# Suites et séries de fonctions

## Exercices d'application

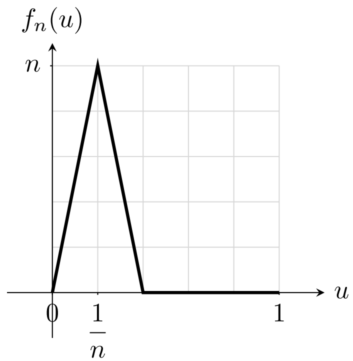
**Ex 1** Étudier la convergence simple des fonctions suivantes.
En particulier regarder si le caractère $\mathscr{C}^0$, $\mathscr{C}^1$, dérivable est conservé. Étudier s'il y a lieu $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_{\mathrm{I}} f_n$

**1)** $f_n(x) = \ln\left(x + \dfrac{1}{n}\right)$ sur $[1, +\infty[$

**2)** $f_n(x) = x^n$ sur $[0, 1]$

**3)** $n \geqslant 2$, $f_n(x) = \dfrac{1}{x}$ pour $x \in \left[\dfrac{1}{n}, 1\right]$ et $f_n(x) = 0$ pour $x \in [0, \dfrac{1}{n}[$ sur $[0, 1]$

**4)** sur $[0, 1]$ :




**5)** $f_n(x) = nx^2 e^{-nx}$ sur $[0, +\infty[$

**6)** $f_n(x) = \sqrt[n]{x}$ sur $[0, +\infty[$

**7)** $f_n(x) = \left(1 - \dfrac{x}{n}\right)^n$ sur $[0, n]$ et 0 sur $[n, +\infty[$, étudier la suite sur $[0, +\infty[$

**Sol. 1) :**

**1)** $|f_n(x) - \ln x| = \left|\ln\left(1 + \dfrac{1}{nx}\right)\right| \leqslant \left|\ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)\right| \to 0$ pour $x \in [1, +\infty[$ donc $f_n \underset{n\to+\infty}{\xrightarrow{\text{cu sur } [1,+\infty[}}$ ln, ok pour l'intégrale (et pour tout)

**2)** $f = 0$ sauf en 1 où $f(1) = 1$ donc pas continue ! Par ailleurs, $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_{\mathrm{I}} f_n = \int_{\mathrm{I}} \lim\limits_{n\to+\infty} f_n = 0$ OK

**3)** $f(x) = \dfrac{1}{x}$ sauf en 0 où $f(0) = 0$ donc pas continue et pas intégrable !

**4)** cs vers 0, mais $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_{\mathrm{I}} f_n = 1 \neq \int_{\mathrm{I}} \lim\limits_{n\to+\infty} f_n = 0$

**5)** cs vers 0, $f_n'(x) = nx(-nx+2)e^{-nx}$ maximum en $\dfrac{2}{n}$

*Rq.* $\|f_n\|_\infty = f_n\left(\dfrac{2}{n}\right) = n\dfrac{4}{n^2}e^{-2} \to 0$ donc cu sur $[0, +\infty[$

$\displaystyle\int_0^{+\infty} f_n = \frac{2}{n^2}$ (IPP) OK

**6)** cs vers 1 sur $]0, +\infty[$ et 0 en 0, limite pas continue, pas d'intégrabilité

**7)** cs vers $x \mapsto e^{-x}$

Remarque

• $\boxed{\text{cu sur } [0, +\infty[.}$ Posons $g_n(x) = e^{-x} - f_n(x)$. $g_n$ continue sur $[0, +\infty[$, $\geqslant 0$,(concavit ln) décroissante sur $[n, +\infty[$, dérivable sur $[0, n]$ (même en $n$ pour $n \geqslant 2$).

Pour tout, pour $n \geqslant 1$, $x \in [0, n[$, $g_n'(x) = -e^{-x} + \left(1 - \dfrac{x}{n}\right)^{n-1}$ et $g'(n^-) = -1 > 0$.

Et comme $g(0) = 0$, et que de plus $g_{n|[n,+\infty[}$ est décroissante (positive), on sait que

$$\sup_{x\in[0,+\infty[} |g_n(x)| = \max_{x\in[0,n]} |g_n(x)| = g_n(a_n)$$

avec $a_n \in ]0, n[$ et $g'(a_n) = 0$ donc $e^{-a_n} = \left(1 - \dfrac{a_n}{n}\right)^{n-1}$ d'où $g_n(a_n) = \dfrac{1}{n}\underbrace{a_n e^{-a_n}}_{\text{bornée}} \underset{n\to+\infty}{\to}$ 0 et $g_n(n) = e^{-n} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$.

ce qui prouve la convergence uniforme sur $[0, +\infty[$.

• en étudiant $h(x) = x \ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)$ et en dérivant **deux** fois, on prouve que $n \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)$ **croit vers** 1, ou plus généralement,

la suite $\left(\left(1 - \dfrac{x}{n}\right)^n\right)$ est **croissante** de limite $e^{-x}$.

• $0 \leqslant f_n(x) \leqslant e^{-x}$ donc par le théorème de convergence dominée, on a $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_{\mathrm{I}} f_n = \int_{\mathrm{I}} \lim\limits_{n\to+\infty} f_n$.

**Ex 2** Soit $\alpha$ un réel positif donné. Étudier la convergence simple, uniforme, uniforme locale des suites d'applications de $[0,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$ :

$$f_n(x) = e^{-nx}\sin(n\alpha x), \quad g_n(x) = e^{-nx}\cos(n\alpha x).$$

**Sol. 2) :** • $f_n$ converge simplement vers la fonction nulle.
$\|f_n\|_{[0,+\infty[} \geqslant f_n\left(\dfrac{\pi}{2n\alpha}\right) = \dfrac{1}{\exp\left(-\dfrac{\pi}{2\alpha}\right)} \underset{n\to+\infty}{\not\to} 0$ donc pas de convergence uniforme au voisinage de 0.
Sur $[a,+\infty[$ avec $a>0$, on a immédiatement convergence uniforme vers la fonction nulle.

• $g_n$ converge simplement vers $g : \left\{\begin{array}{ccc} [0,+\infty[ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \left\{\begin{array}{l} 1 \text{ si } x=0 \\ 0 \text{ sinon}\end{array}\right.\end{array}\right.$

Il n'y a pas convergence uniforme au voisinage de 0 à cause de la discontinuité de $g$.
Sur $[a,+\infty[$ avec $a>0$, on a immédiatement convergence uniforme vers la fonction nulle.

**Ex 3** X 2019 B. Dhote
Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ telle que

$$f_n \underset{n\to+\infty}{\overset{c.s.}{\to}} f$$
$$f_n \ k\text{-lipschitziennes.}$$

Montrer que $f$ est $k$-lipschitzienne et que la suite $(f_n)$ converge uniformément vers $f$.

**Sol. 3) :** Soit $\varepsilon>0$, et soit $p\in\mathrm{N}^*$ tel que $\dfrac{k}{p}\leqslant\varepsilon$. Ainsi, pour tous $x$ et $y$ dans $[0,1]$ tels que $|x-y|\leqslant\dfrac{1}{p}$, et pour tout $n$,

$$|f(x)-f(y)|\leqslant\varepsilon \quad \text{et} \quad |f_n(x)-f_n(y)|\leqslant\varepsilon.$$

Comme la suite $(f_n)_n$ converge simplement, elle converge *uniformément sur toute partie finie*, de sorte qu'il existe N tel que, pour tout $n\geqslant\mathrm{N}$ et tout $i\in[\![0,p]\!]$, $\left|f\left(\dfrac{i}{p}\right)-f_n\left(\dfrac{i}{p}\right)\right|\leqslant\varepsilon$.
Pour tout $x\in[0,1]$, il existe $i$ tel que $x\in\left[\dfrac{i-1}{p},\dfrac{i}{p}\right]$. Pour un tel $i$, et pour tout $n\geqslant\mathrm{N}$,

$$|f(x)-f_n(x)|\leqslant\left|f(x)-f\left(\frac{i}{p}\right)\right|+\left|f\left(\frac{i}{p}\right)-f_n\left(\frac{i}{p}\right)\right|+\left|f_n\left(\frac{i}{p}\right)-f_n(x)\right|\leqslant 3\varepsilon,$$

d'où le résultat.

**Ex 4** Centrale 2013
Étudier la suite de fonctions $(f_n)$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ : $x\mapsto\cos^n x\sin x$, puis $g_n(x)=nf_n(x)$.

**Sol. 4) :** Pour $x\in\mathbb{R}\setminus\pi\mathbb{Z}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} g_n(x) = 0$.
Pour $x\in\pi\mathbb{Z}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)=\lim\limits_{n\to+\infty} g_n(x)=0$ car $f_n(x)=g_n(x)=0$.
Donc $(f_n)$ et $(g_n)$ convergent simplement vers la fonction nulle.
$|f_n|$ est $\pi$-périodique et paire. On étudie $|f_n|$ sur $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$.
$f_n'(x) = \left(\cos^2 x - n\sin^2 x\right)\cos^{n-1}x$ donc croissant jusqu'à $\operatorname{Arctan}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$ puis décroissant.
Ainsi, $\|f_n\|_\infty = f_n\left(\operatorname{Arctan}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)$.
On a $\boxed{\cos(\operatorname{Arctan}(x)) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}}$ car $\dfrac{1}{\cos^2(\operatorname{Arctan}(x))}=1+x^2$,
et $\sin(\operatorname{Arctan}(x)) = x\times\cos(\operatorname{Arctan}(x))$
donc $f_n\left(\operatorname{Arctan}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)\right) = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{-n/2-1}\times\dfrac{1}{\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{e}}\times\dfrac{1}{\sqrt{n}}$.
Ainsi, $\|f_n\|_\infty \underset{n\to+\infty}{\to} 0$, il y a convergence uniforme sur $\mathbb{R}$ de la suite de fonctions $(f_n)$ vers la fonction nulle.
En revanche, $\|g_n\|_\infty \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{e}}$ donc on n'a pas convergence uniforme sur $\mathbb{R}$ de la suite de fonctions $(g_n)$.

**Ex 5** Soit $f\in\mathscr{C}(\mathbb{R}^+,\mathbb{R}^+)$ telle que $\forall x>0\ f(x)<x$.
On définit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $f_1=f$ et $f_{n+1}=f_n\circ f$
Donner $f(0)$ et montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $\mathbb{R}^+$.

**Sol. 5) :** $0\leqslant f(x)<x$ donc par passage à la limite et continuité $f(0)=0$
Pour tout $x\geqslant 0$, $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par 0 donc converge vers une limite $\ell(x)$.
Ainsi la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $\mathbb{R}^+$ vers le seul point fixe de $f$ (0 ; $f$ est continue) donc, finalement, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $\mathbb{R}^+$ vers la fonction nulle.

