CHAPITRE III :

PROBLEMES DE DEHN POUR DES GROUPES ELEMENTAIRES

Dans le chapitre précédent nous avons établi l'existence de groupes f.p. ayant des problèmes de Dehn insolubles ,mais nous n'avons explicité aucune présentation d'un tel groupe .Dans ce chapitre nous nous intéressons à ces problèmes dans des groupes élémentaires ,i.e. définis par des propriétés algébriques élémentaires ,ou construits à partir d'un groupe libre par une chaîne de constructions élémentaires .Même si nous démontrons des résultats de solubilité ,le but principal de ce chapitre ,est d'établir des problèmes d'insolubilités dans de tels groupes .

I.1 RESOLUTION DES PROBLEMES DE DEHN POUR LES GROUPES LIBRES

Nous avons déjà vu que le problème du mot est soluble pour les groupes libres ,par application de réductions libres .De plus le problème de l'isomorphisme est soluble puisque tout groupe libre admet une présentation canonique $\langle F(X)\rangle$ où $|X|$ = rang F .On peut donc étant données 2 présentations de groupes libres ,énumérer toutes leurs présentations ,par changements de Tietze ,jusqu'à ce que l'on obtienne leur présentations canoniques ,et alors $F(X) \cong F(Y)$ ssi $|X| = |Y|$.

Dans cette partie nous démontrons que les autres problèmes de Dehn ,sont résolubles pour les groupes libres (de rang quelconque)

III.1.1 Problème de la conjugaison

Définition : Un mot sur X ,est dit **cycliquement réduit** ,si il est réduit ,et si il n'est pas de la forme $x^{-1}\mu x$,avec $x \in X \cup X^{-1}$.

Remarquons que si un mot est cycliquement réduit ,il en est de même de tous ses conjugués cycliques .

Lemme III.1.1: Soit ω un mot cycliquement réduit sur un alphabet S

.Un mot réduit ω' sur S est un conjugué de ω dans F(S) ssi ,un conjugué cyclique de ω est un conjugué cyclique ,cycliquement réduit de ω' .

Démonstration : ($\Longrightarrow$) Supposons que $\omega' = h^{-1}\omega\, h$ dans F(S) ,où h est un mot réduit sur S .Alors puisque ω et h sont réduits ,les seules réductions possibles dans $h^{-1}\omega\, h$,sont à la liaison entre h^{-1} et ω ,ou entre ω et h .Soit il existe a et b mots réduits (évent. vides)sur S tels que $h \equiv a\, h' \equiv b\, h''$; et $\omega \equiv a\, \omega_o\, b^{-1}$ .Sans perte de généralité ,on peut supposer que b soit un sous-mot initial de a .Et alors $\omega \equiv b\, \omega_1\, b^{-1}$,et donc puisque ω est cycliquement réduit , b est le mot vide .Une réduction dans $h^{-1}\omega\, h$,ne peut donc intervenir (sans perte de généralité) ,qu'entre h^{-1} et ω ,soit $h \equiv a\, h'$,$\omega \equiv a\, \omega_o$ (et ω_o ne contient pas un segment terminal de a^{-1} ,comme sous-mot terminal) .
Donc $h^{-1}\omega\, h \equiv (a\, h')^{-1} a\, \omega_o (a\, h') \equiv h'^{-1}\omega_o a\, h' \equiv \omega'$ (prop I.1.1).
Or $\omega_o a$ est cycliquement réduit ,et donc la réduction cyclique d'un conjugué cyclique de ω' ,est un conjugué cyclique de ω . □

($\Longleftarrow$) Considérons $\omega \equiv A\, B$,et supposons que B A soit la réduction cyclique d'un conjugué cyclique de ω' .Alors puisque ω est cycliquement réduit ,B A est cycliquement réduit (prop vv),et puisque ω' est réduit on a un des cas suivants :

1^{er} cas : $\omega' \equiv X^{-1}B\, A\, X$,où X est un mot (éventuellement vide) sur S .Alors $\omega' = X^{-1}B\,(A\, B)\, B^{-1}X = (B^{-1}X)^{-1}\omega\,(B^{-1}X)$.

$2^{ème}$ cas : B A est un conjugué cyclique de ω' .Soit (par exemple) ,$B \equiv B_1 B_2$,et $\omega' \equiv B_2\, A\, B_1$,et donc $\omega' = B_2\, A\, B_1 B_2 B_2^{-1}$

$= B_2\, \omega\, B_2^{-1}$

Tout autre cas serait contradictoire avec le fait que ω' soit réduit . ■

LEMME III.1.2: ω est conjugué de ω' ,*ssi* la réduction cyclique de ω est conjugué de ω' .

Démonstration : Soit ω_o la réduction cyclique de ω ,i.e $\omega \equiv X^{-1}\omega_o X$,où X est un mot sur S ,et ω_o est cycliquement réduit .
($\Longrightarrow$) Soit $\omega' = h^{-1}\omega\, h = h^{-1}X^{-1}\omega_o X\, h = (X\, h)^{-1}\omega_o\, X\, h$ □
($\Longleftarrow$) Soit $\omega' = h^{-1}\omega_o h = h^{-1}X\, X^{-1}\omega_o X\, X^{-1}h = (X^{-1}h)^{-1}\omega\, X^{-1}h$ ■

PROPOSITION III.1.1 : Le problème de la conjugaison pour les groupes libres est récursivement résoluble .

Démonstration : Considérons un groupe libre ,donné par sa présentation canonique (pas de relateurs) .Soient deux mots ω et ω' exprimés sur les générateurs .On réduit cycliquement ω ,et l'on détermine tous les conjugués cycliques de ω' ,et de la réduction cyclique de ω (ils sont en nombre fini).On peut alors réduire cycliquement ceux de ω' ,et avec les lemmes III.1.1 et III.1.2 ,on peut décider si ω et ω' sont conjugués . ■

III.1.2 Problème du mot généralisé

Le problème du mot généralisé dans un groupe libre ,se résoud grâce à la notion de base de Nielsen .

Notation : Soit $F(X)$ un groupe libre et $W = \langle w_1,..,w_n \rangle$ un ensemble fini de mots réduits sur X ;qui engendre un sous-groupe G de $F(X)$ .Tout élément de G ,peut se donner comme un mot réduit sur W ,ω .On note $\omega(X)$ le mot ω vu comme un mot sur X .Il est clair que ω et $\omega(X)$ représentent le même élément du groupe .On note $lgr_X(\omega) = lgr(\omega(X))$.

D'après le théorème de Nielsen-Schreier ,G est un groupe libre .Néamoins G n'est pas forcément engendré librement par W (considérer le sous-groupe de F_2 ,engendré par $\langle x_1, x_1^{-1}x_2^{-1}, x_2 \rangle$) .

Définition : Soit W un ensemble de mots réduits sur X ,qui engendre un sous-groupe G de $F(X)$ .On dit que W est une **base de Nielsen de G** ,si les conditions suivantes sont vérifiées :

(1) Si ω est un mot réduit sur W ,$\omega \equiv W_{i(1)}^{\varepsilon_1} \ldots W_{i(k)}^{\varepsilon_k}$, alors la réduction de $\omega(X)$ (dans X) laisse au moins une lettre de chaque W_i ayant une occurence dans ω ;inchangée (i.e. ,on n'a pas $.W_i^{\varepsilon_i}(X)\ W_j^{\varepsilon_j}(X)\ W_k^{\varepsilon_k}(X) =_F W_i'^{\varepsilon_i}\ W_k'^{\varepsilon_k}$,où $W_i^{\varepsilon_i}\ W_j^{\varepsilon_j}\ W_k^{\varepsilon_k}$ est un sous-mot de ω ,et $W_i'^{\varepsilon_i}$ (resp^t $W_k'^{\varepsilon_k}$) est un sous-mot initial (resp^t terminal) de $W_i^{\varepsilon_i}(X)$ (resp^t de $W_k^{\varepsilon_k}(X)$) .

(2) $lgr_X(\omega) \geq lgr_X(W_i)$,pour tout i tel que W_i ait une occurence dans ω .

Remarque : Si W est une base de Nielsen de G ,alors G est librement engendré par W .En effet pour tout mot non vide ,réduit $\omega(W)$,la réduction de $\omega(X)$ est non vide grace à (1) ,et donc $\bar{\omega} \neq_G 1$.

Proposition III.1.2 : Soient F = F(X) un groupe libre ,et W une famille finie de mots réduits non vides sur X ,qui engendrent un sous-groupe G de F .Alors on peut construire une base de Nielsen de G .

Démonstration :Etant donné un ensemble fini W de mots sur X ,on peut effectivement le symétriser (i.e considérer le plus petit ensemble $\tilde{W}$ contenant W tel que si $\omega \in \tilde{W}$,alors $\omega^{-1} \in \tilde{W}$ où ω^{-1} est le mot inverse de ω sur X).Clairement W et $\tilde{W}$ engendrent le même sous-groupe de F(X) ,et on peut donc considérer dans la suite un ensemble W ,symétrisé .Tous les mots seront vus comme des mots sur X .

La démonstration utilise la notion de transformations de Nielsen .Nous allons démontrer ,que pour toute famille W vérifiant les hypothèses ,on peut construire une suite finie de transformations de Nielsen ,changeant W ,en une base de Nielsen de G .

On appelle Produit propre (PP) U'_i de U_i (par U_j) ,le mot réduit $U'_i =_F U_iU_j$,ou $U'_i =_F U_jU_i$; où $U_i, U_j \in W$,et $U_i \neq U_j$,et $U_i \neq U_j^{-1}$.

On appelle produit propre de longueur moindre (PPLM) ,un produit propre U'_i de U_i ,tel que $lgr_X(U'_i) < lgr_X(U_i)$.

