

CHAPITRE IV :

ETUDE GEOMETRIQUE DES PROBLEMES DE DEHN

Dans ce chapitre nous résolvons le problème du mot pour de larges classes de groupes par une méthode géométrique .La méthode géométrique en théorie des groupes a été initiée par Dehn ,qui résoud le problème du mot pour les groupes de surfaces compactes orientables ,fermées de genre $g \geq 2$,en considérant le revêtement universel de la surface ,qu'il obtient par un pavage du plan hyperbolique par des $4g$ -gônes .Par des considérations purement géométriques il établit un algorithme pour le problème du mot connu aujourd'hui sous le nom d'algorithme de Dehn .Greendlinger ,généralise sa méthode combinatoirement ,pour des groupes à petite simplification . C'est Van Kampen et surtout Lyndon ,qui établissent la version géométrique de la théorie des petites simplifications .

Nous nous intéresserons ,aux méthodes de résolution du problème du mot ,en géométrie des groupes : algorithme de Dehn ,et inégalités isopérimétriques .Dans un premier temps nous établirons de tel algorithmes ,pour des groupes à petite simplification .Nous caractériserons ensuite les groupes admettant un algorithme de Dehn :ce sont les groupes hyperboliques

L'intérêt de cette méthode est multiple ,premièrement les démonstrations sont courtes et élégantes .Deuxièmement Il y a "beaucoup" de groupes hyperboliques ,et de groupe à petites simplifications

IV.1 INEGALITE ISOPERIMETRIQUE ET ALGORITHMES DE DEHN

IV.1.1 Diagramme de Lyndon-Van Kampen

Considérons un ensemble de mots R . R est dit symétrique si tous les éléments de R sont cycliquement réduits, et si lorsqu'un élément est dans R , tous ses conjugués cycliques sont dans R .

Etant donné un ensemble fini de mots R , on peut déterminer son symétrisé R_* , c'est à dire le plus petit ensemble contenant toutes les réductions cycliques des éléments de R , et stable par conjugaison cyclique. Si $\langle S / R \rangle$ est une présentation d'un groupe G , il est clair qu'il en est de même de $\langle S / R_* \rangle$.

Notation : Dans toute cette partie, étant données une présentation $\langle S / R \rangle$, on note N la clôture normale de R .

Définition : Soit $\langle S / R \rangle$ une présentation de groupe, un élément réduit $\omega_0 \in N$. On appelle diagramme de Lyndon-Van Kampen, de ω_0 sur $\langle S / R \rangle$, (M, f, P) , où M est un 2-complexe fini pointé en u_0 , P est un lacet fermé bordant M , débutant et terminant en u_0 , f est une fonction de label, tel que :

(1) L'espace topologique sous-jacent à M , est homéomorphe à un fermé simplement connexe du plan.

(2) f associe à chaque arête orientée x de M , un élément de $S \cup S^{-1}$, et $f(x^{-1}) = f(x)^{-1}$, et $f(x_1 \dots x_n) = f(x_1) \dots f(x_n)$, pour tout lacet $x_1 \dots x_n$ de M .

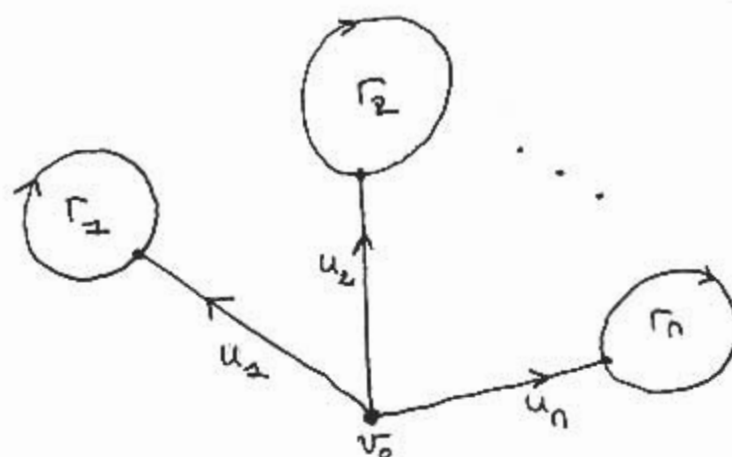
(3) le label d'un lacet fermé simple bordant une 2-cellule de M , est un élément de R_* .

(4) P a pour label ω_0 .

Etant données une présentation $\langle S / R \rangle$ et $\omega \in N$, peut-on construire un diagramme de Lyndon-Van Kampen.

$$\omega =_F \prod_{i=1}^n u_i r_i u_i^{-1} \equiv W \quad , \text{ où } r_i \in R_*$$

On peut alors considérer le 2-complexe M pointé par v_0 , et une fonction de label, tel que le label du lacet bordant M débutant et finissant en v_0 est W . Si on identifie toutes les arêtes débutant ou finissant au même point, portant le même label, alors on obtient un deux complexe ayant pour label au bord (débutant en v_0) ω . Mais le 2-complexe peut ne pas rester planaire (cf [13] p



Théorème IV.1.1 : Pour toute présentation $\langle S / R \rangle$, et pour tout $w \in N$, il existe un diagramme de Lyndon-Van Kampen de w sur $\langle S / R \rangle$.

IV.1.2 Inégalité isopérimétrique

Définitions : Soit $\langle S / R \rangle$ une présentation de groupe. On dit que $\langle S / R \rangle$ satisfait une inégalité isopérimétrique, si il existe une fonction récursive $D : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, tel que si $w \in N$ alors

$$w =_F \prod_{i=1}^N p_i^{-1} r_i p_i, \text{ où } r_i \in R, \text{ et } N \leq D(\text{lgr}(w)).$$

D s'appelle fonction de Dehn.

On dit qu'un groupe satisfait une inégalité isopérimétrique si une de ses présentations admet une inégalité isopérimétrique.

On dit qu'un groupe satisfait une inégalité isopérimétrique linéaire (resp^t quadratique, exponentielle) si il admet une inégalité isopérimétrique, avec D linéaire (resp^t quadratique, exponentielle).

Théorème IV.1.2 : Un groupe f.p. a un problème du mot soluble ssi il admet une inégalité isopérimétrique.

Démonstration : On se donne une présentation finie $\langle S / R \rangle$ de G . On peut sans perte de généralité supposer que R est symétrisé.

($\Rightarrow$) Si $\langle S / R \rangle$ a un problème du mot soluble on construit D de la façon suivante : pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère tous les mots de longueur n triviaux (ils sont en nombre fini). On peut pour chacun

en donner une écriture sous forme de produits de conjugués de relateurs (en énumérant ces écritures et en décidant si elle représente l'élément considéré). On définit alors $\mathcal{D}(n)$ comme la longueur maximale du nombre de relateurs dans une telle écriture pour tous les éléments triviaux de longueur n . Puisque $\mathcal{D}$ est constructible, elle est récursive.

($\Leftarrow$) On note ρ la longueur maximale d'un relateur. Etant donné un élément trivial réduit ω , on lui associe son diagramme de Van Kampen. Alors chaque u_i dans son écriture comme produit de conjugués de relateurs, est le label d'un lacet $\bar{u}_i$ de M . On supprime dans $\bar{u}_i$ les sous lacets fermés.

On obtient alors un lacet qui ne passe pas 2 fois par la même arête. Le label de lacet est u'_i , et $u_i = u'_i$ dans G (tout lacet fermé borde un disque puisque M est simplement connexe. Il y a au plus $\text{lgr}(\omega) + \rho \mathcal{D}(\text{lgr}(\omega))$ arêtes dans M et donc :

$\text{lgr}(u'_i) \leq \text{lgr}(\omega) + \rho \mathcal{D}(\text{lgr}(\omega))$. Le membre de droite est récursif

et $\omega =_F \prod_{i=1}^N u'_i r_i u'_i$, et $N \leq \mathcal{D}(\text{lgr}(\omega))$

Puisque toutes les grandeurs sont bornées, on peut décider si ω s'écrit ainsi, et donc si $\omega =_G 1$. ■

IV.1.3 Algorithmes de Dehn

Définition : Soit $\langle S \mid R \rangle$ une présentation finie de groupe. On dit que $\langle S \mid R \rangle$ admet un algorithme de Dehn si il existe un ensemble fini Δ , $R \subseteq \Delta \subseteq N$, tel que pour tout mot $\omega \in N$, ω contient un sous-mot u , où $u, v \in \Delta$, et $\text{lgr}(v) < \text{lgr}(u)$.