**Ex 6** On pose $f_n(x)=n^2xe^{-nx}$ sur $[0,1]$

**1)** Étudier la convergence simple de $(f_n)$ sur $[0,1]$. Calculer $\displaystyle\int_0^1 f_n$. Remarque ?

**2)** Si $g$ est continue, étudier à l'aide d'un changement de variable la limite quand $n$ tend vers $+\infty$ de $\displaystyle\int_0^1 g(t)f_n(t)\mathrm{d}t$

**Sol. 6) :**

**1)** $f_n$ tend vers la fonction nulle sur $[0,1]$. $\displaystyle\int_0^1 f_n \underset{\text{IPP}}{=} 1-(n+1)e^{-n} \to 1$ or $\displaystyle\int_{\mathrm{I}} \lim_{n\to+\infty} f_n = 0$

**2)** $\displaystyle\int_0^1 g(t)f_n(t)\mathrm{d}t = \int_0^1 g(t)n^2te^{-nt}\mathrm{d}t \underset{u=nt}{=} \int_0^n g\left(\frac{u}{n}\right)ue^{-u}\mathrm{d}u = \int_0^{+\infty} g\left(\frac{u}{n}\right)\chi_{[0,n]}ue^{-u}\mathrm{d}u$

$\displaystyle\underset{\text{cv dom.}}{\to} g(0)\int_0^{+\infty} ue^{-u}\mathrm{d}u = g(0)$

**Ex 7** TPE 2015

Pour $n \geqslant 2$, on définit une fonction $f_n$ sur $\mathrm{I}=[0,+\infty[$ par

$$f_n(x) = \frac{xe^{-nx}}{\ln n}.$$

**1)** Montrer que $\sum f_n$ converge simplement sur $[0,+\infty[$. On notera $f$ la somme de cette série de fonctions.

**2)** Montrer que $\sum f_n$ converge normalement sur tout intervalle $[a,+\infty[$ où $a>0$ mais pas sur $[0,+\infty[$.

**3)** Montrer que $\sum f_n$ converge uniformément sur $[0,+\infty[$.

**4)** Montrer que $f$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,+\infty[$.

**5)** Montrer que $f$ n'est pas dérivable en 0 à droite.

**6)** Montrer que pour tout $k\in\mathbb{N}$, on a $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^k f(x) = 0$.

**Sol. 7) :** **1)** On a $f_n(0)=0$ donc $\sum f_n(0)$ converge. Pour $x>0$, $|f_n(x)| \leqslant \dfrac{x}{\ln 2}(e^{-x})^n$, terme général d'une série géométrique convergente puisque $e^{-x}\in]0,1[$.
On a bien convergence de la série sur I.

**2)** On étudie les variations de $f_n$ sur I. Pour tout $x\geqslant 0$, on a $f_n'(x) = \dfrac{1-nx}{\ln n}e^{-nx}$.

| $x$ | $0$ | | $\frac{1}{n}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f_n'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f_n(x)$ | $0$ | $\nearrow$ | $\frac{1}{en\ln n}$ | $\searrow$ | $0$ |

La série $\displaystyle\sum \frac{1}{n\ln n}$ diverge (voir exercice sur les séries de Bertrand). On se donne maintenant $a>0$.
Il existe un rang $n_0\in\mathbb{N}$ tel que, pour tout $n\geqslant n_0$, $1/n<a$.
Alors, d'après le tableau de variations, pour tout $n\geqslant n_0$, $\|f_n\|_{\infty,[a,+\infty[} = f_n(a)$.
Comme $\sum f_n(a)$ converge, on obtient la convergence normale sur $[a,+\infty[$.

**3)** On cherche à majorer uniformément $\mathrm{R}_n(x) = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x)$, pour $n\geqslant 2$. Pour tout $n\geqslant 2$, $\mathrm{R}_n(0)=0$. On se donne $x>0$, alors

$$0 \leqslant \mathrm{R}_n(x) \leqslant \frac{x}{\ln(n+1)}\sum_{k=n+1}^{+\infty} e^{-kx} = \frac{1}{\ln(n+1)}\frac{xe^{-(n+1)x}}{1-e^{-x}}.$$

Le terme $\ln(n+1)$ est intéressant pour la majoration. Il reste en revanche à majorer indépendamment de $x$ l'autre facteur.
Une majoration $\dfrac{xe^{-(n+1)x}}{1-e^{-x}} \leqslant \dfrac{x}{1-e^{-x}}$ est trop forte (limite infinie en $+\infty$). On peut conserver $e^{-x}$ afin de compenser $x$.
Alors

$$\frac{xe^{-(n+1)x}}{1-e^{-x}} \leqslant \frac{xe^{-x}}{1-e^{-x}} = \frac{x}{e^x-1} = \varphi(x).$$

Or $\varphi$ est continue et positive sur $\mathbb{R}_+^*$, tend vers 1 en 0 et vers 0 en $+\infty$.
On peut alors en déduire que $\varphi$ est bornée sur I (on pourrait également étudier les variations).
Soit M un majorant de $\varphi$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
On a finalement, pour tout $x>0$, $0\leqslant \mathrm{R}_n(x) \leqslant \dfrac{\mathrm{M}}{\ln(n+1)}$ et cette majoration est valable en 0.
Donc $\|\mathrm{R}_n\|_{\infty,\mathrm{I}} \leqslant \dfrac{\mathrm{M}}{\ln(n+1)}$, ce qui donne la convergence uniforme sur I.

**4)** Pour tout $n\geqslant 2$, $f_n$ est continue sur I.
La convergence uniforme sur I permet de conclure quant à la continuité de $f$ sur I.
De plus $f_n$ est dérivable sur I, avec $f_n'(x) = \dfrac{1-nx}{\ln n}e^{-nx}$.
Puisque $f_n'(0) = 1/\ln n$, la série $\sum f_n'(0)$ diverge.
Il n'y a donc aucune chance de pouvoir appliquer le théorème de dérivation sur I.
La majoration n'est pas immédiate sur un intervalle $[a,+\infty[$
(on majore facilement $e^{-nx}$ par $e^{-na}$ mais l'autre facteur n'est pas majoré).

On se place sur un segment $[a,b]\subset]0,+\infty[$. Pour tout $x\in[a,b]$, $|f_n'(x)|\leqslant \dfrac{1+nb}{\ln n}e^{-na}$ et $\|f_n'\|_{\infty,[a,b]}$ a le même majorant.

Par croissances comparées, on a $\|f_n'\|_{\infty,[a,b]} = \underset{n\to+\infty}{o}(\frac{1}{n^2})$. La série des dérivées est donc normalement convergente sur $[a,b]$.
Les autres hypothèses étant réunies, la fonction $f$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur tout segment $[a,b]\subset\mathbb{R}_+^*$ donc sur $\mathbb{R}_+^*$.

**5)** On a $x\mapsto \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{e^{-nx}}{\ln n}$ décroissante donc $\displaystyle\lim_{x\to0}\left(\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{e^{-nx}}{\ln n}\right)$ existe dans $\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$.
Soit $\mathrm{N}\geqslant 2$.

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{f(x)}{x}=\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{e^{-nx}}{\ln n}\geqslant\sum_{n=2}^{\mathrm{N}}\frac{e^{-nx}}{\ln n}$$

Donc, si $\displaystyle\lim_{x\to0}\left(\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{e^{-nx}}{\ln n}\right)=\ell\in\mathbb{R}$, on a $\displaystyle\ell\geqslant\sum_{n=2}^{\mathrm{N}}\frac{1}{\ln n}\underset{\mathrm{N}\to+\infty}{\to}+\infty$, absurde.

**6)** Soit $k\in\mathbb{N}$. En appliquant la même méthode que pour la convergence uniforme, on peut considérer la série $\sum g_n$ avec $g_n(x)=x^kf_n(x)$.
On majore alors uniformément le reste de cette série par $\mathrm{M}_k/(\ln(n+1))$ où $\mathrm{M}_k$ est un majorant sur $\mathbb{R}$ de $\varphi_k : x\mapsto x^k\varphi(x)$
(il existe pour les mêmes raisons, à savoir fonction continue avec des limites aux bornes de l'intervalle).
On obtient alors la convergence uniforme sur I de la série de fonctions.
Et puisque $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}x^kf_n(x)=0$ pour tout $n\geqslant2$, on peut permuter somme et limite et obtenir $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}x^kf(x)=0$.

**Ex 8** Centrale 2015
Montrer que la fonction $f$ définie par

$$f(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{n}{n^2+x^2}$$

est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

**Sol. 8) :** On note, pour $n\in\mathbb{N}^*$ et $x\in\mathbb{R}$, $f_n(x)=\dfrac{n}{n^2+x^2}$.
Pour tout $x\in\mathbb{R}$, la série $\sum(-1)^nf_n(x)$ est une série alternée qui vérifie le critère spécial des séries alternées.

Il est nécessaire de montrer la décroissance de la suite $(f_n(x))_n$ vers 0.
On étudie la fonction $h : t\mapsto\dfrac{t}{t^2+x^2}$ de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et de dérivée vérifiant $h'(t)=\dfrac{x^2-t^2}{(x^2+t^2)^2}$.
Ainsi $h'$ est décroissante sur $[|x|,+\infty[$ et la série vérifie bien le critère spécial pour les séries alternées (à partir d'un certain rang seulement, mais c'est suffisant).
Le calcul des premières dérivées de $f_n$ ne fait pas apparaître de formule simple, si on a l'intention d'obtenir une majoration pour une convergence normale.
Solutuion n°1 : on décompose alors en éléments simples : on cherche des complexes $a$ et $b$ tels que

$$\forall x\in\mathbb{R},\ \frac{n}{(x+in)(x-in)}=\frac{a}{x+in}+\frac{b}{x-in}.$$

On trouve alors $a=i/2$ et $b=-i/2$. Ainsi, pour tout $x\in\mathbb{R}$,

$$f_n(x)=\frac{i}{2}\left(\frac{1}{x+in}-\frac{1}{x-in}\right).$$

On note $u_n(x)=1/(x+in)=(x+in)^{-1}$ toujours pour $x\in\mathbb{R}$ et $n\in\mathbb{N}^*$. Cette fonction est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
On a

$$u_n^{(p)}(x)=(-1)^p\frac{p!}{(x+in)^{p+1}},$$

ainsi que $|u_n^{(p)}(x)|\leqslant\dfrac{p!}{n^{p+1}}$.