Une transformation de Nielsen réduisant les longueurs (TNRL) de W est une transformation de $W = (U_1,\ldots,U_i,\ldots,U_k,\ldots,U_n)$,en $(U_1,\ldots,U'_i,\ldots,U'_k,\ldots,U_n)$,où U'_i est un PPLM de U_i par U_j ,et où $U_k = U_i^{-1}$ et $U'_k = U'^{-1}_i$ .Il est clair qu'une telle transformation change une famille symétrique finie ,génératrice de G ,en une famille symétrique ,finie ;génératrice de G ,puisque $\bar{U}_i = \bar{U}'_i\ \bar{U}_j$. Remarquons qu'un PPLM peut être un mot figurant déjà dans l'ensemble ,et alors le nombre d'éléments peut être diminué de 2 .De plus chaque TNRL ,diminue (strict') la longueur de de 2 de ses éléments .Donc puisque W est fini et que tout élément de W est de longueur minoré ,toute suite de TNRL appliquée à W est finie .

Etant donné W ,on peut effectivement construire une suite de

TNRL ,s'appliquant à W ,et aboutissant à W (i.e. $W \longrightarrow \ldots \longrightarrow W$,où chaque flèche symbolise une TNRL) ,tel que W n'admette pas de PPLM .Pour cela on énumère tous les PPLM de W (en formant les produits propres de générateurs ,puis en les réduisant ,on peut décider si il s'agit d'un PPLM) ,ils sont en nombre fini (puisque W est fini) .Etant donné un PPLM ,on peut effectuer une TNRL ,et on réitère alors ce procédé à l'ensemble obtenu .Puisque toute suite de TNRL est fini ,on aboutit à un ensemble symétrique ,fini W ,engendrant G ,tel que pour tout PP V'_i ,de V_i dans W , $lgr_X(V'_i) \geq lgr_X(V_i)$,et donc tout PP de 2 éléments de W simplifie au plus la moitié de chaque générateurs .Si $W \neq W$ alors le cardinal de W est au plus le cardinal de W ,et la longueur des mots de W a été strictement diminuée ,par rapport à la longueur des mot de W .

Considérons maintenant un tel ensemble W .Il peut y avoir un mot de longueur paire de W ,V_i ayant samoitié de droite et sa moitié de gauche se simplifiant par PP .Soit $V_i, V_j, V_l \in W$,tels que $V_i \equiv G\,D$ avec $lgr_X(G) = lgr_X(D) = \frac{1}{2} lgr_X(V_i)$; $V_j \equiv V'_j\,G^{-1}$; $V_l \equiv D^{-1}V'_l$ (On dit que V_i est simplifiable) .Puisque les simplifications réduisent au plus la moitié des générateurs ,$lgr_X(V_j) \geq lgr_X(V_i)$,et $lgr_X(V_l) \geq lgr_X(V_i)$ .Dans ce cas ,on appelle Transformation de Nielsen de même longueur (TNML) ,la transformation de W ,consistant à remplacer tous les éléments de la forme $V_j \equiv V'_j\,G^{-1}$,par les mots réduits de la forme $W_j =_F V_j\,V_i =_F V'_j\,D$,et les V_j^{-1} par les W_j^{-1} .Il est clair que la famille obtenue est une famille symétrique ,fini ,et engendrant G .De plus $lgr_X(W_j) = lgr_X(V_j)$ (en fait $W_j \equiv V'_j\,D$) .En effet si l'on a $W_j \equiv V'_{j1}\,D_1^{-1}\,D_1\,D_2$,avec $D \equiv D_1D_2$,et D_1 est non vide ,alors V_j simplifie plus de la moitié de V_i .

Considérons une famille W ,comme précedemment .On peut lui appliquer une suite finie de TNML aboutissant à une famille finie symétrique génératrice de G ,n'ayant pas d'élément simplifiable .On procède de la façon suivante .
Prenons $W = \langle V_1, \ldots, V_n \rangle$ où l'on a ordonné les éléments dans l'ordre de leur longueur .Supposons qu'il existe $i \in \langle 1, \ldots, n \rangle$ tel que pour tout élément V_j avec $lgr_X(V_j) < lgr_X(V_i)$,n'est pas simplifiable .Supposons que W_i soit simplifiable .Alors on applique une TNML ,comme précedemment .Les nouveaux éléments sont de même longueur

,et prennent donc la même place .Remarquons que ce sont des éléments au moins de même longueur que V_i .Cette transformation ne change pas des éléments de longueur au plus la longueur de V_i ,non simplifiables ,en des éléments simplifiables .En effet supposons que $V_j \equiv L\ R$,$lgr_X(V_j) \leq lgr_X(V_i)$,$lgr_X(L) = lgr_X(R) \leq lgr_X(D)$ .Supposons que $W_k \equiv V'_k\ D$,rende V_j simplifiable .Alors puisque $lgr_X(V'_k) \geq lgr_X(D)$,on a un des cas suivants :

1^{er}cas : L^{-1} est un sous-mot terminal de D ,et alors ,V_j est aussi simplifiable en utilisant V_i .

$2^{éme}$ cas : R^{-1} est un sous mot initial de V'_k et alors ,V_j est aussi simplifiable en utilisant V_k .

Ainsi si V_j n'est pas simplifiable avant la TNML et si la longueur de V_j est au plus V_i ,V_j n'est pas simplifiable aprés (et est inchangé).

Ainsi on peut alors effectuer des TNML successives à tous les éléments de même longueur que V_i ,et refaire l'opération avec i + 1 ,etc ... .Puisque le cas i = 1 est vrai ,on peut alors effectuer une suite de TNML dans l'ordre des éléments de W .Puisque W est fini avec ce qui précède ,la suite de TNML est fini .On peut donc ,en testant successivement pour tout élément si il est simplifiable ,construire une suite finie de TNML ,aboutissant à un ensemble symétrique fini ,engeandrant G ,n'ayant pas d'éléments simplifiable .(par contre on peut avoir fait apparaître des PPML).

Revenons à W .On lui applique une suite de TNRL tant que c'est possible ,puis une suite de TNML ,tant que c'est possible ,et ainsi de suite .Une telle suite est finie .En effet ,chaque TNRL diminue les longueurs ,les TNML laissent les longueurs inchangées ,et le nombre d'éléments non vide est décroissant .Ainsi on aboutit au bout d'un temps fini ,en un ensemble W ,symétrique ,fini ,engendrant G .On considère W^* l'ensemble obtenu en retirant tous les inverses de W .Nous allons démontrer que W^* est une base de Nielsen pour G .

Soit ω un mot réduit sur W^* .On peut voir ω comme un mot positif sur W ,$\omega \equiv W_{i(1)} \ldots W_{i(k)}$ .Alors au plus la moitié de chaque élément de W se réduit et ,aucun n'est simplifiable ,donc on vérifie (1) pour W^* .

On démontre (2) par induction sur la longueur de ω ,k .

Si k = 1 ,la condition (2) et la moitié terminale du dernier

relateur n'est pas simplifiée .
Si (2) est vérifiée pour un mot ω de longueur $k \geq 1$,et que la moitié terminale de dernier relateur de ω n'est pas simplifiée , ,on forme le mot réduit dans W^* , $\omega' = \omega\, W_{i(k+1)}$. Alors la réduction simplifie au plus la moitié de min $(lgr_X(W_{i(k)}), lgr_X(W_{i(k+1)})$. Et donc $lgr_X(\omega') \geq lgr_X(\omega) + lgr_X(W_{i(k+1)})$

$$- \min (lgr_X(W_{i(k)}), lgr_X(W_{i(K+1)})$$

ce qui établit clairement (2) .De plus la moitié terminale de $W_{i(k+1)}$ n'est pas simplifiée . ■

Corollaire III.1.1 : Le problème du mot généralisé est résoluble dans la classe des groupes libres .

Démonstration : Considérons un ensemble fini W de mots réduits sur X .W engendre un sous-groupe G de F(X) .On applique la proposition III.1.2 pour construire une base de Nielsen $\bar{W}$ de G . Considérons un mot ω réduit sur X .Si $\omega \in G$,alors ω est la réduction d'un mot U sur $\bar{W}$,,et avec la condition (1) , $lgr_G(U) \leq lgr_X(\omega)$ .De plus avec la condition (2) ,chaque élément de $\bar{W}$ a pour longueur dans X ,au plusla longueur de ω .On peut donc constituer tous les mots de $\bar{W}$,de longueur dans G ,au plus $lgr_X(\omega)$,s'écrivant sur des mots de $\bar{W}$ de longueur au plus , $lgr_X(\omega)$,puis en les réduisant librement ,on peut décider si $\omega \in G$,et si c'est le cas ,l'écrire comme un mot sur $\bar{W}$.

III.2 PROBLEMES DE DEHN ET CONSTRUCTIONS ALGEBRIQUES

Le but de ce paragraphe est d'étudier l'effet des const--ructions algébriques élémentaires sur des groupes f.p ,sur les problèmes de Dehn locaux..Les constructions utilisées sont :

- Produit libre
- Produit direct
- Produit libre amalgamé sur des sous-groupes f.e.
- split extension

- HNN extension et extension de Britton

En particulier ,nous établirons des résultats sur des groupes construits de façon élémentaire ,sur des groupes libres .Les groupes libres sont intéressants ,car tous les problèmes de Dehn sont résolubles pour les groupes libres .De plus ils ont un rôle fondamental en théorie des groupes .