Un algorithme de Dehn, donne une solution au problème du mot (effective). En effet considérons un mot ω . Si $\omega \in N$, alors on peut remplacer un sous-mot de ω , par un sous-mot de longueur moindre, préfixe d'un élément de Δ . En réitérant ce procédé on arrive au mot vide.

Proposition IV.1.1 : Si $\langle S \mid R \rangle$ admet un algorithme de dehn, alors $G = \langle S \mid R \rangle$, satisfait une inégalité

isopérimétrique linéaire .

Démonstration : On prend pour présentation de G , $\langle S / \Delta \rangle$. Si $\omega \in N$, alors $\omega \equiv \alpha u \beta$, où $r \equiv u v \in \Delta$, et $\text{lgr}(v) < \text{lgr}(u)$. Alors $\omega =_F \alpha v^{-1}(v r v^{-1}) \beta$, et $\omega =_G \alpha v^{-1} \beta \equiv \omega_1$ avec $\text{lgr}(\omega_1) < \text{lgr}(\omega)$.

On réitère ce procédé à ω_1 .

1^{er} cas : α (ou β) contient u' où $r' \equiv u' v' \in \Delta$, et $\text{lgr}(v') < \text{lgr}(u')$

alors $\omega =_F \alpha_1 v'^{-1}(v' r' v'^{-1}) \alpha_2 v^{-1}(v r v^{-1}) \beta$.

2^{ème} cas : v' n'est un sous-mot ni de α ni de β .

$$\begin{aligned} \text{alors } \omega &= _F \alpha v^{-1} \beta \beta^{-1}(v r v^{-1}) \beta \\ &= _F \alpha_1 v'^{-1}(v' r' v'^{-1}) \beta_1 \beta^{-1}(v r v^{-1}) \beta \\ &= _F \alpha_1 v'^{-1}(v' r' v'^{-1}) \beta_2^{-1}(v r v^{-1}) \beta \end{aligned}$$

où $\beta = \beta_1 \beta_2$.

En réitérant ce procédé, on obtient des mots de longueur décroissante (strict), et chaque application du procédé fait apparaître un conjugué de relateurs dans ω . Finalement on arrive à un mot vide, et ω s'écrit alors comme conjugués de relateurs. Puisque l'on peut effectuer ce procédé au plus $\text{lgr}(\omega)$ fois, ω s'écrit :

$$\omega =_F \prod_{i=1}^N u_i r_i u_i^{-1}, \text{ où } N < \text{lgr}(\omega).$$

Définition : On dit qu'une présentation de groupe vérifie un algorithme de Dehn pour le problème de la conjugaison, si lorsque ω et ω' sont conjugués sur cette présentation, alors il existe h , tel que $\omega' = h^{-1} \omega h$, et $\text{lgr}(h) \leq K (\text{lgr}(\omega) + \text{lgr}(\omega'))$.

Il est clair que pour une présentation f.e., on a alors une solution au problème de conjugaison.

IV.2 GROUPES A PETITES SIMPLIFICATIONS

IV.2.1 Hypothèses de petites simplifications

On considère une présentation de groupe $\langle S/R \rangle$, où R est un ensemble de mots cycliquement réduits sur S . On note R_* le

symétrisé de R (alors les éléments de R_* sont des mots cycliquement réduits sur S) .

On appelle pièce (relative à R) , tout mot u préfixe de deux éléments de R_* , i.e. $\exists r_1, r_2 \in R_*$, tel que $r_1 \equiv u r'_1$ et $r_2 \equiv u r'_2$

Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+$. On dit que R satisfait la condition $C'(\lambda)$, si $\text{lgr}(u) < \lambda \text{lgr}(r)$ pour tout $r \in R_*$ et tout préfixe u de r qui est une pièce .

Remarquons que $C'(\lambda) \Rightarrow C'(\lambda') ; \forall \lambda' \geq \lambda$

Soit $p \in \mathbb{N}$. R satisfait la condition $C(p)$, si aucun élément de R_* n'est un produit de moins (st^t) de p pièces .

Remarque : pour $n \in \mathbb{N}_*$; si R satisfait $C'(\frac{1}{n})$ alors R satisfait $C(n+1)$.

En effet supposons que $r \in R_*$ s'écrive $r \equiv u_1 \dots u_p$ où les u_i sont des pièces et $p < n+1$. Alors puisque r satisfait $C'(\frac{1}{n})$ $\text{lgr}(u_i) < \frac{1}{n} \text{lgr}(r)$. Et donc puisque $\text{lgr}(r) = \sum \text{lgr}(u_i)$, c'est contradictoire .

Soit un entier $q \geq 3$. R satisfait la condition $T(q)$ si pour tout entier $l ; 3 \leq l < q$, et pour tout l -uplet d'éléments de R_* $(r_1, \dots, r_l)$, on a :

si $r_1 \neq r_2^{-1}, \dots, r_{l-1} \neq r_l^{-1}, r_l \neq r_1^{-1}$, alors au moins un des mots $r_1 r_2 ; \dots ; r_{l-1} r_l, r_l r_1$ est librement réduit .

Remarquons que tout ensemble R satisfait $T(3)$.

La condition $C'(p)$ est appelé condition métrique .

IV.2.2 Interprétation géométrique .

Considérons une présentation de groupe $\langle S \mid R \rangle$, ω_0 un mot réduit de $N = \text{gp}_{F(S)}(R)$, et un diagramme de Lyndon-Van Kampen (M, f, p) de ω_0 sur $\langle S \mid R \rangle$. On appelle sous-disque extremum D , de M ; un sous-disque de M relié au reste de M par un segment , ou par identification d'un point . Puisque M est simplement connexe , soit M est un disque , soit il contient au moins un sous-disque

extremum .

On appelle consolidation de D , l'opération consistant à éliminer les sommets de degré 2 , en consolidant les arêtes concourants en ce point i.e. si $(v_1;v_2)$ et $(v_2;v_3)$ sont des arêtes orientées , on les remplace par $(v_1;v_3)$.

Ceci définit une nouvelle fonction de label sur D ; (D,f_d) ; qui envoie chaque arête sur un mot réduit sur s , tel que

$$f_d((v_1;v_3)) \equiv f((v_1;v_2));f((v_2;v_3))$$

Clairement , la structure simpliciale (et donc l'espace topologique sous-jacent) est inchangée .

Un sommet de D sera dit extérieur si il est sur ∂D . Autrement il sera dit intérieur . Une arête sera dite extérieure si au moins un de ses sommets est intérieur , et autrement sera dite intérieure . Une face B de D sera dite extérieure si une des arêtes de ∂B est extérieure , et sinon sera dite intérieure .

On peut alors donner une interprétation de la notion de pièce . Soit D un sous-disque de (M,f,p) , et considérons une arête v qui est sur le bord de 2-cellules B_1 et B_2 . Si le label d'un lacet fermé de ∂B_1 débutant par l'arête orientée v , est différent du label d'un lacet fermé de ∂B_2 débutant en v , alors $f(v)$ est une pièce relative à R .

On dit qu'un diagramme est réduit s'il ne contient pas une arête orientée v de $\partial B_1 \cap \partial B_2$, de telle façon que le label de lacets fermés de ∂B_1 et ∂B_2 débutant en v aient même label . Dans un diagramme réduit , toute 1-cellule (éventuellement consolidée) est une pièce .

Théorème IV.2.1 : (Lyndon)

Soit $\langle S / R \rangle$ une présentation , ω_0 un élément réduit de $N = gp_{f(s)}(R)$; alors il existe un diagramme réduit (M_0, f_0, P_0) , avec P_0 ayant pour label ω_0 .

Pour une démonstration , voir [21] .

Dans un diagramme réduit , on peut donner une interprétation géométrique de conditions non-métriques $C(p)$ et $T(q)$.

Proposition IV.2.1 : Considérons (M_0, f_0, P_0) un diagramme réduit sur $\langle S/R \rangle$,

(1) si R satisfait $C(p)$ pour $p \geq 3$, alors chaque face intérieure d'un sous-disque de M_0 , a au moins p arêtes consolidées.

(2) Si R satisfait $T(q)$ pour $q \geq 4$ alors chaque sommet intérieur d'un sous-disque de M_0 , a pour degré p ; où $q \leq p$ ou $p = 2$.