Cela permet alors d'obtenir, pour tout $x\in\mathbb{R}$ et pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $|f_n^{(p)}(x)|\leqslant\dfrac{2p!}{n^{p+1}}$ d'où la convergence normale à toute profondeur.

Solution n°2 plus élégante. On pose $g(x)=\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{n}{n^2+x}$ pour $x\geqslant0$ et on remarque que $f(x)=g\left(x^2\right)$.
Il reste à montrer que $g$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ pour conclure (par composition).
En posant $v_n(x)=(-1)^n\dfrac{n}{n^2+x}$, on a pour tout $p\in\mathbb{N}^*$, et tout $x\geqslant0$, $v_n^{(p)}(x)=\dfrac{(-1)^{n+p}n\cdot p!}{\left(n^2+x\right)^{p+1}}$.

On remarque alors que pour tout $x\geqslant0$, $\left|v_n^{(p)}(x)\right|\leqslant\dfrac{p!}{n^{2p+1}}$ d'où la convergence normale sur $\mathbb{R}^+$ des séries $\displaystyle\sum_{n\geqslant1}v_n^{(p)}$.

**Ex 9** **Théorème de Riemann-Lebesgue dans le cas $\mathscr{C}^1$.**

Soit $f \in \mathscr{C}^1([a,b],\mathbb{R})$, que penser de $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_a^b f(x)\sin nx\mathrm{d}x$, de $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_a^b f(x)\cos nx\mathrm{d}x$ ? démonstration ?

**Sol. 9) :** IPP $\left.\begin{array}{c}\sin nx \leftarrow -\dfrac{1}{n}\cos nx\\ f(x)\to f'(x)\end{array}\right\}$ d'où $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_a^b f(x)\sin nx\mathrm{d}x = 0$.

# Exercices d'entraînement

**Ex 10** TPE 2018 C. Li

On pose $u_n : \left\{\begin{array}{ccc}\mathbb{R}^{+*} & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{n+n^2x}\end{array}\right.$

**1)** Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} u_n(x)$ converge.

**2)** Soit $f(x)$ la somme, montrer que $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} -\ln x$ grâce à une comparaison série-intégrale.

**Sol. 10) :**

**1)** $u_n(x) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x}\cdot\dfrac{1}{n^2}$ terme général d'une série convergente.

**2)** À $x>0$ fixé, $t\mapsto \dfrac{1}{t+t^2x}$ est décroissante sur $[1,+\infty[$.

Il vient $u_{k+1}(x) \leqslant \displaystyle\int_k^{k+1}\frac{\mathrm{d}t}{t+t^2x} \leqslant u_k(x)$

soit en sommant,

$$f(x) - \frac{1}{1+x} \leqslant \int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t+t^2x} \leqslant f(x)$$

Or $\dfrac{1}{t+t^2x} = \dfrac{1}{t} - \dfrac{x}{t+x}$ donc

$$\int_1^{\mathrm{A}}\frac{\mathrm{d}t}{t+t^2x} = \ln\left(\frac{\mathrm{A}}{1+\mathrm{A}x}\right) + \ln(1+x)$$

$$\underset{\mathrm{A}\to+\infty}{\to} -\ln x + \ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} -\ln x.$$

Comme $\dfrac{1}{1+x} = \underset{x\to 0}{o}(-\ln x)$, on obtient $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} -\ln x$.

**Ex 11**

**1)** Convergence simple, uniforme de la suite de fonctions $f_n(x) = 4^n\left(x^{2^n} - x^{2^{n+1}}\right)$, $x\in[0,1]$.

**2)** Même question avec $g_n(x) = n(x^n - x^{n+1})$, $x\in[0,1]$.

**Sol. 11) :**

**1)** • Il y a convergence simple vers la fonction nulle.

• On a $\displaystyle\sup_{x\in[0,1]}|f_n(x)| = f_n\left(\frac{1}{2^{1/2^n}}\right) = 4^{n-1} \underset{n\to+\infty}{\to} +\infty$ donc pas de convergence uniforme sur $[0,1]$.

Mais sur $[0,a]$, $a\in]0,1[$, pour $n$ assez grand, $\displaystyle\sup_{x\in[0,a]}|f_n(x)| = f_n(a) \underset{n\to+\infty}{\to} 0$ donc il y a bien convergence uniforme sur $[0,a]$.

Au voisinage de 1, on ne peut pas avoir convergence uniforme

$\dfrac{1}{2^{1/2^n}} \underset{n\to+\infty}{\to} 1$ et $f_n\left(\dfrac{1}{2^{1/2^n}}\right) = 4^{n-1} \underset{n\to+\infty}{\to} +\infty$.

**2)** • Il y a convergence simple vers la fonction nulle.

• On a $\displaystyle\sup_{x\in]0,1]}|f_n(x)| = f_n\left(\frac{n}{n+1}\right) = n\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\frac{1}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\to} \frac{1}{e}$ donc pas de convergence uniforme sur $[0,1]$.

Mais sur $[0,a]$, $a\in]0,1[$, pour $n$ assez grand, $\displaystyle\sup_{x\in[0,a]}|f_n(x)| = f_n(a) \underset{n\to+\infty}{\to} 0$ donc il y a bien convergence uniforme sur $[0,a]$.

Au voisinage de 1, on ne peut pas avoir convergence uniforme

$\dfrac{n}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\to} 1$ et $f_n\left(\dfrac{n}{n+1}\right) \underset{n\to+\infty}{\to} \dfrac{1}{e}$.

**Ex 12** Existe-t-il des intervalles de $\mathbb{R}$ sur lesquels la suite de fonctions

$$f_n(x) = \frac{1}{\sin^2 x + (1+x^2)^n}$$

converge uniformément ?

**Sol. 12) :** Pour $x\neq 0$, la suite converge simplement vers la fonction nulle.
$f_n(0) = 1 \underset{n\to+\infty}{\to} 1$.
Il ne peut y avoir convergence uniforme au voisinage de 0 car la fonction limite simple n'est pas continue en 0.
La fonction est paire.

On a bien convergence uniforme sur $[a,+\infty[$ avec $a>0$, car pour tout $n\in\mathbb{N}$ et $x\in[a,+\infty[$,

$$0\leqslant f_n(x)\leqslant \frac{1}{(1+a^2)^n}\underset{n\to+\infty}{\to}0.$$

**Ex 13** Soit $f(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{x^2+n^2}$

Montrer que $f$ est de classe $\mathscr{C}^0$ sur $\mathbb{R}^*$

Donner les variations de $f$

Montrer que $f$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$. Calculer $f'$.

Montrer que $f(x)\underset{x\to0}{\sim}\dfrac{1}{x^2}$

Étudier $\lim\limits_{+\infty}f$ puis montrer que $f(x)\underset{x\to+\infty}{\sim}\dfrac{\pi}{2x}$

Indication : penser à une comparaison avec une intégrale.

**Sol. 13) :** $\mathcal{D}_f=\mathbb{R}^*$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{x^2+n^2}$ cn sur $\mathbb{R}$ donc

$f(x)=\dfrac{1}{x^2}+\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{x^2+n^2}$ est de classe $\mathscr{C}^0$ sur $\mathbb{R}^*$

$f(x)=\dfrac{1}{x^2}+\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{x^2+n^2}=\frac{1}{x^2}+\frac{\pi^2}{6}+\underset{x\to0}{o}(1)$ donc $f(x)\underset{x\to0}{\sim}\dfrac{1}{x^2}$

$f$ est clairement décroissante sur $]0,+\infty[$, de plus $f$ est paire

$u_n'(x)=-\dfrac{2x}{\left(x^2+n^2\right)^2}$ il y a cn sur tout segment de $]0,+\infty[$

donc $f$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,+\infty[$

par comparaison avec une intégrale :

$$f(x)-\underbrace{\frac{1}{x^2}}_{=\underset{x\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{x}\right)}\leqslant\underbrace{\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{x^2+t^2}}_{=\frac{\pi}{2x}}\leqslant f(x)\text{ donc } f(x)\underset{x\to+\infty}{\sim}\frac{\pi}{2x}$$

**Ex 14** ✍ Air 2015

**1)** Déterminer le domaine de définition de la fonction $f$ définie par

$$f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{e^{-nx}}{n+1}.$$

**2)** Montrer que $f$ est continue sur $[0,+\infty[$ et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,+\infty[$.

**3)** Déterminer une équation différentielle simple dont $f$ est solution et en déduire que $f$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,+\infty[$.

**Sol. 14) :** **1)** On définit pour $n\in\mathbb{N}$ et $x\in\mathbb{R}$, $u_n(x)=(-1)^n\dfrac{e^{-nx}}{n+1}$. Si $x<0$, $\lim\limits_{n\to+\infty}|u_n(x)|=+\infty$ et la série $\sum u_n(x)$ est grossièrement divergente.

Si $x\geqslant0$, la suite $(e^{-nx})_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante (vers 0 si $x>0$ et constante égale à 1 si $x=0$) et positive.

La suite $\left(\dfrac{1}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante vers 0 si bien que la suite $(|u_n(x)|)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante vers 0.

La série $\sum u_n$ étant alternée, le critère spécial des séries alternées nous assure que la série converge lorsque $x\geqslant0$. Ainsi $f$ est définie sur $\mathbb{R}^+$.

**2)**

- Continuité : chacune des fonctions $u_n$ est continue sur $\mathbb{R}^+$.

  La difficulté vient du fait que $\|u_n\|_{\infty,\mathbb{R}^+}=|u_n(0)|=\dfrac{1}{n+1}$. et on n'a pas convergence normale de la série de fonctions.

  On doit alors essayer de montrer la convergence uniforme sur $\mathbb{R}_+$

  (on ne peut pas ici se contenter de la convergence normale sur les intervalles $[a,+\infty[$ avec $a>0$, ce qui ne donnerait que la continuité sur $\mathbb{R}_+^*$).

  On sait toutefois que pour $x\geqslant0$, la série numérique $\sum u_n(x)$ vérifie le critère spécial des séries alternées.

  On note pour $x\geqslant0$, $\mathrm{R}_n(x)=\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty}u_k(x)$ (reste d'ordre $n$ de la série).

  Soit $x\in\mathbb{R}^+$. Le critère spécial des séries alternées nous permet la majoration de $|\mathrm{R}_n(x)|$ par la valeur absolue de son premier terme, soit $|\mathrm{R}_n(x)|\leqslant\dfrac{e^{-(n+1)x}}{n+2}\leqslant\dfrac{1}{n+2}$, si bien que $\|\mathrm{R}_n\|_{\infty,\mathbb{R}^+}\leqslant\dfrac{1}{n+2}$.

