CHAPITRE II :

THEOREMES GENERAUX D'INSOLUBILITE

Dans cette partie nous démontrons que tous les problèmes de Dehn ,sont en général insolubles pour des groupes finiment présentés .

Les deux premières parties sont consacrées au problème du mot .Dans la première partie nous démontrons le théorème de Post ,i.e. il existe un semi-groupe finiment présenté ayant un problème du mot récursivement insoluble .Pour établir ce résultat ,nous construisant pour une machine de Turing quelconque ,un semi-groupe f.p. associé ,de telle façon que que le problème d'arrêt de la machine de Turing ,se réduise au problème du mot dans le semi-groupe .Dans la deuxième partie ,nous utilisons ce résultat ,pour établir l'existence d'un groupe f.p. ayant un problème du mot insoluble .Pour ce faire ,nous construisons sur un semi groupe f.p. un groupe f.p. associé ,et démontrons que le problème du mot du semi-groupe est réducible au problème du mot dans le groupe .La première démonstration de ce résultat est due à *P.Novikov* .Elle utilisait des arguments combinatoire .*W.W. Boone* a établi un lemme ,racourcissant considérablement la démonstration initiale .La démonstration que ,nous donnons ,est due essentiellement à *S.Aandera* .Il utilise le fait établit par *J.L.Britton* que ce groupe est le résultat d'une suite de HNN extensions sur le groupe cyclique infini .L'utilisation du lemme de Britton permet de remplacer l'argument combinatoire ,par un argument de théorie des groupes .Sa démonstration se prolonge ,en une démonstration du théorème de Higman .C'est cette démonstration que nous établissons dans la troisième partie .(ainsi que le théorème de Higman-Neumann -Neumann) .L'utilisation des théorèmes de plongements établis dans la troisième partie ,est omni-présente ,dans la suite de notre propos

Dans la quatrième partie nous établissons simplement ,en utilisant le théorème de Novikov ,le théorème de Adjan-Rabin .Sa démonstration utilise un lemme technique ,simple à établir ,dû à

C.F.Miller III ,qui pourrait certainement avoir beaucoup d'autres interêts en théorie des groupes (nous l'utilisons aussi pour établir le théorème de Higman-Neumann-Neumann) .
Nous montrons que non seulement le problème de l'isomorphisme est insolubles mais qu'un grand nombre d'autres problèmes de décisions globaux sont insolubles .

Cette partie établit l'insolublité de tous les problèmes de Dehn ,en général ,mais ne donne explicitement aucune présentation de groupe ayant un problème insoluble .

II.1 THEOREME DE POST

De façon similaire à ce que nous avons vu en I.1 ,on peut se donner un semi-groupe par la donnée d'une présentation :

$$\Gamma = \langle X \,/\, A_i = B_i \quad i \in I \rangle .$$

Deux mots sur X , ω et ξ , représentent le même élément de Γ s'il y a une suite finie finie **d'opérations élémentaires** de ω à ξ

i.e $\omega \equiv W_1 \longrightarrow W_2 \longrightarrow \dots W_k \longrightarrow W_{k+1} \dots \longrightarrow W_n \equiv \xi$

où l'on écrit $W_k \longrightarrow W_{k+1}$ si il existe P et Q , mots sur S (éventuellement vides); tel que l'on a une des conditions suivantes : $W_k \equiv P\, A_i\, Q$ et $W_{k+1} \equiv P\, B_i\, Q$

ou $W_k \equiv P\, B_i\, Q$ et $W_{k+1} \equiv P\, A_i\, Q$; $i \in I$.

Le problème du mot se généralise aux semi-groupes .C'est par contre faux pour le problème de la conjugaison .

Le problème du mot est "plus simple" pour un semi-groupe que pour un groupe . Nous allons néamoins démontrer qu'il existe un semi-groupe finiment présenté ,pour lequel le problème du mot est récursivement insoluble .Intuitivement ,la méthode va consister à construire un semi-groupe "simulant" une machine de turing ; i.e on va établir des analogies entre opérations élémentaires du semi-groupe et mouvements élémentaires de la machine ,de sorte que le problème d'arrêt de la machine se réduise au problème du mot du semi-groupe.Dans la suite nous préciseront plus clairement ces analogies .

On considère une machine de Turing T , sur un alphabet $\mathfrak{S} = \{s_o,\dots,s_n\}$ et un ensemble d'états $\Omega = \{q_o,\dots,q_m\}$. On lui "associe" un semi-groupe $\Gamma(T)$ par la donnée d'une présentation :

Générateurs : $s_o,\dots,s_n,\ q_o,\dots,q_n,\ q,\ h$.

Relateurs : (i) $\left\{ q_is_j = q_ls_k \right.$ pour $q_is_js_kq_l \in T$

$\forall s_k \in \mathfrak{S}$ (ii) $\left\{ \begin{array}{l} q_is_js_k = s_jq_ls_k \\ q_is_jh = s_jq_ls_oh \end{array} \right.$ pour $q_is_j\ R\ q_l \in T$

$\forall s_k \in \mathfrak{S}$ (iii) $\left\{ \begin{array}{l} s_kq_is_j = q_ls_ks_j \\ h\,q_is_j = h\,q_ls_os_j \end{array} \right.$ pour $q_is_j\ L\ q_l \in T$

$\forall s_k \in \mathfrak{S}$ (iv) $\left\{ \begin{array}{l} q_os_k = q_o \\ s_kq_oh = q_oh \end{array} \right.$

(v) $\left\{ h\,q_oh = q \right.$.

Intuitivement Les relateurs (i), (ii), (iii) reproduisent les actions de T. La lettre h représente les extrémités des mots sur la bande . Par abus de langage on emploiera la terminologie de "description instantanée" pour des mots de $\Gamma(T)$. Un mot de la forme $h\ \omega\ h$ où ω est une description instantanée est alors analogue de la description instantanée ω pour T . Les relations (iv) et (v) établissent q comme analogue de l'état d'arrêt de T .

Definition : On dit qu'un mot de $\Gamma(T)$ est **h-spécial** si il est de la forme $h\ P\ h$ où P est une description istantanée.

Lemme II.1.1 : Soit T une machine de turing ,et $\Gamma(T)$ son semi-groupe associé . Considérons U et V ,deux mots de $\Gamma(T)$.

(i) Si $U \not\equiv q$,et $V \not\equiv q$,et $U \longrightarrow V$ est une opération élémentaire ,alors U est h-spécial ssi V est h-spécial .

(ii) Si $U \equiv h\ \alpha\ h$ et U est h-spécial ,et $V \not\equiv q$ et $U \longrightarrow V$ est une opération élémentaire utilisant un relateur de la forme (i) ,(ii) ,ou (iii) ,alors $V \equiv h\,\beta\,h$ et soit $\alpha \longrightarrow \beta$,soit $\beta \longrightarrow \alpha$ est un mouvement élémentaire de T .

Démonstration : *(i)* la seule relation qui transforme un mot h-spécial, en un mot qui n'est pas h-spécial est $h\,q_o h = q$. Avec U et $V \not\equiv q$ le résultat est clair . □

(ii) Avec ces hypothèses , (i) $\Longrightarrow$ V est h-spécial soit que $V \equiv h\,\beta\,h$,où β est une description instantanée On peut alors considérer que $\alpha \equiv P\,A_i\,Q$ et $\beta \equiv P\,B_i\,Q$ où soit $h\,A_i = B_i$,soit $A_i = B_i h$,soit $A_i = B_i$ est un relateur ,et donc on passe de α à β par un relateur de la forme ,(i) (ii) ou (iii) .Donc puisque les relateurs de cette forme correspondent à des quadruples de T ,il aisé d'établir que soit $\alpha \longrightarrow \beta$,soit $\beta \longrightarrow \alpha$ est un mouvement élémentaire de T ■

Le lemme suivant établit ce que nous entendions par " $\Gamma(T)$ simule la machine T " .

Lemme II.1.2 : Soit T une machine de turing avec pour état d'arrêt q_o .Soit E l'ensemble énuméré par T ;et ω un mot sur l'alphabet de T .

$$\omega \in E \iff h\,q_1\omega\,h = q \quad \text{dans } \Gamma(T) .$$

Démonstration : ($\Longleftarrow$) Supposons que $h\,q_1\omega\,h = q$ .Alors il existe une suite d'opérations élémentaires :

$$h\,q_1\omega\,h \equiv W_1 \longrightarrow \ldots \longrightarrow W_n \equiv q .$$

Remarquons que si W_i est h-spécial et $W_i \longrightarrow W_{i+1}$ est une opération élémentaire ;alors si W_i n'a pas d'occurence de q_o ,$W_{i+1} \not\equiv q$ .En effet ,W_i est h-spécial ,et pour "tuer" les h il faut utiliser le relateur (v) ,ce qui n'est possible qu'avec une occurence de q_o .

Un des éléments de la suite ,a donc une occurence de q_o . Prenons W_k ,le premier élément ayant une occurence de q_o ($k \geq 2$) . Posons $\forall\, i \in (1,\ldots,k-1)$,$W_i \equiv h\,\alpha_i h$ .Aucun α_i n'ayant d'occurence de q_o ,les relateurs utilisés sont d'une des formes (i) ,(ii) ou (iii) .Alors ,avec le lemme II.1.1 (ii) , soit $\alpha_i \longrightarrow \alpha_{i+1}$ soit $\alpha_{i+1} \longrightarrow \alpha_i$,est un déplacement élémentaire .Le problème consiste à démontrer que le sens de déplacement est de gauche à droite (alors qu'une opération élémentaire est symétrique ,un déplacement élémentaire ne l'est pas) . q_0 est l'état d'arrêt de la machine ,d'où $\alpha_{k-1} \longrightarrow \alpha_k$ est un déplacement élémentaire .

Si k = 2 , alors $\alpha_1 \longrightarrow \alpha_2$ est un calcul de T ;dans ce cas on a bien $\omega \in E$.

Si $k \geq 2$, alors soit $\alpha_1 \longrightarrow \alpha_2 \ldots \longrightarrow \alpha_k$ est une suite de déplacements élémentaires ,et dans ce cas un calcul de ω dans T (i.e $\omega \in T$) ; soit il existe i tel que $\alpha_{i-1} \longleftarrow \alpha_i \longrightarrow \alpha_{i+1}$. Etant donné qu'une machine de turing n'a jamais d'ambiguité quand à son déplacement ,on a nécessairement $\alpha_{i-1} = \alpha_{i+1}$,on peut alors raccourcir la suite ,tout en gardant les même hypothèses . En procédant par induction , on peut donc se ramener à la suite $\alpha_1 \longrightarrow \ldots \longrightarrow \alpha_k$, et donc $\omega \in E$. □

($\Longrightarrow$) Si $\omega \in E$,alors on a dans T ,une suite de déplacements élémentaires :

$$q_1\omega \longrightarrow \ldots \longrightarrow X\, q_0 Y$$

où X et Y sont des mots sur l'alphabet de T . Alors on a la suite d'opérations élémentaires dans $\Gamma(T)$:

$$h\, q_1\omega\, h \longrightarrow \ldots \longrightarrow h\, X\, q_0 Y\, h \qquad (1)$$

En utilisant la relation $q_0 s_b = q_0$ on peut construire la suite

$$h\, X\, q_0 Y\, h \longrightarrow \ldots \longrightarrow h\, X\, q_0 h \qquad (2)$$

,avec La relation $s_b q_0 h = q_0 h$,on peut construire la suite

$$h\, X\, q_0 h \longrightarrow h\, q_0 h \qquad (3)$$

;et ce, car X et Y sont des mots sur $\mathfrak{S} = \{s_1, \ldots, s_n\}$. Finalement avec (1) , (2) , (3) et le relateur (v) on construit la suite d'opérations élémentaires :

$$h\, q_1\omega\, h \longrightarrow \ldots \longrightarrow h\, X\, q_0 Y\, h \longrightarrow \ldots \longrightarrow h\, X\, q_0 h \longrightarrow h\, q_0 h \longrightarrow q$$

,et donc $h\, q_1\omega\, h = q$ dans $\Gamma(T)$. ■

Théorème I.1.1 : *(Post)*

Il existe un semi-groupe finiment présenté , Γ ayant un problème du mot insoluble récursivement insoluble .

$$\Gamma = \Gamma(T^*) = \langle q, h, s_o, \ldots, s_n, q_o, \ldots q_m \ / \ R(T^*) \rangle$$

Il n'existe pas d'algorithme permettant de décider pour un mot h-spécial $h \omega h$, si $h \omega h = q$.

Demonstration : Il existe un ensemble E, récursivement énumérable, non récursif. Soit T^* la machine de Turing qui l'énumère. On construit $\Gamma(T^*)$ commme précédemment. Soit W l'ensemble des mots sur $\mathfrak{S}$, $\tilde{W}$ l'ensemble des mots de Γ.

Considérons l'ensemble $V = \left\{ v \in \tilde{W} / \ v \equiv h\, q_1 \alpha\, h \quad \text{où } \alpha \in W \right\}$

V est clairement récursif (Théorie des fonctions récursives). Si Γ a un problème du mot résoluble, alors $U = \left\{ u \in \tilde{W} \ / \ u = q \right\}$ est récursif.