Démonstration : (1) Soit D un sous disque de M_0 . On considère (D, f_D) la consolidation de D . On peut supposer que D a plus d'une face. Considérons alors une face intérieure B de D . puisque (M_0, f_0, P_0) est réduit, toutes les arêtes de ∂B sont des pièces. Puisque le label de $\partial B \in R_*$, le résultat provient de la définition de $C(p)$.

(2) Soit v un sommet intérieur de v , et $e_1, \dots, e_d$ qui soient dans l'ordre, les arêtes orientées débutant en v . Supposons que $d \geq 3$, et que $d \leq q$. Pour tout $i = 1, \dots, d-1$, e_i et e_{i+1} sont respectivement la première et la dernière arête d'un lacet fermé, bordant une face de M_0 . De même e_d et e_1 sont respectivement l'arête initiale et l'arête terminale d'un lacet bordant une face. On note $r_1, r_2, \dots, r_d$ les labels des faces correspondantes. Alors aucun des produits $r_1 r_2 \dots, r_d r_1$ ne se réduit librement. Or puisque M_0 est un diagramme réduit $r_1 \neq r_2^{-1}$, etc ... Ceci contredit la condition $T(q)$ ■

IV.2.3 Formules et inégalités pour des disques

Notations : Soit T un 2-complexe fini dont l'espace topologique sous-jacent est un disque. on note $d(s)$ le degré d'un sommet, i.e. le nombre d'arêtes orientées débutant en s . On note $d(B)$ le degré d'une face B , i.e. le nombre d'arêtes constituant ∂B . $e(B)$ et $i(B)$ représentent respectivement, le nombre d'arêtes extérieures et intérieures de ∂B . On note S le nombre de sommets de T , A le nombre d'arêtes, et F le nombre de faces.

Considérons un 2-complexe fini T , dont l'espace topologique sous-jacent est un disque. La caractéristique d'Euler donne l'équation: (1) $1 = S - A + F$

Les équations (2) et (3) sont aisées à établir par le décompte des

arêtes .

$$\left\{ \begin{array}{l} (1) \quad 1 = S - A + F \\ (2) \quad 2 A = \sum_s d(s) \\ (3) \quad 2 A = \sum_B d(B) + d(D) \end{array} \right.$$

Prenons (p,q) ,qui soit un des couples $(6,3)$; $(4,4)$; ou $(3,6)$. Dans les 3 cas ,on a $p = 2((p/q) + 1)$.En utilisant le covecteur $(p ; -p/q ; -1)$ et le système $(*)$,on obtient l'équation :

$$p - 2 \frac{p}{q} A - 2 A = p S - p A + p F - \frac{p}{q} \sum_s d(s) - \sum_B d(B) - d(D)$$

$$\Leftrightarrow p = (p S - \frac{p}{q} \sum_s d(s)) + (p F - \sum_B d(B)) - d(D)$$

$$\Leftrightarrow p = \frac{p}{q} \sum_s (q - d(s)) + (p F - \sum_B d(B)) - d(D) \quad (4)$$

Si $(p,q) = (6,3)$ on utilise $d(D) = \sum_B e(B) = \sum_{e(B)=1} 1 + \dots + \sum_{e(B)=k} k + \dots$

ainsi que $F = \sum_{e(B)=0} 1 + \sum_{e(B)=1} 1 + \dots$;et $d(B) = e(B) + i(B)$,sur les

2 derniers termes de (4) .On obtient l'égalité (5) :

$$6 = 2 \sum_s (3 - d(s)) + \sum_{e(B)=0} (6 - i(B)) + \sum_{e(B)=1} (4 - i(B)) + \sum_{\substack{e(B)=k \\ k \geq 1}} (6 - 2k - i(B))$$

Si $(p,q) = (4,4)$,on décompose la première somme en une somme sur les sommets intérieurs (indiquée par sint) ,et une somme sur les sommets extérieurs (indiquée par sext) et on utilise alors le fait que $d(D) = \sum_{sext} 1$.On décompose la deuxième de façon analogue au

cas $(6,3)$ (à part que l'on n'utilise pas $d(D)$ dans cette décomposition) .On obtient l'équation (6) :

$$4 = \sum_{sint} (4 - d(s)) + \sum_{sext} (3 - d(s)) + \sum_{e(B)=0} (4 - i(B))$$

$$+ \sum_{e(B)=1} (3 - i(B)) + \sum_{\substack{e(B)=k \\ k \geq 1}} (4 - k - i(B))$$

Si $(p,q) = (3,6)$, on utilise $-\frac{3}{2}d(D)$ dans la somme indicée sur les sommets extérieurs, et $\frac{1}{2}d(D)$ dans le dernier terme. On obtient l'équation (7) :

$$3 = \frac{1}{2} \sum_{s \in I} (6 - d(s)) + \frac{1}{2} \sum_{s \in E} (3 - d(s)) + \sum_{e(B)=0} (3 - i(B)) \\ + \sum_{e(B)=1} (\frac{3}{2} - i(B)) + \sum_{\substack{e(B)=k \\ k \geq 1}} (3 - \frac{k}{2} - i(B))$$

Théorème IV.2.2 : (Lyndon)

Soit (p,q) une des paires $(6,3)$; $(4,4)$; $(3,6)$. Soit T la consolidation d'un 2-simplexe fini D , dont l'espace topologique sous-jacent est un disque. Si tout sommet s , a un degré $d(s) \geq 3$, si tout sommet intérieur a un degré $d(s) \geq q$, et si toute face intérieure de T a un degré $d(B) \geq p$, alors on a l'inégalité suivante :

$$p \leq \sum_{e(B)=1} (\frac{p}{q} + 2 - i(B)) \quad \blacksquare$$

Démonstration : On utilise les égalités précédemment établies, (5), (6) et (7). Puisque pour tout sommet intérieur s , $d(s) \geq q$, le premier terme de (6) et (7) est négatif. Puisque tout sommet a un degré $d(s) \geq 3$, le premier terme de (5) et le deuxième terme de (6) et (7) sont négatifs. Puisque toute face intérieure de T a au moins p arêtes, le deuxième terme de (5), et le troisième terme de (6) et (7) sont négatifs. Puisque des arêtes extérieures d'une face ne sont jamais adjacentes (T est consolidé) alors pour une face extérieure (i.e. $e(B) > 0$) $i(B) \geq e(B)$, et alors le dernier terme de (5), (6) et (7) est négatif. Ainsi on a les inégalités :

$$\text{si } (p,q) = (6,3) \quad ; \quad 6 \leq \sum_{e(B)=1} (4 - i(B))$$

$$\text{si } (p,q) = (4,4) \quad ; \quad 4 \leq \sum_{e(B)=1} (3 - i(B))$$

$$\text{si } (p,q) = (3,6) \quad ; \quad 3 \leq \sum_{e(B)=1} \left(\frac{5}{2} - i(B)\right)$$

Et alors si (p,q) est un des couples $(6,3)$; $(4,4)$; $(3,6)$, on a l'inégalité :

$$p \leq \sum_{e(B)=1} \left(\frac{p}{q} + 2 - i(B)\right) \quad \blacksquare$$

Remarque : Cette propriété est géométrique ,et c'est géométriquement que Lyndon l'a démontrée .Les couples $(6,3)$, $(4,4)$, $(3,6)$ correspondent aux trois pavements réguliers du plans ,respectivement par des hexagones ,des carrés ,des triangles .La relation établie ,représente alors une relation de courbure .Par exemple dans le cas $(6,3)$,elle représente le résultat ,que dans le pavage régulier du plan par des hexagones ,chaque hexagone extérieur ($e(B) = 1$) contribue à $\frac{\pi}{3} (4 - i(B))$ de la courbure totale .

IV.2.4 Algorithme de Dehn et inégalité isopérimétrique linéaire pour des groupes à petites simplifications .

Théorème IV.2.1 : Soit $\langle S / R \rangle$ une présentation telle que R satisfait $C'(1/6)$,ou $C'(1/4)$ et $T(4)$,ou $C'(1/3)$ et $T(6)$.Alors si ω_0 est un mot réduit non vide ,trivial dans $\langle S / R \rangle$,alors ω_0 contient un sous-mot u ,préfixe d'un élément $u v$ de R_* ,tel que $\text{lgr}(v) < \text{lgr}(u)$.