  Ce majorant tend vers 0 lorsque $n$ tend vers $+\infty$. La convergence est donc uniforme sur $\mathbb{R}^+$ et la fonction somme $f$ est donc continue sur $\mathbb{R}^+$.

- Classe $\mathscr{C}^1$ : chacune des fonctions $u_n$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$ avec, pour tout $x\in\mathbb{R}^+$,

$$u_n'(x)=(-1)^{n+1}\frac{n}{n+1}e^{-nx}.$$

On peut remarquer que $u_n'(0) = (-1)^{n+1}\dfrac{n}{n+1}$ ne tend pas vers 0 lorsque $n$ tend vers 0.
Ainsi $\sum u_n'(0)$ diverge et on n'a aucune chance de pouvoir appliquer le théorème de dérivation sur $\mathbb{R}^+$
(mais cela ne prouve pas que $f$ n'est pas de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$).
On fixe $a > 0$. Pour $x \in [a, +\infty[$, $|u_n'(x)| \leqslant \dfrac{n}{n+1}e^{-na} \leqslant e^{-na}$,
ce qui donne la convergence normale de $\sum u_n'$ sur $[a, +\infty[$.
On a auparavant prouvé la convergence simple de $\sum u_n$ sur $\mathbb{R}^+$. On peut donc conclure que $f$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a, +\infty[$ avec,

$$\text{pour tout } x \geqslant a,\ f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{n}{n+1}e^{-nx}.$$

La dérivabilité s'étend à $\mathbb{R}_+^*$ puisque $a$ est un réel strictement positif quelconque.

**3)** Les termes $\dfrac{n}{n+1}$ et $\dfrac{1}{n+1}$ dans $f'$ et $f$ nous invitent à les ajouter pour les simplifier.
Pour tout $x > 0$,

$$f(x) - f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{n+1}{n+1}e^{-nx} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-e^{-x})^n = \frac{1}{1+e^{-x}}$$

ce qui donne, pour tout $x > 0, f'(x) = f(x) - \dfrac{1}{1+e^{-x}}$.

La fonction $f$ est continue sur $\mathbb{R}^+$, ce qui permet d'obtenir $\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x) = f(0) - \dfrac{1}{2}$.
Ainsi $f$ est continue sur $\mathbb{R}^+$, de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et $f'$ admet une limite finie en 0 donc $f$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$.

**Ex 15** ☕

**1)** Soit $r \in ]-1, 1[$. On pose pour $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{r^n\cos(nx)}{n}$. Vérifier que $f$ est bien définie et continue sur $\mathbb{R}$.

**2)** Soit $x \in \mathbb{R}$. On pose pour $r \in ]-1, 1[$, $g(r) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{r^n\cos(nx)}{n}$. Montrer que $g$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-1, 1[$, déterminer une expression simple de $g'(r)$ et calculer $g(r)$ pour $r \in ]-1, 1[$.

**3)** En déduire $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\ln\left(1 - 2r\cos x + r^2\right)\,\mathrm{d}x = -2\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\int_{-\pi}^{\pi}\frac{r^n\cos(nx)}{n}\,\mathrm{d}x\right)$ ainsi que la valeur de l'intégrale.

**Sol. 15) :** **1)** On note, pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$, $u_n(x) = \dfrac{r^n\cos(nx)}{n}$.

Chacune des fonctions est définie et continue sur $\mathbb{R}$ et $\|u_n\|_{\infty,\mathbb{R}} = \dfrac{|r|^n}{n} \leqslant |r|^n$.
La série $\sum u_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}$ (puisque $|r| < 1$) ainsi $f$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

**2)** On note $v_n(r) = \dfrac{r^n\cos(nx)}{n}$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $v_n$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-1, 1[$ et pour tout $r \in ]-1, 1[$, $v_n'(x) = r^{n-1}\cos(nx)$.
Puisque $|v_n(r)| \leqslant |r|^n$, la série $\sum v_n$ converge simplement sur $]-1, 1[$.
De plus, on a $\|v_n'\|_{\infty,]-1,1[} = |\cos(nx)|$ si bien que $\sum v_n'$ ne converge pas normalement sur $]-1, 1[$
(le fait de pouvoir s'approcher de $\pm 1$ fait disparaître le terme géométrique).
En revanche, soit $b \in ]0, 1[$, on a $\|v_n'\|_{\infty,[-b,b]} = |b^{n-1}\cos(nx)| \leqslant b^{n-1}$ et $\sum v_n'$ converge normalement sur $[-b, b]$.
Finalement $g$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur tout segment $[-b, b] \subset ]-1, 1[$ donc est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-1, 1[$ avec, pour tout $r \in ]-1, 1[$,

$$g'(r) = \sum_{n=1}^{+\infty} r^{n-1}\cos(nx).$$

Cela donne, pour un tel $r$, $g'(r) = \mathrm{Re}\left(\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} r^{n-1}(e^{ix})^n\right) = \mathrm{Re}\left(\dfrac{e^{ix}}{1-re^{ix}}\right)$, et

$$\frac{e^{ix}}{1-re^{ix}} = \frac{e^{ix}(1-re^{-ix})}{(1-re^{ix})(1-re^{-ix})} = \frac{e^{ix}-r}{1-2r\cos x + r^2}.$$

Finalement $g'(r) = \dfrac{\cos x - r}{1 - 2r\cos x + r^2}$. Puisque $g(0) = 0$, on obtient en intégrant, pour tout $r \in ]-1, 1[$,

$$g(r) = -\frac{1}{2}\ln\left(1 - 2r\cos x + r^2\right)$$

(le terme dans ln reste strictement positif car il vaut $(r - \cos x)^2 + \sin^2 x$ et les deux carrés ne peuvent être simultanément nuls puisque $|r| < 1$).

**3)** En fixant $r \in ]-1,1[$, pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$f(x) = -\frac{1}{2}\ln\left(1 - 2r\cos x + r^2\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{r^n \cos(nx)}{n}.$$

D'après la première question, on a convergence normale de la série de fonctions continues $u_n$ sur $\mathbb{R}$, donc sur $[-\pi,\pi]$. On peut donc écrire

$$-\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \ln\left(1 - 2r\cos x + r^2\right) \mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\int_{-\pi}^{\pi} \frac{r^n\cos(nx)}{n}\,\mathrm{d}x\right),$$

soit le résultat demandé. Or $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\cos(nx)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{\sin(nx)}{n}\right]_{-\pi}^{\pi} = 0.$

Finalement, on peut calculer la valeur de l'intégrale,

$$\int_{-\pi}^{\pi} \ln\left(1 - 2r\cos x + r^2\right) \mathrm{d}x = 0.$$

Il est important de faire attention aux différentes variables qui entrent en jeu et par conséquent de prouver les hypothèses pour la bonne variable.

**Ex 16** Soit $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n e^{-\sqrt{n}x}}{n}$

Donner l'ensemble de définition de $f$.
Montrer que $f$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,+\infty[$
Étudier $\lim\limits_{+\infty} f$ puis montrer que $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} -e^{-x}$

**Sol. 16) :** $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^+$

$u_n'(x) = \dfrac{(-1)^{n+1}e^{-\sqrt{n}x}}{\sqrt{n}}$ il y a cn sur tout segment de $]0,+\infty[$

donc $f$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,+\infty[$

il y a cn sur tout segment de $[a,+\infty[$ avec $a>0$, on peut utiliser le théorème d'interversion des limites : $\lim\limits_{+\infty} f = 0$

$$f(x) = -e^{-x} + \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(-1)^n e^{-\sqrt{n}x}}{n}$$

par le CSSA : $0 \leqslant \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(-1)^n e^{-\sqrt{n}x}}{n} \leqslant \frac{e^{-\sqrt{2}x}}{2} = \underset{x\to+\infty}{o}(e^{-x})$ donc $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} -e^{-x}$

**Ex 17** Soit $f \in \mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$ avec $f(1) \neq 0$

**1)** Calculer la limite de $\mathrm{I}_n = \displaystyle\int_0^1 t^n f(t)\mathrm{d}t$.

**2)** On suppose de plus $f$ de classe $\mathscr{C}^1$, donner un équivalent de $\mathrm{I}_n$ lorsque $n$ tend vers $+\infty$

**3)** On suppose seulement $f$ continue mais on admet le résultat suivant :
Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe P polynôme tel que $\|f - \mathrm{P}\|_\infty \leqslant \varepsilon$ (théorème de Weïerstrass).
Montrer que le résultat de la question précédente reste vrai.

**Sol. 17) :**

**1)** $|\mathrm{I}_n| \leqslant \|f\|_\infty \dfrac{1}{n+1} \to 0$

**2)** $f \to f'$ et $t^n \leftarrow \dfrac{t^{n+1}}{n+1}$ d'où $\mathrm{I}_n = \dfrac{f(1)}{n+1} - \dfrac{1}{n+1}\displaystyle\int_0^1 t^n f'(t)\mathrm{d}t = \frac{f(1)}{n+1} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n+1}\right)$

donc $\mathrm{I}_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{f(1)}{n}$

**3)** Soit $\varepsilon > 0$, il existe P polynôme tel que $\|f - \mathrm{P}\|_\infty \leqslant \varepsilon$.

De plus $n\displaystyle\int_0^1 t^n \mathrm{P}(t)\mathrm{d}t \to \mathrm{P}(1)$ donc il existe N tel que pour tout $n \geqslant \mathrm{N}$, $\left|n\displaystyle\int_0^1 t^n\mathrm{P}(t)\mathrm{d}t - \mathrm{P}(1)\right| \leqslant$ $\varepsilon$

On écrit $|n\mathrm{I}_n - f(1)| \leqslant \left|n\displaystyle\int_0^1 t^n\left[f(t) - \mathrm{P}(t)\right]\mathrm{d}t\right| + \left|n\int_0^1 t^n\mathrm{P}(t)\mathrm{d}t - \mathrm{P}(1)\right| + |\mathrm{P}(1) - f(1)| \leqslant$ $\varepsilon\dfrac{n}{n+1} + \varepsilon + \varepsilon \leqslant 3\varepsilon$ pour $n \geqslant \mathrm{N}$

Donc $\mathrm{I}_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{f(1)}{n}$.