Considérons $\tilde{E} = \left\{ h\, q_1 \alpha\, h \ ; \text{ où } \alpha \in E \right\}$. $\tilde{E}$ est récursif ssi E est récursif. Or $\tilde{E} = U \cap V$ est donc récursif puisque intersection d'ensembles récursifs, ce qui contredit l'hypothèse ■

Nous avons démontré que le problème du mot dans le problème d'arrêt de l'arrêt de T est réducible au problème du mot de $\Gamma(T)$. W. W. Boone démontre dans [4], que la réciproque est vraie, et il établit ainsi le résultat :

Théorème I.1.2 : *(Boone)*

Pour tout degré D d'insolubilité, il existe un semi-groupe f.p., ayant un problème du mot de degré D.

II.2 THEOREME DE NOVIKOV-BOONE

Dans cette partie, nous allons démontrer le théorème suivant.

Théorème II.2.1 : *(Novikov-Boone)*

Il existe un groupe finiment présenté, ayant un problème du mot insoluble.

Il est clair que puisque le problème du mot est réducible au problème de la conjugaison, et au problème du mot généralisé, on a le corollaire suivant du théorème de Novikov-Boone :

Corollaire I.2.1.1 : Il existe un groupe f.p. ayant un problème du mot, un problème de la conjugaison, un problème du mot généralisé ,récursivement insolubles

Nous n'aurons plus besoin de faire référence aux machines de Turing . Le résultat qui nous sera utile est le corollaire suivant du théorème de Post .

Proposition II.2.1 : Il existe un semi-groupe finiment présenté
$\Gamma = \langle q, q_1, \ldots, q_N \ , \ s_1, \ldots, s_M \ / \ F_i q_{v(i)} G_i = H_i q_{v(i)} K_i \rangle$
;où $I \ni i$ est fini ; $q_{v(i)}, q_{v(i)} \in \langle q, q_1, \ldots, q_N \rangle$;et F_i, G_i, H_i, K_i sont des mots sur $\langle s_1, \ldots, s_M \rangle$; ayant un problème du mot récursivement insoluble .

Démonstration : Considérons le semi-groupe $\Gamma(T^*)$,du théorème de Post .Renumérotons $\langle q_0, \ldots, q_m \rangle$ en $\langle q_1, \ldots, q_N \rangle$; $\langle s_0, \ldots, s_n \rangle$ en $\langle s_1, \ldots, s_{M-1} \rangle$ et posons $s_M \equiv h$ .On a alors la présentation donnée ci-dessus .Le theo. I.1.1 nous permet de conclure ■

Notations :
Soit $X \equiv s_1^{\zeta_1} \ldots s_m^{\zeta_m}$ un mot sur $\langle s_1, \ldots, s_M \rangle$ .Dans ce paragraphe on notera $\bar{X}$ le mot $\bar{X} \equiv s_1^{-\zeta_1} \ldots s_m^{-\zeta_m}$.
Soient X et Y des mots sur $\langle s_1, \ldots, s_M \rangle$,on note :

$$(X \ q_j \ Y)^* \equiv \bar{X} \ q_j \ Y$$

où $q_j \in \langle q, q_1, \ldots, q_N \rangle$.
Un mot Σ est dit **spécial** ,si $\Sigma \equiv \bar{X} \ q_j \ Y$,où X et Y sont des mots positifs sur $\langle s_1, \ldots, s_M \rangle$.

Nous allons construire sur Γ (i.e en faisant référence à la présentation de Γ) , un groupe de présentation finie . Nous verrons que ce groupe est le résultat d'une chaîne de Britton sur le groupe cyclique infini ,et qu'il a un problème du mot récursivement insoluble .

On considère le groupe finiment présenté ,$G = G(T)$:

Générateurs : $q, q_1, \ldots, q_N \ , \ s_1, \ldots, s_M \ , \ r_i (i \in I) \ , \ x \ , \ t \ , \ k$

Relateurs : $x \, s_b = s_b x^2$ $\qquad \Delta_1 \quad \Delta_2 \quad \Delta_3$

$r_i s_b = s_b x \, r_i x$

$$r_i^{-1}\,\bar{F}_i\,q_{i1}\,G_i\,r_i = \bar{H}_i\,q_{i2}\,K_i$$

$$t\,r_i = r_i\,t$$

$$t\,x = x\,t$$

$$k\,r_i = r_i\,k$$

$$k\,x = x\,k$$

$$k\,(q^{-1}t\,q) = (q^{-1}t\,q)\,k$$

où $s_b \in \langle s_1,\dots,s_M\rangle$ et $i_1 = v(i)$,$i_2 = w(i)$

Lemme II.2.1 : *(Boone)*

Si Σ est un mot spécial alors $k(\Sigma^{-1}t\ \Sigma) = (\Sigma^{-1}t\ \Sigma)k$ dans G ssi $\Sigma^* = q$ dans Γ .

Le lemme de Boone nous permet de conclure : si l'on a un algorithme pour résoudre le problème du mot dans G , alors $\forall\ \Sigma$ mot spécial sur $\langle s_1,\dots,s_M\rangle$,on peut décider si $\Sigma^* = q$ dans Γ ,(i.e $\forall$ X et Y mots positifs sur $\langle s_1,\dots,s_M\rangle$, $\forall\ q_j \in \langle q,q_1,\dots,q_m\rangle$, on peut décider si $X\,q_jY = q$ dans Γ); ce qui contredit le théorème de Post .

L'objectif de cette partie est de démontrer ce résultat. Cette démonstation sera effectuée en plusieurs étapes .Commençons par démontrer la condition suffisante .

Démonstration de la condition suffisante du lemme de Boone :

Nous commençons par établir quelques propriétés de G .
Soit V un mot positif sur $\langle s_1,\dots,s_M\rangle$ .Alors $\forall\ i \in I$, $r_iV = V\,R$ dans G où R est un mot (positif) sur $\langle x\ ,\ r_i(i \in I)\rangle$.

Nous prouvons ce résultat ,par induction sur la longueur m de $V \equiv s_{\alpha 1}\dots s_{\alpha m}$.

Si $m = 0$ alors la propriété est vraie ,avec $R = r_i$.
Supposons que la propriété soit vraie pour $m > 0$.
On a alors $r_iV = V\,R$ pour tout $i \in I$ et tout mot V ,de longueur m sur $\langle s_1,\dots,s_M\rangle$.
Prenons $s_{\alpha m+1} \in \langle s_1,\dots,s_M\rangle$, et $V' \equiv V\,s_{\alpha m+1}$
Alors $r_iV' \equiv r_iV\,s_{\alpha m+1} = V\,R\,s_{\alpha m+1}$
En utilisant les relations $x\,s_b = s_bx^2$ et $r_is_b = s_bxr_ix$,R étant

un mot sur x et r_i, on a $V\,R\,s_{\alpha m+1} = V\,s_{\alpha m+1} R'$
$= V'R'$

;où R' est un mot (positif) sur $(x\ ,\ r_i(i \in I))$ ...C.Q.F.D. .

En considérant $U \equiv s_{\alpha m+1} \ldots s_1$ on a $\bar{U} = V^{-1}$,et alors ,on a

$$\bar{U}\, r_i^{-1} = V^{-1} r_i^{-1} = (r_i V)^{-1} = (V\ R)^{-1} = R^{-1} V^{-1} = R''\ \bar{U}$$

i.e $\forall$ U mot positif sur S , $\forall\, i \in I$, $\exists$ L mot sur x , r_i $(i \in I)$, tel que $\bar{U}\, r_i^{-1} = L\ \bar{U}$ dans G .

Ces considérations seront utiles dans la suite de la démonstration

Supposons que $\Sigma^* = q$ dans Γ où Σ est un mot spécial on a dans Γ ,la suite d'opérations élémentaires :

$$\Sigma^* \equiv W_1 \longrightarrow \ldots W_j \longrightarrow W_{j+1} \ldots \longrightarrow W_n \equiv q$$

avec $W_j \equiv U\, F_i q_{i1} G_i V$ et $W_{j+1} \equiv U\, H_i q_{i2} K_i V$ (ou inversement),où U et V sont des mots positifs sur $(s_1, \ldots, s_M)$.

Dans G nous avons les égalités suivantes :

$$\bar{U}\ (\bar{H}_i q_{i2} K_i)\ V = \bar{U}\ (r_i^{-1} \bar{F}_i q_{i1} G_i\ r_i)\ V = L\ \bar{U}\ \bar{F}_i q_{i1} G_i V\ R$$

où L et R sont des mots sur $(x\ ,\ r_i(i \in I))$.

On a donc $\forall$ $j \in (1, \ldots, n-1)$, $W_j^* = L\ W_{j+1}^* R$ ou $W_{j+1}^* = L\ W_j^*\ R$ dans G .

Donc $\forall$ $j \in (1, \ldots, n-1)$,$\exists$ L_j et R_j mots sur x , $r_i(i \in I)$,tel que , $W_j^* = L_j\ W_{j+1}^* R_j$ dans G .

En posant $L = L_1 L_2 \ldots L_{n-1}$,et $R = R_{n-1} \ldots R_2 R_1$,on a dans G ,l'égalité : $W_1^* = L\ W_n^*\ R$

où L et R sont des mots sur $(x\ ,\ r_i(i \in I))$.

Or $W_1^* \equiv (\ \Sigma^*)^* \equiv \Sigma$, et $W_n^* \equiv q^* \equiv q$,donc dans G , on l'égalité :

$$\Sigma = L\ q\ R$$

Donc si Σ est spécial , et $\Sigma^* = q$ dans Γ ,alors $\Sigma = L\ q\ R$ dans G

Avant de poursuivre ,remarquons que les relations , $k\ r_i = r_i k$, $k\ x = x\ k$; et $t\ r_i = r_i t$, $t\ x = x\ t$, assurent que k et t commuttent avec les mots sur $(x\ ,\ r_i(i \in I))$.

Avec tout ce qui précède $(\Sigma^{-1} t\ \Sigma)\ k \equiv R^{-1} q^{-1} L^{-1} t\ L\ q\ R\ k$
$= R^{-1} q^{-1} L^{-1} L\ t\ q\ k\ R$
$= R^{-1} (q^{-1} t\ q)\ k\ R$
$= R^{-1} k\ (q^{-1} t\ q)\ R$

$$= k\ R^{-1}q^{-1}L^{-1}L\ t\ R$$
$$= k\ R^{-1}q^{-1}L^{-1}t\ L\ q\ R$$
$$= k\ (\Sigma^{-1}t\ \Sigma) \qquad \blacksquare$$

Nous allons maintenant démontrer le condition nécessaire du lemme de Boone . Nous allons pour cela procéder en plusieurs étapes.

Considérons les groupes suivant :

$G_0 = \langle\ x\ \rangle$

$G_1 = \langle\ G_0\ ;\ s_1,\ldots,s_M\ /\ \text{relations } \Delta_1\rangle$

$G_2 = \langle\ G_1\ ;\ q,q_1,\ldots,q_N\ ,\ r_i(i \in I)\ /\ \text{relations } \Delta_2\rangle$

$G_3 = \langle\ G_2\ ;\ t\ /\ \text{relations } \Delta_3\rangle$

Dans la suite nous noterons $\langle u_1,u_2\ldots\rangle_i$,au lieu de $\langle u_1,u_2\ldots\rangle_{Gi}$,pour désigner le sous-groupe de G_i $(i = 0,1,\ldots,3)$,engendré par $u_1,u_2,\ldots$.

Lemme II.2.2 : (i) G_1 est une HNN extension de G_0 ayant pour lettres stables $\langle s_1,\ldots,s_M\rangle$.

(ii) $G_1 * \langle q,q_1,\ldots,q_N\rangle$ est une HNN extension de G_1 ayant pour lettres stables $\langle q,q_1,\ldots,q_N\rangle$.

(iii) G_2 est une HNN extension de $G_1 * \langle q,q_1,\ldots,q_N\rangle$ ayant pour lettres stables $\langle r_i(i \in I)\rangle$.

(iv) G_3 est une HNN extension de G_2 ayant pour lettre stable $\langle t\rangle$.

(v) G est une HNN extension de G_3 ayant pour lettre stable$\langle k\rangle$.

Démonstration : *(i)* G_1 a pour base G_0 , pour lettres stables $\langle s_1,\ldots,s_M\rangle$. Les relateurs de l'extension sont $\forall\ b \in \langle\ 1,\ldots,M\ \rangle$ $s_b^{-1}x\ s_b = x^2$. Il faut vérifier qu'il existe un isomorphisme Ψ tel que $\Psi : \langle\ x\ \rangle_0 \longrightarrow \langle\ x^2\rangle_0$ et $\Psi(x) = x^2$.

