \overline{B}\right)$$
$$1 = x + y + z + t$$

Avec $\mathbb{P}(A) = x + z$ et $\mathbb{P}(B) = x + y$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) &= (x+z)(x+y) - x = x(x+y-1) + z(x+y) \\ &= -x(z+t) + z(x+y) = yz - xt \text{ (des heures pour trouver ça...)}\end{aligned}$$

Finalement,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) &\leqslant yz = \mathbb{P}\left(\overline{A} \cap B\right) \cdot \mathbb{P}\left(A \cap \overline{B}\right) \\ &\leqslant \left(1 - \mathbb{P}\left(A \cap \overline{B}\right)\right) \cdot \mathbb{P}\left(A \cap \overline{B}\right) \leqslant \frac{1}{4}, \text{ ouf!}\end{aligned}$$

Ex 19 ☕
[Poker – révisions sur le dénombrement - `Python`]Révisons un peu les techniques élémentaires de dénombrement.
Dans le cadre du jeu de poker, on tire une main (5 cartes) dans un jeu de 52 cartes. On rappelle qu'une carte se définit par sa hauteur (13 possibilités) et sa couleurs (4 possibilités).

1) Réaliser un programme en `Python` qui crée une main aléatoire.
INDICATION on pourra utiliser la fonction `shuffle` (ou éventuellement `choice`) du module `random`.

2) Déterminer la probabilité d'obtenir (il est sous-entendu que la combinaison est la meilleure obtenue)

- **a)** une paire (exactement)
- **b)** deux paires (exactement)
- **c)** un brelan (trois cartes de même rang)
- **d)** une suite (cinq cartes de rang consécutif)
- **e)** une couleur (5 cartes de la même couleur)
- **f)** un full (un brelan et une paire)
- **g)** un carré
- **h)** une suite royale (=quinte flush, 5 cartes de rang successif et de même couleur).
- **i)** Une main avec au moins un pique et un as.

3) Effectuer un test statistique élémentaire de vos réponses : la fréquence des résultats pour un nombre de tirages « grand » doit être proche du résultat théorique.

4) Soit $\mathcal{A}$ l'événement dont on veut mesurer la probabilité. On effectue N essais indépendants et on note $X_n = \begin{cases} 1 & \text{si } \mathcal{A} \text{ est réalisé} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ à la n^e étape.

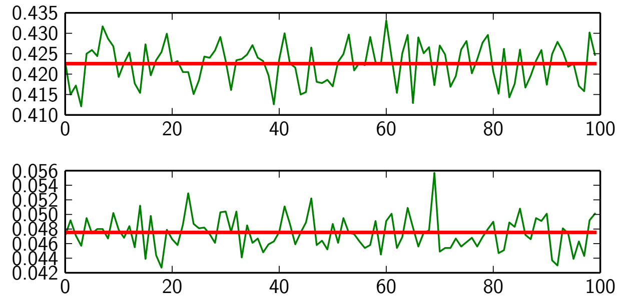
Rappeler pourquoi $\mathbb{P}\left(\left|\dfrac{\sum_{k=1}^{N} X_k}{N} - \mathbb{P}(\mathcal{A})\right| < \varepsilon\right) \geqslant 1 - \dfrac{\sigma^2}{N\varepsilon^2}$ où $\sigma^2 = \operatorname{var}(X_1)$.

Comment choisir N pour avoir, avec un risque inférieur à 5%, une valeur approchée à 10^{-2} près de $\mathbb{P}(\mathcal{A})$?

