

UNIVERSITE D'AIX-MARSEILLE I, II, III
U.F.R. M.I.M.

PROBLEMES DE DEHN

Memoire pour le D.E.A. de Mathématiques

Présenté par Jean-Philippe PREAUX

Sous la direction de Hamisch SHORT

Année universitaire 1994-95

Index

CHAPITRE I : Notions préliminaires	6
I.1 : Présentation de groupe	6
I.2 : Transformation de Tietze	10
I.3 : Problèmes de Dehn	15
I.4 : Machines de Turing	21
I.5 : Extensions de Britton et HNN extensions	27
CHAPITRE II : Théorèmes généraux d'insolubilité	33
II.1 : Théorème de Post	34
II.2 : Théorème de Novikov-Boone	38
II.3 : Théorèmes de plongements	51
II.3.1 : Théorème de Higman	51
II.3.2 : Théorème de Higman-Neumann-Neumann	63
II.4 : Propriété de Markov et théorème de Adjan-Rabin	66
CHAPITRE III : Problèmes de Dehn pour des groupes élémentaires	71
III.1 : Résolution des problèmes de Dehn pour les groupes libres	71
III.1.1 : Problème de la conjugaison	71
III.1.2 : Problèmes du mot généralisé	73
III.2 : Problèmes de Dehn et constructions algébriques	77
III.2.1 : Produit libre	78
III.2.2 : Produit direct	82
III.2.3 : HNN extensions et extensions de Britton	84
a) Problème du mot et problème du mot généralisé	84
b) Problème de la conjugaison	86
III.2.4 : Produit libre amalgame	90
III.2.5 : Split extension	93
III.3 : Problèmes de solubilité dans des classes algébriques	94
III.3.1 : Groupes résiduellement ,finis ,nilpotents ,libres	95
III.3.2 : Résultats d'insolubilité dans des sous-groupes de groupes élémentaires	97
CHAPITRE IV : Etude géométrique des problèmes de Dehn	100

IV.1 : Inégalité isopérimétrique et algorithmes de Dehn	100
IV.1.1 : Diagramme de Lyndon Van-Kampen	101
IV.1.2 : Inégalité isopérimétrique	102
IV.1.3 : Algorithmes de Dehn	103
IV.2 : Groupes à petites simplifications	104
IV.2.1 : Hypothèses de petites simplifications	104
IV.2.2 : Interprétation géométrique	105
IV.2.3 : Formules et inégalités pour des disques	107
IV.2.4 : Algorithmes de Dehn et inégalité isopérimétrique linéaire pour des groupes à petites simplifications	110
IV.3 : Groupes hyperboliques	111
IV.3.1 : Structure métrique dans un groupe f.e.	111
IV.3.2 : Graphe de Cayley	113
IV.3.3 : Espace hyperbolique	114
IV.3.4 : Caractérisation des groupes ayant un algorithme de Dehn ou une inégalité isopérimétrique linéaire	117
IV.4 : Quasi-isométries	122
CHAPITRE V : Insolubilité en topologie	126
Bibliographie	131

INTRODUCTION

Les groupes apparaissent souvent naturellement sous la forme de présentations (essentiellement en topologie). Etant donnée une présentation, on peut se donner les éléments du groupe comme des mots sur les générateurs. Le problème consiste alors à étudier des propriétés locales d'un groupe (i.e. portant sur les éléments) et des propriétés globales (i.e. portant sur le groupe) par le biais de sa présentation.

En 1911, Dehn formule les problèmes suivants :

Etant donné une présentation de groupe .

Problème du mot : Etablir une procédure permettant de décider pour un mot arbitraire sur les générateurs, s'il représente l'élément neutre du groupe .

Problème de la conjugaison : Etablir une procédure permettant de décider pour un couple de mot, s'ils sont conjugués .

Problème de l'isomorphisme : Etablir une procédure permettant de décider pour deux présentations, si elles représentent le même groupe .

Ces problèmes portent le nom de problèmes de Dehn. Nous considérons aussi un autre problème, le problème du mot généralisé : Etant donnée une famille de mots $a_1, \dots, a_n$, décider pour un mot arbitraire, s'il est dans le sous-groupe engendré par $a_1, \dots, a_n$ (et alors, comme nous le verrons on peut donner une écriture de l'élément de groupe correspondant sur $a_1, \dots, a_n$).