Or G_0 est libre ,donc ces deux sous-groupes sont cycliques infinis , et il existe donc un tel isomorphisme . $\square$

(ii) Le résultat est trivial en considérant les relateurs de l'extension $q_a^{-1}q_a = 1$ où $q_a \in \langle q,q_1,\ldots,q_N\rangle$. $\square$

(iii) G_2 a pour base $G_1 * \langle q, q_1, \ldots, q_N \rangle$, et pour lettres stables $\langle r_i (i \in I) \rangle$. Il faut vérifier que les sous-groupes de $G_1 * \langle q, q_1, \ldots, q_N \rangle$. $A(i)$ engendré par les éléments $(\bar{F}_i q_{i1} G_i \ , \ s_b x)$, et $B(i)$ engendré par les éléments $(\bar{H}_i q_{i2} K_i \ , \ s_b x^{-1})$ $(b = 1..m)$, sont isomorphes $\forall\ i \in I$,et que cet isomorphisme envoie les générateurs respectif de $A(i)$,sur les générateurs respectifs de $B(i)$ .Or ces sous-groupes sont libres sur leurs générateurs .En effet considérons une application de $F(q_{i1}, s_1, \ldots, s_M, x)$ dans $F(q_{i1}, s_1, \ldots, s_M)$,qui envoie q_{i1},sur q_{i1} ,s_i sur s_i ,et x sur 1 .Au vu des relateurs ,cette application s'étend sur $A(i)$,et l'image d'un mot non vide est un mot non vide .Donc l'application est injective ,de plus elle est surjective ,donc $A(i)$ est un groupe libre de rang $M + 2$,et est donc libre sur ses générateurs .Il en est de même de $B(i)$ .On a donc un isomorphisme de $A(i)$ dans $B(i)$,qui envoie $s_1 x$ sur $s_1 x^{-1}$ etc... □

(iv) G_3 a pour base G_2 et pour lettre stable $\langle\ t\ \rangle$. Avec pour relations de l'extension $t^{-1} r_i t = r_i$ et $t^{-1} x\ t = x$, A et B sont tout deux engendrés par $(\ x\ ,\ r_i (i \in I))$ on vérifie donc la condition de l'isomorphisme (considérer l'identité) . □

(v) G a pour base G_3 ,pour lettre stable k .
Les relateurs de l'extension sont : $k^{-1} r_i k = r_i$, $k^{-1} x\ k = x$, $k^{-1}(q^{-1} t\ \ q)\ \ k = q^{-1} t\ \ q$,et on a donc comme précédemment la condition de l'isomorphisme . ■

Lemme II.2.3 : Soit Σ un mot spécial vérifiant les hypothèses du lemme de Boone .
i.e $k\ (\Sigma^{-1} t\ \Sigma) = (\Sigma^{-1} t\ \Sigma)\ k$ dans G .
Alors il existe L_1 et L_2 ,mots sur $\langle x\ ,\ r_i (i \in I) \rangle$ tel que $L_1 \Sigma\ L_2 = q$ dans G_2 .

Démonstration : On a $k\ \Sigma^{-1} t\ \Sigma\ k^{-1} \Sigma^{-1} t^{-1} \Sigma = 1$ dans G ,HNN extension de G_3 avec pour lettre stable $\langle\ k\ \rangle$,et donc contient un pinch. Σ n'a pas d'occurences de k ,donc le pinch est $k\ \Sigma^{-1} t\ \Sigma\ k^{-1}$ D'après le théorème I.5.1 , $\Sigma^{-1} t\ \Sigma = C$ dans G_3 , où C est un mot sur x , $r_i (i \in I)$, $q^{-1} t\ q$ (le théorème I.5.1 , nous dit que l'élément de G_3 représenté par $\Sigma^{-1} t\ \Sigma$ est dans le sous-groupe de

G_3 engendré par x , $r_i(i \in I)$, $q^{-1}t\, q$).
On a alors $\Sigma^{-1}t\ \Sigma\ C^{-1} = 1$ dans G_3 et peut donc s'écrire :

$$W \equiv \Sigma^{-1}t\ \Sigma\ R_0\ (q^{-1}t^{e_1}\ q)\ R_1(q^{-1}t^{e_2}\ q)\ R_2\ \ldots(q^{-1}t^{e_m}\ q)\ R_m = 1$$

,dans G_3 où les R_v sont des mots sur $\langle x\ , r_i(i \in I)\rangle$ (event.^{t} vides) ; et $e_j = \pm 1$.
Nous pouvons prendre m minimal ,ce qui revient à considérer une écriture minimale de C sur ses générateurs .

G_3 est une HNN extension de G_2 avec pour lettre stable $\langle\ t\ \rangle$.
W contient donc un pinch $t^e B\ t^{-e}$, où $\tilde{B}$ représentant de B dans G_2 est dans le sous-groupe engendré par x , $r_i(i \in I)$) .

Si ce pinch est $t\ \Sigma\ R_0 q^{-1}t^{e_1}$, alors $e_1 = -1$ et $B \equiv \Sigma\ R_0 q^{-1}$.
On a $\tilde{B} = \Sigma\ R_0 q^{-1}$ dans G_3 et ddonc aussi dans G_2 puisque $\Sigma\ R_0 q^{-1}$ est un mot dans G_2 ,et que $G_2 \leq G_3$. On a donc $\tilde{B}^{-1}\Sigma\ R_0 = q$ dans G_2 . $\tilde{B}$ et R_0 sont des mots sur $\langle x\ , r_i(i\in\ I)\rangle$,et donc en posant $L_1 \equiv \tilde{B}^{-1}$ et $L_2 \equiv R_0$ on a le résultat désiré .

Si le pinch est $t^{e_i}\ q\ R_i\ q^{-1}t^{e_{i+1}}$,alors $B \equiv q\ R_i\ q^{-1}$ et on a $e_i = -\ e_{i+1}$ .Et alors dans G_3 , on a les égalités :

$$\begin{aligned} q^{-1}t^{e_i}\ q\ R_i q^{-1}t^{e_{i+1}}\ q &\equiv q^{-1}t^{e_i}\ q\ R_i q^{-1}t^{-e_i}\ q \\ &\equiv q^{-1}t^{e_i}\ B\ t^{-e_i}\ q \\ &= q^{-1}t^{e_i}\ \tilde{B}\ t^{-e_i}\ q \\ &= q^{-1}\tilde{B}\ q \\ &= q^{-1}B\ q \\ &= q^{-1}\ q\ R_i\ q^{-1}\ q \\ &= R_i \end{aligned}$$

car $\tilde{B}$ est un mot sur $\langle x\ , r_i(i \in I)\rangle$,et t commute avec x et r_i.
Ceci contredit le fait que m soit minimal(ce genre d'argument ,sera fréquemment employé dans les paragraphes II.2 et II.3 ■

Considérons un mot spécial Σ , vérifiant les hypothèses du lemme .Alors si $\Sigma \equiv \bar{X}\ q_j\ Y$,et $L_1\bar{X}\ q_j Y\ L_2 = q$ dans G_2 , On notera dans la suite $L_1\bar{X}\ q_j = q\ L_2^{-1}Y^{-1}$.

Lemme II.2.4 : Si L_1 et L_2 sont librement réduits , alors les mots $L_1\bar{X}\, q_j$ et $q\, L_2^{-1}Y^{-1}$ sont r_i-réduits (dans G_2) ,pour tout $i \in I$.

Demonstration : On doit démontrer que les mots $L_1\bar{X}\, q_j$,et $q\, L_2^{-1}Y^{-1}$ (pris comme éléments de G_2) ne contiennent pas de pinch . $r_i^e\, C\, r_i^{-e}$,où C est un mot sur $\langle x, s_1, \ldots, s_M, q, \ldots q_N \rangle$. Nous le démontrerons (par l'absurde) pour $L_1\bar{X}\, q_j$,le cas de $q\, L_2^{-1}Y^{-1}$ étant similaire .

Supposons donc que L_1 soit librement réduit ,et que $L_1\bar{X}\, q_j$ contiennent un pinch $r_i^e\, C\, r_i^{-e}$ .Les mots $\bar{X}$ et q_j n'ayant pas pas d'occurence de r_i .Le pinch est donc un sous mot de L_1 ,où C est un mot sur x ,s_b ,q ,q_p .Or L_1 est un mot sur $\langle x, r_i (i \in I)\rangle$,et donc $C \equiv x^m$ .Pour démontrer que ce n'est pas un pinch ,il faut démontrer que le représentant de x^m dans $G_1 * \langle q, q_1, \ldots, q_N\rangle$ n'est pas dans le sous groupe engendré par $(\bar{F}_i q_{i1} G_i\ ;\ s_1x, \ldots s_Mx\,)$,ou par $(\bar{H}_i q_{i2} G_i\ ;\ s_1x^{-1}, \ldots, s_Mx^{-1})$ (nous effectuerons la démonstration dans le premier cas ,le deuxième étant similaire) .

Supposons donc que $x^m = V$ dans $G_1 * \langle q, q_1, \ldots, q_N\rangle$.

$$\text{où}\quad V =_F W_0(\bar{F}_i q_{i1} G_i)^{e_1}\, W_1(\bar{F}_i q_{i1} G_i)^{e_2} \ldots W_{n-1}(\bar{F}_i q_{i1} G_i)^{e_n}$$

où les W_p sont des mots sur $\langle s_1x, \ldots, s_Mx\rangle$ (éventuellement vides) , et $e_p = \pm 1$,et où V est réduit comme élément du produit libre .
Or x^m n'a pas d'occurence de q_{i1} ,donc de $\bar{F}_i q_{i1} G_i$, donc par unicité de l'écriture sous forme normale $x^m = W_0$ dans $G_1 * \langle q, \ldots, q_N\rangle$ .Ecrivons alors que , $W_0 = (s_{b1}x)^{f_1} \ldots (s_{bk}x)^{f_k}$,où $f_j = \pm 1$ .On a alors $x^{-m}W_0 = 1$ dans $G_1 * \langle\, q, q_1, \ldots, q_N\,\rangle$,et donc dans G_1.Or G_1 est une HNN extension de $\langle\, x\,\rangle$,avec pour lettres stables $\langle s_1, \ldots, s_M\rangle$. Donc si W_0 est non vide ,d'après le théorème I.5.1 ,$x^{-m}W_0$ contient un pinch $s_b^e\, x^\varepsilon\, s_b^{-e}$,avec $e = \pm 1$,$\varepsilon = \pm 1$ .Si $e = 1$ alors d'après le théo.I.5.1 ,$x^\varepsilon \in \langle\, x^2\rangle$,ce qui est impossible avec $\varepsilon = \pm 1$. Donc $e = -1$ et le pinch est de la forme $s_b^{-1}x^\varepsilon\, s_b$ .Or W_0 se trouve dans le sous-groupe libre de G_1 ,engendré par $(s_1x, \ldots s_Ms)$,au vu des générateurs ,il ne peut contenir un tel sous-mot .

Donc W_0 est vide ,et donc $x^{-m} = 1$ dans $\langle\, x\ /\ \rangle$,ce qui n'est possible qu'avec $m = 0$,et donc L_1 contient un sous-mot de la forme $r_i^e\, r_i^{-e}$,ce qui contredit le fait que L_1 soit librement réduit . ■

Remarquons que $L_1\bar{X}\ q_j = q\ L_2^{-1}Y^{-1}$ dans G_2 ,et de plus ,sont r_i-réduits $\forall\ i \in I$. Donc d'après le lemme I.5.4 ,ils ont les même occurences de r_i $\forall\ i \in I$. De plus ces occurences se trouvent dans L_1 et L_2 .

Lemme II.2.5 : Soient L_1 et L_2 des mots sur $\langle x\ ,r_i(i \in I)\rangle$,qui sont r_i-réduits $\forall\ i \in I$. Si X et Y sont des mots librement réduits sur $\langle s_1,\ldots,s_M\rangle$, et si $L_1\bar{X}\ q_jY\ L_2 = q$ dans G_2 ,alors X et Y sont des mots positifs et $(\bar{X}\ q_jY)^* = q$ dans Γ .

Démonstration : Nous allons procéder par induction sur le nombre N d'occurences de r_i $(i \in I)$,dans L_1 (qui ,avec la remarque précédente ,est la même dans L_2) .

Si $N = 0$, $L_1\bar{X}\ q_jY\ L_2 = q$ dans G_2 ,nous donne $x^m\ \bar{X}\ q_jY\ x^n = q$ dans G_2 ,où l'on n'a aucune occurence de $r_i(i \in I)$.
Avec $G_1 * \langle q,q_1,\ldots,q_N\rangle \leq G_2$,on a donc :

$$x^m\ \bar{X}\ q_jY\ x^n = q \quad \text{dans } G_1 * \langle q,q_1,\ldots,q_N\rangle \quad .$$

Par unicité de l'écriture sous forme normale ,on a donc , $q_j \equiv q$, et dans G_1, $x^m\ \bar{X} = Y\ x^n = 1$ ce qui est possible dans G_1, uniquement si $m = n = 0$,et $\bar{X}$ et Y sont tout deux vides .En effet ,G_1 est une HNN extension de $\langle\ x\ \rangle$ avec pour lettres stables $\langle s_1,\ldots,s_M\rangle$; et si $\bar{X}$ (respectivement Y) est non vide ,d'après le théorème I.5.1 $x^m\ \bar{X}$ (respectivement $Y\ x^n$), contient un pinch $s_b^e\ C\ s_b^{-e}$, où C est un mot sur $\langle x\rangle$. Or les seules occurences de s_b étant dans $\bar{X}$ (resp^t Y) ,le pinch est un sous-mot de $\bar{X}$ (resp^{t}Y) .Or $\bar{X}$ (resp^{t}Y) n'a pas d'occurence de $\langle\ x\ \rangle$,et donc C est vide ,ce qui contredit le fait que X (resp^t Y) ,soit réduit .Donc $\bar{X}$ et Ysont tout deux vides et l'équation s'écritalors $q = q$ dans $G_1 * \langle q,q_1,\ldots,q_N\rangle$ .On a donc bien X et Y positifs ,et $(\bar{X}\ q_jY)^* = q$ dans Γ .

Supposons $N > 0$. $L_1\bar{X}\ q_jY\ L_2 = q$ dans G_2 ,où q ne contient pas r_i et est donc r_i-réduit .D'après le lemme I.5.2 ,$L_1\bar{X}\ q_jY\ L_2$ contient donc un pinch .Or L_1 et L_2 sont r_i-réduits $\forall\ i \in I$ ($\Leftrightarrow$ ne contiennent pas de pinch).Nous pouvons alors écrire :

$$L_1\bar{X}\ q_jY\ L_2 \equiv L_3(r_i^e x^m\ \bar{X}\ q_jY\ x^n r_i^{-e})\ L_4 = q \quad \text{dans } G_2$$

où L_3 et L_4 sont des mots r_i-réduits $(\forall\ i \in I)$ sur $\langle x\ ,\ r_i(i \in I)\rangle$,et le mot entre parenthèses , est un pinch .