Sol. 19) : **1)** (et **3)**). Voici le programme `Python`, on effectue 100 tests d'échantillons de 10000 tirages (valeur empirique pour l'instant) et on représente les moyennes qui devraient ne pas être trop loin de la mesure théorique...

```python
import random as r
import matplotlib.pyplot as plt

VALET, DAME, ROI = 11, 12, 13
CARREAU, COEUR, PIQUE, TREFLE = 0, 1, 2, 3

HAUTEURS = (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, VALET, DAME, ROI)
COULEURS = (CARREAU, COEUR, PIQUE, TREFLE)

JEU = [(h, c) for h in HAUTEURS for c in COULEURS]
```

```python
def cptpaire(main):
    "renvoie le nombre de paires exactes"
    cpt = 0
    # liste des hauteurs de la main
    htmain = [carte[0] for carte in main]

    for ht in HAUTEURS:
        nb = htmain.count(ht)
        if nb == 3:
            return 0  # un brelan est présent
        elif nb == 2:
            cpt += 1
            if cpt == 2:  # pour accélérer
                return cpt
    return(cpt)


def compte_paires(nb, N, jeu):
    p = 0
    for i in range(N):
        r.shuffle(jeu)  # c'est là que s'effectue le tirage d'une main
        main = [jeu[j] for j in range(5)]
        c = cptpaire(main)
        if c == nb:
            p += 1
    return p/N


N = 10000  # échantillons de N mains tirées au hasard
n = 100  # nb de tests

plt.figure(figsize=(5, 2.5))
plt.figure(1)
plt.subplot(211)
L = [compte_paires(1, N, JEU) for k in range(n)]
plt.plot(range(n), L, 'g', linewidth=1.0)
plt.plot([0, n-1], [352/833, 352/833], 'r', linewidth=2.0)

plt.subplot(212)
L = [compte_paires(2, N, JEU) for k in range(n)]
plt.plot(range(n), L, 'g', linewidth=1.0)
plt.plot([0, n-1], [198/4165, 198/4165], 'r', linewidth=2.0)

plt.tight_layout(pad=0.4, w_pad=0.5, h_pad=1.0) # un peu d'espace
plt.show()
```



2) Le nombre de mains est $\binom{52}{5} = 2598\,960$ mains.

a) On choisit la hauteur de la paire 13 possibilités, les deux couleurs de la paire $\binom{4}{2} = 6$, trois cartes pour compléter mais qui ne sont pas de même hauteur à savoir 3 hauteurs parmi 12 possibles et leur couleur 4^3.

Cela donne $13 \times 6 \times \binom{12}{3} \times 4^3 = 1098\,240$ possibilités,

d'où une probabilité de $\dfrac{1098\,240}{\binom{52}{5}} = \dfrac{352}{833} \approx 0,42$.

b) On choisit les deux hauteurs des paires $\binom{13}{2}$, les paires de couleurs $\binom{4}{2} \times \binom{4}{2}$, puis on complète avec une carte d'une autre hauteur $52 - 8 = 44$, soit au total $\binom{13}{2} \times \binom{4}{2} \times \binom{4}{2} \times 44 = 123\,552$, d'où une probabilité de $\dfrac{123\,552}{\binom{52}{5}} = \dfrac{198}{4165} \approx 0,047$.

c) On choisit la hauteur 13, les 3 couleurs des trois cartes $\binom{4}{3} = \binom{4}{1} = 4$ et les deux autres cartes 2 hauteurs parmi 12 et leur couleur 4^2.

Au total, $13 \times 4 \times \binom{12}{2} \times 4^2 = 54\,912$, d'où une probabilité de $\dfrac{54\,912}{\binom{52}{5}} = \dfrac{88}{4165} \approx 0,021$.

d) On choisit la hauteur de la plus haute carte, $13 - 4 = 9$ possibilités puis on choisit les couleurs $4^5 - 4$ car il faut retirer les 4 suites royales.

Au total, $9 \times (4^5 - 4) = 9180$, d'où une probabilité de $\dfrac{9180}{\binom{52}{5}} = \dfrac{9}{2548} \approx 0,0035$.

e) On choisit la couleur, 4 et les 5 hauteurs $\binom{13}{5}$, mais attention à retirer les suites royales $13 - 5 + 1 = 9$, au total $4 \times \left(\binom{13}{5} - 9\right) = 5112$,

d'où une probabilité de $\dfrac{5112}{\binom{52}{5}} = \dfrac{213}{108\,290} \approx 0,0019$.

f) On choisit la hauteur du brelan 13, celui de la paire 12, les couleurs pour le brelan 4, les couleurs pour la paire $\binom{4}{2} = 6$, soit au total $13 \times 12 \times 4 \times 6 = 3744$,

d'où une probabilité de $\dfrac{3744}{\binom{52}{5}} = \dfrac{6}{4165} \approx 0,0014$.