**Ex 18** Soit $\theta \in ]0,\pi[$ et $f : [0,1[ \to \mathbb{R}, x \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n\sin(n\theta x)}{n}$

**1)** Montrer que $f$ est définie et dérivable sur $[0,1[$

**2)** Montrer : $\forall x \in [0,1[, f(x) = \mathrm{Arctan}\left(\dfrac{x\sin(\theta x)}{1 - x\cos(\theta x)}\right)$

**Sol. 18) :**

**1)** Notons pour $x \in [0,1[$ ; et pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n(x) = \dfrac{x^n \sin(n\theta x)}{n}$ .

On a alors $|u_n(x)| \leqslant x^n$ comme $0 \leqslant x < 1$ , la série géométrique $\left(\sum x^n\right)_{n\geqslant 1}$ est convergente, donc pour tout $x \in [0,1[$ , la série numérique $\sum_{n\geqslant 1} u_n(x)$ est absolument convergente : la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ converge simplement sur $[0,1[$ , et $f$ est bien définie sur $[0,1[$

De plus pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ , $u_n$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1[$ de dérivée $u_n'(x) = x^{n-1}\sin(n\theta x) + \theta x^n \cos(n\theta x)$

Soit $(a,b) \in [0,1[^2$ tel que $a < b$ , on a alors, pour tout $x \in [a,b]$ , et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$|u_n'(x)| \leqslant (1 + b|\theta|)\, b^{n-1}$$
or la série géométrique $\left(\sum (1+b|\theta|)\, b^{n-1}\right)_{n\geqslant 1}$ est convergente puisque $0 \leqslant b < 1$, ce qui montre que la série de fonctions $\left(\sum u_n'\right)_{n\geqslant 1}$ **converge normalement sur** $[a,b]$ .

De ces résultats on déduit que $f$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1[$ de dérivée
$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(x^{n-1}\sin(n\theta x) + \theta x^n \cos(n\theta x)\right).$$

**2)** On calcule pour tout $x \in [0,1[$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} x^{n-1} e^{in\theta x} = \frac{e^{i\theta x}}{1 - x e^{i\theta x}} = \frac{e^{i\theta x} - x}{1 - 2x\cos(\theta x) + x^2}$,

d'où en prenant les parties réelles et imaginaires de cette expression
$$f'(x) = \frac{\sin(\theta x) + \theta x \cos(\theta x) - \theta x^2}{1 - 2\cos(\theta x) + x^2}$$

Posons $g(x) = \operatorname{Arctan}\left(\dfrac{x\sin(\theta x)}{1 - x\cos(\theta x)}\right)$ , $g$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1[$ de dérivée
$$g'(x) = \frac{\dfrac{(\sin(\theta x) + \theta x\cos(\theta x))(1 - x\cos(\theta x)) - x\sin(\theta x)(\theta x \sin(\theta x) - \cos(\theta x))}{(1 - x\cos(\theta x))^2}}{1 + \dfrac{x^2\sin^2(\theta x)}{(1 - x\cos(\theta x))^2}} = f'(x)$$

Comme on a $f(0) = g(0) = 0$, on en déduit : $f = g$

# Exercices d'approfondissement

**Ex 19** ✍

On définit $f_n : \begin{cases} \mathbb{R}^{+*} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \displaystyle\prod_{k=0}^{n} \frac{1}{x+k} \end{cases}$

Étudier la convergence simple, normale de $\sum f_n$.

Montrer que la somme $f$ est continue, décroissante et chercher un équivalent en 0 et $+\infty$.

**Sol. 19) :** $f_n(x) \leqslant \left(\dfrac{1}{x}\right)\dfrac{1}{n!}$ donc cn sur $[a,+\infty[$ avec $a > 0$ donc $f$ est continue sur $]0,+\infty[$

*Rq :* pas de cu au voisinage de $0^+$ car $f(x) \geqslant f_0(x) = \dfrac{1}{x}$ donc pas bornée au voisinage de 0

*Équivalent en* $0^+$ : $xf(x) = 1 + f(x+1)$ donc $f(x) \underset{0^+}{\sim} \dfrac{e}{x}$

plus compliqué : on regarde $xf_n(x)$ : il y a cn sur $]0,+\infty[$ car $\|x \mapsto xf_n(x)\|_{+\infty} \leqslant \dfrac{1}{n!}$

donc par th interversion des limites, $xf(x) \to e$ donc $f(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} \dfrac{e}{x}$

*Équivalent en* $+\infty$ : déjà, th d'interversion des limites, $\lim_{+\infty} f(x) = 0$

$$f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x}\underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty}\prod_{k=1}^{n}\frac{1}{x+k}}_{f(x+1) \underset{+\infty}{\to} 0} \text{ donc } f(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{x}$$

**Ex 20** ✍ Centrale 2017 RMS

Soit $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\operatorname{sh}(nx)^2}$.

**1)** Déterminer le domaine de définition $\mathscr{D}$ de $f$. Montrer que $f$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathscr{D}$.

**2)** Donner un équivalent de $f$ en $0^+$ et en $+\infty$.

**Sol. 20) :**

**1)** Les fonctions à l'intérieur sont paires. La série n'existe pas en 0.

Pour $x > 0$, $\dfrac{1}{(\operatorname{sh}(nx))^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{4}{(e^{2x})^n}$, donc la série converge.

$D = \mathbb{R}^\star$ par parité.
On va se contenter de l'étudier sur $]0,+\infty[$.
Les fonctions $f_n : x \mapsto \dfrac{1}{(\text{sh}(nx))^2}$ sont $\mathscr{C}^1$ sur $\mathscr{D}$.
La série de fonctions converge simplement sur $\mathscr{D}$.

$$f_n'(x) = -\frac{2n\,\text{ch}(nx)}{(\text{sh}(nx))^3}.$$

Pour $0 < a$, on a pour $x \in [a, b = 2a]$ (je prends $b = 2a$ après coup)

$$|f_n'(x)| \leqslant \frac{2n\,\text{ch}(nb)}{(\text{sh}(na))^3} \underset{n\to+\infty}{\sim} 2ne^{n(b-3a)} \text{ t.g. d'une série convergente.}$$

La série $\sum f_n'$ converge normalement sur tout segment de $[a, 2a]$.
On peut donc appliquer le théorème de dérivation des séries de fonctions sur $[a, 2a]$, puis $f$ est $\mathscr{C}^1$ sur D.

**2)** • En 0, on peut faire une comparaison série intégrale mais on a un majorant de l'écart en $\underset{x\to0}{\text{O}}\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$ donc insuffisant.

On a $\dfrac{1}{(\text{sh}(nx))^2} \underset{x\to0}{\sim} \dfrac{1}{n^2x^2}$. De plus $x \leqslant \text{sh}(x)$ pour $x \geqslant 0$.

On pose alors $g_n(x) = \dfrac{x^2}{(\text{sh}(nx))^2}$ prolongée par continuité en 0 par $\dfrac{1}{n^2}$.
Grâce à l'inégalité sur sh, cette série de fonctions converge normalement sur $\mathbb{R}$ et ainsi

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) \underset{x\to0}{\sim} \frac{\pi^2}{6}\frac{1}{x^2}}$$

En effet, $\left|\dfrac{x^2}{(\text{sh}(nx))^2}\right| \leqslant \dfrac{1}{n^2}$ pour $x > 0$.
Voici une variante toujours pour l'étude au voisinage de 0.

On peut penser que $f(x) \underset{x\to0}{\sim} \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2x^2} = \frac{\pi^2}{6}\cdot\frac{1}{x^2}$.

On étudie donc pour $x > 0$, $x^2 \cdot \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{\text{sh}^2(nx)} - \frac{1}{n^2x^2}\right)$, et montrer que cela tend vers 0 lorsque $x$ tend vers $0^+$.

Or $x^2 \cdot \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{\text{sh}^2(nx)} - \frac{1}{n^2x^2}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{n^2x^2 - \text{sh}^2(nx)}{n^2\,\text{sh}^2(nx)}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}\varphi(nx)$

avec $\varphi(t) = \dfrac{t^2 - \text{sh}^2(t)}{\text{sh}^2(t)}$ continue sur $]0,+\infty[$. On a $\displaystyle\lim_{t\to+\infty}\varphi(t) = -1$ et $\displaystyle\lim_{t\to0}\varphi(t) = 0$ (par DL immédiat).
Donc $\varphi$ est **bornée** sur $]0,+\infty[$ et prolongeable par continuité en 0.

Ainsi, comme on a trivialement convergence normale sur $[0,+\infty[$ de $x \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}\varphi(nx)$, on a la continuité en 0 et donc, finalement,

$$x^2 \cdot \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{\text{sh}^2(nx)} - \frac{1}{n^2x^2}\right) \underset{x\to0^+}{=} 0 \ (1)$$

Donc $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2x^2} + \underset{x\to0}{o}\left(\frac{1}{x^2}\right)$ donc $f(x) \underset{x\to0}{\sim} \dfrac{\pi^2}{6}\cdot\dfrac{1}{x^2}$

• En $+\infty$, effectuons une comparaison série-intégrale

$$\frac{1}{(\text{sh}(nx))^2} \geqslant \int_n^{n+1}\frac{\text{d}t}{(\text{sh}(xt))^2} \geqslant \frac{1}{(\text{sh}((n+1)x))^2}$$

**Mais on ne va sommer qu'à partir de** 2,

$$\frac{1}{(\text{sh}\,(2x))^2} \geqslant \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{(\text{sh}(nx))^2} - \int_2^{+\infty}\frac{\text{d}t}{(\text{sh}(xt))^2} \geqslant 0$$

Or une primitive de $t \mapsto \dfrac{1}{(\text{sh}(xt))^2}$ est $t \mapsto \dfrac{-1}{x\,\text{th}(xt)}$

donc $\displaystyle\int_2^{+\infty}\frac{\text{d}t}{(\text{sh}(xt))^2} = \left[\frac{-1}{x\,\text{th}(xt)}\right]_2^{+\infty} = \frac{1}{x}\left(\frac{1}{\text{th}(2x)} - 1\right) = \frac{1}{x}\frac{2}{e^{4x}-1} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{2}{xe^{4x}}$

et $\dfrac{1}{(\text{sh}\,2x)^2} \underset{x\to+\infty}{\sim} 4e^{-4x}$.

Donc $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{(\text{sh}(nx))^2} \underset{x\to+\infty}{=} \text{O}\left(e^{-4x}\right) \underset{x\to+\infty}{=} o\left(e^{-2x}\right)$, comme $\dfrac{1}{(\text{sh}(x))^2} \underset{x\to+\infty}{\sim} 4e^{-2x}$ et

$f(x) = \dfrac{1}{(\text{sh}(x))^2} + \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{(\text{sh}(nx))^2}$, il vient

$$\boxed{f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} 4e^{-2x}}$$

**Ex 21** ENS 2011

Soit $f$ une fonction continue sur $]-\infty, +\infty[$ telle que, pour tout $x \neq 0$, $|f(x)| < |x|$. On pose $f_1 = f$, $f_2 = f \circ f, \cdots, f_n = f \circ f_{n-1}, \cdots$

Montrer que la suite de fonctions $(f_n)$ converge uniformément sur $[-\mathrm{A}, \mathrm{A}]$ pour tout $\mathrm{A} > 0$.