D'après le théorème I.5.1 , $x^m\ \bar{X}\ q_j\ Y\ x^n$ est dans le sous-groupe

$$A(i) = \langle\ \bar{F}_i q_{i1} G_i\ ,\ s_1x,\ldots,s_nx\ \rangle \qquad \text{si } e = -1$$

$$B(i) = \langle\ \bar{H}_i q_{i2} K_i\ ,\ s_1x^{-1},\ldots,s_nx^{-1}\rangle \qquad \text{si } e = 1$$

Or c'est un élément du produit libre $G_1 * \langle q,q_1,\ldots,q_N\rangle$,et donc $j = i_1$ si $e = -1$,$j = i_2$ si $e = 1$.

Dans la suite ,nous ne considèrerons que le cas où $e = -1$,la démonstration dans l'autre cas étant similaire .

On peut donc écrire :

$$W \equiv x^m\ \bar{X}\ q_j\ Y\ x^n\ U_0(\bar{F}_i q_{i1} G_i)^{\alpha_1}\ U_1\ldots(\bar{F}_i q_{i1} G_i)^{\alpha_t}\ U_t = 1$$

dans $G_1 * \langle q,q_1,\ldots,q_N\rangle$,où $U_p(p \in \langle\ 0,\ldots,t\ \rangle)$ est un mot réduit sur $\langle s_1x,\ldots,s_Mx\rangle$ (éventuellement vide) ,et $\alpha_k = \pm 1$,$(k \in \langle\ 1,\ldots,t\rangle)$.

On peut prendre t minimal .

$G_1 * \langle q,q_1,\ldots,q_N\rangle$ est une HNN extension de G_1,avec pour lettres stables $\langle q,q_1,\ldots,q_N\rangle$ .q_ja une occurence dans W ,donc d'après le lemme de Britton W contient un pinch (en particulier $t \geq 1$) .

Supposons que ce pinch porte sur la première occurence de lettre stable , q_j . Alors $\alpha_1 = -1$,et $Y\ x^n\ U_0 G_i^{-1} = 1$ dans G_1 .

Nous allons démontrer qu'un pinch ne peut pas apparaitre ailleurs dans W .

Supposons qu'un pinch apparaisse dans un sous-mot de W ,de la forme :

$$(\bar{F}_i q_{i1} G_i)^{\alpha_p}\ U_p(\bar{F}_i q_{i1} G_i)^{\alpha_{p+1}}$$

Si $\alpha_p = 1$, alors $\alpha_{p+1} = -1$,et $G_i\ U_p\ G_i^{-1} = 1$ dans G_1 .

Si $\alpha_p = -1$, alors $\alpha_{p+1} = 1$,et $\bar{F}_i^{-1}\ U_p\ \bar{F}_i = 1$ dans G_1 .

Nous affirmons que dans les deux cas on a alors $U_p \equiv 1$ .En effet G_1 est une HNN extension de $\langle\ x\ \rangle$,avec pour lettres stables $\langle s_1,\ldots,s_M\rangle$. $G_i$et $\bar{F}_i$ sont des mots sur $\langle s_1,\ldots,s_M\rangle$ (qu'on peut prendre librements réduits), et donc d'après le théorème I.5.1 , on a un pinch $s_b^{e}\ C\ s_b^{-e}$, où C est un sous-mot de U_p sur $\langle x\rangle$ .Soit $C = x^m$ .Mais U_p est un élément du groupe libre $\langle\ s_1x,\ldots,s_Mx\ \rangle$ et ne peut donc contenir un tel sous mot que si $|m| \leq 1$ .Et alors ,soit U_p contient $s_b^{\varepsilon}\ x^{\zeta} s_b^{-\varepsilon}$,soit$U_p \equiv x^{\zeta}$,soit $U_p \equiv 1$ $(\varepsilon\ ,\zeta\ = \pm 1)$ .Au vu des générateurs ,seul le dernier cas est possible .

On peut alors réduire librement :

$$(\bar{F}_i q_{i1} G_i)^{\alpha_p} U_p (\bar{F}_i q_{i1} G_i)^{\alpha_{p+1}} \equiv (\bar{F}_i q_{i1} G_i)^{\alpha_p} (\bar{F}_i q_{i1} G_i)^{-\alpha_p} \equiv 1$$

Ce qui contredit le fait que t soit minimum .

Donc (lemme I.5.4) $t = 1$ et $\alpha_1 = -1$.

$$W \equiv x^m \bar{X} q_j Y x^n U_0 G_i^{-1} q_j^{-1} \bar{F}_i^{-1} U_1 = 1 \quad \text{dans } G_1 * \langle q, \dots, q_N \rangle$$

$$\text{et} \quad Y x^n U_0 G_i^{-1} = 1 \quad \text{dans } G_1$$

Et donc $$x^m \bar{X} \bar{F}_i^{-1} U_1 = 1 \quad \text{dans } G_1$$

Ce qui nous donne après conjugaison cyclique :

$$x^n U_0 G_i^{-1} Y = 1 \quad \text{dans } G_1$$

$$\text{et} \quad \bar{X} \bar{F}_i^{-1} U_1 x^m = 1 \quad \text{dans } G_1$$

U_0 et U_1 étant réduits , ils ne contiennent aucun sous-mot de la forme $s_b^{-1} s_b$ ou $s_b s_b^{-1}$. Nous éliminons tout les sous-mots de cette forme ,dans $x^n U_0 G_i^{-1} Y$. Nous affirmons alors que la première lettre de $G_i^{-1} Y$ est positive (et donc G_i^{-1} disparait,puisque G_i est un mot positif) . En effet supposons que G_i^{-1} commence par s_b^{-1} . Alors puisque $x^n U_0 G_i^{-1} Y = 1$ dans G_1 ,et a une occurence de s_b et que G_1 est une HNN extension de $\langle x \rangle$ avec pour lettres stables $\langle s_1, \dots, s_M \rangle$,d'après le théorème I.5.1 ,il contient un pinch . Or puisque $G_i^{-1} Y$ est un mot librement réduit sur $\langle s_1, \dots, s_M \rangle$,il ne contient pas de pinch . De même U_0 ne contient pas de pinch (cf plus haut) ,le pinch est donc $s_b C s_b^{-1}$ (avec C non vide),où $s_b C$ est un mot terminal de U_0 , et s_b^{-1} est la première lettre de G_i^{-1} . Rappelons nous que U_0 est un mot sur la famille libre de générateurs $\langle s_1 x, \dots, s_M x \rangle$. On a donc forcément (C n'ayant pas d'occurence de s_b) , $s_b C \equiv s_b x$. Or d'après le théorème I.5.1 , C est un élément de $\langle x^2 \rangle$,soit $x \in \langle x^2 \rangle$, ce qui est impossible .

De façon similaire on peut montrer qu'après avoir éliminé les sous-mots $s_b^{-1} s_b$ et $s_b s_b^{-1}$ de $\bar{X} \bar{F}_i^{-1} U_1 x^m$, la dernière lettre de $\bar{F}_i^{-1}$ est négative (et donc $\bar{F}_i^{-1}$ disparait après réductions).

On a $U_0 G_i^{-1} Y x^n = 1$ dans G_1 (conjugaison cyclique) . Ainsi $U_0^{-1} = (G_i^{-1} Y) x^n$ dans G_1 ,où $G_i^{-1} Y \equiv Y_1$ est un mot positif sur $\langle s_1, \dots, s_M \rangle$.

Considérons $V_0^{-1} \equiv r_i^{-1} U_0^{-1} r_i$. Puisque U_0 est un mot sur

$\langle s_1x,\ldots,s_Mx\rangle$, et que $r_i^{-1}(s_bx)\,r_i = s_bx^{-1}$,alors V_0^{-1} est un mot sur $\langle s_1x^{-1},\ldots,s_Mx^{-1}\rangle$. Nous pouvons considérer U_0^{-1}et V_0^{-1} , comme des éléments de G_1 .

Nous affirmons qu'il existe ψ automorphisme de G_1 qui fixe s_b $\forall\ b \in \langle 1,\ldots,M\rangle$,et qui envoie x sur x^{-1} . En effet considérons

$$\phi : \langle s_1,\ldots,s_M\ ,\ x\rangle \longrightarrow \langle s_1,\ldots,s_M\ ,\ x^{-1}\rangle$$

tel que $\phi\,(s_b) = s_b$ et $\phi\,(x) = x^{-1}$.

Alors $\exists\ !\ \psi$ homomorphisme ,tel que le diagramme suivant commutte

$$\begin{tikzcd}
\langle s_1,\ldots,s_M\ ,\ x\rangle \arrow[dr, "\psi"] & \\
\langle s_1,\ldots,s_M\ ,\ x\rangle \arrow[u, hook, "\iota"] \arrow[r, "\phi"'] & G_1
\end{tikzcd}$$

où ι est l'inclusion .

De plus ψ est surjective , car $\phi(\langle s_1,\ldots,s_M,x\rangle) = \langle s_1,\ldots,s_M,x^{-1}\rangle$ est une famille génératrice de G_1.

De plus $\phi\,(\Delta_1) = 1$, car $x\,s_b = s_bx^2 \Rightarrow x^{-1}x\,s_bx^{-2} = x^{-1}s_bx^2\,x^{-2}$ $\Rightarrow s_bx^{-2} = x^{-1}s_b$. On a donc l'endomorphisme induit $\bar\psi : G_1 \longrightarrow G_1$.

et de plus $\bar\psi\ \bar\psi^{-1} = \mathrm{Id}$, c'est donc un automorphisme .

Nous avons donc $V_0^{-1} = \psi\,(U_0^{-1})$,et donc $V_0^{-1} = Y_1x^{-n}$ dans G_1 .

Un argument similaire montre que $V_1^{-1} = x^{-m}\,\bar X_1$,où $\bar X_1 \equiv \bar X\ \bar F^{-1}$ est un mot négatif ,et $V_1^{-1} = r_i^{-1}\ U_1^{-1}\ r_i$.

Abordons l'étape de récurrence de notre induction .

Nous avons dans G_2

$$\begin{aligned}
q = L_1\bar X\ q_jY\ L_2 &\equiv L_3r_i^{-1}(x^m\ \bar X)\ q_j(Y\ x^n)r_iL_4 \\
&= L_3r_i^{-1}(U_1^{-1}\bar F_i)\ q_j(G_iU_0^{-1})r_iL_4 \\
&= L_3V_1^{-1}r_i^{-1}(\bar F_iq_jG_i)r_iV_0^{-1}L_4 \\
&= L_3V_1^{-1}(r_i^{-1}\bar F_iq_{i1}G_ir_i)V_0^{-1}L_4 \\
&= L_3V_1^{-1}(\bar H_iq_{i2}K_i)V_0^{-1}L_4 \\
&= (L_3x^{-m}\bar X_1)\ \bar H_iq_{i2}K_i(Y_1x^{-n}L_4)
\end{aligned}$$

On a donc $(L_3x^{-m})\ \bar X_1\bar H_iq_{i2}K_iY_1\ (x^{-n}L_4) = q$ dans G_2 .

Considérons donc que $L_1\bar X\ q_jY\ L_2$, vérifie les hypothèses ,et que L_1 et L_2 ont N occurence de $r_i(i \in I)$.

Remarquons que L_3x^{-m} et $x^{-n}L_4$ ont alors $N - 1$ occurences de r_i et sont r_i-réduits . $K_i$est positif . De plus $Y_1 \equiv G_i^{-1}Y$,et puisque G_i^{-1} disparait , Y_1 est un sous-mot de Y ,et est donc librement réduit

. Donc la seule réduction possible dans $K_i Y_1$,est à la "jonction" ,ce qui est impossible puisqu'on a vu que la première lettre de Y_1 est positive .(le même raisonnement montre que $\bar{X}_1\bar{H}_i$,est réduit).

On peut donc appliquer l'hypothèse d'induction ; $K_i Y_1$ et $X_1 H_i$ sont donc des mots positifs , et $(\bar{X}_1\bar{H}_i q_{i2} K_i Y_1)^* \equiv X_1 H_i q_{i2} K_i Y_1 = q$ dans Γ (équation (*)) . Or $X \equiv X_1 F_i$ et $Y \equiv G_i Y_1$,et sont donc positifs en tant que sous-mots de mots positifs .
Or $X\ q_j\ Y \equiv X_1 F_i q_{i1} G_i Y_1 = X_1 H_i q_{i2} K_i Y_1$ dans Γ
ce qui avec (*) nous donne le résultat souhaité $X\ q_j Y = q$ dans Γ ■

Nous pouvons maintenant achever la démonstration du lemme de Boone .