Démonstration : Considérons un diagramme réduit (M,f,P) ayant pour label sur son bord ω_0 (d'après le théorème IV.2.1 un tel diagramme existe .Puisque M est fini et simplement complexe ,c'est un disque ,ou alors il contient un sous-disque extremum D relié au reste du diagramme par v_1 (nous effectuerons sans perte de généralité la démonstration dans ce dernier cas) .Si D contient une unique 2-cellule ,alors le label du segment bordant D

, débutant en v_1 est un élément de R_* et un sous-mot de ω_0 , est donc dans ce cas la conclusion est vraie.

Si D contient plus d'une 2-cellule, on consolide D . Alors puisque $C'(1/n) \Rightarrow C(n+1) \Rightarrow C(n)$ avec le théorème IV.2.2, et la proposition IV.2.1, on a pour $(p,q) = (6,3)$ ou $(4,4)$ ou $(3,6)$:

$$p \leq \sum_{e(B)=1} (p/q + 2 - i(B))$$

Puisque $i(B) \geq 1$ pour toute face extérieure B de D , on peut vérifier pour (pq) donné comme précédemment que chaque terme de la somme est au plus $p/2$. Et donc, au moins deux faces B_1 et B_2 ($e(B_1) = e(B_2) = 1$) contribuent positivement (strict¹) à la somme. Il est aisé de vérifier que le label de ∂D débutant en v_1 , contient le label de $\partial B_1 \cap \partial D$ ou de $\partial B_2 \cap \partial D$ comme sous-mot. Considérons par exemple le 1^{er} cas, et notons u le label de $\partial B_1 \cap \partial D$, et alors uv est le label d'un circuit constituant ∂B_1 , où uv est un élément de R_* (R_* est clos par conjugaison cyclique, et tous ses éléments sont cycliquement réduits). Or puisque B_1 contribue positivement à la somme, $i(B_1) \leq p/q + 1$, et donc v est un produit d'au plus $p/q + 1$ pièces. Or puisque R satisfait $C'(1/p)$, on a :

$$\begin{aligned} \text{lgr}(v) &< (p/q + 1) \times 1/p \times \text{lgr}(uv) = (1/p + 1/q) \times \text{lgr}(uv) \\ &= \frac{\text{lgr}(uv)}{2} \end{aligned}$$

et donc $\text{lgr}(v) < \text{lgr}(u)$ ■

Corollaire IV.2.1.1 : Des groupes f.p., vérifiant $C'(\frac{1}{6})$, ou $C'(\frac{1}{4})$ et $T(4)$, ou $C'(\frac{1}{3})$ et $T(6)$ ont un algorithme de Dehn.

Et alors avec la proposition IV.1.1

Corollaire IV.2.1.1 : Des groupes f.p., vérifiant $C'(\frac{1}{6})$, ou $C'(\frac{1}{4})$ et $T(4)$, ou $C'(\frac{1}{3})$ et $T(6)$ satisfont une inégalité isopérimétrique.

IV.3 GROUPES HYPERBOLIQUES

IV.3.1 Structure métrique dans un groupe f.e.

Soit G un groupe , et S un système fini de générateurs de G .
On définit une métrique du mot dans G sur l'alphabet S ,de la façon suivante :

Si w est un mot sur S (i.e. sur $S \cup S^{-1}$ où S^{-1} est l'ensemble des inverses des éléments de S , dans G) , $w \equiv g_1 \dots g_n$ avec pour tout $i = 1 \dots n$, $g_i \in S \cup S^{-1}$; on définit la longueur de w comme étant le nombre n de lettres composants w .

On la note $lg_s(w)$.

On définit alors une distance sur G (par rapport à S) de la façon suivante :

Soit $g \in G$ $d_s(1;g) := \text{Inf} \{ lg_s(w) \mid w \text{ est un mot sur } s \text{ et } w =_G g \}$

Soient $g_1, g_2 \in G$ $d_s(g_1;g_2) := d_s(1;g_1^{-1}g_2)$

A vérifier : (i) Séparation : $d_s(g_1;g_2) = 0 \Leftrightarrow d_s(1;g_1^{-1}g_2) = 0$

$$\Leftrightarrow g_1^{-1}g_2 = 1 \text{ dans } G$$

$$\Leftrightarrow g_1 = g_2 \text{ dans } G \quad \square$$

(ii) Symétrie : Si w est un représentant de $g_1^{-1}g_2$ dans G , alors $\tilde{w}$ obtenu en remplaçant s^ϵ par $s^{-\epsilon}$ dans w ; $\forall s \in S \cup S^{-1}$; $\forall \epsilon = \pm 1$; est un représentant de $(g_1^{-1}g_2)^{-1} = g_2^{-1}g_1$ (et réciproquement) , et donc :

$$\begin{aligned} d_s(g_1;g_2) &= d_s(1;g_1^{-1}g_2) \\ &= d_s(1;g_2^{-1}g_1) \\ &= d_s(g_2;g_1) \quad \square \end{aligned}$$

(iii) Inégalité triangulaire : Soient $g_1, g_2, g_3 \in G$
Si ω_1 est un représentant de $g_1^{-1}g_2$ et ω_2 est un représentant de $g_2^{-1}g_3$ alors $\omega \equiv \omega_1\omega_2$ (concaténation) est un représentant de $g_1^{-1}g_3$
et $lg_s(\omega) = lg_s(\omega_1) + lg_s(\omega_2)$

et donc $d_s(1;g_1^{-1}g_3) \leq d_s(1;g_1^{-1}g_2) + d_s(1;g_2^{-1}g_3)$

soit $d_s(g_1;g_3) \leq d_s(g_1;g_2) + d_s(g_2;g_3)$

La donnée d'un système générateur fini S de G nous permet donc de définir une métrique sur G . On note $(G;S)$ l'espace métrique

associé .

On peut reprocher à cette définition de distance de dépendre du choix du système de générateurs . Nous verrons que toutes les propriétés métrique qui nous intéresseront ne dépendent pas de ce choix .

Lorsque le contexte le permettra nous noterons lg (resp^t. d) .

Remarque : L'action de G sur lui-même , par translations à gauche s'effectue par isométrie i.e. $\forall g; g_1; g_2 \in G$.

$$d(gg_1; gg_2) = d(g_1; g_2) .$$

En effet tout représentant de $g_1^{-1}g^{-1}gg_2$ est un représentant de $g_1^{-1}g_2$

L'action à droite ne s'effectue pas par isométrie .

En effet dans le groupe libre $f(a; b)$, $d(1; a) < d(b; ab)$.

On notera $|g|$ pour $d(1, g)$.

IV.3.2 Graphe de cayley

Soit G un groupe engendré par S . Le graphe de cayley $\Gamma_S(G)$ de G , relativement à S , est la réalisation géométrique d'un complexe simplicial de dimension 1 , défini de la façon suivante :

- $\forall g \in G$ on associe un unique sommet noté $s(g)$
- $(s(g); s(g'))$ définit une arête orientée , étiquetée x si $gx = g'$ dans G avec $x \in S \cup S^{-1}$.

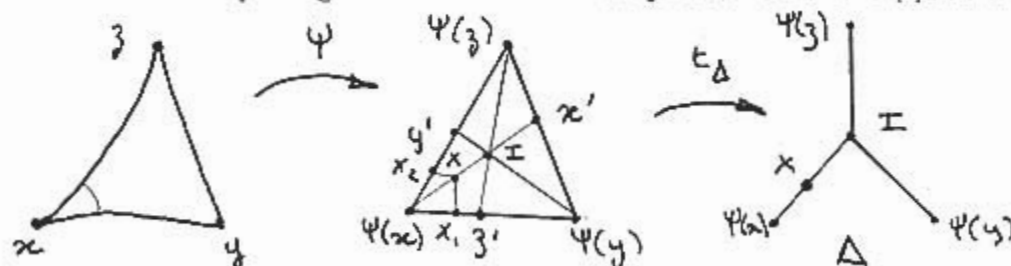
On munit $\Gamma_S(G)$ de la métrique simpliciale i.e. , la longueur d'un chemin , est le nombre d'arêtes le composant . La distance entre deux sommets , est la borne inférieure , de la longueur des chemins les reliant . Ainsi le plongement naturel de $(G; S)$, sur les sommets de $\Gamma_S(G)$ est une isométrie , et G agit à gauche sur $\Gamma_S(G)$ isométriquement par automorphismes simpliciaux . $\Gamma_S(G)$ devient donc un espace métrique géodésique construit sur un complexe simplicial de dimension 1 , connexe par arc , sans arêtes multiples et localement fini si S est fini .