Remarquons ,que si deux groupes sont finiment présentés ,le groupe construit dessus par les constructions précédentes sont f.p. .Pour les produits libres ,produits libres amalgamés ,extensions de Britton ,et produit direct ,ce résultat se vérifie immédiatement ,en regardant la présentation canonique .Pour les splits extensions ,le résultat est clair ,puisque être f.p. est une poly-propriété .Remarquons de plus que toute HNN extension est une extension de Britton ,et que tout produit direct de G et H ,est une split extension de G par H (ou de H par G).

Nous appelerons construction de niveau 1 ,un produit libre ,produit direct ,produit libre amalgamé ,de deux groupes libres ;une split extension d'un groupe libre par un groupe libre ;une HNN ou extension de Britton d'un groupe libre .Nous appelerons construction de niveau 2 ,un produit libre ,direct ,ou libre amalgamé ,d'un (resp^{t}) produit libre ,direct ,libre amalgamé de niveau 1 ;une split extension par un groupe libre ,d'une split extension de niveau 1 ;une HNN ou extension de Britton d'une extension de Britton de niveau 1 .Similairement nous parlerons de construction de niveau N ,une construction analogue sur un groupe de niveau N - 1 .Tous les résultats de ce chapitre sur les constructions de niveau n sont regroupés dans le tableau 1

III.2.1 Produit libre

Dans tout ce paragraphe ,on considère deux groupes f.p. $G = \langle S / R \rangle$ et $H = \langle S' / R' \rangle$ .On se donne $G * H$ par sa présentation canonique $G * H = \langle S \cup S' / R \cup R' \rangle$ où $S \cap S' = \emptyset$,et donc $R \cap R' = \emptyset$ .D'après le théorème d'écriture normale ,tout élément g de $G * H$ peut s'écrire de façon unique comme une séquence $g_1,\ldots,g_n$,où $\forall\ i = 1\ldots n-1$,$g_i \neq 1$,et si $g_i \in G$ alors $g_{i+1} \in H$;si $g_i \in H$,$g_{i+1} \in G$,et $g_1 \in G$ ou H ,tel que $g =$

$g_1 \ldots g_n$ .On définit alors la longueur d'un élément g par lgr(g)= n .

Remarquons que le produit libre de deux groupes libres ,est encore un groupe libre .Ainsi pour tout produit libre de niveau n ,($n \in \mathbb{N}$) ,tous les problèmes de Dehn sont solubles .

Lemme III.2.1 : Si l'on a une solution au problème du mot de G et H ,alors on a une procédure permettant d'exprimer tout mot de G * H ,sous sa forme normale .

Démonstration : Prenons un mot ω de G * H .Alors il s'écrit $\omega \equiv C_1 \ldots C_n$ où C_i est un mot sur S ,C_2 est un mot sur S' etc ... . (Le cas dual est similaire et ne sera pas traité).Or puisque G (resp^t H) se plonge naturellement dans G * H (i.e. par l'inclusion sur les générateurs) ,si C s'écrit sur S (resp^t S') ,$\bar{C} \in G$ (resp^t H) ,où $\bar{C}$ représente l'élément de G * H ,représenté par le mot C . On a alors une écriture de ω sous forme normale ssi $\forall i$, $C_i \neq 1$; c'est à dire ssi $C_1 \neq_G 1$,$C_2 \neq_H 1$,etc... .Il est donc clair que si G et H ont un problème du mot soluble ,on peut effectivement donner une écriture sous forme normale de tout mot exprimé sur la présentation de G * H . ■

Proposition III.2.1 : G * H a un problème du mot soluble ssi G et H ont un problème du mot soluble .

Démonstration : Soient deux mots ω et ω' de G * H .D'après le lemme III.2.1 ,on peut donner une forme normale de ω et ω' .Puisque l'écriture sous forme normale est unique ,si ω et ω' sont donnés par leur forme normale respective ,$g_1, \ldots, g_n$ et $h_1, \ldots, h_m$, $\omega = \omega'$ dans G * H ssi n = m ,et $g_i = h_i$,$\forall i = 1..n$ .Ainsi puisque les g_i et h_i sont donnés par des mots de G ou de H ,si l'on peut résoudre le problème du mot dans G et H ,on peut résoudre le problème du mot dans G * H .

Réciproquement ,$G \hookrightarrow G * H$,et $H \hookrightarrow G * H$,ainsi $\mathcal{WP}(G) \leq \mathcal{WP}(G * H)$,et $\mathcal{WP}(H) \leq \mathcal{WP}(G * H)$. ■

Pour le produit libre de deux groupes ayant un problème de conjugaison soluble ,on a une solution au problème de conjugaison ,similaire à celle des groupes libres .

Définition : considérons un élément g de G * H ,ayant pour forme

normale $g_1,\ldots,g_n$ .g est dit **cycliquement réduit** si g_1 et g_n sont dans deux groupes (G ou H) distincts ou si lgr(g) = 1 .Un **conjugué cyclique** de g est un élément $g' = g_{i+1}..g_n\ g_1..g_i$ (en particulier c'est un conjugué de g) .Remarquons que si g est cycliquement réduit ,$g_{i+1},\ldots,g_n,g_1,\ldots,g_i$ est une forme normale de g' ,et g' est cycliquement réduit .

Si g n'est pas cycliquement réduit ,on appelle **réduction cyclique** de g ,l'élément g' cycliquement réduit ,obtenu à partir de g par une suite de transformations de la forme :
$g \longrightarrow g_0$,si $g_1,\ldots,g_n$ est une forme normale de g ,g n'est pas cycliquement réduit ,et $g_0 = g_1^{-1} g\ g_1$.

Puisque être conjugué est une relation transitive ,il est clair que deux mots sont conjugués ssi leur réduction cyclique ,sont conjuguées .

Proposition III.2.2 : Soient deux élément cycliquement réduits ,g et g' .Ils sont conjugués dans G * H ssi
(i) si lgr(g) ≠ 1 ,alors g' est un conjugué cyclique de g .
(ii) si lgr(g) = 1 ,alors lgr(g') = 1 ,et g et g' sont deux éléments conjugués dans G (resp^t dans H) .

Démonstration : (⟹)(i) Supposons lgr(g) ≠ 1 .Soit h tel que $g' = h^{-1} g\ h$ .Prenons $g_1,\ldots,g_n$ et $h_1,\ldots,h_m$ les formes normales respectives de g et h . $g' = h_m^{-1}\ldots h_1^{-1}\ g_1\ldots g_n\ h_1\ldots h_m$ .Puisque g_1 et g_n sont dans deux sous-groupes distincts ,soit g_1 ,soit g_n est dans le même sous-groupe que h_1 .Considérons le premier cas , le deuxième étant similaire .Alors puisque g' est cycliquement réduit ,$h_m^{-1},\ldots,(h_1^{-1}g_1)\ldots,g_n,h_1,\ldots,h_m$ n'est pas une forme normale de g' (h_m^{-1} et h_m sont dans le même sous-groupe) et donc $h_1 = g_1$ .On peut alors utiliser le même raisonnement jusqu'à arriver à un des 3 cas suivants :

1er cas : si m < n ,alors $g_i = h_i$,∀ i = 1...m et donc :

$$g' = g_{m+1}\ldots g_n\ h_1\ldots h_m = g_{m+1}\ldots g_n\ g_1\ldots g_m$$

et donc g' est un conjugué cyclique de g .

2ème cas : si m = n ,alors $g_i = h_i$ ∀ i = 1...n ,et donc h = g

et $g' = g$.

$3^{ème}$ cas : si $n < m$,alors $h_i = g_i \ \forall\ i = 1...n$,et donc :

$$g' = h_m^{-1}...h_{n+1}^{-1}\ h_1...h_m$$
$$= h_m^{-1}...h_{n+1}^{-1}\ g_1...g_n\ h_{n+1}...h_m$$
$$= h'^{-1} g\ h'$$

avec h' ayant pour forme normale $h_{n+1},...,h_m$,et donc $lgr(h') < lgr(h)$.On peut alors réutiliser les arguments de la démonstration avec h' en place de h .Et puisque $lgr(h') < lgr(h)$,on finira par arriver dans un des cas 1 ou 2 . □

$(\Longrightarrow)(ii)$ g a pour forme normale g_1 ,et $g' = h^{-1} g\ h$
$= h_m^{-1}..h_1^{-1}\ g_1\ h_1...h_m$

Or g' est cycliquement réduit et donc (par exemple) $g_1 = h_1$ .D'où $g' = h_m^{-1}...h_2^{-1}h_1...h_m = h_m^{-1}...h_2^{-1}g_1h_2...h_m$ .On peut donc successivement utiliser le même argument et montrer que $h_i = g_i$ ou $h_i = g_i^{-1}$,$\forall\ i = 1...m$ .Donc h et g ,et donc g' sont tous deux dans G ($resp^t$ dans H) ,et g et g' sont donc conjugués dans G ($resp^t$ dans H) ,et $lgr(g') = 1$. □

$(\Longleftarrow)$ les cas (i) et (ii) sont triviaux ■

Proposition III.2.3 : $G * H$ a un problème de conjugaison soluble ssi G et H ont un problème de conjugaison soluble .

Démonstration : $(\Longleftarrow)$Si G et H ont un problème de la conjugaison alors ils ont un problème du mot soluble .Pour deux mots ω et ω' de $G * H$ on peut donc déterminer une écriture sous forme normale (lemme III.2.1) .De plus on peut effectivement réduire cycliquement ces formes normales par le procédé suivant .Si $g_1,...,g_n$ est une forme normale non cycliquement réduite (ce que l'on peut aisément décider) ,on forme $g_2,...,g_ng_1$ .Alors si $g_ng_1 \neq 1$,c'est cycliquement réduit .sinon on forme $g_3,...,g_{n-1}g_2$,et l'on réitère le procédé .Puisque G et H ont un problème du mot soluble ,ce procédé est effectif .Alors avec la proposition III.2.2 ,si les formes normales de ω et ω' sont cycliquement réduites de longueur > 1 , ω et ω' sont conjugués ssi un conjugué cyclique de ω' est égal à ω .Puisque l'on peut se donner tous

les conjugués cycliques de ω' ,et que le problème du mot de $G * H$ est soluble ,on peut décider si ω et ω' sont conjugués .