Ces problèmes sont fondamentaux, et ce pour plusieurs raisons. Premièrement, les problèmes de topologie, se ramènent fréquemment, par le biais du groupe fondamental, à des problèmes portant sur les présentations. Alors pour une présentation du groupe fondamental, décider si un mot est trivial revient à décider si un lacet fermé est contractile ; décider si deux mots sont conjugués revient à décider si deux lacets fermés sont librement homotopes ; décider si un mot est dans le sous-groupe engendré par $a_1, \dots, a_n$

revient à décider si un lacet fermé se relève dans le revêtement correspondant au sous-groupe en un lacet fermé .

Si deux espaces topologiques sont homéomorphes ,alors leur groupe fondamental sont isomorphes .Ainsi le problème de l'isomorphisme nous donne un critère de démarcation

Deuxièmement ,La résolution du problème du mot (essentiellement) et des autres problèmes de Dehn permet d'établir des algorithmes de Decision pour beaucoup de propriétés .Par exemple si l'on a une solution au problème du mot ,pour une présentation donnée ,on peut décider si le groupe est abélien (alors les commutateurs des générateurs sont triviaux) ,si un groupe est fini ,on peut l'établir ;on peut aussi construire une table de multiplication pour le groupe (etc ...) .

Novikov et Rabin ,ont démontré qu'en général tous ces problèmes sont insolubles .Il existe néanmoins des groupes pour lesquels on sait résoudre ces problèmes .

Le but de notre travail est le suivant :

- (1) Etablir les théorèmes généraux d'insolubilité .
- (2) Etablir des résultats d' insolubilité pour des groupes élémentaires
- (3) Etablir des résultats de solubilité dans des classes de groupe (les plus larges possibles) .
- (4) Etablir la stabilité de la résolution de ces problèmes par des constructions ,ou des relations entre présentations ,ou entre groupe .

(Notons que même si les problèmes de dehn portent sur des présentations ,nous établirons que pour tous (excepté le problème de l'isomorphe) la possibilité de résolution est un invariant algébrique dans la classe des présentation f.e.)

Dans la première partie nous établirons les concepts élémentaires nécessaires à la suite ,en particuliers la notion de HNN extension dont l'utilisation sera omniprésente dans les chapitres II et III

Dans la deuxième partie ,nous établissons tous les résultats

d'insolubilité ,théorème de Post ,théorème de Novikov ,théorème d'Adjan-Rabin ainsi que des théorèmes de théorie des groupes (Higman ,Higman-Neuman-Neuman) qui nous seront utiles pour la suite .

Dans la troisième partie nous établissons des résultats d'insolubilité et de solubilité ,pour des groupes élémentaires ,i.e. ,définies par des propriétés algébriques élémentaires ,ou construits sur des groupes élémentaires par des chaînes de produit libre amalgamé ,split extension ,produit direct ,extension HNN .Nous étudions en particulier ,l'effet de ces constructions sur la résolution des problèmes .

Dans la quatrième partie ,nous employons la méthode géométrique pour résoudre le problème du mot dans des classes larges de groupes ,les groupes hyperboliques de M.Gromov ,et certains groupes à petite simplification .Nous analysons en particulier les notions d'algorithme de Dehn ,et d'inégalité isopérimétrique ,et caractérisons les groupes admettant un algorithme de Dehn ,ou une inégalité isopérimétrique (ce sont les groupes Hyperboliques) .Nous établissons aussi la stabilité de la propriété avoir un problème du mot soluble dans la classe des groupes finiment engendré ,par quasi isométrie .

Puisque ces problèmes naissent essentiellement en topologie ,il était naturel ,d'étudier certains effets des résultats que nous avons établi ,en topologie .C'est ce que nous faisons dans la cinquième partie .Nous construisons sur une présentation finie ,une présentations de 5 variétés à bord ,et de 4-variétés fermées sans bord ,dont le groupe fondamental est le groupe déterminé par la présentation de groupe utilisée .Nous avons alors l'insolubilité des problèmes de Dehn pour des groupe fondamentaux de 4 variétés et de 5 variétés .Nous établissons de plus une résultat de Markov :le problème de l'homéomorphisme est insoluble pour ces classes de variétés .