

CHAPITRE V :

INSOLUBILITE EN TOPOLOGIE

Etant donnée une présentation finie $\Pi = \langle S / R \rangle$, on dispose d'une construction standard pour construire un 2-complexe abstrait ayant pour groupe fondamental $gp(\Pi)$. Ce complexe est constituée d'une 0 cellule, d'une 1 cellule pour chaque générateur et d'un disque pour chaque relateur. On identifie le bord des 1-cellules avec la 0-cellule de façon à former un bouquet. Chaque 1 cellule (orientée) est alors étiquetée par un générateur. Etant donné un relateur R on identifie un lacet fermé ayant pour label sur son bord R ; avec le bord d'un disque. D'après le théorème de Seifert Van-Kampen le 2 complexe ainsi construit a pour groupe fondamental $gp(\Pi)$, on le note $SC(\Pi)$. Il admet une réalisation géométrique dans $\mathbb{R}^5$. On peut alors prendre dans $\mathbb{R}^5$ un ε -voisinage. Pour ε suffisamment petit; on construit ainsi une 5 variété topologique homéomorphe à $SC(\Pi) \times [1;1]$ que l'on note $M_\varepsilon(\Pi)$.

$\pi_1(M_\varepsilon(\Pi)) \cong \pi_1(SC(\Pi)) \times \pi_1([1;1]) \cong \pi_1(SC(\Pi))$. C'est une variété à bord, et l'on peut montrer que son bord est une variété topologique fermée ayant pour groupe fondamental $gp(\Pi)$. Ainsi pour tout problème de décision insoluble dans la classe des groupes f.p., il existe un complexe simplicial fini de dimension 2; une 4-variété; et une 5-variété; ayant un groupe fondamental pour lequel le problème est insoluble.

Nous allons utiliser l'insolubilité du problème de l'isomorphisme pour établir une classe de variétés de dimension 5 et une classe de variétés fermées de dimension 4 ayant un problème de l'homéomorphisme insoluble. Nous considérons la classe des groupes finiment présentés, et construisons comme indiqué précédemment une classe de 5 variété, ou pour tout élément on a: $\pi_1(M_\varepsilon(\Pi)) \cong gp(\Pi)$, et de même la classe de variété fermé de dimension 4, qui sont les bords des $M_\varepsilon(\Pi)$. Une variété d'une telle classe, peut alors se donner explicitement par Π . Pour obtenir le résultat escompté il suffirait d'avoir:

$M_{\mathcal{E}}(\Pi)$ est homéomorphe à $M_{\mathcal{E}}(\Pi')$ ssi $gp(\Pi) \cong gp(\Pi')$.

Malheureusement deux variétés peuvent avoir même groupe fondamental sans être isomorphes. Ainsi, si l'on considère $S(\Pi)$ et Π' une autre présentation de Π obtenu en ajoutant à la présentation de Π , le relateur trivial (le mot vide), $\Pi' \cong \Pi$, mais $S(\Pi)$ et $S(\Pi')$ ne sont pas homéomorphes ; En effet nous avons incrémenté le 3ème nombre de Betti de 1. Markov contourne ce problème en remarquant, que dans les changements de Tietze seul l'adjonction de relateurs triviaux (T_1) change la classe d'homéomorphisme de $M_{\mathcal{E}}(\Pi)$.

Dans la suite nous noterons $\Pi * n$, la présentation obtenue à partir de celle de Π , en ajoutant n relateurs triviaux.

Définition : On considère une présentation $\langle a_1, \dots, a_m / r_1, \dots, r_n \rangle$. On appelle transformations spéciales de Tietze, les opérations suivantes :

T_2 : ajouter à la présentation le générateur a_{m+1} et le relateur

$$a_{m+1} = w(a_1, \dots, a_m)$$

T_{11} : remplacer r_i par $a_j a_j^{-1} r_i$ ou $a_j^{-1} a_j r_i$.

T_{12} : remplacer $r_i = uvw$ par vwu (conjugaison cyclique).

T_{13} : Remplacer r_i par r_i^{-1} .

T_{14} : remplacer r_i par $r_i r_j$ où $j \neq i$.

Ainsi que toutes les transformations inverses.