g) On choisit la hauteur du carré 13 puis la cinquième carte $52 - 4 = 48$, au total $13 \times 48 = 624$ carrés, d'où une probabilité de $\dfrac{624}{\binom{52}{5}} = \dfrac{1}{4165} \approx 0,00024$

h) Il n'y a que $4 \times (13 - 5 + 1) = 36$ possibilités,
d'où une probabilité de $\dfrac{36}{\binom{52}{5}} = \dfrac{3}{216\,580} \approx 0,000014$.

i) On écrit

$$\begin{aligned}
&\operatorname{card}(\{\text{pas d'as}\} \cup \{\text{pas de pique}\}) \\
&= \operatorname{card}(\{\text{pas d'as}\}) + \operatorname{card}(\{\text{pas de pique}\}) - \operatorname{card}(\{\text{pas d'as}\} \cap \{\text{pas de pique}\}) \\
&= \binom{48}{5} + \binom{39}{5} - \binom{36}{5} = 1911\,069
\end{aligned}$$

D'où $\operatorname{card}(\{\text{au moins un as}\} \cap \{\text{au moins un pique}\}) = \binom{52}{5} - 1911\,069 = 687\,891$, d'où une probabilité de $\dfrac{687\,891}{\binom{52}{5}} = \dfrac{229\,297}{866\,320} \approx 0,26$.

3) Voir la question 1.

4) Remarquons que pour tout k, $\mathbb{E}(\mathrm{X}_k) = \mathbb{P}(\mathcal{A})$. On sait d'après le cours (inégalité de Bienaymé-Tchebychev) que $\mathbb{P}\left(\left|\dfrac{\sum_{k=1}^{\mathrm{N}} (\mathrm{X}_k - \mathbb{E}(\mathrm{X}_k))}{\mathrm{N}}\right| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \dfrac{\operatorname{var}(\mathrm{X}_1)}{\mathrm{N}\varepsilon^2} = \dfrac{\sigma^2}{\mathrm{N}\varepsilon^2}$,

qui permet d'établir la loi faible des grands nombres, d'où le résultat.

Comme ici $|\mathrm{X}_k - \mathbb{E}(\mathrm{X}_k)| \leqslant 1$, on a $\sigma^2 \leqslant 1$ donc $\mathbb{P}\left(\left|\dfrac{\sum_{k=1}^{\mathrm{N}} \mathrm{X}_k}{\mathrm{N}} - \mathbb{P}(\mathcal{A})\right| < \varepsilon\right) \geqslant 1 - \dfrac{1}{\mathrm{N}\varepsilon^2}$.

Si l'on veut $1 - \dfrac{1}{\mathrm{N}\varepsilon^2} \geqslant 1 - \dfrac{5}{100}$ avec $\varepsilon = 10^{-2}$, cela donne $\mathrm{N} \geqslant \dfrac{20}{\varepsilon^2} = 200\ 000$, ce qui est assez conséquent pour notre programme `Python`...

Remarque On peut améliorer notre inégalité en utilisant un résultat hors-programme en classes préparatoires mais entrevu en classe de Terminale : le théorème de la limite centrale.

On montre que $\mathbb{P}\left(\left|\dfrac{\sum_{k=1}^{\mathrm{N}} \mathrm{X}_k}{\mathrm{N}} - \mathbb{P}(\mathcal{A})\right| < \dfrac{a \cdot \sigma}{\sqrt{\mathrm{N}}}\right) \underset{\mathrm{N} \text{ « grand »}}{\approx} \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-a}^{a} e^{-\frac{u^2}{2}} \,\mathrm{d}u$.

(l'approximation est contrôlable par l'inégalité de Berry-Esséen).

Ici pour $a \approx 1,96$, on a $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-a}^{a} e^{-\frac{u^2}{2}} \,\mathrm{d}u \leqslant 0,95$.

On peut donc prendre $\mathrm{N} \geqslant \dfrac{a^2}{\varepsilon^2} \approx 38\ 415 \left(\geqslant \dfrac{a^2 \cdot \sigma^2}{\varepsilon^2}\right)$ pour avoir $\dfrac{a \cdot \sigma}{\sqrt{\mathrm{N}}} \leqslant \varepsilon = 10^{-2}$.

$\mathrm{N} = 40\ 000$ serait donc suffisant...