Démonstration de la condition nécessaire du lemme de Boone

Prenons $\Sigma = \bar{X}\ q_j Y$ (on peut prendre X et Y librement réduits) mot spécial tel que $k\ (\Sigma^{-1} t\ \Sigma) = (\Sigma^{-1} t\ \Sigma)\ k$ dans G . Alors (lemme II.2.3) ,$\exists$ L_1 et L_2 ,mots sur $\langle x\ ,\ r_i (i \in I)\rangle$ tel que $L_1\ \Sigma\ L_2 = q$ dans G_2 . On peut supposer que L_1 et L_2 sont librement réduits ,et alors (lemme II.2.4) , ils sont r_i-réduits $\forall$ i $\in$ I . On a donc d'après le lemme II.2.5 , $\Sigma^* = q$ dans Γ ■

Nous avons démontré que le problème du mot de Γ(T) est réducible au problème du mot de G(T) . W. W. Boone ,dans [5] ,démontre en utilisant des extensions HNN ,la réciproque (très technique) . En combinant ce résultat avec le théorème I.1.2 ,il établit le résultat :

Théorème I.2.2 : *(Boone)*
Pour tout degré d'insolubilité D il existe un groupe f.p. ayant un problème du mot de degré D .

En se servant de ce résultat ,Collins démontre le théorème plus général :

Théorème I.2.3 : *(Collins)*
Pour tout degrés d'insolubilité ,D_1 et D_2 , $D_1 \leq D_2$ ssi il existe un groupe f.p. ayant un problème du mot de degré D_1 ,et un problème de la conjugaison

de degré D_2 .

Pour une démonstration simple voir [26] .Remarquons que cette démonstration utilise la construction que nous effectuons en III.2

II.3 THEOREMES DE PLONGEMENTS

II.3.1 Théorème de Higman

Le but de ce paragraphe est de démontrer le théorème suivant

Théoreme II.3.1 : *(Higman)*

Un groupe finiment engendré est le sous-groupe d'un groupe finiment présenté ssi il admet une présentation récursive .

Ce résultat est quelque peu surprenant ,en ceci qu'il établit un lien étroit entre la théorie de la récursivité et la théorie des groupes .Il permet de démontrer simplement le théorème de Novikov-Boone .En effet il est aisé de trouver un groupe récursivement présenté ayant un problème du mot récursivement insoluble .

Considérons $I \subset \mathbb{N}$,récursivement énumérable ,non récursif .Un tel ensemble existe (proposition I.4.1) .Considérons alors le groupe récursivement présenté :

$K = \langle a,b,c,d \,/\, a^i b a^{-i} = c^i d c^{-i} \ , \ i \in I \rangle$.

Il est clair que K est le produit libre amalgamé de $\langle a,b \,/\, \rangle$,et de $\langle c,d \,/\, \rangle$ sur les sous-groupes respectifs engendrés par les membres de gauche (resp^t de droite) des relations de K .Alors $a^i b a^{-i} c^i d^{-1} c^{-i} =_K 1$ si et seulement si $i \in I$,et donc K a un problème du mot récursivement insoluble .Or avec le théorème de Higman ,K se plonge dans un groupe finiment présenté G ,et puisque le problème du mot est héréditaire ,G est un groupe f.p. ayant un problème du mot récursivement insoluble .

Remarquons que le sens ($\Rightarrow$) est trivial :

PROPOSITION II.3.1 : Tout sous-groupe finiment engendré d'un groupe f.p. ,est récursivement présenté .

Démonstration : Considérons un sous-groupe finiment engendré d'un groupe f.p. . Remarquons que l'ensemble des mots s'écrivant sur ces générateurs est récursivement énumérable . Or l'ensemble des éléments triviaux du groupe f.p. est récursive--ment énumérable . L'ensemble des éléments triviaux du sous-groupe est donc l'intersection de ces deux ensembles ,qui est alors (prop I.4.2) récursivement énumérable . On a donc une présentation récursive du sous-groupe . ■

Considérons un groupe récursivement présenté R .

$$R = \langle u_1,\ldots,u_m / \omega = 1 , \omega \in E \rangle$$

i.e , E est un ensemble récursivement énumérable , de mots positifs sur $\langle u_1,\ldots,u_m \rangle$.

Considérons alors , la machine de Turing T , qui énumère E . T a pour alphabet $\langle s_0,\ldots,s_M \rangle$, où $\langle u_1,\ldots,u_m \rangle \subseteq \langle s_0,\ldots,s_M \rangle$. Nous pouvons prendre T , avec pour état d'arrêt q_0 (lemme I.4.1) .

Nous avons vu que nous pouvons construire sur T un semi-groupe finiment présenté $\Gamma(T)$,tel que pour tout mot ω sur $\langle s_1,\ldots,s_M \rangle$, $\omega \in E \iff h\, q_1 \omega\, h = q$ dans $\Gamma(T)$.

Dans le paragraphe II.2 , nous avons reécrit sur un nouvel alphabet (en posant $s_M = h$,et en renumérotant $\langle q_i \rangle$ et $\langle s_j \rangle$) , la présentation de $\Gamma(T)$ (par commodité d'écriture),et avons nommé Γ ,le semi-groupe ainsi (finiment) présenté. Nous avons construit sur Γ , un groupe finiment présenté G , tel que (lemme de Boone) ,pour tout mot spécial Σ,

$$k\,(\Sigma^{-1} t\, \Sigma) = (\Sigma^{-1} t\, \Sigma)\, k \quad \text{dans } G \iff \Sigma^* = q \quad \text{dans } \Gamma$$

Dans cette partie , nous considèrerons la présentation de G ,construite sur la présentation de $\Gamma(T)$ (où T est la machine décrite ci-dessus) . Il nous suffit pour cela de changer dans l'ancienne présentation s_M en h , et de prendre pour $\langle s_i \rangle$ et $\langle q_j \rangle$,respectivement l'alphabet ,et l'ensemble d'états de la machine $\langle s_0,\ldots,s_M \rangle$ et $\langle q_1,\ldots,q_N \rangle$ (nous omettons de changer les indices M et N ,par rapport à l'ancienne présentation. Nous procéderons de la même façon pour G_1 ,G_2 ,G_3 .

Considérons le mot spécial $\Sigma \equiv h^{-1} q_1 \omega\, h$, où ω est un mot positif sur $\langle s_0,\ldots,s_M \rangle$. D'après ce qui précède , Les assertions suivantes sont équivalentes .

$$\omega \in E$$

$$\Sigma^* \equiv h\, q_1 \omega\, h = q \qquad \text{dans } \Gamma(T)$$

$$k\,(\Sigma^{-1} t\, \Sigma) = (\Sigma^{-1} t\, \Sigma)\, k \qquad \text{dans } G$$

$$(*) \quad k\,(h^{-1}\omega^{-1} q_1^{-1} h\; t\; h^{-1} q_1 \omega\, h) = (h^{-1}\omega^{-1} q_1^{-1} h\; t\; h^{-1} q_1 \omega\, h) \quad \text{dans } G$$

L'équation (*) est obtenu à partir de la précédente ,en remplaçant Σ par $h^{-1} q_1 \omega\, h$. Afin d'en simplifier l'écriture nous introduisons

$$k_o \equiv h\, k^{-1} h \quad \text{et} \quad t_o \equiv q_1^{-1}\, h\, t\, h^{-1} q_1 .$$

Considérons alors :

$$G'_3 = \langle\, G_2\ ,\ t_o \,/\, t_o^{-1}(q_1^{-1} h\, r_i h^{-1} q_1) t_o = q_1^{-1} h\, r_i h^{-1} q_1\ ,\ t_o^{-1}(q_1^{-1} h \times h^{-1} q_1)\, t_o = q_1^{-1} h \times h^{-1} q_1 \,\rangle$$

En remplaçant t_o par $q_1^{-1} h\, t\, h^{-1} q_1$, on remarque que G'_3 est une autre présentation de G_3 .

Deméme:

$$G' = \langle\, G'_3\ ,\ k_o \,/\, k_o^{-1}(h\, r_i h^{-1})\, k_o = h\, r_i h^{-1}, k_o^{-1}\, (h \times h^{-1})\, k_o = h \times h^{-1}$$
$$, k_o(h\, q^{-1} h^{-1} q_1 t_o q_1^{-1} h\, q\, h^{-1})\, k_o = h\, q^{-1} h^{-1} q_1 t_o q_1^{-1} h\, q\, h^{-1} \,\rangle$$

est une autre présentation de G .

Lemme II.3.1 : G' est une HNN extension de G'_3 ayant pour lettre stable $\langle k_o \rangle$. G'_3 est une HNN extension de G_2 ,ayant pour lettre stable $\langle t_o \rangle$.

Démonstration : k_o a pour sous-mot k , qui n'est pas sur l'alphabet de G' .Les relateurs invoquant k_o , sont donc uniquement ceux donnés dans la présentation . On vérifie aisément la condition de l'isomorphe (les sous-groupes en question sont engendrés par les même générateurs).

Le même raisonnement est valable pour G'_3 . ■

Lemme II.3.2 : Soit ω un mot positif sur $\langle s_o, \ldots, s_M \rangle$.

Alors $\omega \in E \iff k_o(\omega^{-1} t\, \omega) = (\omega^{-1} t\, \omega)\, k_o$ dans G'

Démonstration : Le deuxième membre de l'équivalence n'est rien d'autre que l'équation (*) reécrite en utilisant k_o et t_o ■

Nous définissons le produit libre

$$G_4 = G' * R$$

Nous considérons une présentation de G_4 donnée par la réunion des générateurs et des relateurs de G' et R . L'union doit être disjointe, nous considérons donc :

$$\langle a_1, \ldots, a_m \rangle \leq \langle s_0, \ldots, s_M \rangle \qquad \text{avec} \quad a_i \leftrightarrow u_i$$

E peut alors être considéré comme un ensemble de mots positifs sur $\langle a_1, \ldots, a_m \rangle$.

Nous définissons :

$$G_5 = \langle\, G_4 \,;\, b_1, \ldots, b_m \,/\, b_i^{-1} u_j b_i = u_j \,;\, b_i^{-1} a_j b_i = a_j \,;\, b_i^{-1} k_0 b_i = k_0 u^{-1} \text{ pour tout } i,j = 1,\ldots,m \,\rangle$$

$$G_6 = \langle\, G_5 \,;\, d \,/\, d^{-1} k_0 d = k_0 \,;\, d^{-1} a_i b_i d = a_i \,;\, i = 1,\ldots,m \,\rangle$$

$$G_7 = \langle\, G_6 \,;\, \sigma \,/\, \sigma^{-1} t_0 \sigma = t_0 d \,;\, \sigma^{-1} k_0 \sigma = k_0 \,;\, \sigma^{-1} a_i \sigma = a_i \,;\, i = 1,\ldots,m \,\rangle$$

La démonstration du théorome de Higman va alors consister à :

1°) -Montrer que l'on a une chaîne de Britton

$$R \leq G_4 \leq G_5 \leq G_6 \leq G_7$$

2°) -Montrer que G_7 a une présentation finie.

Notation : Dans cette partie nous noterons $\langle x_1, x_2, \ldots \rangle_i$, pour désigner le sous-groupe de G_i engendré par $x_1, x_2, \ldots$. ($i = 4 \ldots 7$)

Nous avons besoin du lemme suivant.

Lemme II.3.3 : Les sous-groupes de G_4 , $\langle a_1, \ldots, a_m, k_0 \rangle_4$ et $\langle a_1, \ldots, a_m, t_0 \rangle_4$ sont libres ments engendrés par leurs générateurs

Démonstration : Nous démontrerons le résultat dans le premier cas , le deuxième étant similaire . Avec nos nouvelles notations ; G_1 est une HNN extension de $\langle\, x \,\rangle$ ayant pour lettres stables $\langle s_0 ; \ldots ; s_n \rangle$. Donc d'après le lemme I.5.3 le sous-groupe de G_1

engendré par $s_0, \ldots, s_n$ est libre . Or :

$$G_1 \leq G_1 * \langle q, \ldots, q_n \rangle \leq G_2 \leq G'_3 \leq G'$$

Donc puisque $G_4 = G' * R$ et que $\langle a_1; \ldots ; a_m \rangle \subseteq \langle s_0; \ldots ; s_m \rangle \subset G'$ $\langle a_1; \ldots ; a_m \rangle_4$ est libre sur ses générateurs .
Prenons un mot W sur $a_1, \ldots, a_m, k_0$.

$W \equiv C_0 k_0^{e1} C_1 \ldots k_0^{en} C_n = 1$ dans G_4 .

Où les C_i sont des mots sur $\langle a_1, \ldots, a_m \rangle$.
Or puisque W n'invoque que des lettres de G' ; W = 1 dans G' .
G' est une HNN extension de G'_3 ayant lettre stable k_0 ; donc si $n \geq 1$ W contient un pinch $k_0^{ei} C_i k_0^{ei+1}$ où C_i est égal dans G'_3 à un mot sur $h r_i h^{-1}$; $h x h^{-1}$; et $hq^{-1}h^{-1}q_1 t_0 q_1^{-1} hqh^{-1}$.
Or les relations de G'assurent que k_0 commuttent avec ces éléments , et donc on peut remplacer le pinch dans W ; par C_i . Après avoir réitéré ce procédé on arrive à :
$W' \equiv C_0 \ldots C_n = 1$ dans G' et donc dans $F(a_1; \ldots ; a_n)$; donc $W' \equiv 1$.
Si l'on prend $C_0 \ldots C_n$ réduits ; alors ceci est contradictoire .
Donc $\langle a_1, \ldots, a_m, k_0 \rangle_4$ est libre sur ses générateurs . ■

Lemme II.3.4 : G_5 est une HNN extension de G_4 ayant pour lettres stables $\langle b_1, \ldots, b_n \rangle$.