INDICATION on admettra le résultat suivant : de toute suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$ de réels dans $[-\mathrm{A}, \mathrm{A}]$, on peut en extraire une suite convergente $\left(x_{\varphi(n)}\right)_{n\geqslant 1}$.

**Sol. 21) :** • On a $(|f_n(x)|)_{n\geqslant 1}$ strictement décroissante positive, donc converge vers $\ell \geqslant 0$. Il existe une suite extraite $\left(f_{\varphi(n)}(x)\right)_{n\geqslant 1}$ qui converge vers $\ell' = \pm\ell$ (il y a une infinité de terme de la suite précédente avec le même signe).

Donc $f\left(f_{\varphi(n)}(x)\right) = f_{\varphi(n)+1}(x) \underset{n\to+\infty}{\to} f(\ell')$ et $\left|f\left(f_{\varphi(n)}(x)\right)\right| \underset{n\to+\infty}{\to} \ell$.

Ainsi, $\ell = |f(\ell')|$. Mais si $\ell' \neq 0$, $|f(\ell')| < |\ell'| = \ell$, absurde donc $\ell' = 0 = \ell$.

Ainsi, $(f_n)$ converge simplement vers la fonction nulle.

• Soit $x \in [-\mathrm{A}, \mathrm{A}]$. On a facilement $|f_{n+1}(x)| \leqslant |f_n(x)|$ donc $\|f_{n+1}\|_{\infty,[-\mathrm{A},\mathrm{A}]} \leqslant \|f_n\|_{\infty,[-\mathrm{A},\mathrm{A}]}$ ($\leqslant$ A).

Soit $\alpha = \lim\limits_{n\to+\infty} \|f_n\|_{\infty,[-\mathrm{A},\mathrm{A}]}$. Montrons par l'absurde que $\alpha = 0$.

Supposons que $\alpha > 0$.

Pour tout $n \geqslant 1$, il existe $x_n \in [-\mathrm{A}, \mathrm{A}]$ tel que $f_n(x_n) \geqslant \alpha$ puisque $\|f_n\|_{\infty,[-\mathrm{A},\mathrm{A}]} \geqslant \alpha$.

On peut en extraire une suite convergente $\left(x_{\varphi(n)}\right)_{n\geqslant 1}$ vers $a$.

On a alors pour tout $n \geqslant 1$ puis pour tout $k \geqslant n$,

$$\left|f_{\varphi(n)}(x_{\varphi(k)})\right| \geqslant \left|f_{\varphi(k)}(x_{\varphi(k)})\right| \geqslant \alpha.$$

En passant à la limite quand $k$ tend vers $+\infty$, il vient $\left|f_{\varphi(n)}(a)\right| \geqslant \alpha$, ceci pour tout $n \geqslant 1$.

Mais $\lim\limits_{n\to+\infty} \left|f_{\varphi(n)}(a)\right| = 0$, ce qui est absurde.

**Remarque** ce résultat est dû au mathématicien Dini (théorème connu).

**Ex 22**

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite réelle positive et décroissante. On définit pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0,1]$,

$$u_n(x) = a_n x^n (1-x).$$

**1)** Montrer que la série $\sum u_n$ converge simplement sur $[0,1]$.

**2)** Montrer que la convergence est normale sur $[0,1]$ si et seulement si $\sum \dfrac{a_n}{n}$ converge.

**3)** Montrer que la convergence est uniforme sur $[0,1]$ si et seulement si la suite $(a_n)$ converge vers 0.

**Sol. 22) :** **1)** La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est positive et décroissante, elle est donc bornée et majorée par son premier terme.

Pour $x \in [0,1[$, $0 \leqslant u_n(x) \leqslant (a_0(1-x))x^n$, et la série géométrique $\sum x^n$ converge puisque $x \in [0,1[$. Donc $\sum u_n$ converge si $x \in [0,1[$. Puisque $u_n(1) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la série $\sum u_n(1)$ converge.

Finalement $\sum u_n$ converge simplement sur $[0,1]$.

**2)** L'étude des variations sur $[0,1]$ de la fonction positive $x \mapsto x^n(1-x)$ fait apparaître un maximum en $\dfrac{n}{n+1}$,

et la valeur en ce point est équivalente lorsque $n$ tend vers $+\infty$ à $\dfrac{1}{n \cdot e}$.

On obtient alors $\|u_n\|_\infty \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{e}\dfrac{a_n}{n}$. On a donc convergence normale de la série sur $[0,1]$ si et seulement la série $\sum \dfrac{a_n}{n}$ converge

(on utilise les critères de comparaison pour des séries à termes positifs, le coefficient $e^{-1} \neq 0$ ne changeant pas la nature de la série).

**3)** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On doit évaluer $\mathrm{R}_n(x) = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k x^k (1-x)$.

On a tout d'abord $\mathrm{R}_n(1) = 0$. Soit $x \in [0,1[$.

On ne peut pas évaluer directement $\mathrm{R}_n(x)$, mais seulement l'encadrer. Plus précisément,

$$0 \leqslant \mathrm{R}_n(x) \leqslant a_{n+1}(1-x) \sum_{k=n+1}^{+\infty} x^k = a_{n+1}(1-x)\frac{x^{n+1}}{1-x} = a_{n+1}x^{n+1} \leqslant a_{n+1}.$$

Cela permet d'obtenir, $\|\mathrm{R}_n\|_{\infty,[0,1]} \leqslant a_{n+1}$. Si la suite $(a_n)$ tend vers 0, la série converge bien uniformément.

Si la suite $a_n$ converge vers $\ell > 0$ (c'est la seule autre possibilité puisque la suite est positive décroissante), on doit minorer ce reste.

Pour $x \in [0,1[$,

$$\mathrm{R}_n(x) \geqslant \ell(1-x) \sum_{k=n+1}^{+\infty} x^k = \ell x^{n+1},$$

si bien que $\sup\limits_{x\in[0,1[} |\mathrm{R}_n(x)| \geqslant \ell$. Donc $\|\mathrm{R}_n\|_{\infty,[0,1]} \geqslant \ell$ et la convergence n'est pas uniforme sur $[0,1]$.

**Ex 23** ✍

**Un grand classique**

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}, x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{-nx}}{1+n^2}$

**1)** Montrer que $f$ est définie et continue sur $\mathbb{R}_+$

**2)** Montrer que $f$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$

**3)** $f$ est-elle dérivable en $0$ ?

Indication on pourra montrer et utiliser que pour $t \geqslant 0$, $1 - e^{-t} \geqslant \frac{t}{1+t}$.

**Sol. 23) : 1)** on a pour tout $x \geqslant 0$ : $\left|\frac{e^{-nx}}{1+n^2}\right| = \frac{e^{-nx}}{1+n^2} \leqslant \frac{1}{1+n^2}$, or la série numérique $\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{1+n^2}$ converge d'après le critère de Riemann, donc la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 0} u_n$, où $u_n(x) = \frac{e^{-nx}}{1+n^2}$, **converge normalement sur** $\mathbb{R}_+$, ce qui montre que $f$ est bien définie

De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n$ est continue sur $\mathbb{R}_+$, et la série de fonctions $\left(\sum u_n\right)_{n\geqslant 0}$ converge normalement sur $\mathbb{R}_+$, donc $f$ est continue sur $\mathbb{R}_+$

**2)** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n$ est de classe $\mathscr{C}^1$sur $\mathbb{R}_+^*$, de dérivée $u_n'(x) = \frac{-ne^{-nx}}{1+n^2}$.

Soit $(a,b) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$ tel que $a < b$, on a alors pour tout $x \in [a,b]$, $|u_n'(x)| \leqslant \frac{ne^{-na}}{1+n^2}$.

Comme $\frac{ne^{-na}}{1+n^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{e^{-na}}{n} = \underset{n\to+\infty}{o}\left(e^{-na}\right)$, la série numérique $\sum_{n\geqslant 0} \frac{ne^{-na}}{1+n^2}$ est convergente :

on en déduit que la série de fonctions $\left(\sum u_n'\right)_{n\geqslant 0}$ converge normalement sur $[a,b]$.

De ces résultats, on déduit que $f$ est de classe $\mathscr{C}^1$sur $\mathbb{R}_+^*$ de dérivée $f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{-ne^{-nx}}{1+n^2}$

**3)** On a pour tout $x > 0$, $\frac{f(x) - f(0)}{x} = -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1-e^{-nx}}{x(1+n^2)}$

Or pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $e^t \geqslant 1 + t$, d'où $e^{-t} \leqslant \frac{1}{1+t}$ et $1 - e^{-t} \geqslant \frac{t}{1+t}$

On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x > 0$,

$$\frac{1-e^{-nx}}{x(1+n^2)} \geqslant \frac{n}{(1+n^2)(1+nx)}$$

et donc pour tout $\mathrm{N} \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1-e^{-nx}}{x(1+n^2)} \geqslant \sum_{n=0}^{\mathrm{N}} \frac{1-e^{-nx}}{x(1+n^2)} \geqslant \sum_{n=0}^{\mathrm{N}} \frac{n}{(1+n^2)(1+nx)}$$

En particulier pour $\mathrm{N} = \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor$, on a pour tout $n \in [\![0,\mathrm{N}]\!]$, $n \leqslant \frac{1}{x}$, donc $nx \leqslant 1$, ce qui montre,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1-e^{-nx}}{x(1+n^2)} \geqslant \sum_{n=0}^{\lfloor \frac{1}{x} \rfloor} \frac{n}{2(1+n^2)}.$$

Or la série numérique à termes positifs $\sum_{n\geqslant 0} \frac{n}{2(1+n^2)}$ est divergente par comparaison avec la série harmonique, donc $\lim_{\mathrm{N}\to+\infty} \sum_{n=0}^{\mathrm{N}} \frac{n}{2(1+n^2)} = +\infty$, donc $\lim_{x\to 0, x>0} \sum_{n=0}^{\lfloor \frac{1}{x} \rfloor} \frac{n}{2(1+n^2)} = +\infty$,

ce qui montre $\lim_{x\to 0, x>0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = -\infty$ : $f$ n'est pas dérivable en 0.