Il existe une autre façon de définir le graphe de Cayley d'un groupe . Considérons un groupe f.p. $G = \langle S / R \rangle$. On a une façon "standard" de construire un 2.complexe simplicial ayant pour groupe fondamental G . Ce 2.complexe consiste en une 0.cellule , une

1.cellule orientée pour tout générateur (de telle façon que si $(v;v')$ est une 1.cellule ayant pour label $x \in S$, $(v';v)$ a pour label x^{-1}) et une 2.cellule pour tout relateur. On construit un "bouquet", en identifiant tous les sommets des 1.cellules, avec la 0.cellule. Pour tout relateur $r \in R$, il existe un lacet fermé dans le bouquet ayant pour label r . On identifie alors ce lacet avec le bord d'une 2.cellule. Après subdivision, on obtient alors un complexe simplicial K (abstrait), fini, et d'après le *théorème de Seifert-Van Kampen*, $\pi_1(K) \cong G$. Considérons le revêtement universel $\tilde{K}$ de K . C'est un complexe simplicial de dimension 2, dans lequel on fixe un sommet v_0 . On considère alors le 1.squelette $\tilde{K}^{(1)}$ pointé sur v_0 . G agit simplement sur $\tilde{K}$, et pour $g \in G$, on donne le label g à $g.v_0$ (v_0 a alors pour label 1). Or puisque $G \cong \text{Aut}(\tilde{K})$, G agit par automorphismes simpliciaux, et donc on a une bijection Π de G , sur les sommets de $(\tilde{K}^{(1)}, v_0)$. Pour $x \in S$, on donne le label x , à toute arête $(\Pi(g), \Pi(g'))$ telle que $g' =_G g \times x$. $(\tilde{K}^{(1)}, v_0)$ est alors le graphe de Cayley $\Gamma_S(G)$.

IV.3.3 Espace hyperbolique

Soit E un espace métrique et (xyz) un triangle géodésique. On peut plonger isométriquement (xyz) dans un triangle du plan euclidien (un tel plongement existe toujours, on l'appellera ψ).



Considérons I intersection des bissectrices de $(\psi(x); \psi(y); \psi(z))$. La bissectrice des deux droites est l'ensemble des points à égale distance de ces deux droites. Donc $d(I; y') = d(I; z')$ (et toutes les autres égalités obtenues par permutations cycliques), où $x'; y'; z'$ sont l'intersection du cercle inscrit avec respectivement $[\psi(y); \psi(z)]$; $[\psi(x); \psi(z)]$; $[\psi(x); \psi(y)]$. On définit par morceaux l'application de $(\psi(x); \psi(y); \psi(z))$ dans le tripode Δ , par :

$$t_{\Delta x,y} : [\psi(x); y'] \longrightarrow [\psi(x); I]$$

(composée d'une rotation et d'une homothétie)

, tel que $\psi(x) \longrightarrow \psi(x)$; et $y' \longrightarrow I$.

On définit de même $t_{\Delta x,z}$; $t_{\Delta y,x'}$ etc...

Alors I admet 3 préimages par t_{Δ} , x', y', z' .

$\psi(x); \psi(y); \psi(z)$ admettent chacun 1 préimage (eux-même) et tout

$X \in]\psi(x); I[$ admet 2 préimages X_1 et X_2 tel que $X_1 \in]\psi(x); z'[$;

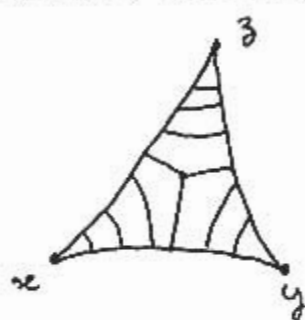
$X_2 \in]\psi(x); y'[$ et $d(\psi(x); X_1) = d(\psi(x); X_2)$

(de même pour les autres segments du tripode) .

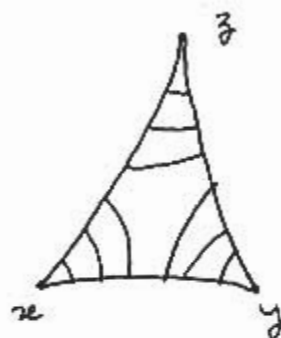
On peut alors dans (x, y, z) relier tous les points préimages d'un même élément par $t_{\Delta} \circ \psi$, par un segment géodésique . On obtient une **foliation** (unique) du triangle $(x; y; z)$.

Soit $(x; y; z)$ un triangle géodésique dans le graphe de Cayley $\Gamma_s(G)$

On a alors la foliation :



ou



si $d(\psi(x); y') \in \mathbb{N}$

(par exemple)

Définitions : Soit un espace métrique géodésique . Soit un triangle géodésique (xyz) et Δ son tripode associé . (xyz) est dit δ .fin si $\forall a \in \Delta$, $\text{diam}((t_{\Delta, o\psi})^{-1}(a)) \leq \delta$.

Soit E un espace métrique géodésique . E est dit δ .hyperbolique si tout triangle de E est δ .fin .

E est dit **hyperbolique** si il existe $\delta \in \mathbb{R}_+$ tel que E soit δ .hyperbolique .

Un groupe G donné par une présentation f.e. $\langle S / R \rangle$ est dit δ .hyperbolique (resp^t hyperbolique) . si $\Gamma_s(G)$ est un espace métrique δ -hyperbolique (respectivement hyperbolique) .

Remarques : Pour un groupe , être hyperbolique est défini pour une famille génératrice . Nous verrons néanmoins qu'être hyperbolique dépend pas du choix de la famille génératrice .

Exemples : -Les groupes libres de rang fini sont δ .hyperboliques . En effet son graphe de Cayley est un arbre (car un circuit correspondrait à un élément réduit non vide ,trivial) et donc tout triangle est plat .

-Les groupes finis sont hyperboliques , car les distances sont bornées .

Définition : Soit (xyz) un triangle géodésique dans un espace métrique . (x,y,z) est dit δ .mince si les segments $[x;y]$, $[y;z]$, $[y;z]$, $[x;z]$ se trouvent chacun dans un δ -voisinage fermé des deux autres , i.e. :

$$[x;y] \subseteq \bar{V}_\delta ([y;z] \cup [x;z])$$

$$[y;z] \subseteq \bar{V}_\delta ([x;y] \cup [x;z])$$

$$[x;z] \subseteq \bar{V}_\delta ([x;y] \cup [y;z])$$

Il est trivial de vérifier que δ .fin $\Rightarrow$ δ .mince .De plus on a la réciproque (à une constante près)

δ .mince $\Rightarrow 4\delta$.fin . (cf [13]) .

Théorème IV.3.1 : Si G est un groupe δ .hyperbolique sur une présentation f.e. $\langle S / R \rangle$ alors :

(i) G admet une présentation finie

(ii) Le problème du mot est résoluble pour G .

Démonstration : Soit S système de générateur de G tel que $(G;S)$ est δ .hyperbolique .Considérons $\Gamma_S(G)$.

Soit ω un mot sur S tel que $\omega = 1$ dans G .

$\omega \equiv a_1 \dots a_i \dots a_n$. Soit $S(\omega)$ son image par le plongement naturel dans $\Gamma_S(G)$. Alors $S(\omega)$ est un circuit dans $\Gamma_S(G)$. Dans la suite on identifiera ω et $S(\omega)$.

On considère un triangle géodésique

$(1;g_{i-1};g_i)$ où $g_{i-1} = a_1 \dots a_{i-1}$

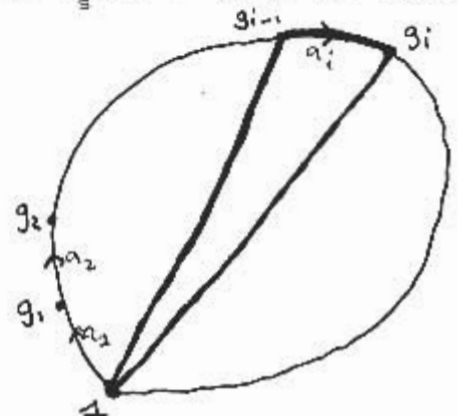
et $g_i = a_1 \dots a_n$

Puisque $(1;g_{i-1})$ et $(1;g_i)$ sont des

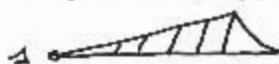
géodésiques , et que $d(g_{i-1};g_i) = 1$

forcément $|g_i| = |g_{i-1}| \pm 1$

ou $|g_i| = |g_{i-1}|$



Dans le premier cas le triangle est plat , et on a donc la foliation sur $(1;g_{i-1};g_i)$:



Dans le deuxième cas on a la foliation :



-notre objectif est de décomposer le circuit de label ω en lacets de longueur borné , et de majorer cette décomposition . On utilisera donc le cas 1 .