Si la lgr de ω est 1 ,avec la proposition III.2.2 ;on peut utiliser la solution au problème de la conjugaison dans G ou H .

($\Longrightarrow$) prenons un élément de G (le cas de H est similaire .Il est de longueur 1 ,et donc d'après la proposition III.2.2 ,un élément lui est conjugué dans G ssi il lui est conjugué dans $G * H$. ■

III.2.2 Produit direct

On considère deux groupes finiment présentés $G = \langle S / R \rangle$ et $H = \langle S'/R' \rangle$ .On se donne alors $G \times H$ par la présentation canonique : $G \times H = \langle S \cup S' / R \cup R' , [g,h] \ \forall g \in G , \forall h \in H \rangle$ (où $S \cap S' = \emptyset$) .Alors pour tout mot sur cette présentation , $\omega \equiv g_1 h_1 \ldots g_n h_n$,où les $g_i \in G$ et les $h_i \in H$ .On peut l'écrire sous la forme canonique $(g_1 \ldots g_n , h_1 \ldots h_n)$ (les éléments de G et de H commutent .

PROPOSITION III.2.4 : Soient deux groupes finiment présentés ,F et G , $G \times H$ a un problème du mot (resp^t de conjugaison) soluble ssi G et H ont un problème du mot (resp^t de conjugaison) soluble .

Démonstration : $(g,h) = (g',h')$ dans $G \times H \iff g =_G g'$ et $h =_H h'$ .Donc si l'on a une solution au problème du mot dans G et H ,on peut résoudre le problème du mot de $G \times H$.
On a de plus $G \hookrightarrow G \times H$ et $H \hookrightarrow G \times H$ donc $\mathcal{WP}(G) \leq \mathcal{WP}(G \times H)$ et $\mathcal{WP}(H) \leq \mathcal{WP}(G \times H)$.

Deux éléments de $G \times H$,(g,h) et (g',h') sont conjugués ssi $\exists (g_1,h_1)$ tel que $(g_1,h_1)^{-1}(g,h)(g_1,h_1) = (g_1^{-1} g \, g_1 , h_1^{-1} h \, h_1)$

$= (g',h')$

Donc ssi g et g' sont conjugués dans G ,et h et h' sont conjugués dans H .Donc si l'on peut résoudre le problème de conjugaison dans G et dans H ,on peut le résoudre dans $G \times H$.

Réciproquement deux éléments $(g,1)$ et $(g',1)$ sont conjugués dans $G \times H$ ssi $\exists (g_1,h_1)$ tel que $(g_1^{-1} g \, g_1 , h_1^{-1} h_1) = (g_1^{-1} g \, g_1 , 1)$

$= (g', 1)$

donc ssi g et g' ,pris comme éléments de G $(G \cong G \times \langle 1 \rangle)$,sont conjugués dans G .Ainsi $\mathcal{EP}(G) \leq \mathcal{EP}(G \times H)$,et de façon similaire on montre que $\mathcal{EP}(H) \leq \mathcal{EP}(G \times H)$ ■

Corollaire III.2.1 : Tout produit direct de niveau n $(n \in \mathbb{N})$ a un problème du mot et de conjugaison soluble .

Démonstration : Par récurrence .La proposition III.2.1 nous donne l'étape de récurrence .De plus toujours grâce à la proposition III.2.1 et puisque les problèmes du mot et de la conjugaison sont solubles pour les groupes libres ,on a l'étape initiale . ■

Théorème III.2.1 : *(Mihailova)*

Soit Γ un groupe de présentation finie .Soit $H \leq \Gamma$ un sous-groupe finiment présenté ,quotient de Γ . tel que H a un problème du mot de degré $D>0$ .Alors $\exists$ L_H sous-groupe de $\Gamma \times \Gamma$,f.e. .tel que $\mathcal{GWP}(L_H; \Gamma \times \Gamma)$ a pour degré D .

Démonstration : Soit $\Gamma = \langle s_1,\ldots,s_n \mid r_1,\ldots,r_m \rangle$ une présentation de Γ .Alors H , quotient de Γ ,peut se donner par la présentation $H = \langle s_1,\ldots,s_n \mid r_1,\ldots,r_l \rangle$ où $l > m$.

Considérons le sous-groupe L_H de $\Gamma \times \Gamma$ engendré par les éléments : $\alpha_i = (s_i; s_i)$ $i \in \langle 1,\ldots,n \rangle$

et $\beta_j = (1; r_j)$ $j \in \langle 1,\ldots,l \rangle$

Le résultat découle du lemme suivant :

Lemme III.2.2 : $\forall x,y \in \Gamma$; $(x;y) \in L_H \iff x =_H y$

Démonstration : On considère la projection canonique $\pi : \Gamma \hookrightarrow H$ et l'épimorphisme $\psi : \Gamma \times \Gamma \hookrightarrow H \times H$,défini par $\forall a,b \in \Gamma$, $\psi((a;b)) = (\pi(a);\pi(b))$.

Alors $\psi(r_j) = (1;1)$ $\forall j \in \langle 1,\ldots,l \rangle$, et $\psi(r_i)$ est un élément diagonal de $H \times H$, $\forall i \in \langle 1,\ldots,n \rangle$ .D'où $\forall x,y \in \Gamma$;$(x;y) \in L_H \Longrightarrow (x;y)$ est un élément diagonal de $H \times H$, i.e $x =_H y$

Supposons maintenant que $x =_H y$ .Alors $y\,x^{-1} =_H 1$ i.e $y\,x^{-1}$ est librement égal à $\Pi\, p^{-1}\, r_{\nu(i)}\, p$ .Alors $(1; y.x^{-1}) \in L_H$

Or $(x;x) \in L_H$ donc $(x;y) \in L_H$ ■

Définition : Soient G ,un groupe f.p. ,et H un groupe récursivement présenté , et un plongement Π ,de H dans G .Π est appelé **plongement récursif** ,si le problème du mot généralisé de H dans G est soluble .

Remarque : Alors si $\mathcal{GWP}(H,G)$ a pour degré D ,et si on a un plongement récursif de A dans H ,alors $\mathcal{GWP}(A,G)$ a pour degré D .

Corollaire III.2.2 : Soit F_n ,le groupe libre de rang n $(n \geq 2)$. $F_n \times F_n$ a un sous-groupe L tel que $\mathcal{GWP}(L;F_n \times F_n)$ a pour degré D .En particulier ,le problème du mot généralisé de $F_n \times F_n$,est récursivement insolvable .

Démonstration : D'après le corollaire II.3.1.1 ,et le théorème de Mihailova ,la proposition est vraie pour n = 2 .

Considérons le sous groupe de F_2 engendré par α ,$\beta^{-1}\alpha\beta$,...,$\beta^{-(n-1)}\alpha\beta^{n-1}$ .D'après le théorème de Nielsen-Schreier ,c'est un groupe libre .De plus il est engendré librement par ces générateurs ,puisqu'un produit de puissances de générateurs ,laisse les sous-mots médians des générateurs ,inchangé .On considère le plongement de F_n dans F_2 sur ces générateurs .Il s'étend en un épimorphisme de $F_n \times F_n$ dans $F_2 \times F_2$,qui est un plongement récursif

III.2.3 HNN extensions et extensions de Britton

a) Problème du mot et problème du mot généralisé

On utilisera les notations de I.5

Remarquons que si un groupe G f.p. a un problème du mot généralisé soluble ,alors étant donné un sous-groupe f.e. A de G ,et un mot ω de G appartenant à A ,on peut donner une écriture de $\bar{\omega}$ sur les générateurs de A .En effet ,si $\omega \in A$,on énumère tous les éléments de A ,écrit comme mots sur G ,et pour chacun on décide si il est égal à ω ce qui est possible puisque $\mathcal{WP}(G) \leq \mathcal{GWP}(G)$.

Proposition III.2.5 : Une extension de Britton d'un groupe ayant un problème du mot généralisé soluble a un problème du

mot soluble .

Démonstration : Considérons G^* ,extension de Britton d'un groupe $G = \langle S / R \rangle$ ayant un problème du mot généralisé soluble ; avec pour lettres stables T .Considérons un mot ω sur $S \cup T$ .On peut alors décider si $\omega =_H 1$,grâce à la procédure suivante :

1^{er} cas : Si ω est un mot sur S ,puisque G est plongé naturellement dans G^* (thm I.5.1),$\omega =_G 1$ ssi $\omega =_{G^*} 1$ .Or G a un problème du mot généralisé soluble ,et donc un problème du mot soluble .Ainsi dans ce cas on peut décider ,grâce à un algorithme pour G ,si $\omega = 1$ dans G^* .

$2^{ème}$ cas : ω est un mot sur T .Considérons Γ le sous groupe de G^* engendré par T.Et donc $\omega =_{G^*} 1$ ssi $\omega = 1$ dans Γ .Or Γ est un groupe libre (lemme I.5.3) ,et donc ,puisque tout groupe libre a un problème du mot soluble ,on peu décider si $\omega = 1$ dans G^* .