Il est clair que si une présentation Π' est obtenue à partir d'une présentation Π par une suite de transformations spéciales de Tietze ; alors $gp(\Pi) \cong gp(\Pi')$.

Lemme V.1 : Si $\Pi = \langle a_1, \dots, a_m / r_1, \dots, r_n \rangle$ et $\Pi' = \langle a_1, \dots, a_m / r_1, \dots, r_n ; s \rangle$ ou s est une conséquence de $r_1, \dots, r_n$, alors $\Pi * 2$ peut être transformé en $\Pi' * 1$ par une suite finie de transformations spéciales de Tietze.

Démonstration : Prenons $s = p_1 r_{j_1}^{\varepsilon_1} p_1^{-1} \dots p_k r_{j_k}^{\varepsilon_k} p_k^{-1}$.

On applique à Π une suite de transformations spéciales de Tietze :

$$\begin{array}{ll}
r_1, \dots, r_n, 1, 1 & \\
\dots, 1, r_{j_1} & (T_{14}) \\
\dots, 1, r_{j_1}^{\varepsilon_1} & (\text{éventuellement}) (T_{13}) \\
\dots, 1, a_1^{-1} a_1 r_{j_1}^{\varepsilon_1} & (T_{11}) \\
\dots, 1, a_1 r_{j_1}^{\varepsilon_1} a_1^{-1} & (T_{12}) \\
\vdots & \\
\vdots & \text{puis successivement .} \\
\vdots & \\
\dots, 1, p_1 r_1^{\varepsilon_1} p_1^{-1} & \\
\dots, p_1 r_{j_1}^{\varepsilon_1} p_1^{-1} ; p_1 r_{j_1}^{\varepsilon_1} p_1^{-1} & (T_{14}) \\
\dots, p_1 r_{j_1}^{\varepsilon_1} p_1^{-1} ; 1 & (T_{13}) \text{ et } (T_{14}) \text{ et } (T_{11}) \text{ plusieurs fois}
\end{array}$$

On effectue alors le même procédé

$$\begin{array}{ll}
\dots, p_1 r_{j_1}^{\varepsilon_1} p_1^{-1} ; p_2 r_{j_2}^{\varepsilon_2} p_2^{-1} & \\
\dots, p_1 r_{j_1}^{\varepsilon_1} p_1^{-1} ; p_2 r_{j_2}^{\varepsilon_2} p_2^{-1} ; p_2 r_{j_2}^{\varepsilon_2} p_2^{-1} & (T_{14}) \\
\dots, p_1 r_{j_1}^{\varepsilon_1} p_1^{-1} ; p_2 r_{j_2}^{\varepsilon_2} p_2^{-1} ; 1 & (T_{13}) (T_{14}) \text{ et } (T_{11}) \text{ plusieurs fois} \\
\vdots & \\
\vdots & \\
\vdots & \\
\dots, s ; 1 & \blacksquare
\end{array}$$

Lemme V.2 : si $\Pi = \langle a_1 \dots a_m ; r_1 \dots r_n \rangle$ et $\Pi' = \langle a'_1 \dots a'_m ; r'_1 \dots r'_n \rangle$
sont tels que $\text{gp}(\Pi) \cong \text{gp}(\Pi')$
alors $\Pi * (n + n' + 1)$ se transforme en $\Pi' * (n + n' + 1)$
par une suite finie de transformations spéciales de Tietze

Démonstration : On note α_i l'écriture de a_i sur les générateurs $a'_1 \dots a'_m$. On note α'_i l'écriture de a'_i sur les générateurs $a_1 \dots a_m$. On note $r_j(\alpha_i)$ le mot obtenu à partir de r_j en remplaçant les occurrences de a_i par α_i . (et de même on note $r'_j(\alpha'_i)$).

$$a_i / r_j(\alpha_i) * (n + n' + 1)$$

$$a_i / r_j(\alpha_i) ; r'_j(\alpha'_i) * (n + 1) \quad (\text{lemme V.1 appliqué } n' \text{ fois})$$

$a_i, a'_i / r_j(a_i) ; r'_j(a'_i) ; a'_i = \alpha'_i * (n+1) \quad (T_2) \text{ n' fois}$

$a_i, a'_i / r_j(a_i) ; r'_j(a'_i) ; a'_i = \alpha'_i * (n+1) \text{ (lemme V.1 n' fois)}$

$a_i, a'_i / r_j(a_i) ; r'_j(a'_i) ; a'_i = \alpha'_i ; a_i = \alpha_i * 1 \text{ (V.1 n fois)}$

de même on peut changer Π' . En cette même présentation, et donc par symétrie des transformations, $\Pi * (n+n'+1) \longrightarrow \Pi' * (n+n'+1)$

Proposition V.1 : Si Π' est obtenu à partir de Π par une suite de transformations spéciales de Tietze, alors $M_\varepsilon(\Pi')$ est homéomorphe à $M_\varepsilon(\Pi)$.