Le triangle $(1;g_{i-1};g_i)$ est géodésique donc son périmètre est inférieur à $lg(\omega) = n$.

Donc $lg([1;g]) \leq \frac{n}{2}$ et $lg([1;g]) \leq \frac{n}{2}$

On peut alors décomposer $(1;g_{i-1};g_i)$

en au plus $\frac{n}{2}$ petits lacets

de longueurs $\leq 2\delta + 2$.

On "conjugue" les lacets de façon

à leur donner pour point d'origine 1 .

Après avoir effectué le même procédé

pour tout triangle géodésique $[1;g_{i-1};g_i]$ $i = 2 \dots n$

On obtient une décomposition $\frac{n^2}{2}$ petits lacets de longueur $\leq 2\delta + 2$

Cette décomposition équivaut à une expression :

$$\omega =_F \prod_{i=1}^N u_i r_i u_i^{-1}$$

où $r_i = 1$ dans G et $l(r_i) \leq 2\delta + 2$, $l(p_i) \leq \frac{n}{2}$; et $N \leq \frac{n^2}{2}$

Et aussi tout élément trivial dans G , se décompose de la même façon .

On peut donc prendre tous les r_i ainsi obtenus comme relateurs .

Or δ est fixe ,et donc leur longueur est bornée ,Puisque la famille génératrice est finie les r_i sont en nombre fini . On a donc une présentation finie de G .

De plus on a alors une inégalité isopérimétrique quadratique ,et on peut donc résoudre le problème du mot dans G . ■

IV.3.4 Caractérisation des groupes ayant un algorithme de Dehn ou une inégalité isopérimétrique linéaire .

Définition : Un mot ω est λ -géodésique local ($\lambda \in \mathbb{R}_+$) ,si tout sous-mot de ω de longueur inférieure à λ est une géodésique .

Proposition IV.3.1 : Soit G un groupe δ -hyperbolique sur une présentation $\langle S \mid R \rangle$. Soit w un mot non vide sur cette présentation. Si w est une $(2\delta + 3)$ -géodésique locale, alors $w \neq_g 1$.

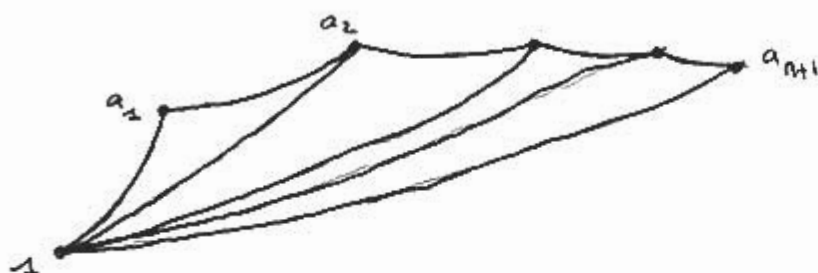
Démonstration : Si $\text{lgr}(w) \leq 2\delta + 3$, alors $w = 1$ ssi $w \equiv 1$. On peut donc supposer $\text{lgr}(w) \geq 2\delta + 3$.

On considère la présentation pour laquelle G est hyperbolique, et $\Gamma_S(G)$ son graphe de Cayley. On considère $\tilde{w}$ un lacet de $\Gamma_S(G)$ ayant pour label w .

Il existe n tel que $w \equiv w_1 \dots w_n w_{n+1}$, et $\text{lgr}(w_i) = 2\delta + 3$ pour tout $i = 1 \dots n$, et $\text{lgr}(w_{n+1}) \leq 2\delta + 3$.

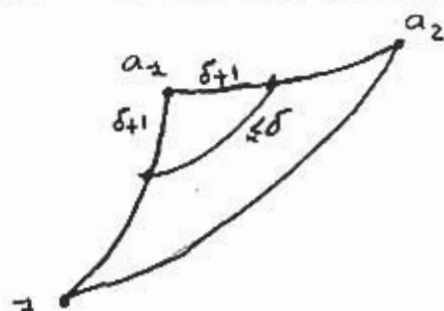
On pose $w_1 = a_1$, et pour $i = 1 \dots n$, $a_i w_{i+1} = a_{i+1}$ dans G .

On considère les triangles géodésiques $(1, a_i, a_{i+1})$ dans le graphe de Cayley. $i = 1 \dots n$.



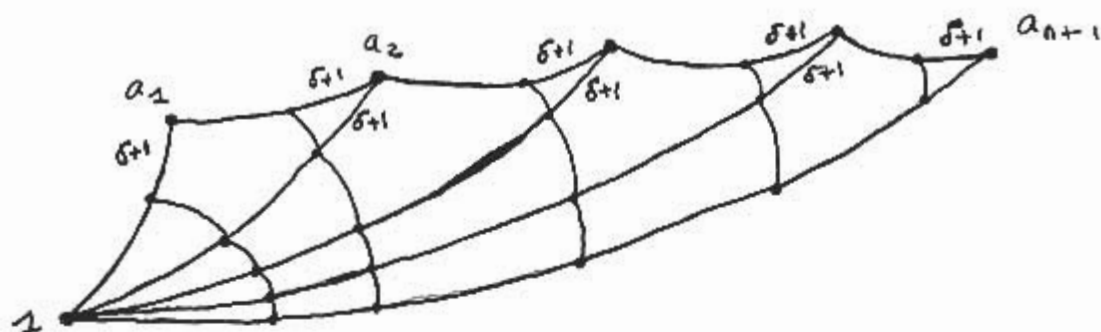
Lemme IV.3.1 : Au plus δ éléments de $[a_i, a_{i+1}]$ et de $[a_{i-1}, a_i]$, sont reliés par des arcs de foliations ($i = 1 \dots n-1$, et $a_0 = s(1)$).

Démonstration : Pour $i = 1$, considérons $(1, a_1, a_2)$ et les éléments de $[1, a_1]$ et $[a_1, a_2]$ à distance $\delta + 1$ de a_1 (on se rappelle que ces segments ont pour longueur $2\delta + 3$). Si ces points étaient reliés par un arc de foliation, alors un sous-mot de w de longueur $2\delta + 2$ n'est pas géodésique (contradiction avec le fait que w soit une $2\delta + 3$ géodésique locale).



Pour $i > 1$. Prenons les éléments de $[a_{i-1}, a_i]$ et $[a_i, a_{i+1}]$ à distance $\delta + 1$ de a_i . S'ils sont reliés par un arc de foliation, alors un sous-mot de w , de longueur $2\delta + 3$ n'est pas géodésique.

Revenons à la démonstration . Avec le lemme IV.3.1 , tout point à distance $\delta + 1$ de a_i ($i = 1 \dots n$) est relié par foliation à un point de $[1, a_{n+1}]$. Et par construction des foliations tous les points ainsi obtenus sur $[1, a_{n+1}]$ sont distincts .



Alors $[1, a_{n+1}]$ n'est pas le chemin nul , et donc ω qui correspond dans le groupe à a_{n+1} , n'est pas nul . ■

Théorème IV.3.2 : Un groupe hyperbolique admet un algorithme de Dehn pour sa présentation qui le rend hyperbolique .

Démonstration : Prenons pour Δ , tous les éléments de N de longueur au plus $4\delta + 5$. (Ils sont en nombre fini)

D'après la proposition IV.3.1 , si $\omega = 1$, alors ω n'est pas une $2\delta + 3$ géodésique locale . Et donc il existe un sous-mot μ de ω de longueur $\leq 2\delta + 3$, et un mot μ' tel que $\text{lgr}(\mu') < \text{lgr}(\mu) \leq 2\delta + 3$, et $\mu = \mu'$. Alors $\mu^{-1}\mu'$ est un élément de Δ . ■

Avec la proposition IV.1.1 , on a le corollaire suivant :

Corollaire IV.3.2.1 : Un groupe hyperbolique vérifie (pour une présentation adéquate) , une inégalité isopérimétrique linéaire .

Le résultat fondamental de ce chapitre est le suivant :

Théorème IV.3.3 : Soit un groupe G f.e. $G = \langle S / R \rangle$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(1) $\Gamma_S(G)$ est hyperbolique

- (2) G a un algorithme de Dehn sur cette présentation
 (3) G satisfait une inégalité isopérimétrique linéaire
 sur cette présentation .