$3^{ème}$ cas : ω est un mot sur $S \cup T$,ayant des occurences d'éléments de S et de T .Alors avec le théorème I.5.1 si $\omega = 1$ dans G^* ,ω contient un pinch .i.e. un sous-mot de la forme $p_y^{-1} X p_z$ (ou dualement $p_y X p_z^{-1}$) ,où X est un mot sur S , qui est dans le sous-groupe de G engendré par $\langle A_y \rangle$ (dualement $\langle B_y \rangle$ (avec les notations de I.5) et $z \in K_y$.
Pour décider si $\omega = 1$ dans G^* ,on peut énumérer tous les sous-mots de ω de la forme $p_y^{-1} X p_z$,où X est un mot sur S ,et $z \in K_y$,car K_y est donné par la présentation canonique de G^* .Puisque G a un problème du mot étendu soluble ,on peut décider si $X \in A_y$,et dans ce cas donner son écriture sur les générateurs de A_y .Si c'est le cas ,on peut effectivement utiliser le thm I.5.1 pour extraire le pinch .On obtient alors une écriture de $\bar{\omega}$,contenant moins d'occurence d'éléments de T .On recommence alors la procédure .Si ce n'est pas le cas ,alors $\omega \neq 1$. ■

Avec le corollaire III.1.1,le corollaire suivant est immédiat .

Corollaire III.2.3 : Une extension de Britton d'un groupe libre ,a un problème du mot soluble .

Proposition III.2.6 : Pour tout groupe libre de rang n ($n \geq 2$) ,F_n ,il existe une HNN extension de F_n ,ayant un problème

du mot généralisé ,insoluble .

Démonstration : $F_n \times F_n$ donné par la présentation :

$$\langle \alpha_1,\ldots,\alpha_n,\beta_1,\ldots,\beta_n / [\alpha_i,\beta_j] \ ; i,j = 1\ldots n \rangle$$

est clairement une HNN extension de $F(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$,ayant pour lettres stables $\langle \beta_1,\ldots,\beta_n \rangle$ .Or d'après le corollaire III.2.2 ,F_n F_n a un problème du mot généralisé ,insoluble . ■

Proposition III.2.7 : Si un groupe G a un problème du mot généralisé récursivement insoluble .alors il existe une HNN extension de G ,ayant un problème du mot récursivement insoluble .

Démonstration : Considérons un sous-groupe H de G ,f.e. par $\langle \alpha_1,\ldots,\alpha_n \rangle$,tel que $\mathcal{GWP}(H,G)$ soit récursivement insoluble .On construit alors G^* ,HNN extension de G ,ayant pour lettre stable $\langle t \rangle$,et pour relateurs de l'extension $t^{-1}\alpha_i t = \alpha_i$,pour tout $i = 1\ldots n$. Alors ,pour un mot ω de G ,d'après le lemme de Britton $t^{-1}\omega t \omega^{-1} = 1$ dans G^* ssi $\omega \in H$ .Et ainsi $\mathcal{GWP}(H,G) \leq \mathcal{WP}(G^*)$. ■

Corollaire III.2.4 : Pour tout $n \geq 2$,il existe une HNN extension de niveau n ayant un problème du mot récursivement insoluble .

Démonstration : Par récurrence .Les propositions III.2.6 et III.2.7 nous donnent l'existence d'une HNN extension de niveau 2 ayant un problème du mot récursivement insoluble ce qui fournit l'étape initiale .

Supposons que E_n^*,soit une HNN extension de niveau n ayant un problème du mot récursivement insoluble .Construisons E_{n+1}^* ,HNN extension ayant pour base E_n^* ,et donc de niveau n + 1 .Alors puisque $E_n^* \hookrightarrow E_{n+1}^*$,et que le problème du mot est héréditaire (I.3.3) ,E_{n+1}^* a un problème du mot récursivement insoluble .

C.Q.F.D. ■

b) Problème de la conjugaison

Soient $H = \langle s_1,\ldots,s_n / r_1,\ldots,r_n \rangle$,un groupe finiment présenté

.ayant un problème du mot insoluble ;et $F = \langle k, s_1, \ldots, s_n \rangle$ .le groupe libre de rang n + 1 ,sur les générateurs $k, s_1, \ldots, s_n$.

Définissons le groupe f.p. ,G par la donnée d'une présentation :

Générateurs : $k, s_1, \ldots, s_n, t_1, \ldots, t_m, d_1, \ldots, d_n$

Relations :

(i) $t_i^{-1} k\, t_i = k\, R_i$

(ii) $t_i^{-1} s_a t_i = s_a$

(iii) $d_b^{-1} s_a d_b = s_a$

(iv) $d_a^{-1} k\, d_a = s_a^{-1} k\, s_a$

où $1 \leq i \leq m$; $1 \leq a \leq n$; $1 \leq b \leq n$

et où les R_i sont les mots sur $s_1, \ldots, s_n$ apparaissant dans la présentation de H donnée précédemment .

Lemme III.2.3 : G est une HNN extension de F ayant pour lettres stables $\langle t_1, \ldots, t_m, d_1, \ldots, d_n \rangle$.

Demonstration : G a pour base F et pour lettres stables $\langle t_1, \ldots, t_m, d_1, \ldots, d_n \rangle$ .Les sous groupes de Britton sont tous F .On vérifie donc la condition de l'isomorphisme ,et on a donc le résultat. ■

En utilisant le lemme III.2.3 et le corollaire III.2.3 ,on a donc :

Lemme III.2.4 : G a un problème du mot récursivement soluble .

NOTATIONS : Soient X un mot sur $s_1, \ldots, s_n$ .On note $X(d_\alpha)$ le mot obtenu en remplaçant dans X toutes les occurences de s_α par d_α $(\alpha = 1 \ldots n)$ .On note T le sous-groupe de G engendré par $t_1, \ldots, t_m$ et $d_1, \ldots, d_n$ .Remarquons que les mots sur $s_1, \ldots, s_n$ commuttent dans G avec les éléments de T ,ce grâce aux relateurs (ii) et (iii) de la présentation de G .

Quelques remarques et calculs préliminaires seront utiles à la suite .Toutes les égalités considérées ont lieu dans G .Soit Z un mot sur $s_1, \ldots, s_n$; $Z \equiv s_{j_1}^{\zeta_1} \ldots s_{j_p}^{\zeta_p}$; où $\zeta_1, \ldots, \zeta_p \in \langle -1; 1 \rangle$ .et $j_1, \ldots, j_p \in \langle 1, \ldots, n \rangle$.

$$Z^{-1} k\, Z \equiv s_{j_p}^{-\zeta_p} \ldots s_{j_1}^{-\zeta_1}\, k\, s_{j_1}^{\zeta_1} \ldots s_{j_p}^{\zeta_p}$$

$$= s_{j_p}^{-\zeta_p} \ldots d_{j_1}^{-\zeta_1}\, k\, d_{j_1}^{\zeta_1} \ldots s_{j_p}^{\zeta_p} \qquad \text{(avec (iv))}$$

$$= d_{j_1}^{-\zeta_1} s_{j_P}^{-\zeta_P} \ldots s_{j_2}^{-\zeta_2} k\, s_{j_2}^{\zeta_2} \ldots s_{j_P}^{\zeta_P} d_{j_1}^{\zeta_1} \qquad \text{(avec (iii))}$$

$$\ldots = d_{j_1}^{-\zeta_1} \ldots d_{j_P}^{-\zeta_P} k\, d_{j_P}^{\zeta_P} \ldots d_{j_1}^{\zeta_1} \qquad \text{(après réitération)}$$

$$= Z(d_\alpha^{-1})\, k\, Z(d_\alpha^{-1})^{-1}$$

De même $Z\, k\, Z^{-1} = Z(d_\alpha^{-1})^{-1}\, k\, Z(d_\alpha^{-1})$

Et puisque les mots sur $s_1,\ldots,s_n$ commutent avec les éléments de T.

$$Z(d_\alpha^{-1})\, Z\, k\, Z(d_\alpha^{-1})^{-1} = Z\, Z(d_\alpha^{-1})\, k\, Z(d_\alpha^{-1})^{-1}$$

$$= Z\, Z^{-1} k\, Z$$

$$= k\, Z$$

De plus on a $t_i^{-1} k\, t_i = k\, R_i$ (relateur (i))

soit $t_i^{-1} k\, t_i\, R_i^{-1} k^{-1} = 1$

$t_i^{-1} k\, R_i^{-1}\, t_i\, k^{-1} = 1$

$k\, R_i^{-1}\, t_i\, k^{-1} t_i^{-1} = 1$ après conjugaison cyclique

soit $t_i k^{-1} t_i^{-1} = R_i k^{-1}$

et donc $t_i\, k\, t_i^{-1} = k\, R_i^{-1}$

Avec $W \equiv Z(d_\alpha^{-1})\, t_i^{\varepsilon}\, Z(d_\alpha^{-1})^{-1}$ où $\varepsilon = \pm 1$

$$W^{-1} k\, W \equiv Z(d_\alpha^{-1})\, t_i^{-\varepsilon}\, Z(d_\alpha^{-1})^{-1}\, k\, Z(d_\alpha^{-1})\, t_i^{\varepsilon}\, Z(d_\alpha^{-1})^{-1}$$

$$= Z(d_\alpha^{-1})\, t_i^{-\varepsilon}\, Z\, k\, Z^{-1}\, t_i^{\varepsilon}\, Z(d_\alpha^{-1})^{-1}$$

$$= Z(d_\alpha^{-1})\, Z\, t_i^{-\varepsilon} k\, t_i^{\varepsilon}\, Z^{-1}\, Z(d_\alpha^{-1})^{-1}$$

$$= Z(d_\alpha^{-1})\, Z\, k\, R_i^{\varepsilon}\, Z^{-1}\, Z(d_\alpha^{-1})^{-1}$$

$$= Z(d_\alpha^{-1})\, Z\, k\, Z(d_\alpha^{-1})^{-1}\, R_i^{\varepsilon}\, Z^{-1}$$

$$= k\, Z\, R_i^{\varepsilon}\, Z^{-1}$$

Lemme III.2.5 : Soient X_1, X_2, Y_1, Y_2 des mots sur $s_1,\ldots,s_n$.