**Ex 24** CCP 2012 RMS

*(TPE)* Soit $f : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{Arctan}(xt)}{1+t^2}\mathrm{d}t$.

**1)** Déterminer le domaine de définition de $f$.

**2)** Étudier la dérivabilité de $f$. Donner une expression de $f'$.

**3)** Donner une expression simple de $f$.

**Sol. 24) :**

**1)** $f$ est définie sur $\mathbb{R}$ et est impaire, on peut l'étudier sur $\mathbb{R}^+$.

**2)** Pour tout $(x,t) \in \mathbb{R} \times [0,+\infty[$,

$$\left|\frac{\operatorname{Arctan}(xt)}{1+t^2}\right| \leqslant \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{1+t^2}.$$

On en déduit facilement la continuité de $f$ sur $\mathbb{R}$.

Posons $h : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} \times [0,+\infty[ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,t) & \longmapsto & \frac{\operatorname{Arctan}(xt)}{1+t^2} \end{array} \right.$ .

Pour tout $(x,t) \in \mathbb{R} \times [0,+\infty[$, $\dfrac{\partial h}{\partial x}(x,t) = \dfrac{t}{1+t^2}\dfrac{1}{1+(xt)^2}$.
Soit $a > 0$. Pour tout $x \in [a,+\infty[$ et tout $t \in [0,+\infty[$,

$$\left|\frac{\partial h}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \frac{t}{1+t^2}\frac{1}{1+(at)^2} \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{\mathrm{K}}{t^3}$$

donc (...) le théorème de dérivation $\mathscr{C}^1$ s'applique et $f$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ (donc sur $\mathbb{R}^*$), pour $x > 0$,

$$f'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t}{1+t^2}\frac{1}{1+(xt)^2}\mathrm{d}t$$

Or pour $x \neq 1$,

$$\frac{t}{1+t^2}\frac{1}{1+(xt)^2} = \frac{1}{x^2-1}\left(\frac{x^2t}{1+(xt)^2} - \frac{t}{1+t^2}\right)$$

donc pour $x > 0$, $x \neq 1$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{x^2-1}\lim_{\mathrm{A}\to+\infty}\left(\left[\frac{1}{2}\ln(1+x^2t^2)\right]_0^{\mathrm{A}} - \left[\frac{1}{2}\ln(1+t^2)\right]_0^{\mathrm{A}}\right) \\ &= \frac{1}{x^2-1}\lim_{\mathrm{A}\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x^2\mathrm{A}^2}{1+\mathrm{A}^2}\right)\right) = \frac{\ln x}{x^2-1}. \end{aligned}$$

Par continuité $f'(1) = \lim\limits_{x\to1}\dfrac{\ln x}{x^2-1} = \dfrac{1}{2}$.
Remarquons que $\lim\limits_{x\to0^+} f'(x) = +\infty$.

**3)** Par continuité de $f$ en 0,

$$f(x) = \int_0^x \frac{\ln u}{u^2-1}\mathrm{d}u$$

mais après ?

**Ex 25** ✍ ENS 2015
Soit $\mathscr{D}$ une partie bornée de $\mathbb{C}$. Montrer que la suite de fonctions $\mathcal{D} \to \mathbb{C}$ définie par $z \mapsto \left(1+\dfrac{z}{n}\right)^n$ converge uniformément sur $\mathscr{D}$ vers la fonction $z \mapsto e^z$.

Indication on pourra montrer que $n^k - n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1) \leqslant n^{k-1}\cdot\left(\displaystyle\sum_{j=1}^{k-1} j\right)$

**Sol. 25) :** Montrons que $n^k - n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1) \leqslant n^{k-1}\cdot\left(\displaystyle\sum_{j=1}^{k-1} j\right) = n^{k-1}\cdot\dfrac{k(k-1)}{2}$.
On pose $w_i = n^{k-i}(n-1)(n-2)\dots(n-i)$ puis

$$v_i = w_i - w_{i+1} = n^{k-i}(n-1)(n-2)\dots(n-i) - n^{k-i-1}(n-1)(n-2)\dots(n-i-1).$$

Alors $\displaystyle\sum_{i=0}^{k-2} v_i = w_0 - w_{k-1} = n^k - n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)$.
Or $v_i = n^{k-i-1}(n-1)(n-2)\dots(n-i)\cdot(i+1) \leqslant n^{k-1}\cdot(i+1)$.
Donc $n^k - n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1) \leqslant n^{k-1}\cdot\left(\displaystyle\sum_{i=0}^{k-2}(i+1)\right) = n^{k-1}\cdot\dfrac{k(k-1)}{2}$.
Alors

$$\begin{aligned} \left|e^z - \left(1+\frac{z}{n}\right)^n\right| &\leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{|z|^k}{k!} + \sum_{k=0}^{n}\frac{k(k-1)|z|^k}{2n.k!} \\ &= \sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{|z|^k}{k!} + \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}\frac{k(k-1)|z|^k}{2.k!} \end{aligned}$$

Il existe M tel que $\mathscr{D} \subset \mathrm{B}(0,\mathrm{M})$.
Pour tout $z \in \mathscr{D}$ et $n \geqslant 2$, on a

$$\begin{aligned} \left|e^z - \left(1+\frac{z}{n}\right)^n\right| &\leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{\mathrm{M}^k}{k!} + \frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n}\frac{k(k-1)\mathrm{M}^k}{2.k!} \\ &\leqslant \underbrace{\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{\mathrm{M}^k}{k!}}_{\underset{n\to+\infty}{\to}0} + \underbrace{\frac{\mathrm{M}^2}{2n}\sum_{k=0}^{n}\frac{\mathrm{M}^k}{k!}}_{\underset{n\to+\infty}{\to}0} \end{aligned}$$

D'où la convergence uniforme sur $\mathscr{D}$.
**Remarque** voici une autre preuve classique

$$\begin{aligned} \left|e^z - \left(1+\frac{z}{n}\right)^n\right| &\leqslant \sum_{k=0}^{n}\frac{|z|^k}{k!}\left(1 - \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{n^k}\right) + \sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{|z|^k}{k!} \\ &= e^{|z|} - \left(1+\frac{|z|}{n}\right)^n \end{aligned}$$

On étudie alors $f_n : x \mapsto e^x - \left(1+\frac{x}{n}\right)^n$ pour $x \in [0, \mathrm{M}]$.
On a $f_n'(x) = e^x - \left(1+\frac{x}{n}\right)^{n-1} = e^x - \exp\left[(n-1)\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)\right]$.
Soit $\varphi_n(x) = (n-1)\ln\left(1+\frac{x}{n}\right) - x$. On a $\varphi_n'(x) = -\frac{1+x}{n+x} \leqslant 0$ donc $\varphi_n(x) \leqslant \varphi_n(0) = 0$ donc finalement, $f_n'(x) \geqslant 0$ donc $f_n$ est croissante. Ainsi, $\|f_n\|_{\infty,[0,\mathrm{M}]} = f_n(\mathrm{M}) \underset{n\to+\infty}{\to} 0$.

**Ex 26** Mines 2017 RMS

L'application $x \in \mathbb{R} \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin(2^n x)}{2^n}$ est-elle dérivable en 0 ?

**Sol. 26) :** On a $\varphi(0) = 0$ et $\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x} = \frac{1}{x}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin(2^n x)}{2^n}$.
Posons $x_k = 2^{-k}\pi$. Il vient avec $\sin x \geqslant \frac{2}{\pi}x$ pour $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

$$\varphi(x_k) = \sum_{n=0}^{k-1} \frac{\sin\left(2^{n-k}\pi\right)}{2^n} \geqslant \frac{2}{\pi}\sum_{n=0}^{k-1}\frac{\pi}{2^k} = \frac{k}{2^{k-1}}$$

Donc $\frac{\varphi(x_k)-\varphi(0)}{x_k} \geqslant \frac{2k}{\pi} \underset{k\to+\infty}{\to} +\infty$ donc le nombre dérivé en 0 n'existe pas.
**Remarque** je suppose que la question suivante était : montrer que $\varphi$ n'est pas dérivable sur les $\frac{a}{2^k}\pi$ avec $a \in \mathbb{Z}$.
On a $\sin(a+h) = \sin(a)\cos(h) + \cos(a)\sin(h)$, donc

$$\varphi\left(\frac{a}{2^k}\pi + h\right) = \underbrace{\sum_{n=0}^{k-1}\frac{\sin\left(2^{n-k}a\pi\right)}{2^n}\cos\left(2^n h\right) + \sum_{n=0}^{k}\cos\left(2^{n-k}a\pi\right)\frac{\sin\left(2^n h\right)}{2^n}}_{\mathscr{C}^1/h} + \underbrace{\sum_{n=k+1}^{+\infty}\frac{\sin\left(2^n h\right)}{2^n}}_{\text{pas dérivable en } 0}$$

ce qui permet de conclure.

**Ex 27** Mines 2013

Étudier la convergence simple et la convergence uniforme de la suite de fonctions $g_n$ définies par

$$g_n(x) = \cos\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2^2}\cdot\dots\cdot\cos\frac{x}{2^n}.$$

**Sol. 27) :** On a $\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = \frac{\sin x}{2}$ donc

$$\sin\frac{x}{2^n}\cdot g_n(x) = \dots = \frac{\sin x}{2^n}$$

- Pour $x \neq 0$, il existe $n_0$ tel que pour $n \geqslant n_0$, $\sin\frac{x}{2^n} \neq 0$,

Donc $g_n(x) = \frac{\sin x}{2^n \sin\left(\frac{x}{2^n}\right)} \underset{n\to+\infty}{\to} \frac{\sin x}{x}$.
- Si $x = 0$, $g_n(0) = 1 \underset{n\to+\infty}{\to} 1 =$ le sinus cardinal prolongé par continuité en 0, en 0.

Il y a donc convergence simple vers le sinus cardinal.
- Soit $a > 0$. il existe $n_0$ tel que pour $n \geqslant n_0$, $\frac{a}{2^n} \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ et donc pour $x \in [-a, a]$.