Démonstration : Il est clair que G_5 a pour base G_4 , et pour lettre stable $\langle b_1, \ldots, b_m \rangle$.
Il nous reste à vérifier la condition de l'isomorphisme, i.e. $\forall$ i , il existe un isomorphisme $\Psi_i : A(i) \longrightarrow B(i)$
avec $\forall$ i $A(i) = \langle u_1, \ldots, u_m, a_1, \ldots, a_m, k_0 \rangle$.
$B(i) = \langle u_1, \ldots, u_m, a_1, \ldots, a_m, k_0 u_i^{-1} \rangle_4$.

tel que $\Psi_i(u_p) = u_p$, $\Psi_i(a_p) = a_p$, $\Psi_i(k_0) = k_0 u_i^{-1}$, pour tout p = 1 ... m , et pour tout i = 1 ... n .
Remarquons que $k_0 = k_0 u_i^{-1} u_i \in B(i)$ donc $A(i) = B(i)$.
Nous avons $G_4 = G' * R$. On peut donc écrire (lemme 4.1.2 de [23])

$$A(i) = B(i) = \langle u_1, \ldots, u_m \rangle_4 * \langle a_1, \ldots, a_m, k_0 \rangle_4 .$$

D'après le lemme II.3.2 , $\langle a_1, \ldots, a_m, k_0 \rangle_4$ est libre .
On a donc $\forall$ i l'homomorphisme

$$\psi_i : \langle a_1, \ldots, a_m, k_0 \rangle \longrightarrow A(i)$$

tel que $\psi_i(a_p) = a_p$; $\psi_i(k_o) = k_o u_i^{-1}$

On peut donc construire par propriété des produits libres :

$$\tilde{\psi}_i : A(i) \longrightarrow A(i)$$

tel que $\tilde{\psi}_i(u_p) = u_p$; $\tilde{\psi}_i(a_p) = a_p$; $\tilde{\psi}_i(k_o) = k_o u_i^{-1}$

de la même façon :

$$\phi_i : \langle a_i, \ldots, a_m, k_o \rangle \longrightarrow A(i)$$

avec $\phi : (a_p) = a_p$;et $\phi : (k_o) = k_o u$

et on peut construire $\tilde{\phi}_i : A(i) \longrightarrow A(i)$ tel que $\tilde{\phi}_i(a_p) = a_p$; $\tilde{\phi}_i(k_o u_i^{-1}) = k_o$; $\tilde{\phi}_i(u_p) = u_p$

Et alors $\tilde{\phi}_i \circ \tilde{\psi}_i = \tilde{\psi}_i \circ \tilde{\phi}_i = \mathrm{Id}_{A(i)}$ et on a donc l'isomorphisme souhaité . ∎

Lemme II.3.5 : G_6 est une HNN extension de G_5 , ayant pour lettre stable $\langle d \rangle$.

Démonstration : Nous devons vérifier qu'il existe un isomorphisme

$$\psi : \langle k_o, a_1b_1, \ldots, a_mb_m \rangle_5 \longrightarrow \langle k_o, a_1, \ldots, a_m \rangle_5$$

tel que $\psi(k_o) = k_o$

$\psi(a_ib_i) = a_i$ pour tout $i = 1 \ldots m$

prenons $G_5 = F/N$ quotient associé à la présentation .

définissons l'homomorphisme $\phi : F \longrightarrow G_4$ tel que $\phi(u_i) = 1$

$\phi(b_i) = 1$

et ϕ envoie les autres générateurs sur eux-même .

Il est clair que $N \subseteq \ker \phi$,et on peut donc considérer l'homomorphisme $\tilde{\phi} : G_5 \longrightarrow G_4$, quotient de ϕ . $\tilde{\phi}$ envoie $\langle k_o, a_ib_i \rangle_5$ sur $\langle k_o, a_1b_1, \ \ , a_mb_m \rangle_4$ qui est libre (lemme II.3.3) . Il en est donc de même pour $\langle k_o, a_1b_1, \ldots, a_mb_m \rangle_5$ et de plus ils ont même rang.

On a donc un isomorphisme $\Psi : \langle k_o, a_i, \ldots, a_m \rangle_5 \longrightarrow \langle k_o, a_1b_1, \ldots, a_mb_m \rangle_5$

tel que $\Psi(k_o) = k_o$

$\Psi(a_p) = a_pb_p$

Il suffit alors de considérer $\psi = \Psi^{-1}$ ∎

Le lemme suivant va nous être utile pour démonter que G_7 est une HNN extension de G_6 .

Lemme II.3.6 : Le sous-groupe A de G', engendré par $k_o, t_o, a_1,$

$\ldots, a_n$ admet pour présentation :

$A = \langle k_o, t_o, a_1, \ldots, a_n / k_o^{-1}\omega^{-1}t_o\omega\, k_o = \omega^{-1}t_o\omega\ ,\ \omega \in E \rangle$

où l'on a reécrit les mots de E ,sur l'alphabet $(a_1, \ldots, a_m)$.(on se rappelle que $u_i \longleftrightarrow a_i$)

Démonstration : D'après le lemme II.3.2 , la proposition :
(**) $k_o^{-1}\omega^{-1}t_o\omega k_o = \omega^{-1}t_o\omega$ est vrai pour tout $\omega \in E$ (ω est un mot positif sur $a_1, \ldots, a_n$) , donc est vraie dans A .
Nous allons montrer qu'aucune autre relation n'est utile pour décrire A .
Il est aisé de vérifier que la relation (**) implique
$t_o^{\varepsilon}\ \omega\ k_o^{\eta} = \omega\ k_o^{\eta}\ \omega^{-1}\ t_o^{\varepsilon}\ \omega$ pour $\varepsilon = \pm 1$,$\eta = \pm 1$ et pour tout $\omega \in E$.
Nous pouvons alors considérer les opérations élementaires dans A de la forme $U \equiv U_1\ t_o^{\varepsilon}\ \omega\ k_o^{\eta}\ U_2 \longrightarrow U_1\omega\ k_o^{\eta}\ \omega^{-1}\ t_o^{\varepsilon}\ \omega\ U_2$
Celles ne changent pas l'élement du groupe representé par U) .
Nous considérons aussi les opérations élementaires :

$$U \equiv U_1YY^{-1}U_2 \longrightarrow U_1U_2$$

pour $Y = k_o, t_o, a_1, \ldots, a_m$
Ces opérations baissent le nombre d'occurence de t_o^{ε} précédent un k_o^{η} .
Considérons U = 1 dans A .Nous allons montrer que U peut être réduit au mot vide par une suite d'opérations élémentaires ,comme nous venons de les définir ,et donc que U est une conséquence des relateurs pré-cités .Ainsi la présentation donnée ci-dessus sera bien une présentation de A .
On lui applique les opérations élémentaires décrites ci-dessus .U est librement réduit et ne contient plus de sous-mots de la forme $t_o^{\varepsilon}\ \omega\ k_o^{\eta}$ où $\omega \in \varepsilon$ .Nous allons démontrer qu'alors U est le mot vide .Si U ne contient pas t_o ,alors U = 1 dans $\langle a_1, \ldots, a_m, k_o \rangle_4$ qui est un groupe libre (lemme II.3.3) et alors ,U étant librement réduit U ≡1 Ce qui nous permet de conclure .
On a le même résultat si U n'invoque pas k_o ($\langle a_1, \ldots, a_m, t_o \rangle_4$ est libre) .
Nous avons donc démontré que U est vide s'il n'invoque pas soit k_o ,soit t_o .
Supposons que U invoque k_o et t_o (et n'est donc pas vide) .

G' est une HNN extension de G'_3 ,ayant pour lettre stable $\langle k_o \rangle$.
$U = 1$ dans G' et invoque k_o .
D'après le théorème I.5.1 ,U contient un pinch $k_o^e \, V \, k_o^{-e}$ où $V = D$ dans G'_3 et D est un mot sur $hr_i h^{-i}$,hxh^{-1}, et $hq^{-1}h^{-1}q_1 t_o q_1^{-1}hqh^{-1}$.
Afin de simplifier les notations posons $\Delta = h\, q^{-1}h^{-1}q_1$ et donc D est un mot sur $hr_i h_i^{-1} hxh^{-1}$ et $\Delta t_o \Delta^{-1}$.
Nous prenons $D = V$, de telle façon que D ait le nombre minimal d'occurence de t_o . G'_3 est une HNN extension de G_2 avec pour lettre stable $\langle t_o \rangle$.
Nous affirmons que V et D sont tout deux t_o-réduit dans G'_3 .
Supposons que D ne soit pas t_o-réduit ,il contient alors un pinch et peut donc s'écrire :
$D \equiv D_1 \, \Delta \, t_o^f \, \Delta^{-1} \, D_2 \, \Delta \, t_o^{-f} \, \Delta^{-1} \, D_3$, où D_2 n'invoque pas t_o .
Avec le lemme de Britton $\Delta^{-1}D_2\Delta = N$ dans G_2 où N est un mot sur $q_1^{-1}hr_i h^{-1}q_1$ et $q_1^{-1}hxh^{-1}q_1$ de plus dans G'_3 t_o ,commutte avec N (au vu des relations de l'extension) . Et alors $D = D_1 \, \Delta \, N \, \Delta^{-1} D_3$ ce qui contredit le fait que le nombre d'occurence de t_o dans D est minimal . Donc D est t_o réduit .
V est librement réduit puisque c'est un sous-mot de U et que U est librement réduit .Montrons que V est t_o réduit .
Dans le cas contraire , il contient un pinch $t_o^g \, C \, t_o^{-g}$, où $C = N$ dans G_2 , où N est un mot sur $q_1^{-1}hr_i h^{-1}q_1$ et $q_1^{-1}hxh^{-1}q_1$,et donc commutte avec t_o dans G'_3 (donc C aussi) .De plus C n'invoque pas t_o , et n'invoque pas k_o (puisque C est un sous-mot de V , qui n'invoque pas k_o) .Alors C est un mot sur $a_1,\dots,a_m$.
Or $\langle t_o, a_1, \dots, a_m \rangle_4$ est un groupe libre donc $\langle t_o, a_1, \dots, a_m \rangle_3$ aussi .
Donc C commutte avec t_o ,ssi $C \equiv 1$ ce qui contredit le fait que C soit librement réduit en tant que sous-mot de V .
Nous allons maintenant démontrer que D invoque t_o .
Etant donné que $V = D$ dans G'_3 ,et que V et D sont tout deux $t_o$réduits , alors d'après le lemme I.5.4 ,V et D ont le même nombre d'occurence de t_o .
Supposons que D ne contiennent pas t_o . Donc V ne contient pas t_o
Alors V est un mot sur $a_1,\dots,a_m$ et D est un mot sur $hr_i h^{-1}, hxh^{-1}$.
Nous pouvons prendre D avec un nombre d'occurence de r_i minimal (considérer l'écriture de D sur $hr_i h^{-1}, hxh^{-1}$,contenant le moins d'occurence de r_i) . $V = D$ dans G_2 , HNN extension de $G_1 * \langle q, q_1, \dots, q_n \rangle$ avec pour lettres stables $\langle r_i, i \in I \rangle$ .Visiblement

,V est r_i-réduit ,puisqu'il n'a pas d'occurence de r_i . Démontrons que D est aussi r_i-réduit . Supposons donc que D contienne un pinch . $D \equiv D_1 h\, r_i^l\, h^{-1}\, D_2 h\, r_i^{-l} h^{-1} D_3$,où D_1 , D_2 , D_3 sont des mots sur $h\,x\,h^{-1}$, $h\,r_i h^{-1}$ et D_2 n'invoque pas r_i . Donc $D_2 \equiv h\,x^n\,h^{-1}$ $n \in \mathbb{N}$ et le pinch est donc de la forme $r_i^{\,l}\, x^n\, r_i^{-l}$.

D'après le théorème I.5.1 , x^n est égal dans $G_1 * \langle q, q_1, \ldots, q_n\rangle$ a un mot sur $\bar{F}_i q_{i1} G_i, S_1 x, \ldots, S_m x$ ou sur $\bar{H}_i q_{i2} F_i, S_1 x^{-1}, \ldots, S_m x^{-1}$.

Mais nous avons déjà vu (démonstration du lemme II.2.4) ,que ceci n'est possible que si n = 0 . Et alors ,on peut réduire l'écriture de D ,soit $D \equiv D_1\, D_3$ dans G_2 . Ce qui contredit le fait que l'écriture de D contient un minimum de r_i .

Donc D et V sont tout deux r_i-réduits $\forall\, i \in I$. De plus D = V dans G_2 donc d'après le lemme I.5.4 ,D et V ont même occurences de r_i . V ne contenant pas r_i ,D ne contient pas non plus r_i .

et alors V = D dans G_1 ,et $V = h\,x^n\,h^{-1}$ dans G_1 .

Supposons que V contienne a_j .

G_1 est une HNN extension de $\langle x \rangle$ avec pour lettres stables $\langle s_1, \ldots, s_m\rangle$,et puisque $\langle a_i, \ldots, a_m\rangle \subseteq \langle s_1, \ldots, s_m\rangle$,alors $V\,h\,x^{-n}\,h^{-i}$ contient un pinch $a_j^{\,d}\, C\, a_j^{-d}$, où C est un mot sur x . Mais le pinch est alors un sous-mot de V . Or V ne contient pas x . On a donc $C \equiv 1$, ce qui contredit le fait que V soit librement réduit .

Or V est un mot sur $a_1, \ldots a_m, t_o$. Supposons que D ne contienne pas t_o . Alors V ne contient pas t_o et d'aprés ce qui précède $V \equiv 1$. Or $h_o^{\,e}\, V\, h_o^{-e}$ est un sous-mot de U , et ceci contredit donc le fait que U soit librement réduit .