Démonstration : Nous avons déjà démontré $(1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3)$.
 Nous allons démontrer $(3) \Rightarrow (1)$.

Nous effectuons la démonstration par l'absurde . On suppose qu'il n'existe pas une constante δ tel que tout triangle géodésique est δ -mince .

Alors pour tout $r > 0$, il existe un triangle géodésique xyz dans le graphe de Cayley Γ ; et un point $w \in [x;y]$ tel que :

$$\min(d(w;[y;z]);d(w;[x;z])) > 2r .$$

Si xyz est dégénéré , alors il contient un triangle non dégénéré (ou un bigône) , contenant w ; vérifiant la même condition .

Alors sans porte de généralité , on considère que xyz est non dégénéré .

On prend une constante ε tel que $r > 6\varepsilon$.

$[xy]$ a une longueur au moins $24.\varepsilon$.

Tout point de $[x;y]$ à distance au plus 8ε de w ; est à une distance au moins 4ε des points de $[x;z]$ et de $[y;z]$.

Pour tout point $\alpha \in [x;z]$, $\beta \in [y;z]$; tel que $d(\alpha;x) \leq 10\varepsilon$

$$d(\beta;y) \leq 10\varepsilon$$

alors $d(\alpha,\beta) \geq 4\varepsilon$.

Pour r ,suffisamment grand $[x;z]$ et $[y;z]$ sont suffisamment grands .On peut considérer des points $x' \in [x;w] \setminus B(w,r)$; $y' \in [y;w] \setminus B(w,r)$; $x'';z' \in [x;z]$ et $y'';z'' \in [y;z]$ tels que tout point de $[x';y']$ (respectivement $[x'';z']$; $[y'';z'']$) est à une distance au moins 4ε des 2 autres côtés .On coupe alors les "coins" de xyz ; $[x';x'']$; $[y';y'']$; $[z';z'']$.

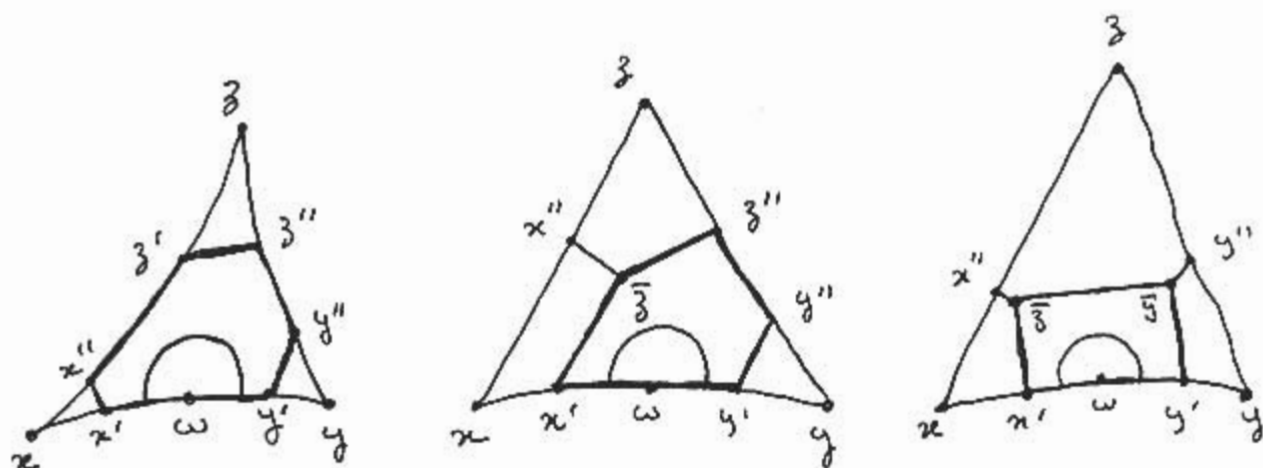
On obtient un des 3 cas suivants (fig 1)

- un hexagone non dégénéré .
- un pentagone non dégénéré .
- un quadrilatère non dégénéré .

-On considère le 1^{er} cas .

Si on appelle w le label de $(x'y'y''z''z'x''x')$, on identifie w ; avec le bord d'un diagramme de Van Kampen D ayant pour label w ; sur la présentation du groupe .

Ce diagramme a pour espace topologique sous-jacent un disque



puisque le lacet de label w est un cercle non singulier dans Γ .
On note α le lacet $[x'y']$; β le lacet $[x''z']$; γ le lacet $[z''y'']$
; θ le lacet (fermée) $(x'y'y''z''z'x'x')$.

On note $N(\alpha) = \text{Star}(\alpha)$ dans D .

On note ρ la longueur maximale des relateurs (on peut supposer $\rho > 1$ sinon G est 0-hyperbole . $N(\alpha)$ contient au moins $\text{lgr}(\alpha)/\rho$ 2-cellules .

On prend $\varepsilon > \rho$.

alors $N(\alpha)$ intersecte $[x';x'']$ et $[y'y'']$ en deux points x_1 et y_1

tels que $d(x';x_1) \leq \frac{\varepsilon}{2}$

$d(y';y_1) \leq \frac{\varepsilon}{2}$

On considère α_1 le lacet (x_1y_1) ne passant pas par ∂D .

On réitère alors cette opération $n = E(\frac{\varepsilon}{\rho})$ fois .

On a alors des points $x_1, \dots, x_n$ sur $[x';x'']$; $y_1, \dots, y_n$ sur $[y';y'']$
tel que $\alpha_1 = [x_1; y_1]$ est de longueur au moins $\text{lgr}(\alpha) - \rho$ et tel que
tout point de $N(\alpha) = N(\alpha_1) \cup \dots \cup N(\alpha_n)$ est à une distance au plus
 ε de α .

N contient alors au moins

$$\frac{\text{l}(\alpha)}{\rho} + \frac{\text{l}(\alpha) - \rho}{\rho} + \dots + \frac{\text{l}(\alpha) - \varepsilon/\rho - 1}{\rho} \quad \text{2-cellules}$$

$$= \frac{\varepsilon}{\rho} \left(\frac{\text{l}(\alpha)}{\rho} \right) - \frac{\varepsilon(\varepsilon-1)}{2\rho} = \frac{\varepsilon}{\rho^2} \cdot \text{l}(\alpha) + K$$

où K est une constante ne dépendant que de ε .

On effectue la même opération sur β et γ .

Alors $N(\alpha) \cap N(\beta) = \emptyset$

$$N(\beta) \cap N(\gamma) = \emptyset$$

$$N(\alpha) \cap N(\gamma) = \emptyset$$

puisque ce sont de ε -Hausdorff voisinages de $\alpha; \beta; \gamma$ qui sont à une distance au moins 4ε l'un de l'autre.

Alors $N(\theta) = N(\alpha) \cup N(\beta) \cup N(\gamma)$ contient au moins

$$\begin{aligned} & \frac{\varepsilon}{\rho^2} \cdot (l(\alpha) + l(\beta) + l(\gamma)) + C \quad \text{2-cellules} . \\ & = \frac{\varepsilon}{\rho^2} l(\theta) + Q . \end{aligned}$$

Considérons $B(\omega; r)$. Elle n'intersecte pas $N(\beta)$ et $N(\gamma)$. Elle intersecte $N(\alpha)$ en des points à distance au plus ε de α . Et donc

$$B(\omega; r) \setminus N(\alpha) \text{ contient au moins } \frac{r-2\varepsilon}{\rho} \quad \text{2-cellules} .$$

Ainsi on peut remplir D par au moins

$$\frac{\varepsilon}{\rho^2} l(\theta) + \frac{r-2\varepsilon}{\rho} + K \quad \text{2-cellules} .$$

Puisque G satisfait une inégalité isopérimétrique linéaire ; on a

$$\frac{\varepsilon}{\rho^2} l(\theta) + \frac{r-2\varepsilon}{\rho} + K \leq N \cdot l(\theta) \quad \text{où } K \text{ et } N \text{ sont des constantes} .$$

en prenant $\varepsilon = N\rho^2$

$\frac{r-2\varepsilon}{\rho} + K \leq 0$ et alors r est borné ce qui est contradictoire. Le même argument s'applique aux deux autres cas. ■

IV.4 Quasi-isométries

Définition Deux espaces métriques (X, d_X) et (Y, d_Y) sont dits **quasi-isométriques**, si il existe des applications $f : X \rightarrow Y$, $g : Y \rightarrow X$, et des constantes $\lambda > 0$, et $\varepsilon \geq 0$, tel que :

$$d_Y(f(x), f(x')) \leq \lambda d_X(x, x') + \varepsilon \quad \forall x, x' \in X$$

$$d_X(g(y), g(y')) \leq \lambda d_Y(y, y') + \varepsilon \quad \forall y, y' \in Y$$

$$d_X(g \circ f(x), x) \leq \varepsilon \quad \forall x \in X$$

$$d_Y(f \circ g(y), y) \leq \varepsilon \quad \forall y \in Y$$

Proposition IV.3.1 : Etre quasi-isométrique est une relation d'équivalence sur les espaces métriques.