Soit $x \in [-a, a]$, on a alors

$$\begin{aligned}|g_n(x) - \operatorname{sinc}(x)| &= \left|\frac{\sin x}{2^n\sin\left(\frac{x}{2^n}\right)} - \frac{\sin x}{x}\right| \leqslant \left|\frac{1}{2^n\sin\left(\frac{x}{2^n}\right)} - \frac{1}{x}\right| \\ &\leqslant \left|\frac{1}{2^n}\left(\frac{1}{\sin\left(\frac{x}{2^n}\right)} - \frac{1}{\frac{x}{2^n}}\right)\right| \\ &\leqslant \frac{\mathrm{M}}{2^n}\end{aligned}$$

En effet, $\varphi : t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \setminus \{0\} \mapsto \frac{1}{\sin(t)} - \frac{1}{t}$ est prolongeable par continuité en 0 donc bornée.
puisque $\varphi(t) = \frac{t - \sin(t)}{t\sin(t)} \underset{t\to0}{\to} 0$, $\mathrm{M} = \|\varphi\|_{\infty,\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]}$
On a ainsi **convergence uniforme sur** $[-a, a]$ de la suite de fonctions.
- il n'y a pas convergence uniforme sur tout $\mathbb{R}$ car sinon on aurait

$$\lim_{n\to+\infty} g_n\left(2^n\cdot2\pi\right) = \lim_{n\to+\infty}\operatorname{sinc}\left(2^n\cdot2\pi\right) = 0$$

or $g_n\left(2^n\cdot2\pi\right) = 1$ donc $\lim_{n\to+\infty} g_n\left(2^n\cdot2\pi\right) = 1 \neq 0$.

**Ex 28** ENS 2011

**1)** Soit $(\mathrm{P}_n)_n$ une suite de fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à $d$ convergeant uniformément sur $[a, b]$ vers une fonction $f$ $(a < b)$. Montrer que $f$ est une fonction polynômiale sur $[a, b]$.

**2)** Soit V un sous-espace vectoriel de dimension finie de $\mathscr{C}([a,b],\mathbb{R})$. Montrer que si $(f_n)_n$ est une suite de fonctions dans V convergeant simplement, elle converge uniformément, et la limite est dans V.
INDICATION on utilisera le résultat classique (mais pas trivial !)
Si $(g_1,\dots,g_p)$ est une base de V, alors il existe $x_1,\dots,x_p$ tels que $\det\big(g_i(x_j)\big)_{i,j}\neq 0$.

**Sol. 28) :**

**1)** On considère $d+1$ points distincts $(x_i)_{0\leqslant i\leqslant d}$ dans le segment $[a,b]$.
La suite $(\mathrm{P}_n)$ converge en particulier simplement en les $(x_i)$, $\ell_i=\lim\limits_{n\to+\infty}\mathrm{P}_n(x_i)$.
Soit P le polynôme interpolateur de Lagrange en les $(x_i,\ell_i)$.
En considérant les normes équivalentes $\|\|_{\infty,[a,b]}$ et $\mathrm{N(Q)}=\max\limits_{i\in[\![0,d]\!]}|\mathrm{Q}(x_i)|$.
On a P est la limite de la suite $(\mathrm{P}_n)$ pour N
donc P est la limite uniforme de la suite $(\mathrm{P}_n)$
donc la limite simple et par unicité de la limite (point par point), $\mathrm{P}=f$.

**2)** On admet le résultat $(g_1,\dots,g_p)$ est une base de V, alors il existe $x_1,\dots,x_p$ tels que $\det\big(g_i(x_j)\big)_{i,j}\neq 0$.
Soit $(f_n)$ une suite de fonctions dans V. On peut écrire $f_n=\sum\limits_{i=1}^{p}\alpha_{i,n}g_i$.
On a $(f_n)$ converge simplement $\Rightarrow (f_n)$ converge en les $(x_j)$
$\Rightarrow$ les $p$ suites $(\alpha_{i,n})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent (vers $\ell_i$) **grâce au lemme.**
Puis on utilise l'équivalence des normes en dimension finie. $(f_n)$ tend vers $g=\sum\limits_{i=1}^{p}\ell_i g_i\in\mathrm{V}$ pour la norme max par rapport à la base $(g_i)$ mais également pour la norme infinie $\|h\|_\infty=\sup\limits_{t\in[a,b]}|h(t)|$.

**Ex 29** ✍ CENTRALE 2010
Soit $(\mathrm{T}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de polynômes telle que $\mathrm{T}_0=1$, $\mathrm{T}_1(\mathrm{X})=\mathrm{X}$, et

$$\forall n,\quad \mathrm{T}_{n+2}(\mathrm{X})=2\mathrm{X}\mathrm{T}_{n+1}(\mathrm{X})-\mathrm{T}_n(\mathrm{X}).$$

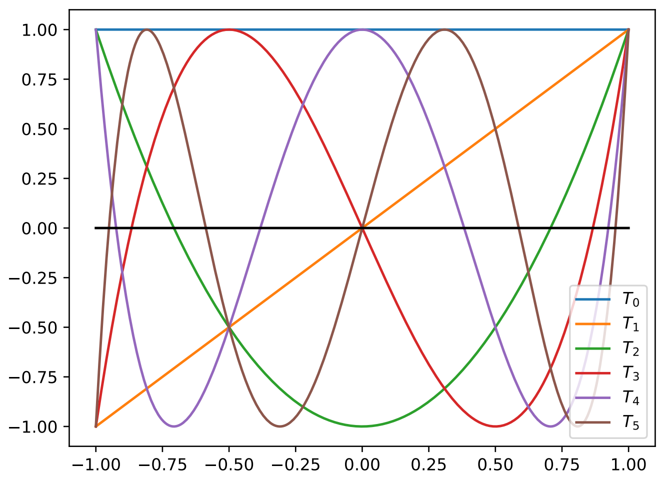
**1)** Trouver le degré et le coefficient dominant de $\mathrm{T}_n$.
**2)** Trouver avec PYTHON l'expression des dix premiers polynômes $\mathrm{T}_n$ et tracer leur graphe sur $[-1,1]$.
**3)** Montrer que, pour tout $n$, et tout $t\in[0,\pi]$, $\mathrm{T}_n(\cos t)=\cos(nt)$.
**4)** Pour tout $n$ on définit le polynôme $\tau_n$ par $\tau_n(\mathrm{X})=\dfrac{1}{2^{n-1}}\mathrm{T}_n(\mathrm{X})$. On considère la norme $\mathrm{P}\mapsto\sup\limits_{x\in[-1,1]}|\mathrm{P}(x)|=\|\mathrm{P}\|$. Calculer $\|\tau_n\|$.
**5)** Soit P un polynôme réels de degré $n$ et de coefficient dominant 1. Montrer que $\|\mathrm{P}\|\geqslant\dfrac{1}{2^{n-1}}$.
INDICATION On raisonnera par l'absurde en considérant $\mathrm{P}-\tau_n$.
**6)** Soit $\Delta$ l'ensemble des polynômes réels de la forme $\mathrm{P}=\prod\limits_{i=1}^{n}(\mathrm{X}-\alpha_i)$. Montrer que l'application $\mathrm{P}\mapsto\|\mathrm{P}\|$ admet un minimum sur $\Delta$.

**Sol. 29) :**

**1)** Un tel polynôme $\mathrm{T}_n$ est de degré $n$ et de coefficient dominant $a_n\mathrm{X}^n$ où $a_0=1$ et $\forall n\geqslant 1, a_n=2^{n-1}$.
Preuve par récurrence.
C'est la suite classique des polynômes de Tchebychev $\mathrm{T}_n=2^{n-1}\mathrm{X}^n+\cdots$ pour $n\geqslant 1$.

**2)**

```python
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
from numpy.polynomial import Polynomial

def Tn(n):
    '''
    renvoie la liste des polynômes de Tchebycheff
    de 0 à n
    '''
    X = Polynomial([0,1])
    L = [Polynomial([1]), X]
    for i in range(2, n+1):
        TT, T = L[-2], L[-1]
        Ts = 2*X*T - TT
        L.append(Ts)
    return L

L = Tn(6)
for p in L:
    print(p.coef)

X = np.linspace(-1, 1, 300)

for n in range(6):
    plt.plot(X, L[n](X), label=r"$T_{}$".format(n))

plt.plot(X, np.zeros(len(X)), 'k')
plt.legend()
plt.show()
```




**3)** Par récurrence.
Si l'égalité est vraie pour $n$ et $n-1$ ( $n \geqslant 1$ ), avec

$$\boxed{\cos\left((n+1)\,x\right)+\cos\left((n-1)\,x\right)=2\cos\left(nx\right)\cos\left(x\right)}$$

on obtient l'égalité $\cos\left(n+1\right)x=\mathrm{T}_{n+1}\left(\cos\left(x\right)\right)$ car $\mathrm{T}_{n+1}=2\mathrm{X}\mathrm{T}_n-\mathrm{T}_{n-1}$.
**Remarque culturelle et technique.**
On peut donner une expression explicite complète en utilisant la formule du binôme de Newton/Pascal :

$$\begin{aligned}\cos n\theta &= \mathrm{Re}\left((\cos\theta+i\sin\theta)^n\right)=\mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}i^k\sin^k\theta\cos^{n-k}\theta\right)\\ &=\sum_{k=0}^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}\binom{n}{2k}(-1)^k\sin^{2k}\theta\cos^{n-2k}\theta\\ &=\sum_{k=0}^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}\binom{n}{2k}(-1)^k(1-\cos^2\theta)^k\cos^{n-2k}\theta.\end{aligned}$$

donc $\boxed{\mathrm{T}_n=\sum_{k=0}^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}\binom{n}{2k}(-1)^k(1-\mathrm{X}^2)^k\mathrm{X}^{n-2k}}$ et on retrouve que le monôme dominant est

$$\sum_{k=0}^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}\binom{n}{2k}\mathrm{X}^n=2^{n-1}\mathrm{X}^n.$$

**4)** $\tau_n$ est un polynôme unitaire.

$$\|\tau_n\|=\frac{1}{2^{n-1}}\sup_{t\in[0,\pi]}|\cos(nt)|=\frac{1}{2^{n-1}}.$$

**5)** Considérons $\mathrm{P}-\tau_n$. Dans $[-1,1]$, il existe $n+1$ valeurs de $x_k$ telles que $|\tau_n(x_k)|=1/2^{n-1}$ avec alternance de signes.
(à savoir les $x_k=\cos\left(\dfrac{k\pi}{n}\right)$ pour $k\in[\![0,n]\!]$).
Si $\|\mathrm{P}\|<1/2^{n-1}$, alors $\mathrm{P}-\tau_n$ a un signe connu et alterné en ces points $x_k$, et $\mathrm{P}-\tau_n$ a au moins $n$ racines. Contradiction avec son degré $\leqslant n-1$.

**6)** Il est clair que $\tau_n$ réalise se minimum et que $\tau_n$ est scindé puisque

$$\tau_n=\prod_{k=0}^{n-1}\left(\mathrm{X}-\cos\left(\frac{\pi}{2n}+\frac{k\pi}{n}\right)\right).$$