On a donc prouvé que D contient t_o . Et donc D contient un sous-mot $h\,q^{-1} h^{-1} q_1\, t_o\, q_1^{-1}\, h\,q\,h^{-1}$.

On écrit $D \equiv D_1\,(\, hq^{-1}h^{-1}q_1 t_o q_1^{-1} hqh^{-1}\,)\, T$,où $\alpha = \pm 1$, et le mot entre parenthèses contient la dernière occurence de t_o dans D , i.e. D_1 est un mot sur $h\,x\,h^{-1}$,$h\,r_i h^{-1}$,$h\,q^{-1} h^{-1} q_1\, t_o\, q_1^{-1} h\,q\,h^{-1}$ et T est un mot sur $h\,x\,h^{-1}, h\,r_i h^{-1}$.

Puisque D contient t_o , nous savons aussi que U contient t_o (cf plus haut) . Nous pouvons alors écrire :

$V \equiv V_o t_o^{\,\varepsilon_1}, \ldots, V_{r-1} t_o^{\,\varepsilon_r}\, V_r$ où chaque V_j est un mot sur $a_1, \ldots, a_m$.

Nous avons vu que V et D sont tout deux t_o-réduits . On peut donc appliquer le lemme I.5.4 .et alors $t_o^{\,\varepsilon_r} V_r T^{-1} hq^{-1}h^{-1}q_1 t_o^{-\alpha}$ est un pinch ,et $V_r T^{-1} h\; q^{-1} h^{-1} q_1 = K$ dans G_2 ,où K est un mot sur

$q_1^{-1}\ h\ r_i h^{-1} q_1$ et $q_1^{-1}\ h \times h^{-1} q_1$,T est un mot sur hxh^{-1}et $hr_i h^{-1}$.
Donc nous pouvons écrire $T^{-1} = h\ L_1 h^{-1}$ dans G_2 , où L_1 est un mot sur x et r_i .
K est un mot sur $q_1^{-1}hr_i h^{-1}q_1$ et $q_1^{-1}hxh^{-1}q_1$,donc on peut écrire
$K = q_1^{-1}hL_2h^{-1}q_1$,où L_2 est un mot sur x et r_i .
On a donc $V_r hL_1h^{-1}hq^{-1}h^{-1}q_1 = q_1^{-1}hL_2h^{-1}q_1$ dans G_2

soit $V_r hL_1 q^{-1} = q_1^{-1}hL_2$

soit $L_2^{-1}h^{-1}q_1V_rhL_1 = q$ dans G_2 .

Remarquons que $V_r h$ est librement réduit puisque V_r est un mot librement réduit sur $a_1,\dots,a_m$ et $h \notin \langle a_1,\dots,a_m\rangle$. Avec ces hypothèses on peut appliquer le lemme II.2.5 et donc $V_r h$ est un mot positif (donc en particulier V_r) et $h\ q_1 V_r h = q$ dans $\Gamma(T)$.
Et donc , $V_r \in E$.
En écrivant $V \equiv V' t_o^{\varepsilon r} V_r$,et avec $U \equiv k_o^{e} V k_o^{-e}$.
U contient un sous-mot de la forme $t_o^{\varepsilon r} V_r k_o^{-e}$ où $V_r \in E$, ce qui contredit nos hypothèses .Donc U ne contient pas à la fois k_o et t_o ,et donc (comme nous l'avons vu précedemment) $U \equiv 1$.
Donc le relateur $k_o^{-1}\omega^{-1}t_o\omega k_o = \omega^{-1}t_o\omega$, suffit à décrire A . ■

Lemme II.3.7 : G_7 est une HNN extension de G_6 ,ayant pour lettres stables $\langle\sigma\rangle$.

démonstration : Il est clair que G_7 a pour base G_6 et pour lettre stable $\langle\sigma\rangle$.
Nous devons vérifier la condition de l'isomorphisme ,i.e.,vérifier qu'il existe un isomorphisme .
$\psi\ :\langle k_o,t_o,a_1,\dots,a_m\rangle_6 \longrightarrow \langle k_o,t_od,a_1,\dots,a_m\rangle_6$.
avec $\psi(k_o) = k_o$

$\psi(t_o) = t_od$

$\psi(a_p) = a_p$

Puisque $G' \le G_5 \le G_6$,on a $\langle k_o,t_o,a_1,\dots,a_m\rangle_6 = \langle k_o,t_o,a_1,\dots,a_m\rangle_4 = A$,dont nous avons donné une présentation au lemme II.3.6 .
Dans la suite nous appelerons B , $\langle k_o,t_od,a_1,\dots,a_m\rangle_6$ .Pour montrer que $A \longrightarrow B$ est un homomorphisme il nous faut montrer que l'image des relateurs de A est triviale dans G_6 i.e. ,il nous faut montrer

que si $\omega \in E$, $k_o^{-1}\omega^{-1}t_o\ d\ \omega\ k_o = \omega^{-1}t_o\ d\ \omega$ dans B .
Nous le montrerons dans G_6 . Ce sera à fortiori vrai dans B .
Nous utiliserons la notation suivante :
Soit ω un mot sur $a_1,\dots,a_m$.
ω_b est obtenu à partir de ω , en changeant tous les a_i en b_i .
ω_u est obtenu à partir de ω , en changeant tous les a_i en u_i .
Remarquons que si $\omega \in E$, $\omega_u = 1$ dans G_6 puisque alors ω_u est un relateur de R et $R \leq G_4 \leq G_5 \leq G_6$.

Considérons $\omega \in E$. On a dans G_6

$$\begin{aligned} k_o^{-1}\omega^{-1}t_o d\omega k_o &= k_o^{-1}\omega^{-1}t_o(d\omega d^{-1})\ dk_o \\ &= k_o^{-1}\omega^{-1}t_o\omega\omega_b dk_o \end{aligned}$$

En effet , puisque $da_id^{-1} = a_ib_i$, $d\omega d^{-1} = da_{v(1)}d^{-1}da_{v(2)}d^{-1}\dots da_{v(l)}d^{-1}$

$$\begin{aligned} &= a_{v(1)}b_{v(1)}\dots a_{v(l)}b_{v(l)} \\ &= \omega\ \omega_b \end{aligned}$$

et a_i et b_i commuttent dans $G_5 \leq G_6$.
De plus dans G_5 (donc dans G_6) b_i et u_j commuttent pour tout i,j = 1...n . et $k_o^{-1}b_ik_o = b_iu_i$. k_o et d commuttent dans G_6 .

Et alors

$$\begin{aligned} k_o^{-1}\omega^{-1}t_o\omega\omega_b dk_o &= k_o^{-1}\omega^{-1}t_o\omega\ \omega_b k_o d \\ &= k_o^{-1}\omega^{-1}t_o\omega\ k_o(k_o^{-1}\omega_b k_o)d \\ &= k_o^{-1}\omega^{-1}t_o\omega\ k_o\omega_b\omega_u d \\ &= (k_o^{-1}\omega^{-1}t_o\omega\ k_o)\omega_b d \\ &= \omega^{-1}t_o\omega\ \omega_b d \qquad \text{Relation } (**). \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned} \omega^{-1}t_o d\omega &= \omega^{-1}t_o(d\omega d^{-1})d \\ &= \omega^{-1}t_o\omega.\omega_b.d \end{aligned}$$

et on a donc montré que :

$$k_o^{-1}\omega^{-1}t_o d\omega k_o = \omega^{-1}t_o d\omega \quad \text{dans } G_6 .$$

Donc : $\varphi : A \longrightarrow B$ est un homomorphisme .

Nous construisons maintenant $\psi : G_6 \longrightarrow G_6$ dont la restriction à B , est l'inverse de φ .
Définissons ψ par $\psi(d) = \psi(b_i) = \psi(u_i) = 1$
et $\psi_{|G'} = \mathrm{Id}_{G'}$ est bien défini ,
,et au vu des relateurs de G_6 (regarder les présentations de G_5 et G_6) ,ψ est bien défini (si r est un relateur de G_6 ,$\psi(r) = 1$ dans G_6) .

Et l'on a $\psi_{|B} \circ \varphi = \mathrm{Id}_A$
$\varphi \circ \psi_{|B} = \mathrm{Id}_B$. C.Q.F.D. ■

Nous avons donc , avec tout ce qui précède ,vérifié que nous avons la chaîne de Britton .

$R \leq G_4 \leq G_5 \leq G_6 \leq G_7$

Donc R est plongé dans G_7 .Remarquons que G_7 est finement engendré .Nous allons maintenant démontrer que G_7 est finement présenté .

Lemme II.3.8 : G_7 est finement présenté .

démonstration : Rappelons nous que nous avons pris pour présentation de G_4 , la réunion des générateurs et relateurs de G' et R .

Si dans G_4 ,on élimine les relateurs de la force $\omega_u = 1$,où $\omega \in E$ (i.e. les relations de R) , alors il ne reste qu'un nombre fini de relateurs .

Au vu de la construction de G_6 , la même conclusion est vraie dans G_6 .

Nous affirmons que les relateurs de G_6 de la forme $\omega_u = 1$ ($\omega \in E$) , peuvent être obtenus grâce aux relateurs restant .

Si $\omega \in E$ alors $k_0^{-1}(\omega^{-1}t_0\omega) k_0 = (\omega^{-1}t_0\omega)$ dans G' . (égalité (**) de la démonstration précédente ,en prenant $\omega_b d \equiv 1$)

Donc l'égalité est vraie dans G_6 et ne nécessite l'utilisation que des relateurs restant , pour être établie .

Alors $\sigma^{-1}(k_0^{-1}\omega^{-1}t_0\omega k_0) \sigma = \sigma^{-1}\omega^{-1}t_0\omega \sigma$

puisque σ commutte avec les a_i et k_0

$$k_0^{-1}\omega^{-1}\sigma^{-1}t_0\sigma \omega k_0 = \omega^{-1}\sigma^{-1}t_0\sigma \omega$$

De plus $k_0^{-1}\omega^{-1}t_0 d \omega k_0 = \omega^{-1}t_0 d \omega$ (cf la démonstration du lemme précédent) .

Ce qui nous donne :

$$k_0^{-1}\omega^{-1}t_0(\omega k_0 k_0^{-1} \omega^{-1})d \omega k_0 = \omega^{-1}t_0(\omega \omega^{-1})d \omega$$,qui peut s'écrire $(k_0^{-1}\omega^{-1}t_0\omega k_0)k_0^{-1}\omega^{-1}d \omega k_0 = (\omega^{-1}t_0\omega)\omega^{-1}d \omega$.

Or les termes entre parenthèses sont égaux .

Et donc $$k_0^{-1}\omega^{-1}d\omega k_0 = \omega^{-1}d\omega . \quad (1)$$

Comme nous l'avons déjà vu , les relations $d^{-1}a_ib_id = a_i$ et $a_ib_j =$

$b_j a_i$, nous donnent :

$d\omega d^{-1} = \omega\omega_b$,qui peut s'écrire $\omega = d^{-1}\omega\omega_b d$

et alors $\omega^{-1}d\omega = \omega^{-1}dd^{-1}\omega\omega_b d$

$$= \omega_b d \qquad (2)$$

On substitue (2) dans (1) .

$$k_o^{-1}\omega_b d k_o = \omega_b d$$

or k_o et d commuttent

donc $k_o^{-1}\omega_b k_o = \omega_b$ (3)

Avec les relations $k_o^{-1} b_i k_o = b_i u_i$ et $b_i u_j = u_j b_i$ appliquées à (3)

,on a $\omega_b \omega_u = \omega_b$ soit $\omega_u = 1$ dans G_σ . ■

Le théorème de Higman ,est donc établi .

II.3.2Théorème de Higman-Neumann-Neumann

Dans ce paragraphe ,nous allons établir le théorème de Higman -Neumann-Neumann .Nous combinerons alors ce résultat avec le théorème de Higman ou le théorème de Novikov-Boone pour en déduire des résultats utiles à la suite .
Nous utiliserons pour la démonstration du théorème de H.N.N. ,le lemme suivant ,qui nous sera aussi utile ,dans le paragraphe suivant .

Lemme II.3.9 : Soit K un groupe donné par une présentation sur un ensemble fini ou dénombrable de générateurs

$K = \langle x_1, x_2 \dots / R_1 = 1 \ , \ R_2 = 1 \dots \rangle$

Considérons $\omega \in K$, on construit L_ω , le groupe obtenu à partir de la présentation de K , en ajoutant trois générateurs a ; b ; c ,et les relateurs suivant :

(1) $a^{-1}b\ a = c^{-1}b^{-1}c\ b\ c$

(2) $a^{-2}b^{-1}a\ b\ a^2 = c^{-2}b^{-1}c\ b\ c^2$

(3) $a^{-3}[\omega, b]\ a^3 = c^{-3}b\ c^3$

(4) $a^{-(3+i)}x_i\ ba^{3+i} = c^{-(3+i)}b\ c^{3+i}$ pour i = 1,2,...

où $[\omega,b] = \omega^{-1}b\ \omega\ b^{-1}$ .On a alors :

(i) Si $\omega \neq_K 1$,alors K est plongé dans L_ω ,par l'inclusion sur les générateurs .

(ii) La clôture normale de ω dans L_ω est L_ω .En particulier si $\omega =_K 1$ alors $L_\omega \cong 1$.

(iii) L_ω est engendré par les 2 éléments b et ca^{-1} .

(iv) Si la présentation de K est finie ,alors la présentation de L_ω est aussi finie .