(i) $(\exists\, W \in T)\ (W^{-1} X_1 k\, Y_1 W =_G X_2 k\, Y_2) \iff (X_1 Y_1 =_H X_2 Y_2)$

(ii) $(X_1 k\, Y_1 \sim_G X_2 k\, Y_2) \iff (X_1 Y_1 \sim_H X_2 Y_2)$

Démonstration : (i) Condition nécessaire

Soit $\psi : (k, s_1,\ldots,s_n, t_1,\ldots,t_m, d_1,\ldots,d_n) \longrightarrow H$; défini par

$\psi(k) = 1$; $\psi(t_i) = 1$; $\psi(d_\alpha) = 1$; $\psi(s_\alpha) = s_\alpha$

avec $i = 1\ldots m$ et $\alpha = 1\ldots n$. ψ s'étend naturellement sur le groupe libre engendré par $k, s_1\ldots s_n, t_1,\ldots,t_m, d_1,\ldots,d_n$ en un

homomorphisme surjectif .Les relateurs de G (pris comme éléments du groupe libre) sont dans le noyau de Ψ .On peut donc passer au quotient ,et l'on a $\Psi/_{\ker(\psi)}$: G $\longrightarrow$ H homomorphisme surjectif .L'image de $W^{-1}X_1 k\ Y_1 W$ par cet homomorphisme est X_1Y_1 ,l'image de $X_2 k\ Y_2$ est X_2Y_2 ,on a donc $X_1Y_1 =_H X_2Y_2$. □

(i) Condition suffisante

$X_1Y_1 =_H X_2Y_2$,alors $X_2Y_2 = (\prod_{i=1}^{k} Z_i\ R_{p(i)}^{\varepsilon(i)}\ Z_i^{-1})\ X_1Y_1$ dans le groupe libre , où $p : \langle 1,..k\rangle \longrightarrow \langle 1,...,m\rangle$ et $\varepsilon : \langle 1,...,k\rangle \longrightarrow \langle -1,1\rangle$
On note $\theta_i \equiv Z_i(d_\alpha^{-1})\ t_{p(i)}^{\varepsilon(i)}\ Z_i(d_\alpha^{-1})^{-1}$ et $W^* \equiv \theta_k...\theta_1$ .On a alors :

$$
\begin{aligned}
W^{*-1} k\ X_1Y_1\ W^* &\equiv \theta_1^{-1}...\theta_k^{-1} k\ X_1Y_1\ \theta_k...\theta_1 \\
&=_G \theta_1^{-1}...\theta_k^{-1} k\ \theta_k...\theta_1\ X_1Y_1 \\
&=_G \theta_1^{-1}...k\ Z_k\ R_{p(k)}^{\varepsilon(k)}\ Z_k^{-1}...\theta_1\ X_1Y_1 \\
&=_G \theta_1^{-1}...\theta_{k-1}^{-1} k\ \theta_{k-1}...\theta_1\ Z_k\ R_{p(k)}^{\varepsilon(k)}\ Z_k^{-1}\ X_1Y_1 \\
&\vdots \\
&=_G k\ X_2Y_2
\end{aligned}
$$

En posant $W \equiv X_1(d_\alpha^{-1})^{-1}\ W^*\ X_2(d_\alpha^{-1})$

$$
\begin{aligned}
W^{-1}X_1 k\ Y_1W &\equiv X_2(d_\alpha^{-1})^{-1}\ W^{*-1}\ X_1(d_\alpha^{-1})\ X_1 k\ Y_1\ X_1(d_\alpha^{-1})^{-1}\ W^*\ X_2(d_\alpha^{-1}) \\
&=_G X_2(d_\alpha^{-1})^{-1}\ W^{*-1}\ X_1X_1(d_\alpha^{-1})\ k\ X_1(d_\alpha^{-1})^{-1}Y_1\ W^*\ X_2(d_\alpha^{-1}) \\
&=_G X_2(d_\alpha^{-1})^{-1}\ W^{*-1}\ X_1X_1^{-1} k\ X_1Y_1\ W^*\ X_2(d_\alpha^{-1}) \\
&=_G X_2(d_\alpha^{-1})^{-1}\ W^{*-1} k\ X_1Y_1W^*\ X_2(d_\alpha^{-1}) \\
&=_G X_2(d_\alpha^{-1})^{-1} k\ X_2Y_2\ X_2(d_\alpha^{-1}) \\
&=_G X_2(d_\alpha^{-1})^{-1} k\ X_2(d_\alpha^{-1})\ X_2Y_2 \\
&=_G X_2 k\ X_2^{-1}X_2Y_2 \\
&=_G X_2 k\ Y_2
\end{aligned}
$$

Et on a donc trouvé $W \in T$ comme désiré . □

(ii) Condition suffisante

$X_1Y_1 \sim_H X_2Y_2$ i.e $\exists$ X mot sur $s_1,...,s_n$ avec $X^{-1}X_1Y_1X =_H X_2Y_2$
D'après (i) $\exists$ $W \in T$ tel que $W^{-1}X^{-1}X_1 k\ Y_1X\ W =_G X_2 k\ Y_2$

$$(X\ W)^{-1}X_1 k\ Y_1X\ W =_G X_2 k\ Y_2$$

soit $$X_1 k\ Y_1 \sim_G X_2 k\ Y_2$$ □

(ii) Condition nécessaire

$X_1 k\ Y_1 \sim_G X_2 k\ Y_2$ i.e $\exists\ \theta \in G$ tel que $\theta^{-1} X_1 k\ Y_1 \theta =_G X_2 k\ Y_2$

On note $\phi = \Psi_{/\ker \Psi}$. Alors $\phi (\theta^{-1} X_1 k\ Y_1 \theta) =_H \phi (X_2 k\ Y_2)$

$$\phi (\theta^{-1})\ X_1 Y_1\ \phi (\theta) =_H X_2 Y_2$$

et donc $X_1 Y_1 \sim_H X_2 Y_2$ ■

Puisque tout élément X de H peut s'écrire $X_1 Y_1$, le lemme III.2.5 (ii) a pour conséquence CP (H) ≤ CP (G) .Or H a un problème du mot récursivement insoluble ,et donc un problème de conjugaison récursivement insoluble .On a donc le résultat suivant

Lemme III.2.6 : G a un problème de conjugaison récursivement insoluble .

Les résultats suivants sont alors immédiats .

Proposition III.2.8: Il existe une HNN extension d'un groupe libre ayant un problème de conjugaison récursivement insoluble .

Et avec le corollaire III.2.3 :

Corollaire III.2.5 : Il existe un groupe ayant un problème du mot soluble et un problème de la conjugaison récursivement insoluble .

III.2.4 Produit libre amalgamé

On se donne deux groupes f.p. $G_1 = \langle S_1 / R_1 \rangle$ et $G_2 = \langle S_2 / R_2 \rangle$ .deux sous-groupes isomorphes f.e. $H_1 \subseteq G_1$ et $H_2 \subseteq G_2$,ainsi que $\Psi : H_1 \longrightarrow H_2$ par l'image des générateurs de H_1.On considère alors le produit libre amalgamé de G_1 et G_2 ,sur H_1 et H_2 ,par Ψ ;donné par la présentation canonique :

$G = \langle S_1 \cup S_2 / R_1 \cup R_2 , \Psi(a_i) = a_i , i \in I \rangle$,où $\langle a_i , i \in I \rangle$ est une famille génératrice finie de H_1 .

Pour tout élément $g \in G$ il existe une unique séquence $g_1, \ldots, g_n, h$,appellée **forme normale** telle que : si $g_i \in G_1 \setminus H_1$ alors $g_{i+1} \in G_2 \setminus H_2$ (et inversement) ,$\forall\ i = 1 \ldots n$, $g_i \neq 1$,et $g_1 \in G_1$ ou G_2 , $h \in H_1 = H_2$,et $g = g_1 \ldots g_n h$.

Proposition III.2.9 : Si G est le produit libre de G_1 et G_2 ,amalgamé sur des sous-groupes f.e. ,$H_1 \subseteq G_1$ et $H_2 \subseteq G_2$,tels que $\mathcal{GWP}(H_1,G_1)$ et $\mathcal{GWP}(H_2,G_2)$ sont solubles et que G_1 et G_2 ont un problème du mot soluble ,alors ,le problème du mot de G est soluble .

Démonstration : Considérons la présentation de G citée ci-dessus .On peut alors déterminer l'image par ψ^{-1} des générateurs de H_2 ,simplement en énumérant les images des mots de H_1 (par longueur croissante ,par exemple) ,et en décidant si elles sont égales dans H_2 ,à un générateur .