Démonstration : Il est clair que c'est une relation symétrique. De plus la relation est transitive, il suffit de considérer pour

un espace métrique X , $f = g = \text{Id}_X$, $\lambda = 1$, et $\varepsilon = 0$. Il nous reste à démontrer la transitivité.

Considérons trois espaces métriques (X, d_X) , (Y, d_Y) , (Z, d_Z) , où X et Y sont quasi-isométriques, avec $f : X \rightarrow Y$, $g : Y \rightarrow X$, et les constantes λ_1 et ε_1 ; et Y et Z sont quasi-isométriques, avec $h : Y \rightarrow Z$, $j : Z \rightarrow Y$, et les constantes λ_2 et ε_2 . Considérons alors $h \circ f : X \rightarrow Z$, et $g \circ j : Z \rightarrow X$. On a :

$$\begin{aligned} d_Z(h \circ f(x), h \circ f(x')) &\leq \lambda_2 d_Y(f(x), f(x')) + \varepsilon_2 \\ &\leq \lambda_2 \lambda_1 d_X(x, x') + \lambda_2 \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \quad \forall x, x' \in X \end{aligned}$$

Ainsi que :

$$d_X(g \circ j(z), g \circ j(z')) \leq \lambda_1 \lambda_2 d_Z(z, z') + \lambda_1 \varepsilon_2 + \varepsilon_1 \quad \forall z, z' \in Z$$

Remarquons que :

$$d_Y(j \circ h \circ f(x), f(x)) \leq \varepsilon_2$$

Et donc :

$$\begin{aligned} d_X((g \circ j) \circ (h \circ f))(x), x) &\leq d_X(g \circ j \circ h \circ f(x), g \circ f(x)) + d_X(g \circ f(x), x) \\ &\leq \lambda_1 d_Y(j \circ h \circ f(x), f(x)) + \varepsilon_1 + \varepsilon_1 \\ &\leq \lambda_1 \varepsilon_2 + 2 \varepsilon_1 \end{aligned}$$

et de même :

$$d_Z((h \circ f) \circ (g \circ j))(x), x) \leq \lambda_2 \varepsilon_1 + 2 \varepsilon_2$$

Il suffit donc de prendre $\varepsilon = \max \{ \lambda_1 \varepsilon_2 + 2 \varepsilon_1, \lambda_2 \varepsilon_1 + 2 \varepsilon_2 \}$, et $\lambda = \lambda_1 \lambda_2$. ■

Proposition IV.3.2 : Si S et S' sont deux systèmes finis de générateurs d'un groupe G , alors (G, S) et (G, S') sont quasi-isométriques.

Remarque Il en est donc de même de leur graphe de Cayley.

Démonstration : Considérons $S = \langle u_i, i \in I \rangle$ et $S' = \langle v_j, j \in J \rangle$. Pour chaque élément u_k , on note $u_k(v)$ une écriture de $\bar{u}_k$ sur S' . $\langle u_i(v), i \in I \rangle$ est un ensemble fini, on note $\lambda_1 = \max \text{lgr}_{S'}(u_i(v))$. Considérons un mot ω sur S_1 , et le mot ω' de S_2 obtenu en remplaçant dans ω les lettres u_i , par les mots $u_i(v)$. Il est clair que $\bar{\omega} = \bar{\omega}'$, et que $\text{lgr}_{S'}(\omega') \leq \lambda_1 \text{lgr}_S(\omega)$, et donc pour des éléments $g_1, g_2 \in G$, $d_{S'}(g_1, g_2) \leq \lambda_1 d_S(g_1, g_2)$. De la même façon

on peut trouver une constante λ_2 tel que $d_S(g_1, g_2) \leq \lambda_2 d_{S'}(g_1, g_2)$, et alors en prenant $f = g = \text{Id}_G$, $\lambda = \max(\lambda_1, \lambda_2)$, et $\varepsilon = 0$, on a vérifié les relations voulues. ■

Lemme IV.3.1 : Si Γ_X et Γ_Y sont quasi-isométriques, avec $(f, g, \lambda, \varepsilon)$ et Y est fini, alors

(i) L'image d'un lacet ω de longueur n est un lacet $f(\omega)$ de longueur au plus $(\lambda + \varepsilon)n$.

(ii) Il existe une fonction $A : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, tel que Si ω se décompose en N petits lacets de longueur au plus L , $f(\omega)$ a une décomposition en moins de $N A(L)$ petits lacets.

Démonstration : Si $\omega = (g_0, \dots, g_n)$ est un lacet de Γ_X (i.e. $g_0 = g_n$), alors $f(\omega) = (f(g_0), \dots, f(g_n))$ est un lacet de Γ_Y et puisque $d(f(g_i), f(g_{i+1})) \leq \lambda \times 1 + \varepsilon$, $f(\omega)$ a une longueur au plus $n(\lambda + \varepsilon)$.

Si ω se décompose en N petits lacets de longueur au plus L , alors l'image de ces lacets par f constitue une décomposition de $f(\omega)$ en au plus N lacets, de longueur au plus $(\lambda + \varepsilon)L$. Or Y est fini, et donc il existe un nombre fini de lacets (à translation près) de longueur au plus $(\lambda + \varepsilon)L$. Chacun des lacets admet une décomposition en petits lacets. Soit $A(L)$, Le nombre maximum de petits lacets nécessaire à la décomposition d'un lacet de longueur au plus $(\lambda + \varepsilon)L$. Alors $f(\omega)$ se décompose en moins de $N A(L)$ petits lacets. ■

Proposition IV.3.3 : Soient $G = \langle X \mid R \rangle$ et $H = \langle Y \mid S \rangle$ des présentations finies de groupe. Si $\Gamma_X(G)$ et $\Gamma_Y(H)$ sont quasi-isométriques, alors si $\mathcal{D}_G$ est une fonction de Dehn pour $\langle X \mid R \rangle$; il existe des constantes A, B , et C tel que $\mathcal{D}_H = A \mathcal{D}_G(B \text{Id}) + C \text{Id}$, est une fonction de Dehn pour $\langle Y \mid S \rangle$.

Démonstration : Puisque G est f.p., remarquons que la longueur des petits lacets de $\Gamma_X(G)$ est bornée.

Soit ω un lacet fermé de $\Gamma_Y(H)$. Alors $f(\omega)$ est un lacet fermé de $\Gamma_X(G)$, de longueur au plus $(\lambda + \varepsilon) \text{lgr}(\omega)$ (lemme IV.3.1) et $f(\omega)$ se décompose en moins de $\mathcal{D}_G(B \text{lgr}(\omega))$ petits lacets étiquetés

dans R ($B = \lambda + \varepsilon$). On considère $g \circ f(\omega)$. c'est un lacet fermé contenu dans un C -voisinage de ω . De plus $g \circ f(\omega)$ se décompose en moins de $A \mathcal{D}_G(B \text{ lgr}(\omega))$ petits lacets. ω et $g \circ f(\omega)$ bordent un anneau. Si $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n)$, on décompose l'anneau par les lacets fermés $(\omega_i, \omega_{i+1}, g \circ f(\omega_{i+1}), g \circ f(\omega_i), \omega_i)$. On a alors au plus $\text{lgr}(\omega)$ lacets de longueur au plus $1 + 3\varepsilon + \lambda(\lambda + \varepsilon)$. Ces lacets étant de longueur borné, il existe C tel que chacun se décompose en moins de C petits lacets. Alors ω se décompose en moins de $A \mathcal{D}_G(B \text{ lgr}(\omega)) + C \text{ lgr}(\omega)$, petits lacets ■

Ainsi avoir une inégalité isopérimétrique linéaire (resp^t quadratique, exponentielle) ne dépend pas de la présentation. Ainsi avec les résultats du paragraphe précédent, avoir un algorithme de Dehn, être hyperbolique, est indépendant de la présentation f.e. choisie.