Démonstration : (i) Prenons $\omega \neq_K 1$ .On considère le groupe libre $\langle b,c \rangle$, et son sous-groupe C ,engendré par les membres de droite des égalités (i) à (iv) .
Ce sous-groupe est librement engendré sur les générateurs ,puisque si on effectue un produit de puissances de générateurs de C , Les réductions entre les mots n'auront lieu qu'au extrémités et laisseront des sous-mots médians inchangés (c'est une base de Nielsen) .
De façon similaire , on considère $K * \langle a,c \rangle$,et le sous-groupe A engendré par les membres de gauche des inégalités . Avec $\omega \neq_K 1$, comme précédent , A est librement engendré par ces générateurs .Il existe donc un isomorphisme $A \longrightarrow C$ qui envoie les membres de gauche ,sur les membres de droite correspondants .L_ω est alors le produit libre amalgamé $(K * \langle a,b \rangle) \underset{A=C}{*} \langle b,c \rangle$.
Ainsi si $\omega \neq_K 1$ alors K est plongé dans L_ω par l'inclusion sur les générateurs . □

Remarquons que si l'on considère le groupe L n'ayant pour relations que (1) et (4) ,alors le même raisonnement montre que K est plongé dans L (avec ω quelconque) ,par l'inclusion sur les générateurs .

(ii) Appelons N_ω ,la clôture normale de ω dans L_ω. $[\omega,b] = \omega^{-1}(b\ \omega\ b^{-1})$,et donc $[\omega,b] \in N_\omega$ .Alors avec le relateur (3) $b = c^3a^{-3}[\omega,b]\ a^3c^{-3}$,et donc $b \in N_\omega$ .Avec le relateur (1) ,$c = b\ c\ a^{-1}\ b\ a\ c^{-1}b^{-1}$,et donc $c \in N_\omega$ .De même on peut voir aisément avec la relation (2) que $a \in N_\omega$ .Les relations de la forme (4) peuvent alors être utilisées ,pour exprimer x_i ($i = 1,2..$) ,en fonction de a ,b ,et c ,et donc $x_i \in N_\omega$,$i = 1,2...$ .Donc $N_\omega = L_\omega$. □

(iii) Appelons L ,le sous-groupe de L_ω ,engendré

par b et ca^{-1} . Avec la relation (1) , $c = b\,(ca^{-1})b\,(ca^{-1})^{-1}\,b^{-1}$, donc $c \in L$ et puisque $ca^{-1} \in L$, $a \in L$. De plus la relation (4) nous permet d'exprimer x_i , pour $i = 1,2,\dots,$ en fonction de a,b,c . donc $x_i \in L$ pour $i = 1,2,\dots$. Finallement on a donc $L = L_\omega$. □

(iv) Il est clair que si la présentation de K est finie ,alors il y a un nombre fini de générateurs x_i ,et donc de relations de la forme (1) ,(2) ,(3) ,(4) .La présentation donnée de L_ω ,est alors finie . ■

<u>Remarques</u>Remarquons que les relations (2) et (3) n'ont pas été utilisées dans la démonstration de (iii) .Laconclusion (iii) est donc toujours valide sous des hypothèses simplifiées ,obtenues en ne considérant pas les relations (2) ou(et) (3) . De même si l'on considère les mêmes hypothèses ,avec un groupe L ,et uniquement les relations (1) et (4) ,alors K est plongé naturellement dans L (i.e. par l'inclusion sur les générateurs .C'est avec des hypothèses simplifiées que nous utiliserons ,dans ce paragraphe le lemme II.3.9 .

Un groupe **dénombrable** ,i.e ayant un nombre dénom--brable d'éléments ,admet un ensemble dénombrable de générateurs .

THEOREME II.3.2 :(*Higman,Neumann,Neumann*)

Tout groupe dénombrable G peut être plongé dans un groupe H ayant deux générateurs. De plus si G admet N relations ,H peut être choisi avec N relations .

Démonstration :Considérons un groupe dénombrable G ,et construisons comme dans le lemme précédent ,un groupe L avec uniquement les relations (1) et (4) . Avec le lemme II.3.9 ,et les remarques précédentes ,G est plongé dans L ,et L admet deux générateurs b et ca^{-1} .

De plus supposons que G ait N relations .La relation (1) permet d'exprimer c en fonction de b et ca^{-1} ,et donc on peut avec des changements de Tietze ,la supprimer .
On a avec la relation (iv) , $x_i = (ca^{-1})^{-(3+i)}\,b\,(ca^{-1})^{3+i}\,b^{-1}$,et on peut donc reécrire les relateurs de G sur b et ca^{-1} ,et ensuite

supprimer la relation (iv) .Le groupe L peut donc s'écrire avec deux générateurs et N relations . ■

Corollaire II.3.1.1 : Il existe un groupe f.p. ,ayant deux généra-teurs ,ayant un problème du mot récursivement insoluble .

Démonstration : Le théorème de Novikov établit l'existence d'un groupe finiment présenté ayant un problème du mot insoluble Avec le théorème de H.N.N. ,ce groupe peut être plongé dans un groupe finiment présenté ayant deux générateurs .Puisque le problème du mot est héréditaire ,le résultat est établi .

Corollaire II.3.2.1 : Tout groupe récursivement présenté peut se plonger dans un groupe f.p. ,ayant deux générateurs .

Démonstration : Soit un groupe récursivement présenté ,alors avec le théorème de Higman ,on peut le plonger dans un groupe f.p. .Avec le théorème de H.N.N. ,ce groupe f.p. peut être plongé dans un groupe f.p. admettant deux générateurs . ■

II.4 PROPRIETE DE MARKOV ET THEOREME DE ADJAN-RABIN

Definition : Soit P une propriété sur les groupes finiment présentés .Nous disons que P est une **propriété de Markov** si il existe 2 groupes finiment présentés ,G_+ et G_- tels que :

(i) G_+ vérifie la propriété P

(ii) Si G_- est plongé dans un groupe H , alors H ne vérifie pas la propriété P .

Remarque: Il est clair que G_- ne vérifie pas la propriété P ,puisqu'il se plonge dans lui-même .

Exemples: Etre fini est une propriété de Markov .On peut prendre $G_+ = \langle a / a^5 = 1 \rangle$ et $G_- = \langle b \rangle$ .Tout groupe contenant G_- (i.e. le groupe cyclique infini) comme sous-groupe est infini .

Etre hyperbolique est une propriété de Markov ,il suffit de prendre $G_+ = \langle a \rangle$,et $G_- = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ .En effet tout groupe libre de rang fini est hyperbolique ,et si G est hyperbolique alors G ne contient pas $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ comme sous groupe (c.f. cours de D.E.A 94/95 de H.Short).

Définitions : On dit d'une propriété P sur les groupes finiment présentés qu'elle est **héréditaire** si ,lorsque $G \in P$ et H est plongé dans G , $H \in P$ (où H et P sont f.p.) .

On dit d'une propriété qu'elle est **non triviale** si $P \neq \emptyset$ et si elle n'est pas vérifiée par tous les groupes finiment présentés .

Lemme II.4.1 : Si P est une propriété sur les groupes finiment présentés ,héréditaire et non triviale ,alors P est une propriété de Markov .

Démonstration : Puisque P est non triviale ,il existe un groupe f.p. vérifiant P ; appelons le G_+ .De même il existe un groupe G_- f.p. ne vérifiant pas P .
Supposons que G_- soit plongé dans Γ , où Γ est un groupe f.p. $\Gamma \notin P$ car si $\Gamma \in P$,puisque P est héréditaire ,alors $G_- \in P$. P est donc une propriété de Markov . ∎

Ce résultat nous donne un moyen simple de trouver "beaucoup" de propriétés de MARKOV . Par exemple :
-Etre trivial
-Etre libre
-Etre abélien
-Etre fini
-Etre sans torsion
-Avoir un centre trivial
-Etre cyclique infini (respectivement fini)
-Etre nilpotent
-Etre solvable
-Etre automatique
-Avoir un problème du mot récursivement soluble .

Le but de cette partie est de démontrer les théorémes suivants :

Théorème II.4.1 : *(Adjan-Rabin)*

Soit P une propriété de Markov sur les groupes finiment présentés .Il existe une classe récursive de présentations finies de groupe $\langle \Pi_\omega / \omega \in U \rangle$, indexées sur un groupe U ,où U a un problème du mot récursivement insoluble telle que $gp(\Pi_\omega) \in P$ ssi $\omega =_U 1$.

Définition : On dit d'une propriété P sur les groupes finiment présentés ,qu'elle est **récursivement reconnaissable** ,si l'ensemble des présentations finies $\langle \Pi / gp(\Pi) \in P \rangle$ est récursif .Dans le cas contraire ,on dit que P est **récursivement inreconnaissable** .

Théorème II.4.2 : *(Adjan-Rabin)*

Toute propriété de Markov sur les groupes f.p. est récursivement inreconnaissable.

Théorème II.4.3 : *(Adjan-Rabin)*

Le problème de l'isomorphisme pour les groupes finiment présentés est récursivement insoluble .

Les théorèmes II.4.2 et II.4.3 sont corollaires du théorème II.4.1 .Nous allons donner une preuve du théorème II.4.I ,en utilisant le lemme II.3.9 .

Démonstration du théorème II.4.1 :

Soient une propriété de Markov P ,et les groupes G_- et G_+ correspondant .On considère un groupe U finiment présenté ayant un problème du mot insoluble .

Soit $K = U * G_-$,puisque U a un problème du mot insoluble ,il en est de même de K .U et G_- sont naturellement plongés dans K .Soit un mot de U ,et son représentant ω dans K .On construit alors L_ω ,comme dans le lemme II.3.9 .Remarquons qu'étant donné une présentation finie ,on peut reconnaître si c'est une présentations de la forme II.3.9 i.e. l'ensemble des présentations ainsi construites est récursif .On forme alors $L_\omega * G_+$,dont une présentation finie Π_ω s'obtient naturellement par les présentations finies de L_ω et de G_+ (et ainsi l'ensemble de telle présentations est récursif).

Si $\omega \neq 1$ dans H ,alors avec le lemme II.3.9 ,G_- est plongé dans $L_\omega * G_+$,et alors $L_\omega * G_+$ ne vérifie pas P .Par contre si

$\omega = 1$ dans U ,alors $L_\omega \cong 1$,et donc $L_\omega * G_+ \cong G_+$,et vérifie donc P .Ainsi on peut construire une classe récursive de présentations $\langle \Pi_\omega \mathbin{/} \omega \in H \rangle$,tel que $gp(\Pi_\omega) \in P$ ssi $\omega = 1$ dans U . ■

Démonstration du théorème II.4.2 :

Soit P une propriété de Markov .Supposons que P soit récursivement reconnaissable i.e. $\langle \Pi \mathbin{/} gp(\Pi) \in P \rangle$ est récursif .On forme ,comme dans le théorème II.4.1 ,une famille récursive de présentations finies $\langle \Pi_\omega \mathbin{/} \omega \in U \rangle$,telle que $gp(\Pi_\omega) \in P$ ssi $\omega =_U 1$ .Alors leur intersection $I = \langle \Pi_\omega \mathbin{/} \omega \in U$ et $gp(\Pi_\omega) \in P \rangle$ est récursive .Ainsi on peut décider pour tout mot ω sur U ,si $\omega =_U 1$,en construisant sur ω la présentation Π_ω du lemme II.3.9 (ce qui est effectivement réalisable) ,et en décidant si $\Pi_\omega \in I$ .Ceci contredit le fait que U ait un problème du mot récursivement insoluble . ■

Démonstration du théorème II.4.3 :

Supposons que $\langle (\Pi,\Pi') \mathbin{/} gp(\Pi) \cong gp(\Pi') \rangle$ est récursif (où Π et Π' sont des présentations finies de groupe .l'ensemble $\langle (\Pi,\langle a/a \rangle) \rangle$,est récursif puisque $\langle \Pi \rangle$ est récursif .et alors ,en formant l'intersection $\langle \Pi \mathbin{/} gp(\Pi) \cong 1 \rangle$ est récursif ,ce qui contredit le théorème II.4.2 ,puisque être trivial est une propriété de Markov pour les groupes f.p. . ■

Ainsi même pour des propriétés aussi simple qu'être trivial ,le on ne peut reconnaître les présentations finies de groupe vérifiant ces propriétés .W. W. Boone démontre dans [6] un théorème plus fort :

Théorème II.4.4 : *(Boone)*

Soit U un groupe f.p. ayant un problème du mot de degré D .Il existe une classe récursive de présentations finies $\langle \Pi_\omega \mathbin{/} \omega \in U \rangle$,telle que $\Pi_\omega \cong 1$ ssi $\omega =_U 1$.

Avec le théorème II.4.2 ,on ne peut pas décider pour une présentation finie donnée ,si le problème du mot y est résoluble .Remarquons que dans le cas des propriétés être trivial ,être fini ,être abélien ,être libre ,on peut néamoins énumérer toutes les présentations finies les vérifiant . En effet on connaît des présentations canoniques des groupes vérifiant ces propriétés ,et on peut donc utiliser l'algorithme du corollaire I.2.1.1 ,pour énumérer toutes les présentations finies de tels groupes . Qu'en est il pour les groupes f.p. ayant un problème du mot soluble ? .

Théorème II.4.5 : *(Boone,Rogers)*

Pour les groupes finiment présentés , la propriété d'avoir un problème du mot soluble est Σ_3^0-complète . En particulier ,on ne peut pas énumérer tous les groupes f.p. ayant un problème du mot récursivement soluble .

Pour une démonstration de ce résultat ,voir [7] . Pour la notion de Σ_3^0-complet ,voir [34] .