Prenons un mot ω de G s'écrivant $C_1D_1 \ldots C_nD_n$,où les C_i sont des mots sur S_1 ,les D_i sont des mots sur S_2 ($i = 1 \ldots n$) ,tous non vides (Tout autre cas est analogue) .D'après le théorème d'unicité de l'écriture normale ,ω s'écrit de façon unique sous la forme $\alpha_1\beta_1 \ldots \alpha_N\beta_N h$;où $\forall\ i = 1 \ldots N$, α_i est un mot sur S_1 ,β_i un mot sur S_2 ,$\alpha_i \in G_1 \setminus H_1$,$\beta_i \in G_2 \setminus H_2$,$\alpha_1\ \beta_1, \alpha_2, \beta_2, \ldots, \alpha_N, \beta_N$ sont non triviaux ,et $h \in H_1 = H_2$ .Sous les hypothèses de la proposition ,on peut effectivement déterminer une telle écriture pour ω .Prenons $\omega \equiv C_1D_1 \ldots C_nD_n$ comme précedemment .On peut tester pour tout mot C_i ($resp^t$ D_i) ,si $C_i \in H_1$ ($resp^t$ H_2).Si c'est le cas on peut écrire C_i sur les générateurs de H_1 ,et alors transformer l'écriture de ω en $C_1D_1 \ldots D'_{i-1}C'_i \ldots D'_{n-1}$,où $D'_{i-1} \equiv D_{i-1}\Psi(C_i)\ D_i$,et $C'_i = C_{i+1}$ etc ...(et dualement avec H_2 à la place de H_1 ,Ψ^{-1} à la place de Ψ) .Et on réitère le même procédé ,jusqu'à ce que cela ne soit plus possible .On a alors une écriture sous forme normale de ω .Si ω s'écrit $h \in H_1$ (ou H_2),on peut décider si $\omega = 1$ .Sinon d'après l'unicité de l'écriture sous forme normale ,$\omega \neq 1$.

■

Remarque : Il apparaît dans cette démonstration que sous ces hypothèses on a une procédure pour écrire tout mot sous sa forme normale .

Proposition III.3.10 : Il existe un produit libre de groupes libres ,amalgamé sur des sous-groupes finiment engendrés ,ayant un problème de la conjugaison ,($resp^t$

du mot généralisé) ,récursivement insoluble .

Démonstration : Reprenons les notations du théorème I.5.1 .Dans la démonstration de ce théorème apparaît le groupe $\bar{E}$,qui est produit libre amalgamé sur des sous-groupes finiment engendrés ,de $F = \langle a_v , v \in V \rangle * E$,et $G = \langle b_v , v \in V \rangle * E$ .Il est clair que si E est libre ,F et G sont libres.De plus avec les changements de Tietze :

$$\bar{E} = \langle S , a_v , b_v , v \in V / D , a_{y(i)}^{-1} A_i a_{z(i)} = b_{y(i)} B_i b_{z(i)}^{-1} , i \in I \rangle$$

$$\cong \langle S , a_v , b_v , p_v , v \in V / D , p_v = a_v b_v , p_{y(i)}^{-1} A_i p_{z(i)} = B_i , i \in I \rangle$$

$$\cong \langle S , a_v , p_v , v \in V / D , p_{y(i)}^{-1} A_i p_{z(i)} = B_i , i \in I \rangle$$

$$\cong E^* * \langle a_v , v \in V \rangle$$

Et donc $\mathcal{EP}(E^*) \leq \mathcal{EP}(\bar{E})$ (prop III.2.3) ,et $\mathcal{GWP}(E^*) \leq \mathcal{GWP}(\bar{E})$ (car le plongement est récursif).Or cet argument est vrai pour toute extension de Britton .Donc puisqu'il existe une HNN extension de niveau 1 ,ayant un problème du conjugaison (resp^t du mot généralisé) récursivement insoluble ,il existe un produit libre finiment amalgamé ,de niveau 1 ,ayant un problème de conjugaison (resp^t du mot généralisé) récursivement insoluble . ■

Lemme III.2.7 : Si G a un problème du mot généralisé récursivement insoluble ,alors il existe un produit libre amalgamé de deux copies de G ,sur des sous-groupe finiment engendrés,ayant un problème du mot récursivement insoluble

Démonstration : Soit un sous-groupe H f.e. de G tel que $\mathcal{GWP}(H,G)$ soit récursivement insoluble .Prenons H' et G' copies de H et G ,et formons $K = G *_{H=H'} G'$.Alors avec le théorème d'écriture normale ,pour un mot $h \in H$,et pour tout mot ω de G ,$\omega\, h\, \omega' h' = 1$ dans K ssi $\omega \in H$ (avec ω' et h' copies de ω et h) .Ainsi on a $\mathcal{GWP}(H,G) \leq \mathcal{WP}(K)$. ■

Proposition III.2.11 : Pour tout $n \geq 2$,il existe un produit libre amalgamé de niveau n ,ayant un problème du mot insoluble .

Démonstration : Par récurrence .La proposition III.2.10 ,et le

lemme III.3.7 nous donnent l'étape initiale .L'étape de récurrence elle ,provient du fait que si K est un produit libre amalgamé de G $G \hookrightarrow K$,et que le problème du mot est héréditaire . ■

III.2.5 Split extension

Proposition III.2.12 : Toute split extension de niveau n (n $\in \mathbb{N}^*$) ,a un problème du mot soluble .

Démonstration : Résultat trivial ,avec le fait que le problème du mot est une poly-propriété . ■

Proposition III.2.13 : Pour tout n ,il existe une split extension de niveau n ayant un problème du mot généralisé récursivement insoluble .

Démonstration : Trivial puisqu'un produit direct de niveau n est une split extension de niveau n . ■

Proposition III.2.14 : Pour tout n ,il existe une split extension de niveau n ,ayant un problème de la conjugaison récursivement insoluble .

Démonstration : On le démontre pour n = 1 .Alors étant donnée une telle split-extension A , $A \times \mathbb{Z}^{n-1}$,est une split extension de niveau n ,ayant un problème de la conjugaison insoluble .

Considérons le groupe G de III.2.3.b) .Nous allons démontrer qu'il s'agit d'une split extension d'un groupe libre par un autre .Le résultat sera alors établi .

Considérons les sous-groupes de G ,$F = \langle k, s_1, \ldots, s_n \rangle_G$,et $T = \langle t_1, \ldots, t_m, d_1, \ldots, d_n \rangle_G$ .Au vu des relateurs de G ,il est clair que pour tout $g \in G$,$g = g_1 g_2$ où $g_1 \in F$ et $g_2 \in T$ .Ainsi G = F T .De plus ,il est clair que F est distingué dans G ,et F est libre. G est une HNN extension de F ayant pour lettres stables les générateurs de T ,et donc (lemme I.5.3) ,T est libre .Il nous suffit donc de démontrer que $F \cap T = \langle 1 \rangle$.
Soit $g_1 \in F$,$g_2 \in T$,tels que $g_1 =_G g_2$ .Alors $g_1 g_2^{-1} = 1$,et donc d'après le théo. I.5.1 ,il contient un pinch .Or toutes les

occurences de lettres stables sont dans g_2^{-1} ,et donc il est clair que $g_2^{-1} =_F 1$,et donc $g_1 = g_2 = 1$. ■

niveau \ construction	HNN extension et extension de Britton	produit libre amalgamé	produit direct	split extension
niveau 3 (et plus)	⋮	⋮	⋮	⋮
niveau 2	-WP	-WP	⋮	⋮
niveau 1	+WP -CP -GWP	+WP -CP -GWP	+WP +CP -GWP	+WP -CP -GWP

(tableau 1)

où +WP signifie que le problème du mot est soluble ,-WP sigifie qu'il existe un groupe ayant un problème du mot insoluble (De même avec CP et GWP) .

III.3 PROBLEMES DE SOLUBILITE DANS DES CLASSES ALGEBRIQUES

Le but de ce paragraphe est d'établir des résultats d'insolubilité ,(et accessoirement de solubilité) ,dans des classes de groupes définis par des propriétés simples .Nous avons déjà vu que dans les groupes libres tous les problèmes sont solubles .Il en est de même dans des classes algébriques très simples telles que les groupes finis ,les groupes abéliens ,les groupes nilpotents .Ainsi Considérons un groupe G fini .Il existe une liste exhaustives ,finie $g_1,\ldots,g_n$ de ses éléments (deux à deux distincts) ,et une table finie de multiplication ,i.e. toutes les relations de la forme $g_i\, g_j = g_{i,j}$, pour tout $i,j \in \langle 1,\ldots,n\rangle$,avec $g_{i,j} \in \langle g_1,\ldots,g_n\rangle$.
Il est aisé de vérifier que la présentation :

$$\langle g_1,\ldots,g_n \,/\, g_i\, g_j = g_{i,j} \;;i,j \in \langle 1,\ldots,n\rangle \rangle$$

est une présentation canonique de G .Alors le problème de l'isomorphisme pour les groupes finis est résoluble ,en employant les changements de Tietze .De plus tout mot sur cette présentation ,$g_{i(1)}\ldots g_{i(k)}$ peut canoniquement et effectivement s'écrire sous la forme $g \in \langle g_1,\ldots,g_n\rangle$ .Tous les problèmes de Dehn sont alors résolubles .

Le théorème de Kronecker établit que tout groupe abélien f.e. est isomorphe à un unique groupe de la forme $\mathbb{Z}^q \times \mathbb{Z}_{k(1)} \times \ldots \times \mathbb{Z}_{k(n)}$

où q ,k(1) ,...,k(n) ∈ ℕ ,et k(i) divise k(i + 1) pour tout i = 1,..,n - 1 .Tout groupe abélien f.e. admet donc la présentation finie canonique :

$$\langle a_1,\ldots,a_{q+n} \;/\; a_{q+i}^{k(i)} = 1 \;,i = 1,..,n \;;\; [a_j,a_l] \;,j \;,l = 1,..,q + n \rangle$$

Le problème de l'isomorphisme est donc soluble pour les groupes abéliens .De plus avec la proposition III.2.4 ,tout groupe abélien s'exprimant comme produit direct de groupes cycliques ,le problème du mot ,et le problème de la conjugaison sont solubles .Le problème du mot généralisé est aussi soluble .

III.3.1 Groupes résiduellement finis ,nilpotents ,libres .