Démonstration : Les transformations T_{12} (permutation cyclique d'un relateur) et T_{13} (inversion d'un relateur), et leurs inverses ne changent pas $SK(\Pi)$; et donc si Π' est obtenu à partir de Π par une suite de telles transformations ; $M_\varepsilon(\Pi)$ et $M_\varepsilon(\Pi')$ sont homéomorphes. Considérons les transformations T_2 appliquées à Π (ajouter un générateur $a_{m+1} = \omega(a_1; \dots; a_m)$ $SK(\Pi')$ est obtenu en ajoutant à $SK(\Pi)$ un lacet fermé, et un disque dont le bord est identifié avec le lacet. Dans $M_\varepsilon(\Pi')$. Le générateur a_{m+1} ajoute une anse à $M_\varepsilon(\Pi)$. Supposons que le disque rencontre le bord de $M_\varepsilon(\Pi)$ (et alors aussi la anse), en une courbe simple cc' où c est l'intersection du disque avec la anse. Alors $M_\varepsilon(\Pi')$ est formé en attachant un voisinage du disque bordé par cc' . On peut alors contracter ce disque pour écraser la anse sur $M_\varepsilon(\Pi)$ et ainsi $M_\varepsilon(\Pi) \cong M_\varepsilon(\Pi')$.

Considérons la transformation T_{11} (remplacer r_i avec $a_j a_i^{-1} r_i$).

On considère la présentation Π^- qui est la relation Π dans laquelle on a retiré le relateur r_i .

Alors $SK(\Pi)$ est obtenu à partir de $SK(\Pi^-)$ en identifiant le bord d'un disque avec le lacet de label r_i ; alors que $SK(\Pi')$ est obtenu en identifiant sur le bord d'un disque sur le lacet de label $a_j a_i^{-1} r_i$. Ces disques coupent la bord de $M_\varepsilon(\Pi^-)$ en une courbe simple (car les disques sont identiques uniquement sur leur bords) ; respectivement d et d' . Ils sont très proches sauf en $a_j a_i^{-1}$ qui est une courbe simple. Mais si l'on considère un voisinage de ces disques, on peut alors glisser d' ; dans ce voisinage, pour arriver à d et donc $M_\varepsilon(\Pi)$ et $M_\varepsilon(\Pi')$ sont homéomorphes.

Considérons la transformation T_{14} (remplacer r_i par $r_i r_j$). $M_\varepsilon(\Pi')$ est obtenu à partir de $M_\varepsilon(\Pi)$ en prenant un voisinage d'un disque ayant pour bord d' de label $r_i r_j$ et $M_\varepsilon(\Pi)$ est obtenu en prenant le voisinage d'un disque ayant pour bord d . Mais puisque r_j est le label du bord d'un disque ; on peut glisser d' sur ce disque pour obtenir d . ■

Le résultat est alors immédiat .

Théorème V.1 : Le problème de l'homéomorphisme est insoluble pour les variétés de dimension 4 et 5 . Il existe une classe de variétés fermées de dimension 4 , ainsi qu'une classe de variétés de dimension 5 , données de façon explicites pour lesquelles , on ne peut décider si deux variétés données sont homéomorphes .

Dans [18] , Haken , Boone et Poénaru , utilisent une construction améliorée , pour démontrer que pour tout degré D , et pour tout $n \geq 4$, il existe une classe récursive de présentations de variétés de dimension n , pour laquelle le problème de l'homéomorphisme de l'équivalence combinatoire , du difféomorphisme sont de degré D . La difficulté provient essentiellement de l'établissement de présentation de variétés , c'est à dire d'une suite de symboles , établissant les structures combinatoires topologiques et différentielles d'une variété .