Tout groupe f.p.résiduellement nilpotent est résiduellement fini ,tout groupe f.p. résiduellement libre est résiduellement nilpotent ,et donc résiduellement fini ,tout groupe f.g.nilpotent est f.p. et résiduellement nilpotent et donc résiduellement fini . On peut résoudre le problème du mot dans un groupe f.p. , G résiduellement fini ,par la procédure suivante :
Considérons un groupe G ,f.p. résiduellement fini ,et un mot ω sur la présentation finie de G .On effectue alors deux énumérations simultanées .On énumère tous les éléments triviaux de G ,ainsi que l'image de ω par tout morphisme de G dans un groupe fini .La procédure effectuant la première énumération consiste ,à énumérer les mots s'écrivant comme produits de conjugués de relateurs (par exemple par longueur croissante) ,puis de les réduire librement .Pour la deuxième énumération ,on commence par énumérer toutes les présentations canoniques de groupes finis (les relateurs fournissant explicitement une table de multiplication) . De façon simultanée ,on peut pour un groupe fini A ,déterminer tous les homomorphismes de G dans A .Il suffit de considérer toutes les applications de l'ensemble des générateurs de G ,dans A .Ces applications s'étendent en un unique homomorphisme du groupe libre sous-jacent à G ,dans A .Ces homorphismes passent au quotient G ,si l'image des relateurs de G ,est triviale ,ce que l'on peut déterminer ,en utilisant l'algorithme pour le problème du mot dans A .On peut alors pour tout homomorphisme de G dans A

.calculer l'image de ω ,et décider si elle est triviale dans A .
Si $\omega =_G 1$,alors ω sera énuméré par la première énumération .
Si $\omega \neq_G 1$ .Puisque G est résiduellement fini ,il existe un sous-groupe normal N ne contenant pas ω tel que $G/_N$ est fini ,et donc il existe un homomorphisme de G dans un groupe fini ,dont l'image de ω est non triviale .
Ainsi en effectuant cette procédure pour un élément ω ,on peut décider si $\omega =_G 1$,en attendant que ω soit énuméré par la première procédure ,ou que l'on ait énumérer un homomorphisme de G dans un groupe fini .dont l'image de ω est non triviale .

Proposition III.3.2 : Il existe un groupe résiduellement fini f.p. ayant un problème de la conjugaison récursivement insoluble .

Démonstration : Pour démontrer ce résultat considérons le groupe G de III.2.3.b) .D'après la proposition III.2.14 ,G est une split extension de deux groupes libres f.p. .Puisque un groupe libre f.e. ,est résiduellement fini ,le résultat est immédiat avec le résultat suivant . ■

Lemme III.3.1 : *(Lemme d'extension)*
Si $1 \longrightarrow K \longrightarrow G \longrightarrow Q \longrightarrow 1$,est une suite exacte de groupes ,si K et Q sont résiduellement finis ,et si K est f.g. ,alors si l'on a une des conditions suivantes :

(1) K a un centre trivial .
(2) G est une split extension de K par Q

alors G est résiduellement fini .

Pour une démonstration de ce résultat voir [26]

Proposition III.3.3 : Il existe un groupe résiduellement libre ayant un problème du mot généralisé récursivement insoluble .

Remarque: Et donc le problème de la conjugaison est aussi récursivement insoluble dans la classe des groupes résiduellement nilpotents (resp^t résiduellement finis) .

Démonstration : Considérons $F_2 \times F_2$,produit direct de deux groupes libres de rang 2 .Considérons un élément non trivial $g = (g_1, g_2) \in F_2 \times F_2$ .Alors soit g_1 soit g_2 est non trivial (prenons par exemple g_1) ,alors $\langle 1 \rangle \times F_2$ est un sous-groupe normal de $F_2 \times F_2$ ne contenant pas g ,et $F_2 \times F_2 / \langle 1 \rangle \times F_2 \cong F_2$ est libre .
Avec le corollaire III.2.2 ,on a le résultat ∎

III.3.2 résultats d'insolvabilité dans des sous-groupes de groupes élémentaires .

Proposition III.3.4 : Soit F un groupe libre de rang au moins 2 Il existe un sous-groupe f.e. L ,de F × F tel que L a un problème de la conjugaison récursivement insoluble.

Démonstration : Puisque $F_n \times F_n$,où F_n est un groupe libre de rang au moins 2 ,se plonge dans $F_3 \times F_3$,il suffit de démontrer la proposition pour n = 3 .

Considérons $H = \langle s_1, s_2 / r_1, \ldots, r_m \rangle$,un groupe f.p. avec 2 générateurs ,ayant un problème du mot insoluble .$\langle H, s_3 / s_3 \rangle$ est une présentation de H .Considérons $F_3 = \langle s_1, s_2, s_3 / \rangle$. H est un quotient de F_3 ,et on forme alors le sous-groupe de $F_3 \times F_3$,L ,de la même façon que dans la démonstration du théorème III.2.1 ,et alors ,avec le théorème III.2.1 ,L est f.e. ,et $\mathcal{GWP}(L, F_3 \times F_3)$ est récursivement insoluble .
Soit ω un mot de F_3 .Alors d'après le lemme III.2.2 ,$(s_3, \omega^{-1} s_3\ \omega)$ est un élément de L puisque $s_3 =_H 1 =_H \omega^{-1} s_3\ \omega$ .On a besoin du lemme suivant :

Lemme III.3.2 : (s_3, s_3) est conjugué à $(s_3, \omega^{-1} s_3\ \omega)$ dans L ,ssi $\omega =_H 1$.

Démonstration : Supposons que $\omega =_H 1$ .Alors d'après le lemme III.2.2 ,$(1, \omega) \in L$ .Et donc (s_3, s_3) et $(s_3, \omega^{-1} s_3\ \omega)$ sont conjugués dans L .

Réciproquement ,supposons qu'il existe $(X, Y) \in L$,tel que $(X^{-1} s_3\ X, Y^{-1} \omega^{-1} s_3\ \omega\ Y) = (s_3, s_3)$ dans L ,et donc dans $F_3 \times F_3$ .Et alors , $X^{-1} s_3 = s_3 X^{-1}$ et $Y^{-1} \omega^{-1} s_3 = s_3\ Y^{-1} \omega^{-1}$ .Or dans un groupe libre ,les seuls éléments commutant avec s_3 ,sont les mots sur s_3.
Ainsi $X = s_3^p$,et $\omega\ Y = s_3^k$ dans F_3 .Et puisque $s_3 =_H 1$,$X =_H 1$,et

$\omega\ Y =_H 1$ .Or d'après le lemme III.2.2 ,$X =_H Y$,et donc $\omega =_H 1$ □

Nous pouvons alors reprendre la démonstration .Avec le lemme III.3.2 ,$\mathcal{WP}(H) \leq \mathcal{EP}(L)$,et donc puisque H a un problème du mot insoluble ,il en est de même de L . ■

Remarque : Avec le théorème de Higman ,le sous-groupe L ,est récursivement présenté .De plus F × F a un problème de la conjugaison soluble .Donc le problème de la conjugaison n'est pas une propriété héréditaire dans la classe des présentations récursive de groupe .

Lemme III.3.3 : Soit F un groupe libre de rang $m \geq 2$ .Alors F × F est récursivement plongé dans $SL(n,\mathbb{Z})$,ainsi que dans $GL(n,\mathbb{Z})$ pour tout $n \geq 4$.

Démonstration : On montre d'abord que le groupe libre de rang 2 ,F_2 est plongé récursivement dans $SL(2,\mathbb{Z})$ .Considérons le sous-groupe T de $SL(2,\mathbb{Z})$ engendré par les matrices :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Sanov a montré [36] que T est librement engendré par ces matrices ,et que de plus ,pour une 2 × 2 matrice arbitraire (à coefficients dans $\mathbb{Z}$) :

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

M ∈ T ssi les conditions suivantes sont satisfaites :

(1) $ad - bc = 1$

(2) a et d sont congruent à 1 ,modulo 4

(3) b et c sont pairs

Puisque T est libre de rang 2 ,F_2 se plonge dans $SL(2,\mathbb{Z})$ sur T .Et puisque les conditions précédentes sont effectivement calculables ,pour une matrice M arbitraire ,F_2 se plonge récursivement dans $SL(2,\mathbb{Z})$.

Or T × T se plonge récursivement dans $SL(4,\mathbb{Z})$ par l'application :

$$(U,V) \longrightarrow \begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & V \end{pmatrix}$$

et $SL(4,\mathbb{Z})$ se plonge récursivement dans $SL(n,\mathbb{Z})$ $(n \geq 4)$ par

l'application :

$$X \longrightarrow \begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Et donc $F_2 \times F_2$ se plonge récursivement dans $SL(n,\mathbb{Z})$ .De plus si F est le groupe libre de rang $m \geq 2$,$F \times F$ se plonge récursivement dans $F_2 \times F_2$,et donc dans $SL(n,\mathbb{Z})$ .De plus $SL(n,\mathbb{Z})$ est le sous-groupe de $GL(n,\mathbb{Z})$,des matrices ayant pour déterminant 1 .Puisque le déterminant d'une matrice est calculable ,$SL(n,\mathbb{Z})$ se plonge récursivement dans $GL(n,\mathbb{Z})$ et donc il en est de même de $F \times F$ $(n \geq 4)$. ■

Avec le corollaire III.2.2 ,la proposition III.3.4 ,et le lemme III.3.3 ,la proposition suivante est immédiate .

Proposition III.3.6 : Pour $n \geq 4$,$SL(n,\mathbb{Z})$ (resp^t $GL(n,\mathbb{Z})$) a un sous-groupe L finiment engendré tel que (i) L a un problème de la conjugaison récursivement insoluble .
(ii)Le problème du mot généralisé de L dans $SL(n,\mathbb{Z})$ (resp^t $GL(n,\mathbb{Z})$) est récursivement insoluble .